08

अवकलज के अनुप्रयोग
(Application of Derivativs)

8.01 प्रस्तावना (Introduction)

हमने पूर्व अध्याय में संयुक्त फलनों, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों, अस्पष्ट फलनों, चर घातांकीय तथा लघुणगकीय फलनों का अवकलन किया है। इस अध्याय में हम विज्ञान एवम् अभियांत्रिकी के साथ-साथ सामाजिक विज्ञान के क्षेत्र में अवकलज के अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे। उदाहरण के लिए, किस प्रकार अवकलज का प्रयोग, राशियों के परिवर्तन की दर ज्ञात करने में या वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब की समीकरण ज्ञात करने में किया जा सकता है, का अध्ययन करेंगे।

8.02 राशियों के परिवर्तन की दर (Rate of change of quantities)

माना P एक राशि है जो कि समय के साथ परिवर्तित होती है। माना समय t में लघु परिवर्तन δt के संगत P में परिवर्तन δP है। तब $\frac{\delta P}{\delta t}$, राशि P में प्रति इकाई समय औसत परिवर्तन की दर है तथा t के सापेक्ष P में क्षणिक परिवर्तन की दर $\frac{dP}{dt}$ है, जहाँ $\frac{dP}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta P}{\delta t}$.

यहाँ $\frac{dP}{dt}$, समय t के सापेक्ष P में परिवर्तन की दर है।

यदि v तथा r दोनों प्राचल t के फलन है, तब

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

स्पष्ट है v तथा r में से किसी एक की समय t के सापेक्ष परिवर्तन की दर ज्ञात हो, तो दूसरी राशि में परिवर्तन की दर ज्ञात की जा सकती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक गोले के आयतन में परिवर्तन की दर, इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के सापेक्ष ज्ञात कीजिए, जबकि गोले की त्रिज्या 2 सेमी है।

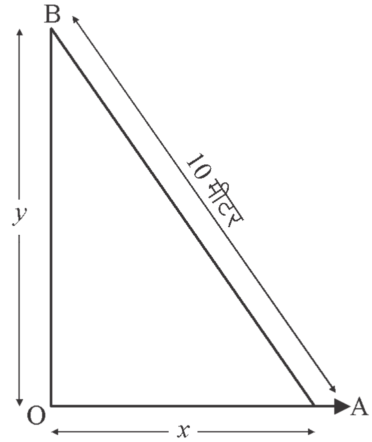
हलः $\because$ गोले का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

तथा गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $s = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{ds}{dr} = 8\pi r$

अतः
$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV/dr}{ds/dr} = \frac{4\pi r^2}{8\pi r} = \frac{r}{2}$$

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{r=2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ सेमी।}$$

उदाहरण-2. एक 10 मीटर लम्बी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी हुई है। यदि सीढ़ी के पाद को 1.2 मीटर/सैकण्ड की दर से जमीन के सहारे दीवार से दूर खींचा जाता है तब ज्ञात कीजिए कि सीढ़ी का ऊपरी सिरा किस दर से दीवार पर नीचे की ओर फिसल रहा है, जबकि सीढ़ी का पाद दीवार से 6 मीटर दूर है?



आकृति 8.01

हल: माना किसी समय t पर सीढ़ी की स्थित AB है।

माना $OA = x,\ OB = y$ तब $x^2 + y^2 = 10^2$ (1)

दिया है कि $\dfrac{dx}{dt} = 1.2$ मीटर/सैकण्ड

समीकरण (1) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (2)$$

$x = 6$ के लिए, समीकरण (1) से $6^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y = 8$ मीटर

समीकरण (2) से, $2\times 6\times 1.2 + 2\times 8\dfrac{dy}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{14.4}{16} = -0.9 \text{ मी./सै. (जमीन की तरफ)}$$

उदाहरण-3. एक घन का आयतन 9 सेमी^{3}/सै. की दर से बढ़ रहा है। यदि इसकी कोर की लम्बाई 10 सेमी. है तब ज्ञात कीजिए कि इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

हल: माना कि घन की कोर की लम्बाई x सेमी है। माना घन का आयतन V तथा घन के पृष्ठ का क्षेत्रफल S है तब $V = x^3,\ S = 6x^2$, जहाँ x, समय t का फलन है।

अतः दिया है कि $\dfrac{dV}{dt} = 9$ सेमी^{3}/सै.

$$\Rightarrow \quad 9 = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3)\frac{dx}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \qquad (1)$$

तथा $$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2)\frac{dx}{dt} = 12x\left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x}$$ [समीकरण (1) से]

$\because$ $x = 10$ सेमी.

$$\Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = \frac{36}{10} = 3.6 \text{ सेमी}^2/\text{सै.}$$

उदाहरण-4. एक गोल बुलबुले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 2 सेमी^{2}/सै. की दर से बढ़ रहा है। यदि बुलबुले की त्रिज्या 6 सेमी. है तब ज्ञात कीजिए कि बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है?

हल: माना कि r त्रिज्या वाले गोल बुलबुले का आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल क्रमशः V तथा S हैं।

तब $$S = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 8\pi r$$

तथा $$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

दिया है कि $\dfrac{dS}{dt} = 2$ सेमी^{2}/सै.

$\because$ $$\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dr}.\frac{dr}{dt}\Rightarrow 2=8\pi r\frac{dr}{dt}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi r}$$

$\because$ $$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}.\frac{dr}{dt}=4\pi r^2.\frac{1}{4\pi r}=r$$

अतः $$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{r=6}=6 \text{ सेमी}^3/\text{सै.}$$

उदाहरण-5. यदि किसी आयत की लम्बाई x सेमी./मि. की दर से घट रही है तथा इसकी चौडाई y, 2 सेमी./मि. की दर से बढ़ रही है। जब $x=12$ सेमी. तथा $y=6$ सेमी. है तब आयत के परिमाप तथा क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है कि समय t के सापेक्ष लम्बाई x घट रही है जबकि चौड़ाई y बढ़ रही है अतः प्रश्नानुसार,

$$\frac{dx}{dt}=-3 \text{ सेमी/मि.},\quad \frac{dy}{dt}=2 \text{ सेमी/मि.}$$

$\because$ आयत का परिमाप $$p=2(x+y)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dp}{dt}=2\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)=2(-3+2)=-2 \text{ सेमी/मि.}$$

तथा आयत का क्षेत्रफल $$A=x.y$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dA}{dt}=x\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dt}.y$$

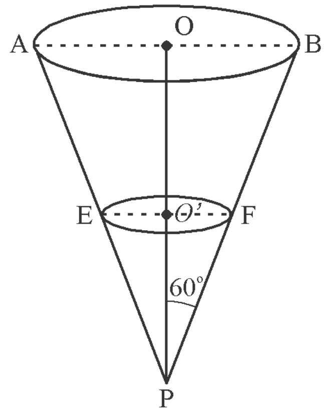
$$=(12)(2)+(-3).6$$

$$=24-18$$

$$=6 \text{ सेमी}^2/\text{मि.}$$

उदाहरण-6. एक शंक्वाकार आकृति के कीप के आधार में शीर्ष पर सूक्ष्म छेद से 4 सेमी.^{3}/सै. की एक समान दर से पानी बूँद-बूँद टपक रहा है। पानी के शंकु की तिर्यक ऊँचाई घटने की दर ज्ञात कीजिए, जबकि पानी की तिर्यक ऊचाँई 4 सेमी है तथा कीप का ऊर्ध्वाधर अर्द्ध शीर्ष कोण 60° है।

हल: माना कि t समय पर शकुं में पानी का आयतन V है अर्थात् पानी के शंकु PEF का आयतन V तथा तिर्यक ऊचाँई $PE=\ell$ है।



आकृति 8.02

$\therefore$ $$O'E=\ell\sin 60^\circ=\ell.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

तथा $$O'P=\ell\cos 60^\circ=\ell.\frac{1}{2}$$

$\because$ $$V=\frac{1}{3}\pi(O'E)^2.O'P$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2.\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ $$V=\frac{\pi\ell^3}{8}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dV}{dt}=\frac{3\pi\ell^2}{8}\frac{d\ell}{dt}$$

दिया है कि $\frac{dV}{dt} = -4$

अतः $-4 = \frac{3\pi\ell^2}{8}\frac{d\ell}{dt}$

$\Rightarrow$ $\frac{d\ell}{dt} = -\frac{32}{3\pi\ell^2}$

अतः $\ell = 4$ पर $\frac{d\ell}{dt} = \frac{-32}{3\pi(4)^2} = -\frac{2}{3\pi}$ सेमी./सै.

प्रश्नमाला 8.1

1. वृत्त के क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि $r = 3$ सेमी. तथा $r = 4$ सेमी. है।
2. एक कण वक्र $y = \frac{2}{3}x^3 + 1$ पर चलता है। वक्र पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ y-निर्देशांक में परिवर्तन की दर, x-निर्देशांक में परिवर्तन की दर की दुगुनी है।
3. एक 13 मीटर लम्बी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी हुई है। सीढ़ी के पाद को 1.5 मी./सै. की दर से जमीन के सहारे दीवार से दूर खींचा जाता है। सीढ़ी तथा जमीन के मध्य का कोण किस दर से परिवर्तित हो रहा है जबकि सीढ़ी का पाद दीवार से 12 मीटर दूर हो।
4. एक परिवर्तन शील घन का किनारा 3 सेमी./सै. की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 सेमी. लम्बा है।
5. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पम्प द्वारा 900 सेमी^{3} गैस प्रति सैकण्ड भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारे कि त्रिज्या के पतिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या 15 सेमी. है।
6. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का व्यास $\frac{3}{2}(2x+1)$ है। इसके आयतन के परिवर्तन की दर, x के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।
7. किसी वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में कुल लागत $c(x)$ रुपये में निम्न समीकरण द्वारा ड़ी गई है-
$$c(x) = 0.005\,x^3 - 0.02\,x^2 + 30\,x + 5000$$
सीमान्त लागत (Marginal cost) ज्ञात कीजिए जब वस्तु की 3 इकाई उत्पादित की जाती है। जहाँ सीमान्त लागत का अर्थ किसी स्तर पर उत्पादन के सम्पूर्ण लागत में तात्कालिक परिवर्तन की दर है।
8. एक साबुन के गोलीय बुलबुले की त्रिज्या में 0.2 सेमी/सै. की दर से वृद्धि हो रही है। इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए जबकि बुलबुले की त्रिज्या 7 सेमी हो तथा इसके आयतन में वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए जबकि बुलबुले की त्रिज्या 5 सेमी हो।
9. एक नली से 12 सेमी.^{3} /सै. की दर से बालू उंडेली जा रही है। उंडेली गई बालू से एक शंकु का निर्माण इस प्रकार होता है कि शंकु की ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का $1/6$ वाँ भाग होती है। बालू के शंकु की ऊँचाई में किस गति से वृद्धि हो रही है जबकि ऊँचाई में किस गति से वृद्धि हो रही है जबकि ऊँचाई 4 सेमी है।
10. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में निम्न समीकरण द्वारा दी गई है-
$$R(x) = 13x^2 + 26\,x + 15$$
सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 15$ है।

8.03 वर्धमान या ह्रासमान फलन (Increasing and decreasing functions)

यहाँ हम अवकलन का अनुप्रयोग करके यह ज्ञात करेंगे कि दिया गया फलन वर्धमान है या ह्रासमान या इनमें से कोई नहीं है।

वर्धमान फलनः कोई फलन $f(x)$ विवृत अन्तराल (a, b) में वर्धमान फलन कहलाता है यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2), \quad \forall \; x_1, x_2 \in (a, b)$$

निरन्तर वर्धमान फलनः फलन $f(x)$ विवृत अन्तराल (a, b) में निरन्तर वर्धमान फलन कहलाता है, यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \forall \quad x_1, x_2 \in (a,b)$$

अर्थात् विवृत अन्तराल (a, b) में x के बढ़ने के साथ-साथ $f(x)$ भी बढ़ता है।

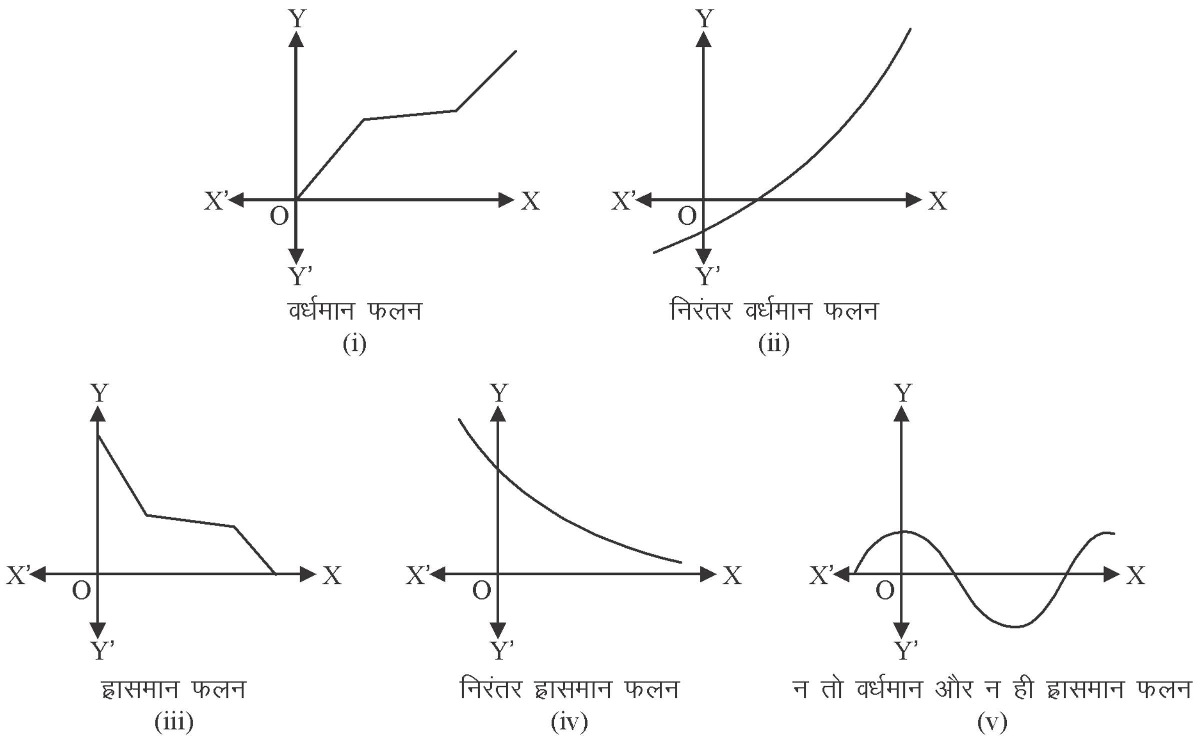
ह्रासमान फलनः फलन $f(x)$ विवृत अन्तराल (a, b) में ह्रासमान फलन कहलाता है, यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall \quad x_1, x_2 \in (a,b)$$

निरन्तर ह्रासमान फलनः फलन $f(x)$, विस्तृन्त अन्तराल (a, b) में निरन्तर ह्रासमान फलन कहलाता है यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall \quad x_1, x_2 \in (a,b)$$

अर्थात् विवृत अन्तराल (a, b) में x के बढ़ने के साथ-साथ $f(x)$ घटता है।



आकृति 8.03

8.04 प्रमेय

यदि फलन f, अन्तराल $[a, b]$ में संतत तथा विवृत अन्तराल (a, b) में अवकलनीय है, तब

(i) $f'(x) > 0, \quad \forall \quad x \in [a,b] \Rightarrow f(x), \; [a,b]$ में वर्धमान फलन है।

(ii) $f'(x) < 0, \quad \forall \quad x \in [a,b] \Rightarrow f(x), \; [a,b]$ में ह्रासमान फलन है।

(iii) $f'(x) = 0, \quad \forall \quad x \in [a,b] \Rightarrow f(x), \; [a,b]$ में अचर फलन है।

प्रमाणः (i) माना $x_1, x_2 \in [a,b]$ इस प्रकार है कि $x_1 < x_2$ तब लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय से $c \in (a,b)$ इस प्रकार है कि

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad (\because f'(c) > 0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

अतः $\quad \forall \quad x_1, x_2 \in [a,b]$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

अतः $f(x), \; [a,b]$ में एक दिष्ट वर्धमान फलन है।

भाग (ii) व (iii) का प्रमाण भी इसी प्रकार हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=2x^3-9x^2+12x+3$,

(a) वर्धमान है। (b) ह्रासमान है।

हल: $$f(x)=2x^3-9x^2+12x+3$$

$\Rightarrow$ $$f'(x)=6x^2-18x+12$$

$$=6(x^2-3x+2)$$

अब $$f'(x)=0 \Rightarrow 6(x^2-3x+2)=0$$

$\Rightarrow$ $(x-2)(x-1)=0$

$\Rightarrow$ $x=1, 2$ क्रांतिक बिन्दु हैं।

आकृति 8.04

(a) $f(x)$ वर्धमान है तथा $f'(x)>0$

$\Rightarrow$ $6(x^2-3x+2)>0$

$\Rightarrow$ $(x-1)(x-2)>0$

$\Rightarrow$ $x<1$ या $x>2$

$\Rightarrow$ $x\in(-\infty, 1)\cup(2, \infty)$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(-\infty, 1)\cup(2, \infty)$ में वर्धमान है।

(b) $f(x)$ ह्रासमान है तब $f'(x)<0$

$\Rightarrow$ $6(x^2-3x+2)<0$

$\Rightarrow$ $(x-1)(x-2)<0$

$\Rightarrow$ $x>1$ या $x<2$

$\Rightarrow$ $x\in(1, 2)$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(1, 2)$ में ह्रासमान है।

उदाहरण-8. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=x^3-3x^2+4x$, समस्त वास्तविक संख्याओं के लिए निरंतर वर्धमान फलन है।

हल: $\because$ $$f(x)=3x^3-3x^2+4x$$

$\Rightarrow$ $$f'(x)=3x^2-6x-4$$

$$=3(x^2-2x+1)+1$$

$$=3(x-1)^2+1>0, \quad \forall \quad x\in R$$

अतः दिया गया फलन $f(x)$, R पर निरंतर वर्धमान फलन है।

उदाहरण-9. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+25$

(a) वर्धमान तथा (b) ह्रासमान है।

हल: $\because$ $$f(x)=-2x^3+3x^2+12x+25$$

$\Rightarrow$ $$f'(x)=-6x^2+6x+12$$

$$=-6(x^2-x-2)$$

अतः $$f'(x)=0 \Rightarrow -6(x^2-x-2)=0$$

$\Rightarrow$ $x^2-x-2=0$

$\Rightarrow$ $(x+1)(x-2)=0$

आकृति 8.05

$\Rightarrow$ $x=-1, 2$ क्रान्तिक बिन्दु है।

(a) $f(x)$ वर्धमान हो तब $\quad f'(x) > 0$

$\Rightarrow \quad -6(x^2 - x - 2) > 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - x - 2 < 0$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x-2) < 0$

$\Rightarrow \quad x > -1$ या $x < 2$

$\Rightarrow \quad x \in (-1, 2)$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(-1, 2)$ में वर्धमान है।

(b) $f(x)$ ह्रासमान है तब $\quad f'(x) < 0$

$\Rightarrow \quad -6(x^2 - x - 2) < 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - x - 2 > 0$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x-2) > 0$

$\Rightarrow \quad x < -1$ या $x > 2$

$\Rightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ में ह्रासमान है।

उदाहरण-10. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x) = \sin x - \cos x$ वर्धमान या ह्रासमान हो जबकि $x \in (0, \pi)$

हलः $\because \quad f(x) = \sin x - \cos x$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos x + \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/2 + x) + \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin(\pi/4 + x) \cdot \cos\pi/4 = 0$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/4 + x) = 0 = \sin\pi$

$\Rightarrow \quad \pi/4 + x = \pi$

$\Rightarrow \quad x = 3\pi/4$, जो कि क्रान्तिक बिन्दु है।

$f(x)$ वर्धमान है तब $\quad f'(x) > 0$

$\Rightarrow \quad \cos x + \sin x > 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin(\pi/4 + x)\cos\pi/4 > 0$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/4 + x) > 0$

$\Rightarrow \quad \sin\{\pi - (\pi/4 + x)\} > 0$

$\Rightarrow \quad \sin(3\pi/4 - x) > 0$

$\Rightarrow \quad 3\pi/4 - x > 0$

$\Rightarrow \quad x < 3\pi/4$

$\Rightarrow \quad x \in (0, 3\pi/4)$

अतः $f(x)$ वर्धमान फलन होगा यदि $x \in (0, 3\pi/4)$

$f(x)$ ह्रासमान फलन है तब $\qquad f'(x) < 0$

$\Rightarrow \qquad \cos x + \sin x < 0$

$\Rightarrow \qquad \sin(\pi/2 + x) + \sin x < 0$

$\Rightarrow \qquad 2\sin(\pi/4 + x)\cos\pi/4 < 0$

$\Rightarrow \qquad \sin(\pi/4 + x) < 0$

$\Rightarrow \qquad \sin\{\pi - (\pi/4 + x)\} < 0$

$\Rightarrow \qquad \sin(3\pi/4 - x) < 0$

$\Rightarrow \qquad 3\pi/4 - x < 0$

$\Rightarrow \qquad x > 3\pi/4 \Rightarrow x \in (3\pi/4, \pi)$

अतः $f(x)$ ह्रासमान फलन होगा यदि $x \in (3\pi/4, \pi)$

उदाहरण-11. x के किन मानों के लिए फलन $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ वर्धमान तथा ह्रासमान है?

हलः दिया है $\qquad f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$\therefore \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$

$\Rightarrow \qquad x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow \qquad (x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -1, 1$ जो कि क्रांतिक बिन्दु है।

आकृति 8.06

$f(x)$ वर्धमान फलन है तब $f'(x) > 0$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0$

$\Rightarrow \qquad 1 - x^2 > 0$

$\Rightarrow \qquad -(x^2 - 1) > 0$

$\Rightarrow \qquad x^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow \qquad (x-1)(x+1) < 0$

$\Rightarrow \qquad x \in (-1, 1)$

अतः $x \in (-1, 1)$ के लिए $f(x)$ वर्धमान फलन है।

$f(x)$ ह्रासमान फलन है तब $f'(x) < 0$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0$

$\Rightarrow \qquad 1 - x^2 < 0$

$\Rightarrow \qquad x^2 - 1 > 0$

$\Rightarrow \qquad (x-1)(x+1) > 0$

$\Rightarrow \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

अत : $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ के लिए $f(x)$ ह्रासमान फलन है।

उदाहरण-12. वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन वर्धमान या ह्रासमान है

(a) x^2+2x+5 (b) $10-6x-2x^2$ (c) $(x+1)^3(x-3)^3$

हल: (a) माना कि $f(x)=x^2+2x+5$

$\Rightarrow$ $f'(x)=2x+2=2(x+1)$

$\therefore$ $f'(x)=0 \Rightarrow 2(x+1)=0$

$\Rightarrow$ $x=-1$

स्थिति-I: जब $x<-1$

$\Rightarrow$ $x+1<0$

$\therefore$ $f'(x)=2(-ve)=$ ऋणात्मक <0

अतः $f(x)$ अन्तराल $(-\infty,-1)$ में ह्रासमान है।

स्थिति-II: जब $x>-1$

$\Rightarrow$ $x+1>0$

$\therefore$ $f'(x)=$ धनात्मक >0

अतः $f(x)$ अन्तराल $(-1,\infty)$ में वर्धमान है।

(b) माना कि $f(x)=10-6x-2x^2$

$\Rightarrow$ $f'(x)=-6-4x=-2(3+2x)$

$\therefore$ $f'(x)=0 \Rightarrow -2(3+2x)=0$

$\Rightarrow$ $x=-3/2$

स्थिति-I: जब $x<-3/2$

$\Rightarrow$ $3+2x<0$

$\Rightarrow$ $f'(x)=-2(-ve)=$ धनात्मक >0

अतः $f(x)$ अन्तराल $(-\infty,-3/2)$ में वर्धमान हैं।

स्थिति-II: जब $x>-3/2$

$\Rightarrow$ $3+2x>0$

$\Rightarrow$ $f'(x)=-2(+ve)=$ ऋणात्मक <0

$\Rightarrow$ $f(x)$ अन्तराल $(-3/2,\infty)$ में ह्रासमान है।

(c) माना कि $f(x)=(x+1)^3(x-3)^3$

$\Rightarrow$ $f'(x)=3(x+1)^2(x-3)^3+3(x+1)^3(x-3)^2$

$=3(x+1)^2(x-3)^2\{x-3+x+1\}$

$=6(x+1)^2(x-3)^2(x-1)$

$f(x)$ वर्धमान फलन है तब $f'(x)>0$

$\Rightarrow$ $6(x+1)^2(x-3)^2(x-1)>0$

$\Rightarrow$ $x-1>0$ $[\because 6(x+1)^2(x-3)^2>0]$

$\Rightarrow$ $x>1$

अतः $f(x)$ अन्तराल $(1,\infty)$ में वर्धमान है।

$f(x)$ ह्रासमान फलन है तब $f'(x) < 0$

$\Rightarrow \quad 6(x+1)^2(x-3)^2(x-1) < 0$

$\Rightarrow \quad x-1 < 0$

$\Rightarrow \quad x < 1$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(-\infty, 1)$ में ह्रासमान है।

उदाहरण-13. सिद्ध कीजिए कि अन्तराल $[0, \pi/2]$ में $y = \dfrac{4\sin\theta}{2+\cos\theta} - \theta$ वर्धमान फलन है।

हलः माना कि $\quad f(\theta) = y = \dfrac{4\sin\theta}{2+\cos\theta} - \theta$

$\Rightarrow \quad f'(\theta) = \dfrac{(2+\cos\theta).4\cos\theta - 4\sin\theta(-\sin\theta)}{(2+\cos\theta)^2} - 1$

$$= \frac{4\cos\theta - \cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta(4-\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2}$$

$\therefore \quad f'(\theta) = 0 \Rightarrow \dfrac{\cos\theta(4-\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2} = 0$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \theta = \pi/2$

जब $0 < \theta < \pi/2$ तब $f'(\theta) > 0$

अतः $y = f(\theta)$ अन्तराल $(0, \pi/2)$ में वर्धमान है।

उदाहरण-14. सिद्ध कीजिए कि अन्तराल $(-1, 1)$ में फलन $f(x) = x^2 - x + 1$ न तो वर्धमान है ओर न ही ह्रासमान है।

हलः यहाँ $\quad f(x) = x^2 - x + 1$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 1$

$\therefore \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$

स्थिति-I: जब $-1 < x < 1/2$ तब $f'(x) < 0$

अतः $f(x)$ अन्तराल $(-1, 1/2)$ में ह्रासमान है।

स्थिति-II: जब $1/2 < x < 1$ तब $f'(x) > 0$

अतः $f(x)$ अन्तराल $(1/2, 1)$ में वर्धमान है।

फलतः अन्तराल $(-1, 1)$ में $f(x)$, न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

उदाहरण-15. a के वह मान समूह ज्ञात कीजिए जिसके लिए अन्तराल $[1, 2]$ में $f(x) = x^2 + ax + 1$, वर्धमान है।

हलः दिया है $\quad f(x) = x^2 + ax + 1$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x + a$

$f(x)$ के अन्तराल $[1, 2]$ मे वर्धमान होने के लिए $f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in R$

अब $\quad f'(x) = 2x + a$

$\Rightarrow \quad f''(x) = 2 > 0, \quad \forall\ x \in R$

$\Rightarrow \quad x \in R$ पर $f'(x)$ वर्धमान है।

$\Rightarrow$ $[1, 2]$ पर $f'(x)$ वर्धमान है।

$\Rightarrow$ $[1, 2]$ में $f'(x)$ का निम्नतम मान $f'(1)$ है।

$\therefore$ $f'(x) > 0 \quad \forall \; x \in [1, 2]$

$f'(1) > 0 \Rightarrow 2 + a > 0$

$\Rightarrow$ $a > -2$

$\Rightarrow$ $a \in (-2, \infty)$

प्रश्नमाला 8.2

1. सिद्ध कीजिए $f(x) = x^2$ अन्तराल $(0, \infty)$ में वर्धमान तथा अन्तराल $(-\infty, 0)$ में ह्रासमान है।
2. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = a^x, o < a < 1, R$ में ह्रासमान है।

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन सम्मुख दिए गए अन्तराल में वर्धमान है।

3. $f(x) = \log \sin x, \quad x \in (0, \pi/2)$
4. $f(x) = x^{100} + \sin x + 1, \quad x \in (0, \pi/2)$
5. $f(x) = (x-1)e^x + 1, \quad x > 0$
6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1, \quad x \in R$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन, सम्मुख दिए गए अन्तराल में ह्रासमान है.

7. $f(x) = \tan^{-1} x - x, \quad x \in R$
8. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad x \in (0, \pi/4)$
9. $f(x) = 3/x + 5, \quad x \in R, x \neq 0$
10. $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x < 1$

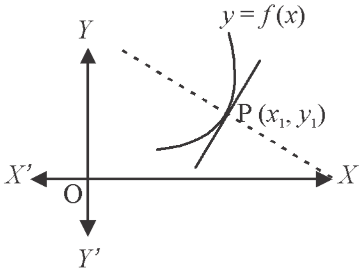
अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें निम्नलिखित फलन वर्धमान या ह्रासमान है।

11. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$
12. $f(x) = x^4 - 2x^2$
13. $f(x) = 9x^3 - 9x^2 + 12x + 5$
14. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 5$
15. *ग* का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जब कि फलन $f(x) = x^3 + 9x + 5$, अन्तराल खाए 2, में वर्धमान है।
16. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, अन्तराल $(0, \pi/4)$ में वर्धमान फलन है।

8.05 8.05 स्पर्श रेखाएँ एवं अभिलम्ब (Tangents and normals)

यहाँ हम अवकलन के प्रयोग से दिए गए वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात करेंगे।

वक्र $y = f(x)$ के किसी बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता या ढाल $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$ होती है। अतः वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण निम्न होगा-



चित्र 8.04

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$$

चूँकि वक्र के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब, उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा के लम्बवत होता है, अतः वक्र के स्पर्श बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब की प्रवणता $-\dfrac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}$ है।

अतः वक्र $y=f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब के समीकरण निम्न है।

$$y-y_1=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow \qquad (y-y_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\, y_1)}+(x-x_1)=0$$

टिप्पणीः यदि वक्र $y=f(x)$ की कोई स्पर्श रेखा x- अक्ष की धन दिशा से ψ कोण बनाए, तब $\frac{dy}{dx}=$ स्पर्श रेखा की प्रवणता $=\tan\psi$

8.06 विशेष स्थितियाँ

(i) यदि $\psi=0$ अर्थात् स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो तब $\frac{dy}{dx}=\tan 0=0$ होगा। इस स्थिति में बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर होती है।

(ii) यदि $\psi=90^\circ$, अर्थात् स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्बवत् हो तब $\frac{dy}{dx}=\tan 90^\circ=\infty$ होगा। इस स्थिति में बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्बवत होती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-16. वक्र $x^{2/3}+y^{2/3}=2$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः $\because$

$$x^{2/3}+y^{2/3}=2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

वक्र के बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\,1)}=-1$ है।

अतः बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण निम्न होगा-

$$y-1=(-1)(x-1)$$

$$\Rightarrow \qquad x+y-2=0 \qquad (1)$$

बिन्दु $(1, 1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण निम्न होगा।

$$y-1=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\,1)}}(x-1)$$

$$=-\frac{1}{(-1)}(x-1)=x-1 \qquad (2)$$

$$y-x=0$$

$\Rightarrow$ (1) व (2) अभीष्ट स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण है।

उदाहरण-17. वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा

(i) x-अक्ष के समान्तर हो।

(ii) x-अक्ष के लम्बवत हो।

(iii) दोनों अक्षों से समान कोण बनाती हो।

हल: वक्र का समीकरण $$x^2+y^2-2x-3=0 \qquad (1)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y}$$

(i) जब स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है तब

$$\psi=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\tan 0=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-x}{y}=0 \Rightarrow 1-x=0$$

$$\Rightarrow \quad x=1$$

$x=1$ समीकरण (1) में रखने पर

$$y^2-4=0 \Rightarrow y=\pm 2$$

अतः अभीष्ट बिन्दु $(1, 2)$ तथा $(1, -2)$ हैं।

(ii) जब स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्बवत है। तब

$$\psi=90^\circ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\tan 90=\infty$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-x}{y}=\infty$$

$$\Rightarrow \quad y=0$$

$y=0$ समीकरण (1) में रखने पर

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=3,-1$$

अतः अभीष्ट बिन्दु $(3, 0)$ तथा $(-1, 0)$ है।

(iii) जब स्पर्श रेखा, दोनों अक्षों के साथ समान कोण बनाती है। तब $\psi=\frac{\pi}{4}$

अतः स्पर्श रेखा की प्रवणता $$\frac{dy}{dx}=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-x}{y}=1 \Rightarrow y=1-x \qquad (2)$$

$y = 1 - x$ समीकरण (1) में रखने पर

$$x^2 + (1-x)^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$$

x का यह मान समीकरण (2) में रखने पर

$$y = \mp\sqrt{2}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु $(1+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ तथा $(1-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ है।

उदाहरण-18. वक्र $y = x^3 - 11x + 5$ पर उस बिन्दु को ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा $y = x - 11$ है।

हलः यहाँ
$$y = x^3 - 11x + 5 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 11 \qquad (2)$$

स्पर्श रेखा $y = x - 11$ की प्रवणता $= 1$

अतः समीकरण (2) से

$$1 = 3x^2 - 11$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2$$

समीकरण (1) में $x = 2$ रखने पर

$$y = 2^3 - 11(2) + 5 = -9$$

तथा समीकरण (1) में $x = -2$ रखने पर

$$y = (-2)^3 - 11(-2) + 5 = 19$$

परन्तु बिन्दु (–2, 19) वक्र (1) पर स्थित नहीं है अतः वक्र के बिन्दु (–2, 9) पर स्पर्श रेखा $y = x - 11$ है।

उदाहरण-19. शून्य प्रवणता वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ को स्पर्श करती है।

हलः यहाँ
$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \qquad (1)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x-2)}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

यहाँ प्रवणता $= 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-(2x-2)}{(x^2 - 2x + 3)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

$x = 1$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = \frac{1}{1^2 - 2(1) + 3} = \frac{1}{2}$$

अतः बिन्दु $(1,\ 1/2)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $=0$ तथा बिन्दु $\left(1,1/2\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण निम्न है-

$y-\dfrac{1}{2}=0\left(x-1\right)\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$, जो कि स्पर्श रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण-20. वक्र $2x^2-y^2=14$ पर सरल रेखा $x+3y=6$ के समान्तर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: माना वक्र $2x^2-y^2=14$ पर बिन्दु $\left(x_1,y_1\right)$ है जहाँ अभिलम्ब, सरल रेखा $x+3y=6$ के समान्तर है।

$$\therefore \qquad 2{x_1}^2-{y_1}^2=14 \qquad (1)$$

$$\because \qquad 2x^2-y^2=14$$

$$\Rightarrow \qquad 4x-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{4x}{2y}=\frac{2x}{y}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=\frac{2x_1}{y_1}$$

$\because$ बिन्दु (x_1,y_1) पर अभिलम्ब, रेखा $x+3y=6$ के समान्तर हैं अतः (x_1,y_1) पर अभिलम्ब की प्रवणता $=$ रेखा $x+3y=6$ की प्रवणता

$$\Rightarrow \qquad -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}}=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y_1}{2x_1}=\frac{1}{3}\Rightarrow y_1=\frac{2}{3}x_1$$

$y_1=\dfrac{2}{3}x_1$, समीकरण (1) मे रखने पर

$$2{x_1}^2-\left(\frac{2}{3}x_1\right)^2=14$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{14}{9}{x_1}^2=14\Rightarrow x_1=\pm 3$$

$$x_1=3 \text{ पर } y_1=\frac{2}{3}\times 3=2$$

तथा

$$x_1=-3 \text{ पर } y_1=\frac{2}{3}\left(-3\right)=-2$$

अतः बिन्दुओं $(3,2)$ तथा $(-3,-2)$ पर अभिलम्ब, रेखा $x+3y=6$ के समान्तर है।

बिन्दु $(3,2)$ पर अभिलम्ब का समीकरण

$$y-2=-1/3(x-3)\Rightarrow x+3y=9$$

बिन्दु $(-3,-2)$ पर अभिलम्ब का समीकरण

$$y+2=-1/3\left(x+3\right)\Rightarrow x+3y+9=0.$$

उदाहरण-21. वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो

(i) रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समान्तर है।

(ii) रेखा $5y - 15x = 13$ के लम्बवत् है।

हल: वक्र का समीकरण $$y = x^2 - 2x + 7 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x - 2 = 2(x-1) \qquad (2)$$

(i) रेखा $2x - y + 9 = 0$ या $y = 2x + 9$ की प्रवणता $= 2$

$\because$ स्पर्श रेखा, इस रेखा के समान्तर है अतः

$$2(x-1) = 2$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

जब $x = 1$ तब (1) से

$$y = 1^2 - 2(1) + 7 = 6$$

अतः बिन्दु (1, 6) पर स्पर्श रेखा का समीकरण जो रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समान्तर है, निम्न होगा

$$y - 6 = 2(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x - y + 4 = 0$$

(ii) रेखा $5y - 15x = 13$ या $5y = 15x + 13$

$\Rightarrow$ $y = 3x + 13/5$ की प्रवणता $= 3$

रेखा $5y - 15x = 13$ के लम्बवत् रेखा की प्रवणता $= -1/3$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 2(x-1) = -1/3$$

$$\Rightarrow \quad 6x - 6 = -1$$

$$\Rightarrow \quad x = 5/6$$

जब $x = 5/6$ तब समीकरण (1) से

$$y = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) + 7 = \frac{217}{36}$$

अतः बिन्दु $\left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण निम्न होगा-

$$y - \frac{217}{36} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{36y - 217}{36} = -\frac{1}{3}\left(\frac{6x-5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 12x + 36y - 227 = 0$$

यही स्पर्श रेखा का समीकरण है।

उदाहरण-22. सिद्ध कीजिए कि x के प्रत्येक मान के लिए सरल रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, वक्र $(x/a)^n+(y/b)^n=1$ को बिन्दु (a,b) पर स्पर्श करती है।

हल: वक्र का समीकरण $(x/a)^n+(y/b)^n=1$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{a^n}nx^{n-1}+\frac{1}{b^n}ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^n x^{n-1}}{a^n y^{n-1}}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}=-\frac{b^n\cdot a^{n-1}}{a^n b^{n-1}}=-\frac{b}{a}$$

अतः वक्र के बिन्दु (a,b) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y-b=-\frac{b}{a}(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad ay-ab=-bx+ab$$

$$\Rightarrow \quad bx+ay=2ab$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$$

प्रश्नमाला 8.3

1. वक्र $y=x^3-x$ बिन्दु $x=2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
2. वक्र $y=\frac{x-1}{x-2}, x\neq 2$ के बिन्दु $x=10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
3. वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ वक्र $y=\sqrt{(4x-3)}-1$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता $2/3$ है।
4. उन सभी रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y+\frac{2}{x-3}=0$ की स्पर्श रेखाएँ हैं तथा जिनकी प्रवणता 2 है।
5. वक्र $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ पर वे बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा

   (i) x-अक्ष के समान्तर (ii) y-अक्ष के समान्तर
6. वक्र $x=a\sin^3 t, y=b\cos^3 t$ की $t=\pi/2$ स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।
7. वक्र $y=\sin^2 x$ के बिन्दु $\left(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\right)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।
8. निम्न वक्रों के लिए उनके सम्मुख अंकित बिन्दु पर स्पर्श रेखा एवम् अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए

   (a) $y=x^2+4x+1, x=3$ पर है। (b) $y^2=4ax, x=a$ पर है।

   (c) $xy=a^2, \left(at,\frac{a}{t}\right)$ पर (d) $y^2=4ax, \left(\frac{a}{m^2},\frac{2a}{m}\right)$ पर

(e) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, (a\sec\theta, b\tan\theta)$ पर

(f) $y=2x^2-3x-1, (1,-2)$ पर

(g) $x=at^2, y=2at, t=1$ पर

(h) $x=\theta+\sin\theta, y=1-\cos\theta, \theta=\pi/2$ पर

8.07 सन्निकटन (Approximation)

यहाँ हम दी गई राशियों के सन्निकटन मान ज्ञात करने के लिए अवकलन का प्रयोग करेंगे।

माना $y=f(x)$ दिए गए वक्र का समीकरण है। इसमें x में होने वाली अल्प वृद्धि को संकेत में Δx से व्यक्त करते हैं जबकि इसके संगत y में होने वाली वृद्धि को Δy से व्यक्त करते हैं, जहाँ $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ है। हम x के अवकलज को dx से व्यक्त करते हैं तथा इसे $dx=\Delta x$ से परिभाषित करते हैं। इसी प्रकार y के अवकलज को dy से व्यक्त करते हैं तथा $dy=f'(x)dx$ या $dy=\frac{dy}{dx}.\Delta x$ से परिभाषित करते हैं।

उपर्युक्त स्थिति में x की तुलना में $dx=\Delta x$ अति सूक्ष्म होता है तथा Δy का एक उपयुक्त सन्निकटन dy होता है तथा इसे हम $dy\approx\Delta y$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-23. अवकलज का प्रयोग करके $\sqrt{26}$ का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि $y=\sqrt{x}$

जहाँ $x=25, \Delta x=1$ तथा $x+\Delta x=26$

$\because$ $y=\sqrt{x}=x^{1/2}$ (1)

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\because$ $\Delta y=\frac{dy}{dx}.\Delta x=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x=\frac{1}{2\times 5}\times 1=\frac{1}{10}=0.1$

समीकरण (1) से $y+\Delta y=(x+\Delta x)^{1/2}$

$\Rightarrow$ $x^{1/2}+\Delta y=(x+\Delta x)^{1/2}$

मान रखने पर $(25)^{1/2}+0.1=(26)^{1/2}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{26}=5+0.1=5.1.$

उदाहरण-24. $(66)^{1/3}$ का सन्निकटन करने के लिए अवकलज का प्रयोग कीजिए।

हलः माना कि $y=x^{1/3}$ (1)

जहाँ $x=64, \Delta x=2$ तथा $x+\Delta x=66$

$\because$ $y=x^{1/3}$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^{2/3}}$

$\because$ $\Delta y=\frac{dy}{dx}.\Delta x=\frac{1}{3x^{2/3}}.\Delta x=\frac{1}{3\times(64)^{2/3}}\times 2$

$=\frac{1}{3\times(4)^2}\times 2=\frac{1}{24}$

अब समीकरण (1) से

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$x^{1/3}+\frac{1}{24}=(66)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$(64)^{1/3}+\frac{1}{24}=(66)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$(4^3)^{1/3}+\frac{1}{24}=(66)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$4+0.041=(66)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$(66)^{1/3}=4.041.$$

उदाहरण-25. अवकलज का प्रयोग करके निम्न का सन्निकटन ज्ञात कीजिए

(i) $\log_{10}(10.2)$ जबकि $\log_{10} e=0.4343$

(ii) $\log_e(4.04)$ जबकि $\log_e 4=1.3863$

(iii) $\cos 61^\circ$ जबकि $1^\circ=0.01745$ रेडियन

हलः (i) माना कि $$y=\log_{10} x \qquad (1)$$

जहाँ $$x=10,\ \Delta x=0.2$$

$\Rightarrow$ $$x+\Delta x=10.2$$

$\because$ $$y=\log_{10} x=\log_{10} e.\log_e x$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx}=\log e_{10}e.\frac{1}{x}=\frac{0.4343}{10}$$

$\because$ $$\Delta y=\frac{dy}{dx}.\Delta x=\frac{0.4343}{10}\times(0.2)=0.008686$$

समीकरण (1) से

$$y+\Delta y=\log_{10}(x+\Delta x)$$

$\Rightarrow$ $$\log_{10} x+\Delta y=\log_{10}(x+\Delta x)$$

$\Rightarrow$ $$\log_{10} 10+0.008686=\log_{10}(10.2)$$

$\Rightarrow$ $$1+0.008686=\log_{10}(10.2)$$

$\Rightarrow$ $$\log_{10}(10.2)=1.008686$$

(ii) माना कि $$y=\log_e x \qquad (2)$$

जहाँ $x=4, \Delta x=0.04$ तथा $x+\Delta x=4.04$

$\because$ $$y=\log_e x$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$\because$ $$\Delta y=\frac{dy}{dx}.\Delta x=\frac{\Delta x}{x}=\frac{0.04}{4}=0.01$$

समीकरण (2) से

$$y + \Delta y = \log_e(x + \Delta x)$$

$\Rightarrow$ $$\log_e x + \Delta y = \log_e(x + \Delta x)$$

मान रखने पर

$$\log_e 4 + 0.01 = \log_e(4.04)$$

$\Rightarrow$ $$\log_e(4.04) = 1.3863 + 0.01$$

$$= 1.3963$$

(iii) माना कि $$y = \cos x \quad (3)$$

जहाँ $x = 60^\circ, \Delta x = 1^\circ = 0.01745$ रेडियन तथा $x + \Delta x = 61^\circ$

$\because$ $$y = \cos x$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$\because$ $$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x = -\sin x.\Delta x$$

$$= -\sin 60^\circ (0.01745)$$

$$= -0.1745 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -0.01511 \qquad (\because \sqrt{3} = 1.73205)$$

समीकरण (3) से

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$\Rightarrow$ $$\cos x + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\cos 60^\circ + (-0.01511) = \cos(61^\circ)$$

$\Rightarrow$ $$\cos 61^\circ = \frac{1}{2} - 0.01511$$

$$= 0.48489.$$

उदाहरण-26. सिद्ध कीजिए कि त्रिज्या मापने में हुई त्रुटि के कारण से गोले आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि, त्रिज्या में प्रतिशत त्रुटि की लगभग 3 गुना होती है।

हलः माना कि गोले की त्रिज्या r तथा आयतन V है तब

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$\because$ $$\Delta V = \frac{dV}{dr}.\Delta r$$

$\Rightarrow$ $$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{4/3\pi r^3} = 3\frac{\Delta r}{r}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\Delta V}{V} \times 100 = 3\left(\frac{\Delta r}{r} \times 100\right)$$

$\Rightarrow$ आयतन में प्रतिशत त्रुटि $= 3$ (त्रिज्या में प्रतिशत त्रुटि)

उदाहरण-27. $f(5.001)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x)=x^3-7x^2+15$ है।

हल: माना कि $$y=f(x) \quad (1)$$

जहाँ $x=5, \Delta x=0.001$ तथा $x+\Delta x=5.001$

समीकरण (1) से

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x)+\frac{dy}{dx}.\Delta x=f(x+\Delta x) \quad (2)$$

$$\because \quad y=f(x)=x^3-7x^2+15$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=3x^2-14x$$

समीकरण (2) में प्रयोग करने पर

$$(x^3-7x^2+15)+(3x^2-14x).\Delta x=f(x+\Delta x)$$

x का मान रखने पर

$$(5)^3-7(5)^2+15+\{3(5)^2-14(5)\}\times(0.001)=f(5.001)$$

$$\Rightarrow \quad f(5.001)=125-175+15+(75-70)(0.001)$$

$$=-34.995$$

उदाहरण-28. x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 1% वृद्धि होने के कारण घन के आयतन में होने वाला सन्निकटन परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि धन का आयतन V है तब

$$\Delta x = x \text{ का } 1\% = \frac{x}{100}$$

$$\because \quad V=x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dx}=3x^2$$

अतः घन के आयतन में परिवर्तन,

$$dV=\frac{dV}{dx}\Delta x$$

$$=3x^2\times\frac{x}{100}=\frac{3}{100}x^3$$

$$=0.03x^3 \text{ मीटर}^3$$

उदाहरण-29. एक गोले की त्रिज्या 7 सेमी मापी जाती है जिसमें 0.02 सेमी की त्रुटि है। इस त्रुटि के कारण इसके आयतन की गणना में सन्निकटन त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हल: गोले की त्रिज्या $=7$ सेमी

त्रिज्या मापने में हुई त्रुटि $\Delta r=0.02$ सेमी

माना गोले का आयतन V है तब

$$V=4/3\pi r^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dr}=4\pi r^2$$

$$\because \quad dV=\frac{dV}{dr}\Delta r=4\pi r^2.\Delta r$$

$$=4\pi(7)^2\times.002=3.92\pi$$

प्रश्नमाला 8.4

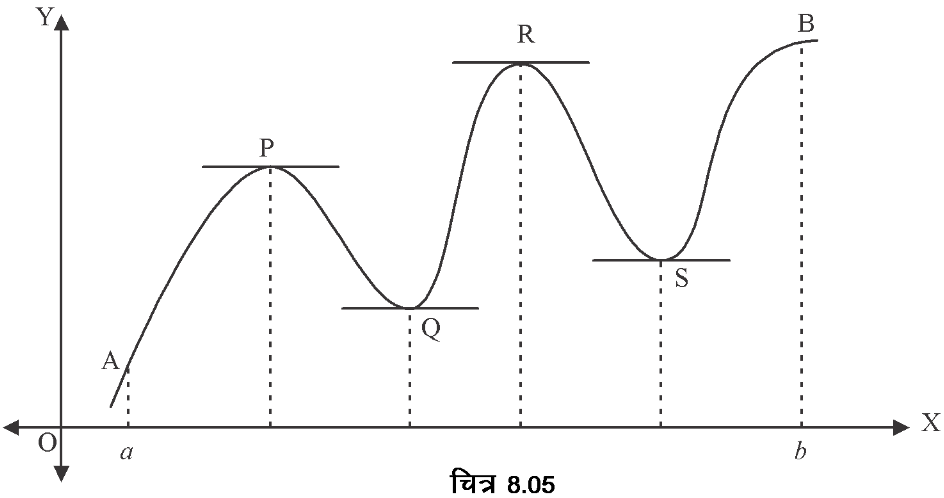
अवकलज का प्रयोग करके निम्न का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए।

1. $(0.009)^{1/3}$ 2. $(0.999)^{1/10}$ 3. $\sqrt{0.0037}$
4. $\dfrac{1}{(2.002)^2}$ 5. $(15)^{1/4}$ 6. $\sqrt{401}$
7. $(3.968)^{3/2}$ 8. $(32.15)^{1/5}$ 9. $\sqrt{0.6}$
10. $\log_{10}(10.1)$, जबकि $\log_{10} e = 0.4343$ 11. $\log_e(10.02)$ ए जबकि $\log_e 10 = 2.3026$
12. यदि $y = x^2 + 4$ तथा x का मान 3 से 3.1 परिवर्तित होता है तब अवकलज के प्रयोग से y में परिवर्तन का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए।
13. सिद्ध कीजिए कि एक घनाकार सन्दूक के आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि, घन की कोर की लम्बाई मापने में त्रुटि की लगभग तीन गुना होती है।
14. यदि गोले की त्रिज्या 10 सेमी से 9.8 सेमी तक सिकुड़ती है तब इसके आयतन में सन्निकटन त्रुटि ज्ञात कीजिए।

8.08 उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Maxima and minima)

यहाँ हम अवकलजों का प्रयोग विभिन्न फलनों के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात करने में करेंगे।

फलन $y = f(x)$ के आरेख में अन्तराल $[a, b]$ में स्थित बिन्दुओं A, P, Q, R, S तथा B की कोटियों पर ध्यान दीजिए।



चित्र 8.05

बिन्दुओं P तथा R के लघु सामीप्य में इन बिन्दुओं की कोटियाँ अधिकतम है, जबकि बिन्दुओं Q तथा S के लघु सामीप्य में इन बिन्दुओं की कोटियाँ न्यूनतम है। बिन्दु A की कोटि सबसे कम तथा B की कोटि सबसे अधिक है। बिन्दुओं P, Q, R तथा S पर खीचीं गई वक्र की स्पर्श रेखाएँ, x-अक्ष के समान्तर है अर्थात् इनकी प्रवणताएँ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ शून्य है। बिन्दु P तथा R को फलन के उच्चिष्ठ बिन्दु एवम् Q तथा S को फलन के निम्निष्ठ बिन्दु कहते हैं। उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ बिन्दुओं को फलन के चरम बिन्दु (Extreme points) भी कहते हैं।

8.09 कुछ परिभाषाएँ (Some difinitions)

(i) सापेक्ष उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान (Relative maximum and miniman value)

किसी फलन $f(x)$ का मान बिन्दु $x = c$ पर सापेक्ष उच्चिष्ठ कहलाता है यदि $f(x)$ का मान c के अल्प प्रतिवेश $(c-h, c+h)$ के प्रत्येक बिन्दु पर $f(c)$ से छोटा हो अर्थात् $f(x) \le f(c), \quad \forall \; x \in (c-h, c+h)$, जहाँ h अति सूक्ष्म धनात्मक संख्या है।

इसी प्रकार फलन $f(x)$ का मान बिन्दु $x = c$ पर सापेक्ष निम्निष्ठ कहलाता है यदि $f(x)$ का मान c के अल्प प्रतिवेश $(c-h, c+h)$ के प्रत्येक बिन्दु पर $f(c)$ से बड़ा हो अर्थात् $f(x) \ge f(c), \quad \forall \; x \in (c-h, c+h)$

सापेक्ष उच्चिष्ठ मान को सामान्यतः उच्चिष्ठ या अधिकतम तथा सापेक्ष निम्निष्ठ मान को निम्निष्ठ मान कहते हैं।

(ii) निरपेक्ष उच्चिष्ठ एवम् निम्निष्ठ मान (Absolute maximun and minimum value)

किसी फलन $f(x)$ का मान प्रान्त D में बिन्दु C पर निरपेक्ष उच्चिष्ठ कहलाता है यदि $f(x) \le f(c), \quad \forall \; x \in D$

इसी प्रकार फलन $f(x)$ का मान प्रान्त D में बिन्दु C पर निरपेक्ष निम्निष्ठ (least) कहलाता है यदि $f(x) \ge f(c), \quad \forall \; x \in D$

टिप्पणी: किसी प्रान्त में फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान एक से अधिक हो सकते है परन्तु प्रान्त में निरपेक्ष उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान केवल एक ही होता है। एक उच्चिष्ठ मान निम्निष्ठ मान से कम हो सकता है। इसी प्रकार एक निम्निष्ठ मान, उच्चिष्ठ मान से अधिक हो सकता है। फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान को फलन के चरम मान भी कहते है।

8.10 फलन के चरम मान के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध (Necessary condition for the extreme value of a function)

प्रमेय: यदि $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है तब $x=c$ पर $f(x)$ के चरम मान होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध यह है कि $f'(c)=0$

टिप्पणी: किसी फलन $f(x)$ के बिन्दु $x=c$ पर उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान विद्यमान होने के लिए $f'(c)=0$ केवल आवश्यक प्रतिबन्ध है परन्तु पर्याप्त नहीं है उदाहरणार्थ यदि $f(x)=x^3$ तब $x=0$ पर $f'(0)=0$ परन्तु $f(0)$, फलन का चरम मान नहीं है क्योंकि जब $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)$ तथा जब $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0)$ अतः $f(0)$ न तो उच्चिष्ठ है और न निम्निष्ठ।

फलन के चरम मान के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध (Sufficient condition for the extreme value of a funciton)

प्रमेय: (i) बिन्दु $x=c$ पर फलन $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान विद्यमान होगा यदि $f'(c)=0$ तथा $f''(c)<0$

(ii) बिन्दु $x=c$ पर फलन $f(x)$ का निम्निष्ठ मान विद्यमान होगा यदि $f'(c)=0$ तथा $f''(c)>0$

टिप्पणी: यदि बिन्दु $x=c$ पर फलन $f(x)$ के लिए $f'(c)=0, f''(c)=0$ परन्तु $f'''(c)\neq 0$ तब यह बिन्दु, नति परिवर्तन बिन्दु कहलाता है।

8.11 फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के गुणधर्म (Properties of maxima and minima of a function)

यदि $f(x)$ संतत फलन है और उसका रेखा चित्र खींच सके तो हम आसानी से निम्नलिखित गुणधर्म देख सकते हैं:

(i) फलन $f(x)$ के दो समान मानों के मध्य कम से कम एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान अवश्य विद्यमान होता है।

(ii) उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान एकान्तर क्रम में स्थित होते है।

(iii) जबकि x (अग्रसर होता हुआ) उस मान से गुजरता जब $f'(x)$ का चिह्न धन से ऋण होता है तब $f(x)$ उच्चिष्ठ बिन्दु से गुजरता है तथा जब $f'(x)$ का चिह्न ऋण से धन होता है तब $f(x)$ निम्निष्ठ बिन्दु से गुजरता है।

(iv) यदि किसी बिन्दु के दोनों ओर $f'(x)$ का चिह्न नहीं बदलता है तब यह बिन्दु नति परिवर्तन बिन्दु होता है।

(v) उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दु पर $f'(x)=0$ होने के कारण, इस बिन्दु पर रेखा $x-$ अक्ष के समान्तर होती है।

8.12 उच्चिष्ठ एवम् निम्निष्ठ ज्ञात करने की क्रिया विधि (Working method to find maxima and minima)

1. सर्वप्रथम दिए गए फलन को $y=f(x)$ रूप में लिखते है तथा $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करते है।

2. समीकरण $\frac{dy}{dx}=0$ को हल करते है। माना इसके हल $x=a_1, a_2,...$ है।

3. $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करते है तथा प्रत्येक बिन्दु $x=a_1, a_2,...$ पर इसका मान ज्ञात करते है।

4. यदि $x=a_r$ (जहाँ $r=1,2,....$) पर $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ तब $x=a_r$ पर फलन $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान होगा।

5. यदि $x=a_r$ (जहाँ $r=1,2,....$) पर $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ तब $x=a_r$ पर फलन का निम्निष्ठ मान होगा। यदि $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ हो तब आगे अवकलन करते है।

6. यदि $x = a_r$ (जहाँ $r = 1, 2, ...$) पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ हो तो फलन का आगे अवकलज कर $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$.......आदि ज्ञात करते है जब तक कि $x = a_r$ का मान शून्य हो।

(i) यदि अशून्य होने वाला अवकल गुणांक विषम कोटि जैसे $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^5y}{dx^5}$.... तब $x = a_r$ पर फलन न तो उच्चिष्ठ है और निम्निष्ठ है।

(ii) यदि अशून्य होने वाला अवकल गुणांक सम कोटि जैसे $\frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^6y}{dx^6}$.... तब वही स्थिति होगी जो $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$ होने के साथ होती है।

8.13 स्तब्ध बिन्दु (Stationary point)

वे बिन्दु जिन पर फलन $f(x)$ की चर x के सापेक्ष परिवर्तन दर शून्य होती है अर्थात् $f'(x) = 0$, स्तब्ध बिन्दु कहलाते हैं।

टिप्पणी: प्रत्येक चरम बिन्दु स्तब्ध बिन्दु होता है परन्तु स्तब्ध बिन्दु का चरम बिन्दु होना आवश्यक नहीं है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-30. निम्नलिखित फलनों के उच्चतम तथा निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए

(a) $y = (2x-1)^2 + 3$ (b) $y = 9x^2 + 12x + 2$

(c) $y = -(x-1)^2 + 10$ (d) $y = x^3 + 1$

हल: (a) $(2x-1)^2$ का निम्नतम मान शून्य है अतः $(2x-1)^2 + 3$ का निम्नतम मान 3 होगा। जबकि स्पष्ट है कि इसका कोई उच्चतम मान नहीं होगा।

(b) $\because$
$$y = 9x^2 + 12x + 2$$
$$= (3x+2)^2 - 2$$

$\because$ $(3x+2)^2$ का निम्नतम मान शून्य होगा। अतः $(3x+2)^2 - 2$ का निम्नतम मान -2 है जो कि $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ पर प्राप्त होगा। स्पष्ट है कि $y = 9x^2 + 12x + 2$ का उच्चतम मान विद्यमान नहीं होगा।

(c) स्पष्ट है कि $-(x-1)^2$ का उच्चतम मान शून्य होगा अतः फलन $y = -(x-1)^2 + 10$ का अधिकतम मान 10 होगा। स्पष्ट है कि इसका कोई निम्नतम मान नहीं होगा।

(d) स्पष्ट है कि $x \to \infty$ पर $y \to \infty$

तथा $x \to -\infty$ पर $y \to -\infty$

अतः दिए गए फलन का न हो उच्चतम मान होगा व निम्नतम मान।

उदाहरण-31. निम्न फलनों के उच्चिष्ठ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए ।

(a) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2$ (b) $(x-2)^6(x-3)^5$ (c) $(x-1)^2 e^x$

हल: (a) माना कि
$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

तथा
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

फलन के चरम बिन्दु के लिए, $\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow \quad 5x^4-20x^3+15x^2=0$

$\Rightarrow \quad 5x^2(x^2-4x+3)=0$

$\Rightarrow \quad 5x^2(x-1)(x-3)=0$

$\Rightarrow \quad x=0,1,3$

अब $x=0$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

अतः $\frac{d^3y}{dx^3}=60x^2-120x+30$

$x=0$ पर $\frac{d^3y}{dx^3}=30\neq 0$

अतः $x=0$ पर फलन का कोई चरम मान नहीं है।

$x=1$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2}=20(1)^3-60(1)^2+30(1)=-10<0$

अतः $x=1$ पर फलन का मान उच्चिष्ठ है तथा उच्चिष्ठ मान

$=(1)^5-5(1)^4+5(1)^3-2=-1$

इसी प्रकार $x=3$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2}=20(3)^3-60(3)^2+30(3)$

$=540-540+90=90>0$

अतः $x=3$ पर फलन का मान निम्निष्ठ है तथा निम्निष्ठ मान

$=(3)^5-5(3)^4+5(3)^3-2$

$=-29$

(b) माना कि $y=(x-2)^6(x-3)^5$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=6(x-2)^5(x-3)^5+(x-2)^6 5(x-3)^4$

$=(x-2)^5(x-3)^4\{6x-18+5x-10\}$

$=(x-2)^5(x-3)^4(11x-28)$

फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow \quad (x-2)^5(x-3)^4(11x-28)=0$

$\Rightarrow \quad x=2,3,28/11$

चूँकि बिन्दु $x=2$ पर $\frac{dy}{dx}$ का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है।($\because$ जब $x<2$ तब $\frac{dy}{dx}>0$ तथा $x>2$ तब $\frac{dy}{dx}<0$)

अतः $x=2$ पर फलन का मान उच्चिष्ठ है तथा उच्चिष्ठ मान $=0$

$\because x=3$ पर $\frac{dy}{dx}$ के चिह्न में कोइ परिवर्तन नहीं होता है। ($\because$ जब $x<3$ तब $\frac{dy}{dx}>0$ तथा $x>3$ तब $\frac{dy}{dx}>0$)

अतः $x=3$ पर फलन का मान न तो उच्चिष्ठ है और न निम्निष्ठ।

पुनः $x=\frac{28}{11}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है। ($\because$ जब $x<\frac{28}{11}$ तब $\frac{dy}{dx}<0$ तथा $x>\frac{28}{11}$ तब $\frac{dy}{dx}>0$)

अतः $x=\frac{28}{11}$ पर फलन का निम्निष्ठ मान है तथा निम्निष्ठ मान $=\left(\frac{28}{11}-2\right)^6\left(\frac{28}{11}-3\right)^5=-\frac{6^5.5^5}{11^{11}}$

(c) माना कि $y=(x-1)^2e^x$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\{(x-1)^2+2(x-1)\}e^x$

तथा $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\{(x-1)^2+4(x-1)+2\}e^x$

फलन के चरम मान के लिए $\quad \frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow \quad \{(x-1)^2+2(x-1)\}e^x=0$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2+2(x-1)=0 \quad \{\because e^x\neq 0\}$

$\Rightarrow \quad x^2-1=0$

$\Rightarrow \quad x=\pm 1$

अब $x=1$ पर, $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\{0+4(0)+2\}e^1=2e>0$

अतः $x=1$ पर फलन का निम्निष्ठ मान है तथा

निम्निष्ठ मान $=(1-1)^2e^1=0$

पुनः $x=-1$ पर, $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\{(-1-1)^2+4(-1-1)+2\}e^{-1}$

$=\{4-8+2\}e^{-1}=\frac{-2}{e}<0$

अतः $x=-1$ फलन का मान उच्चिष्ठ है तथा उच्चिष्ठ मान $=(-1-1)^2e^{-1}=\frac{4}{e}$.

उदाहरण-32. फलन $(1/x)^x$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

हलः माना कि $y=(1/x)^x$

$\Rightarrow \quad \log y=x\log\frac{1}{x}$

$=-x\log x=z$ (माना)

फलन y का मान अधिकतम या न्यूनतम होगा यदि $\log y$ अर्थात् z का मान अधिकतम या न्यूनतम है।

अब, $$\frac{dz}{dx} = -x.\frac{1}{x} - 1.\log x = -(1+\log x)$$

तथा $$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{x}$$

अतः z अर्थात् y के अधिकतम या न्यूनतम मान के लिए

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow 1+\log x = 0$$

$\Rightarrow$ $$\log x = -1$$

$\Rightarrow$ $$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$x = 1/e$ पर $$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{1/e} = -e < 0$$

अतः $x = 1/e$ पर y का मान अधिकतम होगा तथा

अधिकतम मान $= \left[\frac{1}{1/e}\right]^{1/e} = e^{1/e}.$

उदाहरण-33. किसी बिन्दु $(0, a)$ से परवलय $x^2 = y$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए, जहाँ $a \in [0, 5]$.

हलः माना परवलय पर कोई बिन्दु (h, k) है तथा माना कि $(0, a)$ तथा (h, k) के मध्य की दूरी D है तब

$$D = \sqrt{(h-o)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \qquad (1)$$

$\because$ बिन्दु (h, k) परवलय $x^2 = y$ पर स्थित है अतः $h^2 = k$

इसका प्रयोग समीकरण (1) में करने पर

$$D = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

$\Rightarrow$ $$D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

$\Rightarrow$ $$D'(k) = \frac{\{1 + 2(k-c)\}}{2\sqrt{k + (k-c)^2}} \qquad (2)$$

अब $$D'(k) = 0 \Rightarrow k = \frac{2c-1}{2}$$

जब $k < \frac{2c-1}{2}$ तब $2(k-c)+1 < 0$

$\Rightarrow$ $D'(k) < 0$ [समीकरण (2) से]

तथा जब $k > \frac{2c-1}{2}$ तब $2(k-c)+1 < 0$

$\Rightarrow$ $D'(k) > 0$ [समीकरण (4) से]

अतः $k = \frac{2c-1}{2}$ पर D निम्नतम है तथा अभीष्ट न्यूनतम दूरी

$$= \sqrt{\frac{2c-1}{2} + \left(\frac{2c-1}{2} - c\right)^2} = \frac{\sqrt{4c-1}}{2}.$$

उदाहरण-34. निम्नलिखित फलनों के निरपेक्ष उच्चतम तथा निम्नतम मान उनके सम्मुख दिए अन्तरालों में ज्ञात कीजिए

(a) $f(x) = x^3, \quad x \in [-2, 2]$ (b) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2, \quad x \in \left[-2, 9/2\right]$

(c) $f(x) = (x-1)^2 + 3, \quad x \in [-3, 1]$ (d) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad x \in [0, \pi]$

हल: (a) दिया है $f(x) = x^3, x \in [-2, 2]$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 3x^2$

$\therefore$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

अब $f(-2) = (-2)^3 = -8$; $f(0) = (0)^3 = 0$ तथा $f(2) = (2)^3 = 8$

उपर्युक्त से फलन $f(x)$ का निरपेक्ष उच्चतम मान 8 है जो कि वह $x = 2$ पर प्राप्त करता है तथा निरपेक्ष निम्नतम मान –8 है जो कि वह $x = -2$ पर प्राप्त करता है।

(b) दिया है $f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 4 - \frac{2x}{2} = 4 - x$

$f(x)$ के चरम मान के लिए, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow$ $4 - x = 0$

$\Rightarrow$ $x = 4$

अतः बिन्दु -2, 4 तथा $9/2$ है जिन पर फलन के मान को ज्ञात करते है

$\because$ दिया फलन $f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$ है, अतः $f(-2) = 4(-2) - \frac{(-2)^2}{2} = -10$; $f(4) = 4(4) - \frac{(4)^2}{2} = 8$

तथा $f(9/2) = 4(9/2) - \frac{(9/2)^2}{2} = -9/4$

अतः दिये अन्तराल में फलन का निरपेक्ष उच्चतम मान $= 8$ तथा निम्नतम मान $= -10$

(c) दिया फलन है $f(x) = (x-1)^2 + 3, x \in [-3, 1]$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 2(x-1)$

$f(x)$ के चरम मान के लिए $f'(x) = 0$

$\Rightarrow$ $2(x-1) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 1$

अतः $x = 1, -3, 0$ पर $f(x)$ के मान निम्न होंगे-

$f(1) = (1-1)^2 + 3 = 0 + 3 = 3$; $f(-3) = (-3-1)^2 + 3 = 16 + 3 = 19$ तथा $f(0) = (0-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

अतः दिए गए अन्तराल में फलन का निरपेक्ष उच्चतम मान 19 है जो कि बिन्दु $x = -3$ पर प्राप्त करता है तथा निरपेक्ष निम्नतम मान 3 है जो कि बिन्दु $x = 1$ पर प्राप्त होता है।

(d) दिया फलन है $f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow$ $f'(x) = \cos x - \sin x$

$f(x)$ के अधिकतम तथा निम्नतम मान के लिए, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x = \cos x$

$\Rightarrow \quad \tan x = 1$

$\Rightarrow \quad x = \pi/4$

अब $\quad f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

तथा $\quad f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = 0 + (-1) = -1$

अतः दिए गए अन्तराल में $f(x)$ के उच्चतम व निम्नतम मान क्रमशः $\sqrt{2}$ तथा -1 है।

उदाहरण-35. ऐसी दो धनात्मक संख्याएँ x तथा y ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार हैं कि

(a) इनका योग 60 तथा xy^3 अधिकतम है। (b) इनका योग 16 तथा $x^3 + y^3$ निम्नतम है।

हल: (a) माना कि $p = xy^3$

दिया है कि $x + y = 60 \Rightarrow x = 60 - y$

$\therefore \quad p = (60 - y)y^3 = 60y^3 - y^4$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dp}{dt} = 180y^2 - 4y^3$

तथा $\quad \dfrac{d^2p}{dy^2} = 360y - 12y^2$

p के चरम मान के लिए, $\quad \dfrac{dp}{dy} = 0$

$\Rightarrow \quad 180y^2 - 4y^3 = 0$

$\Rightarrow \quad 4y^2(45 - y) = 0$

$\Rightarrow \quad y = 45 \quad \{\because y = 0$ सम्भव नहीं है, $y > 0\}$

अब $\quad \left(\dfrac{d^2p}{dy^2}\right)_{y=45} = 360(45) - 12(45)^2 = -8100 < 0$

अतः $y = 45$ पर P का मान उच्चतम है।

जब $y = 45$ तब $x = 60 - 45 = 15$

अतः संख्याएं $x = 15$ तथा $y = 45$ है।

(b) माना कि $\quad p = x^3 + y^3 \quad (1)$

दिया है कि $\quad x + y = 16$

$\Rightarrow \quad y = 16 - x \quad (2)$

समीकरण (1) से

$$p = x^3 + (16-x)^3$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dp}{dx} = 3x^2 + 3(16-x)^2(-1)$$

$$= 3x^2 - 3(256 - 32x + x^2)$$

$$= 3(32x - 256) \qquad (3)$$

अब $$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow 3(32x-256) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{256}{32} = 8$$

समीकरण (3) से $\dfrac{d^2p}{dx^2} = 96 > 0$

अतः $x = 8$ पर p निम्नतम है।

फलनः अभीष्ट धनात्मक संख्याएं $x = 8,\ y = 16 - 8 = 8$ है।

प्रश्नमाला 8.5

1. निम्नमलिखित फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए

   (a) $2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ (b) $(x-1)(x-2)(x-3)$

   (c) $\sin x + \cos 2x$ (d) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

2. निम्नलिखित फलनों के अधिकतम तथा निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए

   (a) $-|x+1|+3$ (b) $|x+2|-1$ (c) $|\sin 4x + 3|$ (d) $\sin 2x + 5$

3. निम्नलिखित फलनों के दिये गए अन्तराल में, अधिकतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए

   (a) $2x^3 - 24x + 107,\quad x \in [1, 3]$ (b) $3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1,\quad x \in [0, 2]$

   (c) $x + \sin 2x,\quad x \in [0, 2\pi]$ (d) $x^3 - 18x^2 + 96x,\quad x \in [0, 9]$

4. निम्न फलनों के चरम मान ज्ञात कीजिए

   (a) $\sin x . \cos 2x$ (b) $a \sec x + b \operatorname{cosec} x,\ o < a < b$

   (c) $x^{1/x},\ x > 0$ (d) $\dfrac{1}{x}.\log x,\ x \in (0, \infty)$

5. सिद्ध कीजिए कि फलन $\dfrac{x}{1 + x\tan x}$ का मान $x = \cos x$ पर उच्चिष्ठ है।

6. सिद्ध कीजिए फलन $\sin^2 x.(1+\cos x)$ का मान $\cos x = 1/3$ पर उच्चिष्ठ है।

7. सिद्ध कीजिए कि फलन $y = \sin^p \theta . \cos^q \theta$ का मान $\tan \theta = \sqrt{p/q}$ पर उच्चिष्ठ है।

8.14 उच्चिष्ठ एवम् निम्निष्ठ के अनुप्रयोग (Applications of maxima and minima)

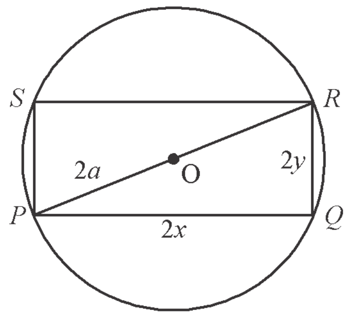
निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता से हम अवकलनों का अनुप्रयोग अन्य शाखाओं यथा

(i) समतल ज्यामिती (Plane Geometry); (ii) ठोस ज्यामिती (Solid geometry); (iii) यांत्रिकी (Mechanics); (iv) वाणिज्य एवं अर्थशास्त्र (Commerce and Economics) इत्यादि में करेंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-36. सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त के अन्दर सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

हल: चित्रानुसार, वृत्त के अन्दर $PQRS$ एक आयत है तथा वृत्त का केन्द्र O है तथा a त्रिज्या है।



चित्र 8.06

माना कि $PQ = 2x, QR = 2y$

अतः समकोण ΔPQR से

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\Rightarrow \quad (2x)^2 + (2y)^2 = (2a)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$$

माना आयत $PQRS$ का क्षेत्रफल A है तब

$$A = (2x)\left(2\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 4x\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dx} = 4\left\{\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right\} = \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (2)$$

A के अधिकतम या निम्नतम मान के लिए, $\frac{dA}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

समीकरण (2) से

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 4\left\{\frac{-4x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x(a^2 - 2x^2)}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\right\}$$

$x = a/\sqrt{2}$ पर, $\frac{d^2A}{dx^2} = -16 < 0$

अतः $x = a/\sqrt{2}$ पर A अधिकतम है।

$x = a/\sqrt{2}$, समीकरण (1) में रखने पर $y = a/\sqrt{2}$

अतः $x = y = a/\sqrt{2}$ फलतः क्षेत्रफल अधिकतम है जबकि $x = y$

$\Rightarrow 2x = 2y$ अतः आयत एक वर्ग है।

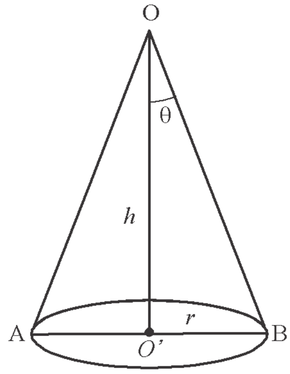
उदाहरण-37. सिद्ध कीजिए कि दी गई तिर्यक ऊचाँई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

हल: माना कि शंकु की तिर्यक ऊचाँई ℓ है तथा शंकु का अर्ध शीर्ष कोण θ है। समकोण $\Delta OO'B$

$OO' = \ell\cos\theta = h$ (शंकु की ऊचाँई)

$O'B = \ell\sin\theta = r$ (शंकु की त्रिज्या)

अतः शकुं का आयतन



चित्र 8.07

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi \ell^2 \sin^2\theta . \ell\cos\theta$$

$$= \frac{1}{3}\pi \ell^3 \sin^2\theta\cos\theta$$

$\therefore$ $$\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{3}\pi\ell^3\{\sin^2\theta(-\sin\theta) + 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta\}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\ell^3\left(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\right)$$

तथा $$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{1}{3}\pi\ell^3(2\cos\theta.\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta\sin\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\ell^3(2\cos^3\theta - 7\sin^2\theta\cos\theta)$$

महत्तम आयतन के लिए $\frac{dV}{d\theta} = 0$

$\Rightarrow$ $$\sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$\Rightarrow$ $$\sin\theta\{2(1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta\} = 0$$

$\Rightarrow$ $$\sin\theta\{2 - 3\sin^2\theta\} = 0$$

$\Rightarrow$ $$\sin\theta = 0, \sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}$$

अब $\sin\theta = \sqrt{2/3}$ या $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$ तब

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{1}{3}\pi\ell^3\left\{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 7\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 . \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\ell^3\left\{\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{14}{3\sqrt{3}}\right\} = -\frac{1}{3}\pi\ell^3\frac{12}{3\sqrt{3}} < 0$$

अतः $\sin\theta = \sqrt{2/3}$ के लिए शंकु का आयतन, महत्तम होगा।

इस स्थिति में $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2/3}}{\sqrt{1/3}} = \sqrt{2}$

$\therefore$ अर्धशीर्ष कोण $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{2})$.

उदाहरण-38. एक स्थिर आयतन वाले खुले टैंक का आधार वर्गाकार है। यदि अन्तः पृष्ठ न्यूनतम हो, तब टैंक की गहराई तथा लम्बाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि टैंक की गहराई h तथा लम्बाई ℓ है तब

टैंक का आयतन $$V = \ell^2 h \quad (1)$$

टैंक का अन्तः पृष्ठ का क्षेत्रफल $S = \ell^2 + 4\ell h$

$\Rightarrow$ $S = \ell^2 + 4\ell\left(\frac{V}{\ell^2}\right)$ [समीकरण (1) से]

$\Rightarrow$ $S = \ell^2 + 4\frac{V}{\ell}$

$\Rightarrow$ $\frac{dS}{d\ell} = 2\ell - \frac{4V}{\ell^2}$ तथा $\frac{d^2S}{d\ell^2} = 2 + \frac{2.4V}{\ell^3}$

न्यूनतम पृष्ठ के लिए, $\frac{dS}{d\ell} = 0$

$\Rightarrow$ $2\ell - \frac{4V}{\ell^2} = 0$

$\Rightarrow$ $\ell^3 = 2V$

$\Rightarrow$ $\ell = (2V)^{1/3}$

जब $\ell = (2V)^{1/3}$ तब $\frac{d^2S}{d\ell^2} = 2 + \frac{8V}{(2V)} > 0$

अतः अन्तः पृष्ठ न्यूनतम होगा।

समीकरण (1) से

$$h = \frac{V}{\ell^2} = \frac{1}{2}\frac{2V}{(2V)^{2/3}} = \frac{1}{2}(2V)^{1/3} = \frac{1}{2}.\ell$$

$\Rightarrow$ $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ टैंक की गहराई : टैंक की लम्बाई $= 1:2$

उदाहरण-39. एक निर्माता $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ रुपये प्रति इकाई की दर से x इकाइयाँ बेच सकता है। x इकाइयों का उत्पाद मूल्य $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ रुपये है। इकाइयों की वह संख्या ज्ञात कीजिए जो निर्माता को अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए बेचनी चाहिए।

हलः माना x इकाइयों का विक्रय मूल्य S रुपये है तथा इनका उत्पाद मूल्य C है तब $S = \left(5 - \frac{x}{100}\right)x = 5x - \frac{x^2}{100}$

तथा $C = \frac{x}{5} + 500$

माना लाभ फलन p है तब

$$p = S - C$$

$$= 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$$

$$= \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{24}{5} - \dfrac{x}{50}$ तथा $\dfrac{d^2p}{dx^2} = -\dfrac{1}{50}$

$\therefore \qquad \dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{24}{5} - \dfrac{x}{50} = 0$

$\Rightarrow \qquad x = 240$

तथा $\qquad \left(\dfrac{d^2p}{dx^2}\right)_{x=240} = -\dfrac{1}{50} < 0$

अतः 240 इकाइयाँ बेचने पर, निर्माता अधिकतम लाभ अर्जित कर सकता है।

प्रश्नमाला 8.6

1. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त में बड़े से बड़ा त्रिभुज जो खीचा जा सकता है, वह समबाहु त्रिभुज होगा।
2. किसी वर्ग का परिमाप तथा वृत्त की परिधि का योग दिया हुआ है। सिद्ध किजिए कि उनके क्षेत्रफल का योग न्यूनतम होगा यदि वर्ग की भुजा, वृत्त के व्यास के बराबर है।
3. यदि एक गोले में एक शंकु बनाया जाता है तब सिद्ध कीजिए कि उसका आयतन महत्तम होगा यदि शंकु की ऊँचाई, गोले के व्यास की दो तिहाई हो।
4. किसी नदी में स्टीमर चलाने का प्रति घण्टे का खर्च, उसके वेग के घन का समानुपाती है। यदि जलधारा का वेग x किमी प्रति घण्टा हो तब सिद्ध कीजिए कि स्टीमर की जलधारा के विपरीत दिशा में चलने में उसकी अधिकतम मितव्ययी चाल $2/3\,x$ किमी प्रति घण्टा होगी।
5. यदि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण तथा एक भुजा का योग दिया हुआ है। तब सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होगा यदि इन भुजाओं के मध्य कोण $\pi/3$ है।
6. यदि किसी समबाहु त्रिभुज के अन्दर a त्रिज्या का वृत्त बनाया गया है तब सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का न्यूनतम परिमाप $6\sqrt{3}a$ होगा।
7. यदि दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ के किसी बिन्दु p पर अभिलम्ब खींचा गया है तब सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त के केन्द्र से अभिलम्ब की अधिकतम दूरी $a - b$ है।

विविध प्रश्नमाला–8

1. यदि बेलन की त्रिज्या r तथा ऊचाँई h है तब त्रिज्या के सापेक्ष पृष्ठीय क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।
2. फलन $y = x^2 + 21$ के लिए x तथा y के मान ज्ञात कीजिए जबकि y में परिवर्तन की दर, x में परिवर्तन की दर का तीन गुना है।
3. सिद्ध कीजिए कि चरघातांकी फलन e^x वर्धमान फलन है।
4. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log(\sin x)$, अन्तराल $(0, \pi/2)$ में वर्धमान तथा अन्तराल $(\pi/2, \pi)$ में ह्रासमान है।
5. यदि वक्र $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{a}$ के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा OX तथा OY अक्षों को क्रमशः P और Q बिन्दुओं पर काटे, तब सिद्ध कीजिए कि $OP + OQ = a$, जहाँ O मूल बिन्दु है।
6. वक्र $y = \cos(x+y)$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 2y = 0$ के समान्तर है।
7. एक घनाकार सन्दूक के आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कीजिए, जबकि घन की कोर की लम्बाई में त्रुटि 5 प्रतिशत होती है।
8. एक वृत्ताकार धातु की चद्दर का ताप से इस प्रकार विस्तार होता है कि इसकी त्रिज्या में 2 प्रतिशत की वृद्धि होती है। इसके क्षेत्रफल में निकटतम वृद्धि ज्ञात कीजिए जबकि ताप से पूर्व, चद्दर की त्रिज्या 10 सेमी है।
9. सिद्ध कीजिए कि गोले के अन्तर्गत, सबसे बडे शंकु का आयतन, गोले के आयतन का $8/27$ होता है।
10. सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ तथा महत्तम आयतन वाले लम्ब वृत्तीय शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\sin^{-1}(1/3)$ होता है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि फलन $f(x)$ अवकलनीय है तब किसी बिन्दु $x = c$ पर चरम मान के लिए आवश्यक है कि $f'(c) = 0$
2. बिन्दु c पर फलन $f(x)$ का मान उच्चिष्ठ होगा यदि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) < 0$
3. बिन्दु $x = c$ पर फलन $f(x)$ का मान निम्नष्ठ होगा यदि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) > 0$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 8.1

1. 6π सेमी^{2} / सै; 8π सेमी^{2} / सै
2. $(1, 5/3), (-1, 1/3)$
3. –3/10 रेडियन / सैकण्ड
4. 900 सेमी^{3} / सैकण्ड
5. $1/\pi$ सेमी / सैकण्ड
6. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$
7. 30.02 (लगभग)
8. 35.2 सेमी^{3} / सैकण्ड, 20π सेमी^{3} / सैकण्ड
9. $\frac{1}{48}\pi$ सेमी / सैकण्ड
10. 126

प्रश्नमाला 8.2

11. $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ में वर्धमान तथा $(-2, 3)$ में ह्रासमान
12. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ में वर्धमान तथा $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ में ह्रासमान
13. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ में वर्धमान तथा $(1, 2)$ में ह्रासमान
14. $(-1, 2)$ में वर्धमान तथा $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ में ह्रासमान
15. –2

प्रश्नमाला 8.3

1. 11
2. –1 / 64
3. (3, 2)
4. $y - 2x + 2 = 0, y - 2x + 10 = 0$

5.(i) $(0, 5)$ तथा $(0, -5)$; (ii) $(2, 0)$ तथा $(-2, 0)$

6. $y = 0$
7. $24x + 12\sqrt{3}y = 8\pi + 9\sqrt{3}$
8.

	स्पर्श रेखा	अभिलम्ब
(a)	$10x - y - 8 = 0$	$x + 10y - 223 = 0$
(b)	$y - x - a = 0$	$y + x - 3a = 0$
(c)	$x + yt^2 = 2at$	$xt^3 - yt = at^4 - a$
(d)	$y - mx = \frac{a}{m}$	$my + x = 2a + \frac{a}{m^2}$
(e)	$\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$	$ax\cos\theta + by\cot\theta = a^2 + b^2$
(f)	$x - y - 3 = 0$	$x + y + 1 = 0$
(g)	$x - y + a = 0$	$x + y - 3a = 0$
(h)	$2x - 2y - \pi = 0$	$2x + 2y - \pi - 4 = 0$

प्रश्नमाला 8.4

1. 0.2083
2. 0.9999
3. 0.0608
4. 0.2495
5. 1.968
6. 20.025
7. 7.904
8. 2.00187
9. 0.8
10. 1.004343
11. 2.3046
12. 0.6
14. 80π सेमी^{3}

प्रश्नमाला 8.5

1.(a) $x=2$ पर उच्चिष्ठ तथा $x=3$ निम्निष्ठ (b) $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}$ पर उच्चिष्ठ तथा $x=\frac{6+\sqrt{3}}{3}$ निम्निष्ठ

(c) $x=\sin^{-1}1/4, \pi-\sin^{-1}1/4$ पर उच्चिष्ठ तथा $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ निम्निष्ठ (d) $x=1$ पर उच्चिष्ठ तथा $x=3$ परनिम्निष्ठ

2.(a) अधिकतम मान = 3, निम्नतम मान विद्यमान नहीं ; (b) निम्नतम मान=–1, अधिकतम मान विद्यमान नहीं ;
(c) अधिकतम मान=4, निम्नतम मान=2 ; (d) अधिकतम मान= 6, निम्नतम मान=4

3.(a) $x=2$ पर निम्नतम मान= 75, $x=4$ पर अधिकतम मान=160

(b) $x=0$ पर निम्नतम मान $=1$, $x=2$ पर अधिकतम मान $=21$

(c) $x=0$ पर निम्नतम मान $=0$, $x=2\pi$ पर अधिकतम मान $=2\pi$

(d) $x=0$ पर निम्नतम मान $=0$, $x=4$ पर अधिकतम मान $=160$

4.(a) उच्चिष्ठ मान $=1, \frac{2}{3\sqrt{6}}$, निम्निष्ठ मान $=-1, \frac{-2}{3\sqrt{6}}$

(b) उच्चिष्ठ मान $=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$, निम्निष्ठ मान $=-(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$

(c) उच्चिष्ठ मान $=e^{1/e}$

(d) उच्चिष्ठ मान $=1/e$

विविध प्रश्नमाला–8

1. $4\pi r+2\pi h$ 2. $x=\pm1,\ y=22,\ 2$ 6. $2x+4y+3\pi=0$ तथा $2x+4y-\pi=0$

7. 15 प्रतिशत 8. 4π सेमी²