लघुगणक
(Logarithm)

परिचय: हमलोग सामान्य घातांक तादात्म्य (exponential identity) $a^x = b$ से सुपरिचित हैं। यहाँ 'a' को आधार (base) कहा जाता है, x को घात (exponent) एवं b को परिणाम (result) कहा जाता है।

अब, जैसे $\sqrt{4} = 2$, जो कि $2 \times 2 = 4$ लिखने का दूसरा तरीका है, उसी तरह हम कह सकते हैं

$$\log_a b = x$$

यह $a^x = b$ लिखने का दूसरा तरीका है।

इस प्रकार* log, logarithm *या लघुगणक घातांक तादात्म्य को व्यक्त करने का दूसरा तरीका है तथा निम्नलिखित दो व्यंजक पूरी तरह समतुल्य माने जाते हैं।

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$$

$\log_a b$ को प्राय: a आधार पर b का लघुगणक (log of b to the base a) पढ़ा जाता है।

आमतौर से लघुगणक का आधार 10 लिया जाता है और यह आधार इतना लोकप्रिय है कि प्राय: इसे लिखने की भी जरूरत नहीं समझी जाती।

इस प्रकार $\log b$ से तात्पर्य है $\log_{10} b$ । अर्थात् यदि कोई आधार नहीं दिया गया हो तो इसे 10 मान लिया जाता है।

लघुगणक के आधारभूत नियम

I. $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

II. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

III. $\log\left(x^a\right) = a\log(x)$

नीचे कुछ उदाहरण प्रस्तुत किए जा रहे हैं ताकि आप घातांक और उसके समतुल्य तादात्म्य के बीच के संबंध को अच्छी तरह समझ सकें।

घातांक तादात्म्य	***लघुगणक तादात्म्य***
$a^x = b$	$\log_a b = x$
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

$3^4 = 81$	$\log_3(81) = 4$
$5^{-3} = 0.008$	$\log_5(0.008) = -3$
$5^{-3} = \frac{1}{125}$	$\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$
$8^{1/3} = 2$	$\log_8(2) = \frac{1}{3}$
$4^{1/2} = 2$	$\log_4(2) = \frac{1}{2}$
$16^{1/4} = 2$	$\log_{16}(2) = \frac{1}{4}$
$10^4 = 10000$	$\log_{10}(10000) = 4$
$10^{-3} = \frac{1}{1000}$	$\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3$
$10^{-2} = 0.01$	$\log_{10}(0.01) = -2$

नीचे कुछ उदाहरण दिए जा रहे हैं, जिनके सहारे लघुगणक की क्रियाओं को सुगमता पूर्वक समझा जा सकता है :

1. $\log(6) = \log(2 \times 3) = \log(2) + \log(3)$
2. $\log(72) = \log(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3) = \log\left(2^3 \times 3^2\right) = \log 2^3 + \log 3^2$

   $= 3\log 2 + 2\log 3$
3. $\log(30) = \log(2 \times 3 \times 5) = \log 2 + \log 3 + \log 5$
4. $\log(7) = \log(14 \div 2) = \log 14 - \log 2$
5. $\log 10 = 1$
6. $\log 100 = \log(10)^2 = 2\log 10 = 2$
7. $\log(20) = \log\left(\frac{100}{5}\right)$

   या, $\log(20) = \log 100 - \log 5 = \log 10^2 - \log 5 = 2\log 10 - \log 5$
8. $\log\left(\frac{1}{8}\right) = \log(2)^{-3} = -3\log 2$
9. $\log\left(\frac{1}{27}\right) = \log(3)^{-3} = -3\log 3$

10. $\log(280) = \log(2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7) = \log(2^3 \times 5 \times 7) = 3\log 2 + \log 5 + \log 7$
या, $\log(280) = \log(10 \times 7 \times 4) = \log 10 + \log 4 + \log 7$
$= 1 + \log 4 + \log 7$

11. $\log(50) = \log\left(\frac{100}{2}\right) = \log 100 - \log 2 = 2\log 10 - \log 2 = 2 - \log 2$

12. $\log(75) = \log\left(\frac{225}{3}\right) = \log(225) - \log 3 = \log(15)^2 - \log 3 = 2\log 15 - \log 3$

या, $\log(75) = \log(5^2 \times 3) = 2\log 5 + \log 3$

13. $\log(300) = \log\left(\frac{6^2 \times 5^2}{3}\right) = \log 6^2 + \log 5^2 - \log 3$
$= 2\log 6 + 2\log 5 - \log 3$
$= 2\log(2 \times 3) + 2\log 5 - \log 3$
$= 2\log 2 + 2\log 3 + 2\log 5 - \log 3$
$= 2\log 2 + \log 3 + 2\log 5$

14. $\log\left(\frac{1}{32}\right) = \log(2^{-5}) = -5\log 2$

या, $\log\left(\frac{1}{32}\right) = \log 1 - \log 32 = \log 1 - \log(2^5) = 0 - 5\log 2$

$= -5\log 2$ (As $\log 1 = 0$)

लघुगणक की कुछ अन्य विशेषताएँ

1. चूँकि $a^1 = a$ को $\log_a a = 1$ लिखा जाता है
तथा $b^1 = b$ को $\log_b b = 1$ लिखा जाता है
$\therefore \log_a a = \log_b b = 1$

उदा. निम्नलिखित में से कौन $\log_7 7$ के बराबर है ?
1) $\log_7(7^0)$ 2) $\log_7(8)$ 3) $\log 7$ 4) $\log_{13}(13)$ 5) इनमें से कोई नहीं

हल: 4; $\log_{13}(13)$

अन्य राशियों के मान हैं

$\log_7(7^0) = \log_7 1 = 0$
$\log_7(8) = \log_7(2^3) = 3\log_7 2$
$\log 7 = \log_{10} 7$ (चूँकि आधार को लिखा नहीं गया है)

2. चूँकि $a^0 = 1$ को $\log_a 1 = 0$ लिखा जाता है
तथा $b^0 = 1$ को $\log_b 1 = 0$ लिखा जाता है
$\therefore \log_a 1 = \log_b 1$

3. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

प्रमाण: मान लिया कि $\log_b a = x \Rightarrow b^x = a \Rightarrow b = a^{\frac{1}{x}}$ अब $b = a^{\frac{1}{x}}$ को लघुगणक के रूप में व्यक्त करने पर,

$$\log_a b = \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_b a}$$

या, $\log_b a = \frac{1}{\log_a (b)}$

उदा. $\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$

4. $a^{\log_a n} = n$

प्रमाण: मान लिया कि $x = a^{\log_a n}$

उपर्युक्त घातांक तादात्म्य को लघुगणक के रूप में व्यक्त करने पर,

$\log_a (x) = \log_a (n)$

$\therefore x = n$

या, $a^{\log_a n} = n$

5. $\log_{n^y} (n^x) = \frac{x}{y}$

प्रमाण: मान लिया कि $\log_{n^y} (n^x) = z$

$$\Rightarrow (n^y)^z = n^x$$

$$\Rightarrow n^{yz} = n^x \Rightarrow yz = x$$

$$\therefore z = \frac{x}{y}$$

$$\therefore \log_{n^y} (n^x) = \frac{x}{y}$$

कुछ हल किए गए उदाहरण

उदा. 1: यदि $\log_3 a = 4$ तो a का मान निकालें।

हल: $\log_3 a = 4 \Rightarrow 3^4 = a$

$\therefore a = 81$

उदा. 2: $2^{\log_2 5}$ का मान निकालें।

हल: मान लिया कि $2^{\log_2 5} = x$

$\therefore \log_2(x) = \log_2 5$

$\Rightarrow x = 5$

$\therefore 2\log_2 5 = 5$

नोट: यदि आपको गुण संख्या (4) याद हो तो सीधे उत्तर तक भी पहुँचा जा सकता है।

उदा. 3: $3^{2-\log_3 5}$ का मान ज्ञात करें।

हल: $3^{2-\log_3 5^{(-1)}} = 3^2 \times 5^{-1}$ (गुण संख्या (4) से) $= \frac{9}{5}$

उदा. 4: $\log_{25} 125 - \log_8 4$ का मान निकालें।

हल: $\log_{25} 125 - \log_8 4$

$\log_5 2(5^3) - \log_2 3(2^3) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}$ (गुण संख्या 5 से) $= \frac{5}{6}$

उदा. 5: यदि $\log x = \log 5 + 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 25$ तो x का मान निकालें।

हल: $\log x = \log 5 + 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 25$

$= \log 5 + \log 3^2 - \log(25)^{1/2}$

$= \log 5 + \log 9 - \log 5 = \log 9$

$\therefore x = 9$

उदा. 6: यदि $\log_3[\log_4(\log_2 x)] = 0$ तो x का मान बताएँ।

हल: $\log_3[\log_4(\log_2 x)] = \log_3 1$ (As, $\log_3 1 = 0$)

या, $\log_4(\log_2 x) = 1$

या, $4^1 = \log_2 x$

या, $\log_2 x = 4$

या, $2^4 = x \;\therefore x = 16$

उदा. 7: यदि $\log_{10} m = b - \log_{10} n$ तो m का मान निकालें।

हल: यहाँ, $\log_{10} m = b - \log_{10} n$

$\Rightarrow \log_{10} m + \log_{10} n = b$

$\Rightarrow \log_{10}(m \times n) = b$

$\Rightarrow 10^b = mn$

$\therefore m = \frac{10^b}{n}$

उदा. 8: यदि $\log 8 = 0.9031$ एवं $\log 9 = 0.9542$ तो $\log 6$ का मान निकालें।

हल: $\log 8 = \log(2)^3 = 3\log 2$

$\therefore 3\log 2 = 0.9031$

$$\therefore \log 2 = \frac{0.9031}{3} = 0.3010$$

अब, $\log 9 = \log(3)^2 = 2\log 3$

$\therefore 2\log 3 = 0.9542$

$\therefore \log 3 = 0.4771$

फिर, $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$

उदा. 9: प्रमाणित करें कि $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

हल: मान लिया कि $\dfrac{\log_b x}{\log_b a} = y$

या, $\log_b x = y\log_b a$

या, $\log_b x = \log_b(a^y)$

$x = a^y$

$$\log_a(x) = \log_a(a^y) = y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

नोट: उपर्युक्त तादात्म्य को लघुगणक की एक महत्वपूर्ण विशेषता के रूप में स्वीकार किया जाता है। इसलिए इसे याद रखें।

उदा. 10: यदि $\log 2 = 0.3010$ एवं $\log 3 = 0.4771$ तो x का कौन-सा मान समीकरण $3^{x+3} = 135$ (लगभग) को संतुष्ट करता है।

हल: दिया गया है कि $3^{x+3} = 135$

या, $3^x \times 3^3 = 135$

$$\therefore 3^x = \frac{135}{27} = 5$$

$$\Rightarrow \log_3 5 = x$$

$$\Rightarrow \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} = x$$ (उदा.-9 में दी गई विशेषता के आधार पर)

$$\Rightarrow \frac{\log_{10}(10 \div 2)}{\log_{10} 3} = x$$

$$\Rightarrow \frac{\log 10 - \log_{10} 2}{\log_{10} 3} = x \quad \Rightarrow \frac{1 - 0.3010}{0.4771} = x \quad \therefore x \approx 1.5 \text{ (लगभग)}$$

अभ्यास प्रश्न

1. $16^{\log_4 5} = ?$

1) 5 2) 16 3) 25 4) 30 5) इनमें से कोई नहीं

2. $\log_{10}(.0001) = ?$

1) 4 2) 1 3) 0 4) −4 5) इनमें से कोई नहीं

3. $\log_5 5\{\log_5 25 + \log_5 125\} = ?$

1) 2 2) 1 3) 5 4) 4 5) इनमें से कोई नहीं

4. $\log_b a \log_c b \log_c b = ?$

1) 0 2) log(abc) 3) 1 4) 10 5) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $a^x = b, b^y = c$ एवं $c^z = a$ तो xyz का मान है

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) इनमें से कोई नहीं

6. समीकरण $\log_a x + \log_a(1 + x) = 0$ को लिखा जा सकता है

1) $x^2 + x - 1 = 0$ 2) $x^2 + x + 1 = 0$ 3) $x^2 + x - e = 0$
4) $x^2 + x + e = 0$ 5) इनमें से कोई नहीं

7. $\log_2 7$ कैसी संख्या है?

1) पूर्णांक 2) परिमेय 3) अपरिमेय 4) रूढ़ 5) इनमें से कोई नहीं

8. $\log 8 + \log\frac{1}{8}$ का मान बताएँ।

1) 0 2) 1 3) 2 4) log64 5) इनमें से कोई नहीं

9. $[\log_{10}(5\log_{10}100]^2$ का मान बताएँ।

1) 0 2) 1 3) 2 4) 4 5) 10

10. $\log\left(\frac{a^2}{bc}\right) + \log\left(\frac{b^2}{ac}\right) + \log\left(\frac{c^2}{ab}\right)$ का मान है

1) 1 2) 0 3) abc 4) $a^2b^2c^2$ 5) इनमें से कोई नहीं

11. $\log\frac{9}{8} - \log\frac{27}{32} + \log\frac{3}{4}$ का मान है

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) 4

12. $\log_2 3 \times \log_3 2 \times \log_3 4 \times \log_4 3$ का मान है

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) इनमें से कोई नहीं

13. $2^{2 + \log_2 5}$ का मान है

1) 2 2) 4 3) 10 4) 20 5) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$ तो x का मान है

1) 2 2) 4 3) 8 4) 64 5) इनमें से कोई नहीं

15. यदि $\log_5[\log_2(\log_3 x)]=0$ तो x का मान है

1) 30 2) 9 3) 21 4) 1 5) इनमें से कोई नहीं

16. $\log_4 8 \times \log_8 4$ का मान है

1) 0 2) 1 3) 4 4) 8 5) इनमें से कोई नहीं

17. $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} - \log_a b$ का मान है

1) 0 2) 1 3) a 4) ab 5) इनमें से कोई नहीं

18. आधार $2\sqrt{3}$ पर 2828 का लघुगणक है

1) 2 2) 4 3) 6 4) 8 5) इनमें से कोई नहीं

19. $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{6}$ तो a का मान निकालें।

1) 9 2) 27 3) 18 4) 3 5) 1

20. $3^{2+\log_3 5}$ का मान है

1) 20 2) 30 3) 45 4) 50 5) इनमें से कोई नहीं

उत्तर

1. 3; $16^{\log_4 5} = x$

या, $4^{2\log_4 5} = x$

या, $4^{\log_4 25} = x$

या, $\log_4(x) = \log_4(25)$

$\therefore x = 25$

2. 4, $\log_{10}(0.0001) = \log_{10}(10^{-4}) = -4\log_{10}10 = -4 \times 1 = -4$

3. 1; $\log_5 5\{\log_5 25 \times 125\} = \log_5 5\{5\log_5 5\} = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2$

4. 1; $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c$

$$= \frac{\log_c a}{\log_c b} \times \log_c b \times \log_a c \left[\text{चुँकि, } \log_x y = \frac{\log_z y}{\log_z x}\right]$$

$$= \log_c a \times \log_a c = 1 \left[\text{चुँकि, } \log_c a = \frac{1}{\log_a c}\right]$$

5. 2; $a^x = b \Rightarrow \log_a b = x$

$b^y = c \Rightarrow \log_b c = y$

$c^z = a \Rightarrow \log_c a = z$

$\therefore x \times y \times z = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$ (प्रश्न-4 से,)

6. 1; $\log_a x + \log_a(1+x) = 0$

$\Rightarrow \log_a x(1+x) = \log_a 1$ (चूँकि $\log 1 = 0$)

$\Rightarrow x(1+x) = 1$

$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

7. 3; यदि संभव है तो मान लिया जाए कि $\log_2 7$ एक परिमेय संख्या है। मान लिया कि $\log_2 7$ $= \frac{p}{q}$ जहाँ p एवं q पूर्णांक हैं तथा परस्पर रूढ़ हैं।

तब, $p/q = \log_2 7 \Rightarrow 7 = 2^{p/q} \Rightarrow 2^p = 7^2$, जो कि गलत है क्योंकि वाम पक्ष (LHS) सम संख्या है ओर दायाँ पक्ष (RHS)एक विषम संख्या है।

$\log_2 7$ पूर्णांक संख्या नहीं है, इसलिए इसे रूढ़ संख्या भी नहीं कहा जा सकता है।

8. 1; $\log 8 + \log\left(\frac{1}{8}\right) = \log\left(8 \times \frac{1}{8}\right) = \log 1 = 0$

9. 2; $\left[\log_{10}\left(5\log_{10} 10^2\right)\right]^2 = \left[\log_{10}(10)\right]^2 = (1)^2 = 0$

10. 2; प्रदत्त व्यंजक = $\log\left(\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}\right) = \log 1 = 0$

11. 1; प्रदत्त व्यंजक = $\log\left(\frac{9}{8} \div \frac{27}{32} \times \frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{9}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{32}{27}\right) = \log 1 = 0$

12. 1; प्रदत्त व्यंजक = $\log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} \times \log_2 4 \times \frac{1}{\log_4 3} = 1 \times 1 = 1$

13. 4; मान लिया कि $2^{2+\log_2 5} = x$

$\Rightarrow \log_2 x = 2 + \log_2 5$

$\Rightarrow \log_2 x = 2\log_2 2 + \log_2 5$

$\Rightarrow \log_2 x = \log_2 4 + \log_2 5$

$\Rightarrow \log_2 x = \log_2(4 \times 5) = \log_2 20$

$\therefore x = 20$

14. 5; दिया गया है कि $\log_2 3x + \log_2 2x + \log_2 x = 11$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 11$

$$\Rightarrow \frac{11}{6}\log_2 x = 11$$

$$\Rightarrow \log_2 x = 11 \times \frac{6}{11} = 6$$

$\therefore 2^6 = x = 128$

15. $\log_5[\log_2(\log_3 x)] = 0$

$\Rightarrow \log_2(\log_3 x) = 1 = \log_2 2$

$\therefore \log_3 x = 2$

$\therefore x = 3^2$

या, $x = 9$

16. 2; प्रदत्त व्यंजक = $\log_4 8 \times \frac{1}{\log_4 8} = 1$

17. 2; दिया गया है कि $\log_a x = \frac{\log_{ab} x}{\log_{ab} a}$

$\therefore$ प्रदत्त व्यंजक $= \frac{1}{\log_{ab} a} - \log_a b$

$$= \log_a ab - \log_a b = \log_a \frac{ab}{b} = \log_a a = 1$$

18. 2; $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$$= (2)^4 (\sqrt{3})^4 = (2\sqrt{3})^4$$

अब, $\log_{2\sqrt{3}} 144 = 4$

19. 2; $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow a^{1/6} = \sqrt{3}$

$\therefore a = (\sqrt{3})^6 = 3^3 = 27$

20. 3; $3^{2+\log_3 5}$ या, $3^2 \times 3^{\log_3 5} = 9 \times 5 = 45$