पाठ 10

समांतर रेखाएँ

आइए सीखें

- समांतर रेखाओं के गुणधर्म।
- एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ।
- एक ही रेखा पर लम्बवत् दो रेखाएँ।
- अंत: खंडों की अवधारणा को समझना तथा उनका रचनाओं में उपयोग।
- त्रिभुज की दो भुजाओं को समद्विभाजित करने वाली रेखा।
- समांतर रेखाएँ और समान अंत:खंड।
- त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा द्वारा अन्य भुजाओं पर काटे गए रेखाखण्डों का अनुपात।
- समांतर रेखाएँ और समानुपाती अन्त:खंड।
- रेखाखण्ड का समान भागों में विभाजन।

पिछली कक्षाओं में हम बिन्दु, रेखा, किरण, रेखाखण्ड, लम्बवत् रेखा तथा उनके कुछ गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। अब इस पाठ में समांतर रेखाओं के बारे में अध्ययन करेंगे।

1. जब हम रेल की पटरियों को देखते हैं, तो उनके बीच की दूरी सभी स्थानों पर समान दिखाई देती हैं। कितनी भी दूर जाए दोनों पटरियां कभी नहीं मिलेगी।
2. जब हम कॉपी में लाइनों को देखते हैं तो दो लाइनों के बीच का अंतर समान दिखाई देता है। दो लाइनों को कितना भी आगे बढ़ाए वे कभी नहीं मिलेगी।
3. जब आप कक्षा में लगी खिड़की को देखते हैं तो उनमें लगे लोहे के दो सरियों के बीच का अंतर समान दिखाई देता है। सरिए कितने भी लम्बाई के हो वे कभी नहीं मिलेंगे।

इन उदाहरणों में रेल की दो पटरियों, कॉपी की दो लाईनों और खिड़की के दो सरियों के बीच अंतर समान है। अत: हम कह सकते हैं कि रेल की पटरियाँ, कॉपी की दो लाईनें और खिड़की में लगे दो सरिये समांतर हैं।

इसी प्रकार यदि दो रेखाओं के बीच का अंतर समान हो या रेखाओं को दोनों ओर कितना भी बढ़ाने पर वे प्रतिच्छेद न करें तो वे समांतर रेखाएँ कहलाती हैं, जैसे

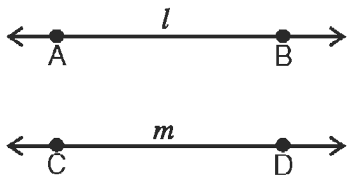
1. आयत के आमने-सामने की भुजाएँ
2. वर्ग के आमने-सामने की भुजाएँ

3. लोहे की सीढ़ी के आमने-सामने के पाईप

4. श्यामपट के आमने-सामने के किनारे।

10.1 समांतर रेखाओं के मौलिक गुण धर्म :

1. समान्तर रेखाएँ एक ही तल में स्थित होती हैं।
2. इन रेखाओं को कितना भी बढ़ाया जाए तो भी वे प्रतिच्छेद नहीं करतीं।
3. इन रेखाओं के बीच की दूरी सभी स्थानों पर समान रहती है। यह दूरी इन दोनों समांतर रेखाओं के बीच की लम्बवत दूरी कहलाती हैं।
4. समांतर रेखाओं को चिह्न '||' द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। नीचे दी गई आकृति में दो समांतर रेखाएँ दर्शाई गई हैं



इन समांतर रेखाओं को हम AB||CD लिखते हैं।

या $l \parallel m$

या, रेखा AB समांतर है रेखा CD के

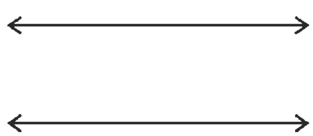
क्रियाकलाप : 1

नीचे दी गई आकृतियों में रेखाओं के जोड़े दिखाए गए हैं

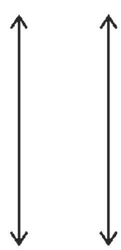
(I) उनको नामांकित कीजिए।

(II) कौन-कौन से जोड़े समांतर/प्रतिच्छेदी है?

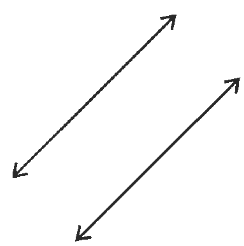
दी गई तालिका में लिखिए



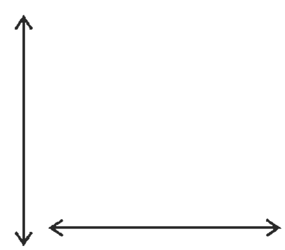
आकृति 10.1



आकृति 10.2



आकृति 10.3



आकृति 10.4

तालिका

आकृति	नामांकित रेखा	समांतर/प्रतिच्छेदी
1.		
2.		
3.		
4.		

निष्कर्ष : किसी तल में स्थित दो रेखाएँ या तो समांतर होती हैं या प्रतिच्छेदी होती है।

10.11 समांतर किरणें दी गई आकृति में दो किरणें $\overrightarrow{BA}$ और $\overrightarrow{CD}$ खींची गई हैं।

आकृति 10.5

ये किरणें रेखा m और n को निर्धारित करती हैं। यदि रेखा m||n हो तो किरण $\overrightarrow{BA}$ और किरण $\overrightarrow{CD}$ भी समांतर होगी।

इस प्रकार यदि दो किरणें अपने प्रारंभिक बिन्दु के दूसरी ओर अपरिमित रूप से बढ़ाने पर किसी भी बिन्दु पर प्रतिच्छेद नहीं करें दो दोनों किरणें समांतर होंगी।

10.12 समांतर रेखाखण्ड

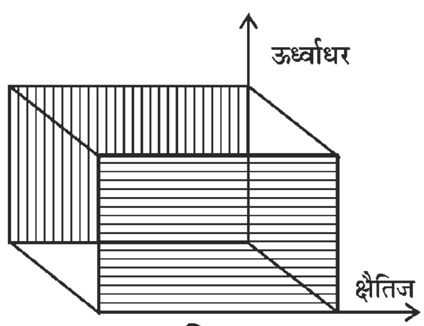
दी गई आकृति में दो रेखाखण्ड PQ और RS समांतर रेखाओं *l* और m के भाग हैं। यदि रेखा *l* || m हो तो रेखाखण्ड PQ || RS के।

इस प्रकार : दो रेखाखण्ड समांतर होते हैं, यदि वे दोनों दिशाओं में अपरिमित रूप से बढ़ाने पर किसी भी बिंदु पर प्रतिच्छेद नहीं करते हों।

याद रखिए, यह आवश्यक नहीं है कि अलग-अलग तल में स्थित दो अप्रतिच्छेदी रेखाएँ सदैव समांतर ही हों।

उदाहरण 1. किसी घन की दो कोरों पर विचार कीजिए, इनमें से एक क्षैतिज हो और दूसरी सम्मुख सतह में ऊर्ध्वाधर हो। इन्हें कितना भी बढ़ाया जाने पर वे नहीं मिलेंगी, क्योंकि ये नि:संदेह समांतर नहीं हैं। यह इसलिए कि ये दो कोरें एक ही तल में नहीं हैं।

घन



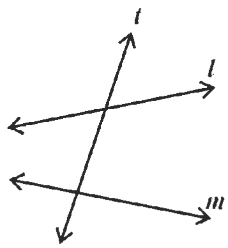
आकृति 10.6

टिप्पणी : प्रथम तल में – क्षैतिज कोर
तीसरे तल में – ऊर्ध्वाधर कोर

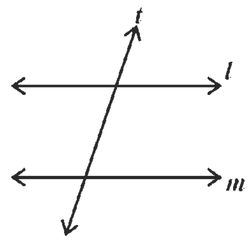
10.13 तिर्यक छेदी रेखा :

यदि कोई रेखा, दो दी गई रेखाओं को दो अलग-अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें तो यह उनकी तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।

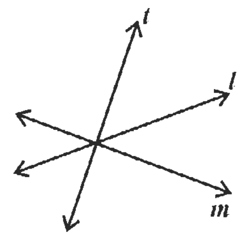
निम्नलिखित आकृतियों को देखकर तिर्यक छेदी रेखा बताइए :



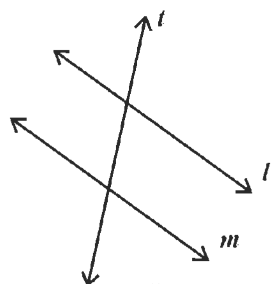
(1)



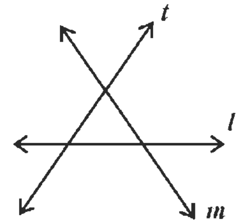
(2)



(3)



(4)

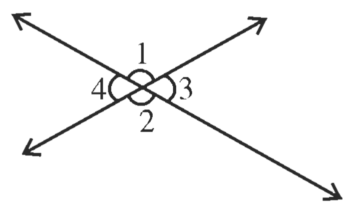


(5)

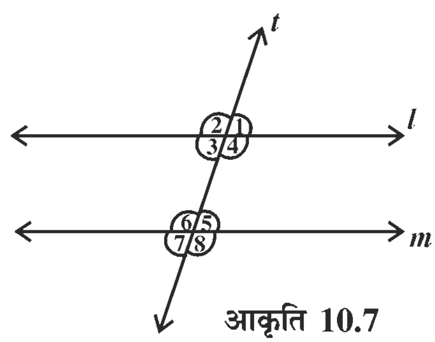
उदाहरण 2. उपरोक्त आकृतियों (1), (2), (4) और (5) में रेखा t, रेखाओं l और m की तिर्यक छेदी रेखा है।

आकृति (3) में रेखा t, रेखाओं l और m की तिर्यकछेदी रेखा नहीं है (क्यों?) रेखा t रेखाओं l और m को दो अलग-अलग बिंदुओं पर प्रतिच्छेद नहीं करतीं।

स्मरण कीजिए जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेदित होती हैं, तो वे चार कोण बनाती हैं। इनमें $\angle 1$ और $\angle 2$ के युग्म तथा $\angle 3$ और $\angle 4$ के युग्म को शीर्षाभिमुख कोण कहते हैं।



इसी प्रकार दी हुई दो रेखाओं एवं उनकी तिर्यक छेदी रेखा से बनने वाले कोणों की संख्या आठ होती है।



आकृति 10.7

आकृति (10.7) में रेखाओं l, m तथा तिर्यक छेदी रेखा t द्वारा आठ कोण बनते हैं, उन्हें $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ और $\angle 8$ द्वारा नामांकित किया गया है।

इन कोणों की स्थिति के अनुसार विभिन्न युग्म बनाए जा सकते हैं। इन जोड़ों के नाम इस प्रकार है

(1) संगत कोण : कोण युग्म $\angle 1$ और $\angle 5$; $\angle 2$ और $\angle 6$; $\angle 3$ और $\angle 7$ तथा $\angle 4$ और $\angle 8$

(2) एकान्तर कोण : कोणयुग्म $\angle 3$ और $\angle 5$ तथा $\angle 4$ और $\angle 6$

(3) तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्त:कोण : कोण युग्म $\angle 4$ और $\angle 5$ तथा $\angle 3$ और $\angle 6$

यदि l और m रेखाएँ समांतर हैं, तो इन युग्मों के कोणों में विशेष संबंध होता है।

इस प्रकार दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक छेदी रेखा काटे तो,

(1) संगतकोणों के प्रत्येक युग्म में दोनों कोण बराबर होते हैं। आकृति 10.7 में $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 7$

(2) एकान्तर कोणों के प्रत्येक युग्म में दोनों कोण बराबर होते हैं। $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$

(3) तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर स्थित अंत:कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण संपूरक होते हैं। $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$ और $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$

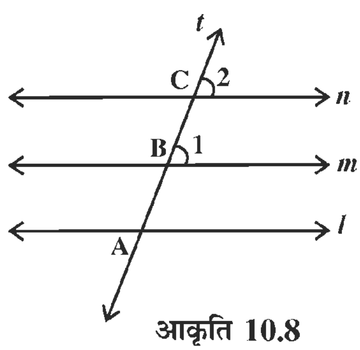
10.14 एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ

माना कि किसी तल में एक रेखा l दी है (आकृति 10.8)। इसी तल में l के समांतर दो रेखाएँ m और n पर विचार कीजिए। यहाँ $m \parallel l$ और $n \parallel l$, तो m और n में कौन सा संबंध है? क्या ये रेखाएँ एक-दूसरे के समांतर है?

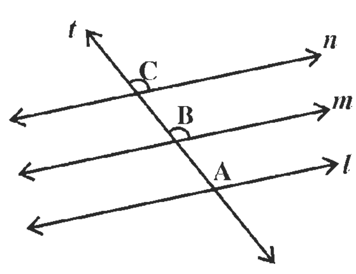
आइए, हम एक क्रियाकलाप करते हैं।

क्रियाकलाप 2

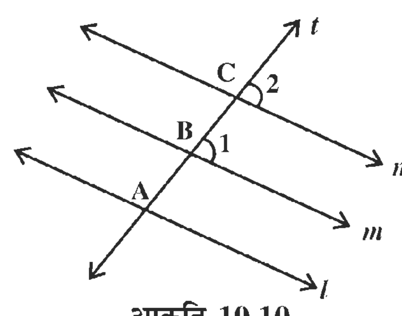
1. एक कागज पर रेखा l खींचिए।
2. स्केल और सेट-स्क्वेयर की सहायता से l के समांतर दो रेखाएँ m और n खींचिए।
3. अब एक तिर्यक रेखा t इस प्रकार खींचिए कि यह m को B पर तथा n को C पर प्रतिच्छेद करें।
4. चाँदे की सहायता से बने हुए संगत कोण $\angle 1$ और $\angle 2$ का मापन कीजिए तथा $\angle 1 - \angle 2$ का अन्तर ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.8



आकृति 10.9



आकृति 10.10

उपर्युक्त प्रयोग को दो और आकृतियों की सहायता से दोहराइए। सुविधा के लिए प्रत्येक आकृति में कोणों का नामांकन एक ही प्रकार से करें। प्रत्येक आकृति के लिए कोण $\angle 1$ और $\angle 2$ का मापन और इनका अंतर $\angle 1 - \angle 2$ ज्ञात कीजिए तथा अपने प्रेक्षणों को तालिका में लिखिए

तालिका

आकृति	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 1 - \angle 2$ **अन्तर**
10.8			
10.9			
10.10			

इस तालिका में अन्तर $\angle 1 - \angle 2$ या तो शून्य होता है। यदि कहीं अन्तर आता है तो वह मापन की त्रुटि के कारण है।

इस प्रकार प्रत्येक स्थिति में $\angle 1 = \angle 2$ है।

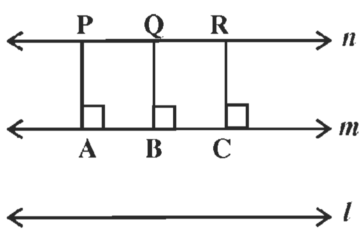
$\because$ $\angle 1$ और $\angle 2$ संगत कोण है।

$\therefore$ प्रत्येक स्थिति में $m \parallel n$ है।

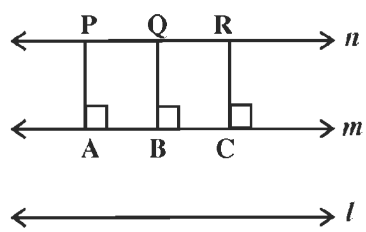
एक ही रेखा के समांतर खींची गई दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।

क्रियाकलाप 3

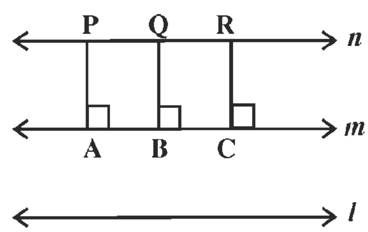
1. एक कागज पर कोई रेखा l खींचिए।
2. पटरी और सेट-स्क्वेयर की सहायता से l के समांतर दो रेखाएँ m और n खींचिए।
3. अब रेखा n पर तीन बिन्दु क्रमशः P, Q और R लीजिए।
4. इन बिन्दुओं (P, Q, R) से रेखा m पर क्रमशः लम्ब, PA, QB और RC खींचिए ताकि A, B और C रेखा m पर स्थित हों (आकृति 10.11 में)
5. इसी प्रकार दो अन्य आकृतियाँ खींचकर प्रयोग को दोहराएँ। प्रत्येक स्थिति में लिए आकृति का नामांकन एक ही प्रकार से कीजिए।



आकृति 10.11



आकृति 10.12



आकृति 10.13

6. प्रत्येक स्थिति में PA, QB और RC को स्केल की सहायता से मापिए।
7. इनके अंतरों (PA – QB), (QB – RC) और (RC – PA) को ज्ञात कीजिए।

अपने प्रेक्षणों को एक तालिका के रूप में लिखिए।

तालिका

आकृति	PA	QB	RC	PA-QB	QB-RC	RC-PA
10.11						
10.12						
10.13						

प्रत्येक स्थिति में, लम्बवत दूरियों के अंतर PA – QB, QB – RC और RC – PA शून्य हैं यदि कहीं अन्तर आता है तो वह मापन की त्रुटि के कारण है।

इस प्रकार प्रत्येक स्थिति में PA = QB = RC है। अर्थात दोनों रेखाओं m और n के बीच की लम्बवत दूरियाँ प्रत्येक बिन्दु पर बराबर है।

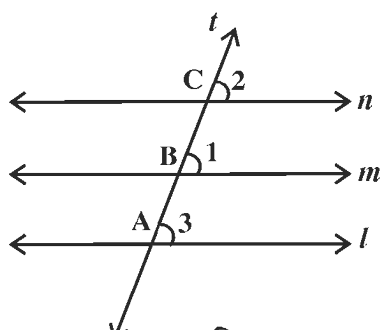
$\therefore$ m || n है।

उपर्युक्त दोनों प्रयोगों से हमें निम्नलिखित गुण प्राप्त होता है :

दो रेखाएँ, जो एक ही रेखा के समांतर हों, परस्पर समांतर होती हैं।

टिप्पणी : उपर्युक्त कथन को निम्नानुसार भी सिद्ध किया जा सकता है।

आकृति 10.14 के अनुसार मान लीजिए कि m || *l* और n || *l* तथा *l*, m, और n को तिर्यक छेदी रेखा t क्रमशः A, B और C बिन्दुओं पर काटती है, जिससे संगत कोणों को युग्म $\angle 1$, $\angle 3$; $\angle 2$, $\angle 3$ तथा $\angle 1$, $\angle 2$ बनते हैं।



आकृति 10.14

$\because$ m || *l* $\qquad$ $\because$ n || *l*

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ $\qquad$ $\therefore \angle 2 = \angle 3$

इन दोनों परिणामों से हमें ज्ञात होता है कि $\angle 1 = \angle 2$

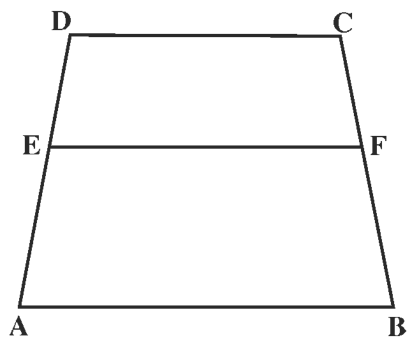
परन्तु ये संगतकोण हैं। अतः m || n

इस परिणाम से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि

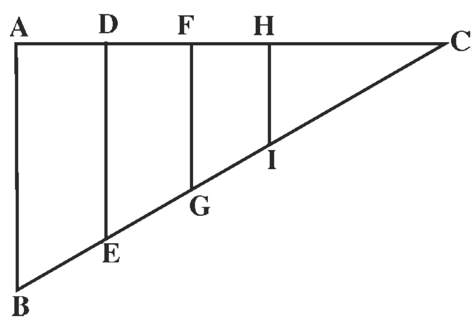
यदि दो रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर हों तो वे परस्पर समांतर होती हैं।

प्रश्नावली 10.1

1. नीचे दी गई आकृति में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसमें AB ‖ DC है। रेखाखण्ड EF ‖ AB इस प्रकार है कि बिन्दु E, AD में तथा F, BC में है।
   (I) क्या EF और DC भी समांतर हैं? यदि हाँ, तो क्यों?
   (II) इस आकृति में कितने समलम्ब चतुर्भुज बने हैं? उनके नाम लिखिए।



2. नीचे दी गई आकृति में ΔABC की भुजा AB के समांतर रेखाखण्ड DE, FG और HI खींचे गए हैं। आकृति में कितने समलम्ब चतुर्भुज हैं? प्रत्येक का नाम लिखिए।

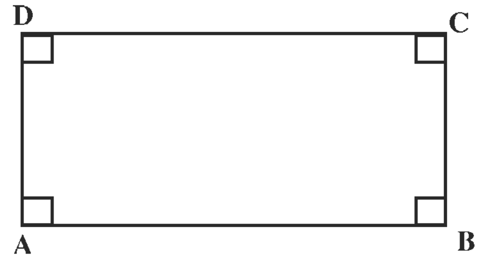


3. किसी तल में l समांतर m ($l \parallel m$) दी हुई है। उसी तल में रेखा p, l को प्रतिच्छेद करती है। निम्नांकित में से कौन सा कथन सत्य है :
   (I) p ‖ m
   (II) P रेखा m को प्रतिच्छेद करती है।
   (III) P न तो m के समांतर है और न ही इसे प्रतित्छेद करती है।

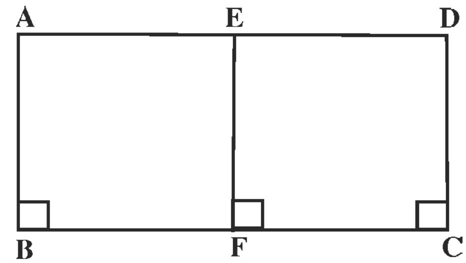
4. नीचे दी गई आकृति में ABCD एक चतुर्भुज है। इसका प्रत्येक कोण समकोण है :

(I) क्या AD ॥ BC है? क्यों?

(II) क्या AB ॥ DC है? क्यों?



5. नीचे दी गई आकृति में AB, EF एवं DC में से प्रत्येक BC पर लम्ब है। इस आकृति में समांतर रेखाओं के कितने युग्म है? प्रत्येक का नाम लिखिए।



10.2 एक ही रेखा पर लम्बवत् दो रेखाएँ :

माना कि किसी तल में हमें एक रेखा l दी हुई है।

इसी तल में ऐसी दो रेखाओं m और n पर विचार करें जो रेखा l पर क्रमशः p और Q बिन्दुओं पर लम्ब हैं (आकृति 10.15)

m और n रेखाओं में क्या संबंध है? क्या ये परस्पर समांतर हैं?

रेखा n रेखा l पर लम्ब है। अतः $\angle 1 = 90^0$

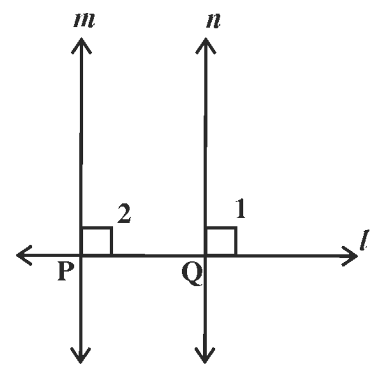
रेखा m रेखा l पर लम्ब है। अतः $\angle 2 = 90^0$

इस प्रकार $\angle 1 = \angle 2 = 90^0$

परन्तु $\angle 1$ और $\angle 2$ संगत कोण है जो बराबर है।

अतः रेखाएँ m ॥ n

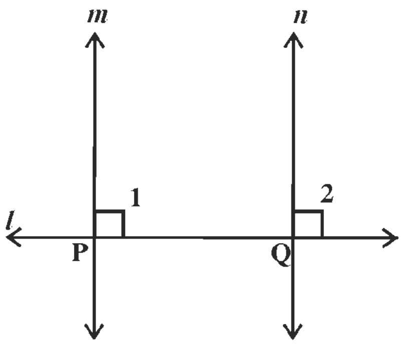
आइए, हम क्रियाकलाप द्वारा इसका सत्यापन करें।



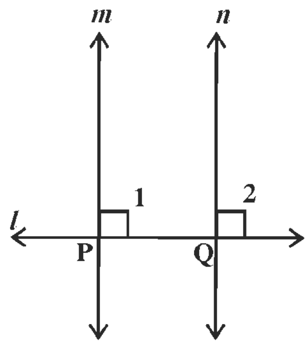
आकृति 10.15

क्रियाकलाप 4

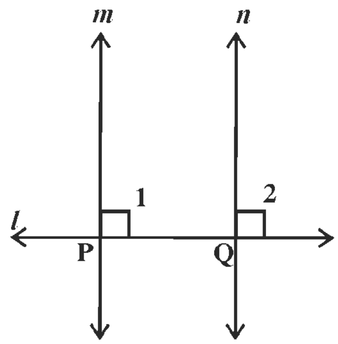
1. एक कागज पर कोई रेखा l खींचिए। इस पर कोई दो बिन्दु P और Q लीजिए।
2. स्केल और सेट-स्क्वेयर की सहायता से रेखा l पर P बिन्दु से लम्ब m खींचिए तथा Q बिन्दु से लम्ब n खींचिए।
3. बिन्दु P और Q पर संगत कोण $\angle 1$ और $\angle 2$ आकृति 10.16 के अनुसार नाम दीजिए। इसी प्रकार P और Q के बीच अलग-अलग दूरी लेकर आकृति 10.17 और 10.18 बनाइए।



आकृति 10.16



आकृति 10.17



आकृति 10.18

$\angle 1$ और $\angle 2$ को चाँदे की सहायता से नापिए और दी गई तालिका भरिए।

तालिका

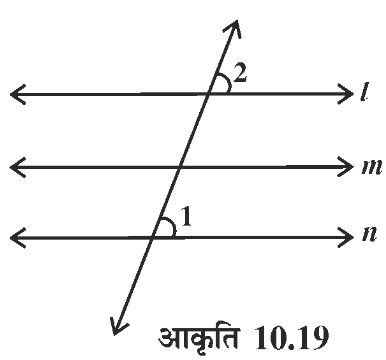
आकृति	$\angle P = \angle 1$	$\angle Q = \angle 2$	$\angle 1$ और $\angle 2$ में संबंध
10.16			
10.17			
10.18			

प्रत्येक स्थिति में $\angle 1 = \angle 2$ प्राप्त होते हैं। इससे हम निम्नलिखित निष्कर्ष पर पहुँचते हैं :

> ऐसी दो रेखाएँ, जो एक ही तल में हों तथा उसी तल में खींची गई एक अन्य रेखा पर लम्ब हों, तो दोनों रेखाएँ एक-दूसरे के समांतर होती हैं।

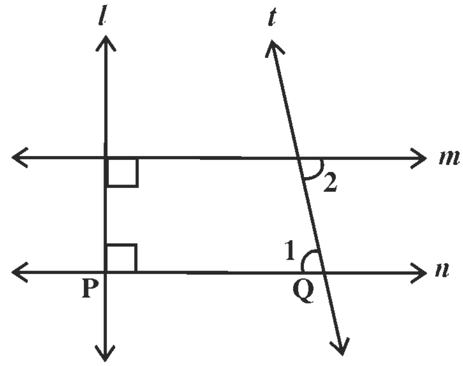
प्रश्नावली 10.2

1. रेखा l खींचिए। इससे 4 सेमी दूरी पर रेखा m इस प्रकार खींचिए कि $m \parallel l$.
2. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें BC=2.5 सेमी AB=2 सेमी तथा A से BC तक खींचा गया शीर्ष लम्ब 1.5 सेमी है।
3. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 6.5 सेमी, AD = 2.4 सेमी तथा A से BC पर खींचा गया लम्ब AL = 2.5 सेमी है।
4. आकृति 10.19 में $l \parallel m$ तथा $m \parallel n$ है। यदि $\angle 1 = 70^0$ है तो $\angle 2$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.19

5. आकृति 10.20 में $m \perp l$ और $n \perp l$ है तथा तिर्यक रेखा t क्रमश: n और m के साथ ∠1 और ∠2 बनाती हैं। यदि $\angle 1 = 80^0$ है, तो ∠2 ज्ञात कीजिए।

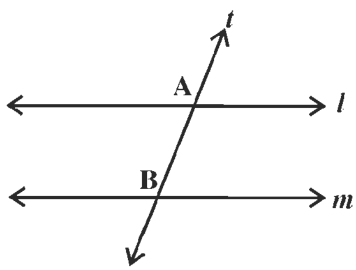


आकृति 10.20

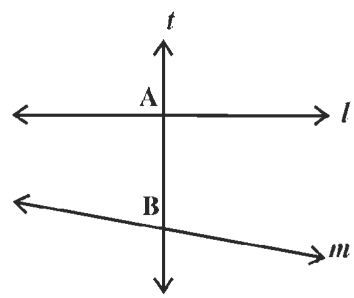
10.3 अंत:खंड

नीचे दी गई आकृतियों 10.21, 10.22 और 10.23 का अवलोकन कीजिए।

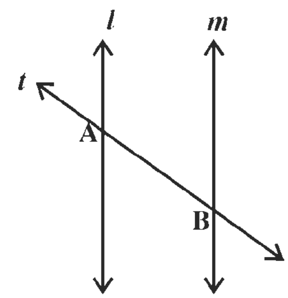
इनमें दो रेखाओं *l* और m को एक तीसरी रेखा t क्रमश: दो अलग-अलग बिंदुओं A और B पर काटती हैं। इस प्रकार दोनों रेखाएँ *l* और m तीसरी रेखा t पर एक रेखाखण्ड AB काटती हैं। इस रेखाखण्ड को हम "अंत:खंड AB" कहते हैं।



आकृति 10.21

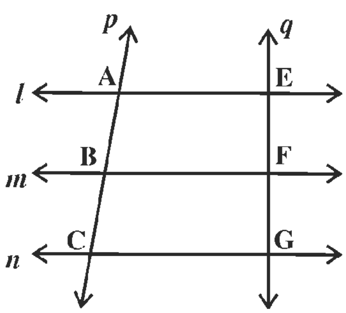


आकृति 10.22

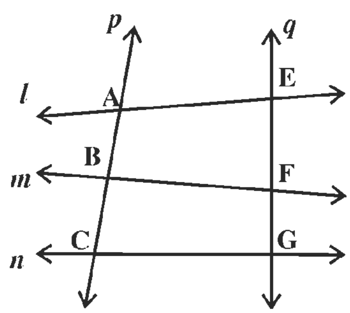


आकृति 10.23

यदि *l*, m और n तीन रेखाएँ हैं तथा तिर्यक छेदी रेखा P उन्हें क्रमश: A, B और C तीन अलग-अलग बिंदुओं पर काटती हैं, (आकृति 10.24 व 10.25) तो हम कहते हैं कि *l*, m और n रेखाएँ, P रेखा पर AB और BC अंत:खंड बनाती हैं।



आकृति 10.24



आकृति 10.25

इसी प्रकार यदि तिर्यक छेदी रेखा q समांतर रेखाओं *l*, m और n को क्रमश: तीन अलग-अलग बिंदुओं E, F और G पर काटें, तो हम कहते हैं कि रेखाएँ *l*, m और n रेखा q रेखा पर अंतरखंड EF और FG बनाती हैं।

यदि रेखाएं *l*, m और n समांतर न हों, तब अंतखंडों AB, BC, EF और FG में कोई संबंध नहीं

होता है। (आकृति 10.25)

किन्तु यदि $l \parallel m \parallel n$ और AB = BC हो, तो EF = FG होगा। (आकृति 10.24)

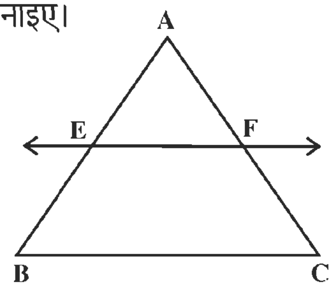
यदि तीन समान्तर रेखाओं को दो तिर्यक रेखाएँ कांटे और एक तिर्यक रेखा पर काटे गए अंत:खंड बराबर हो तो दूसरी तिर्यक रेखा द्वारा कांटे गए अन्त:खंड भी बराबर होंगे।

10.4 त्रिभुज की दो भुजाओं को समद्विभाजित करने वाली रेखा

किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। इसको हम क्रियाकलाप 5 के द्वारा समझते हैं।

क्रियाकलाप 5.

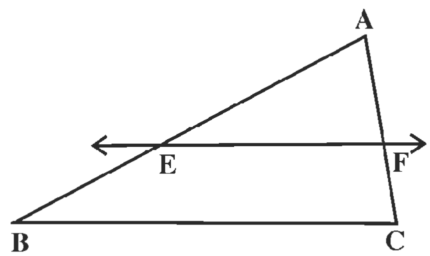
1. आकृति (10.26) के अनुसार एक ΔABC बनाइए।
2. माना कि भुजा AB का मध्य बिंदु E है।



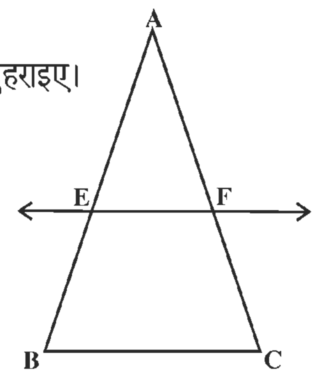
आकृति 10.26

3. बिन्दु E से $EF \parallel BC$ खींचिए जो AC को F पर कांटे।
4. AF और FC का मापन स्केल की सहायता से कीजिए।
5. इनका अन्तर AF – FC ज्ञात कीजिए।

उपर्युक्त प्रयोग को दो अन्य त्रिभुजों 10.27 और 10.28 पर दुहराइए।



आकृति 10.27



आकृति 10.28

AF और FC को नाप कर तालिका को पूरा कीजिए।

तालिका

आकृति क्र.	AF की माप	FC की माप	AF – FC की माप
10.26	...सेमी	....सेमी	....
10.27	.... सेमी.	.... सेमी.	.....
10.28	..... सेमी.	..... सेमी	......

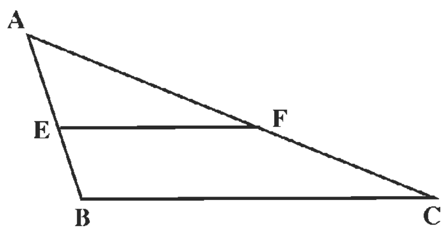
इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में (AF – FC) का मान शून्य है।

निष्कर्ष : किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

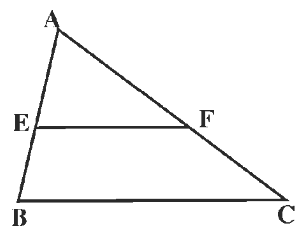
किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समांतर होती है। इसको हम क्रियाकलाप 6 के द्वारा समझते हैं।

क्रियाकलाप 6. आकृति (10.29) के अनुसार ΔABC की रचना कीजिए।

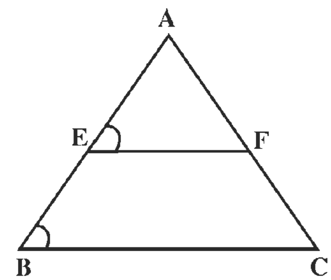
1. ΔABC में भुजा AB को E पर तथा AC को F पर समद्विभाजित कीजिए।
2. EF को मिलाइये।



आकृति 10.29



आकृति 10.30



आकृति 10.31

3. $\angle AEF$ पर $\angle ABC$ का मापन चाँदे की सहायता से कीजिए।
4. इनका अंतर $\angle AEF - \angle ABC$ ज्ञात कीजिए।
5. इसी प्रयोग को दो अन्य त्रिभुजों (चित्र 10.30, 10.31) के लिए दुहराइए। दी गई तालिका को भरिए।

तालिका

आकृति क्र.	$\angle AEF$ का माप	$\angle ABC$ का माप	$\angle AEF - \angle ABC$ का माप
10.29	....	....	....
10.30	....	....	....
10.31	...	....	....

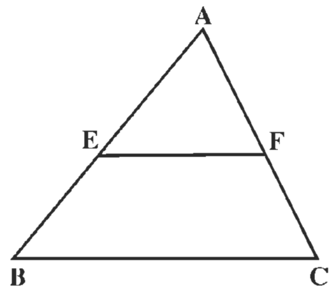
हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में (10.29, 10.30 और 10.31 में) अंतर $\angle AEF - \angle ABC$ शून्य है।

अत: सभी स्थितियों में $\angle AEF$ और $\angle ABC$ समान है। परन्तु ये दोनों संगत कोण हैं, जो तिर्यक छेदी रेखा AB द्वारा रेखाओं EF और BC पर बनाए गए हैं। अत: $EF \parallel BC$

निष्कर्ष : त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड, तीसरी भुजा के समांतर होती है।

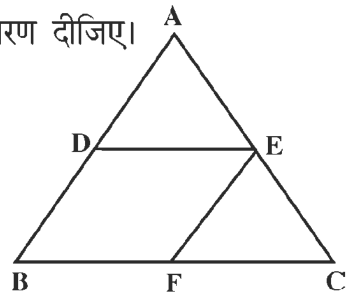
प्रश्नावली 10.3

1. ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$, (आकृति 10.32)AB का मध्य बिन्दु E है तथा $EF \parallel BC$, EF भुजा AC के F बिन्दु पर मिलती है। क्या ΔAEF समद्विबाहु है? कारण बताइए।



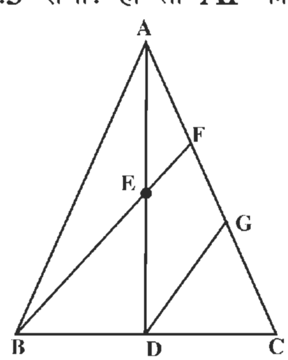
आकृति 10.32

2. आकृति 10.33 में $DE \parallel BC$ और $EF \parallel AB$, यदि AB का मध्य बिन्दु D है, तो क्या BF और FC बराबर होंगे? अपने उत्तर का कारण दीजिए।



आकृति 10.33

3. ΔABC में बिन्दु A से होकर जाने वाली माध्यिका AD है (आकृति 10.34)। AD का मध्य बिन्दु E है। BE को AC के F बिन्दु तक बढ़ाया गया है। EF के समांतर DG खींची गई, जो AC से G पर मिलती है। यदि $AC = 4.5$ सेमी. हो तो AF की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.34

4. ΔABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु क्रमश: D, E, और F है (आकृति 10.35) बताइए कि क्या निम्नांकित कथन सत्य है? यदि हाँ तो क्यों?

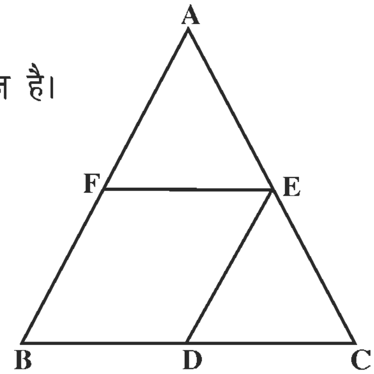
(I) $EF \parallel BC$

(II) $ED \parallel AB$

(III) BDEF एक समांतर चतुर्भुज है।

(IV) $FE = BD$

(V) $EF = \frac{1}{2} BC$



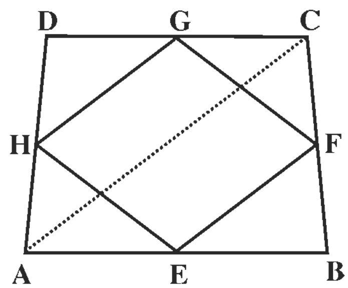
आकृति 10.35

5. ABCD एक चतुर्भुज है (आकृति 10.36)। इसकी भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु क्रमश: E, F, G और H हैं। EF, FG, GH और HE को मिलाया गया है। तब,

(I) क्या $EF \parallel GH$? क्यों?

(II) क्या $FG \parallel HE$? क्यों?

(III) EFGH कौन सी आकृति है?



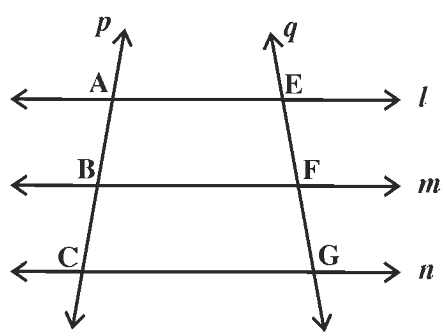
आकृति 10.36

10.5 समांतर रेखाएँ एवं समान अंत:खंड:

यदि तीन समांतर रेखाओं द्वारा किसी तिर्यक रेखा पर काटे गए अंत:खंड बराबर हों तो दूसरी तिर्यकछेदी रेखा पर काटे गए अंत:खंड बराबर होंगे। इसको क्रियाकलाप 7 के द्वारा समझते हैं?

क्रियाकलाप 7. आकृति 10.37 का अवलोकन करें, कोई रेखा P खींचिए।

1. इस रेखा P पर कोई तीन बिन्दु A, B और C क्रमश: इस प्रकार लीजिए कि $AB = BC$.

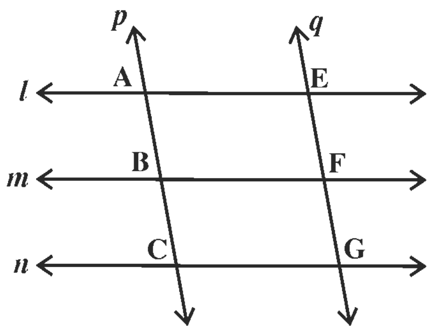


आकृति 10.37

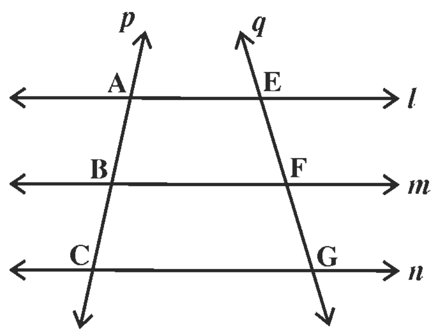
2. बिन्दुओं A, B और C से होती हुई तीन समांतर रेखाएँ खींचिए जो एक अन्य तिर्यक रेखा q को क्रमश: E, F और G पर काटें।

3. EF और FG को मापिए तथा इनका अंतर EF – FG ज्ञात कीजिए।

यह प्रयोग दो बार कीजिए। सरलता के लिए प्रत्येक स्थिति में आकृति को समान अक्षरों से नामांकित कीजिए। अपने प्रेक्षणों को तालिका में लिखिए:



आकृति 10.38

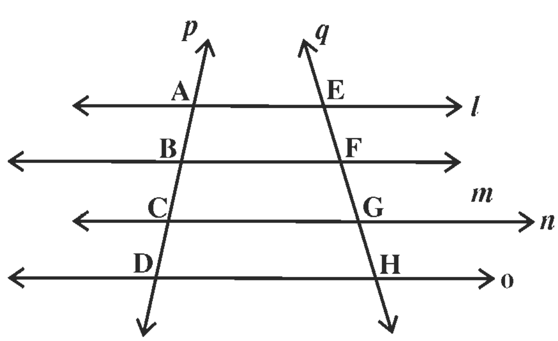


आकृति 10.39

तालिका

आकृति	EF	FG	EF – FG
10.37			
10.38			
10.39			

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में EF – FG या तो शून्य है। अत: प्रत्येक स्थिति में EF = FG. क्या यह गुण उस स्थिति के लिए भी सत्य है जब समांतर रेखाओं की संख्या तीन से अधिक हों?



आकृति 10.40

क्रियाकलाप 7 में हम देख चुके हैं कि यदि $l \parallel m \parallel n$ हो और AB = BC हो तो अंत:खंड EF = FG के होगा।

रेखा O, समांतर रेखाओं l, m और n सभी के समांतर हैं और यदि BC = CD तो FG = GH होगी।

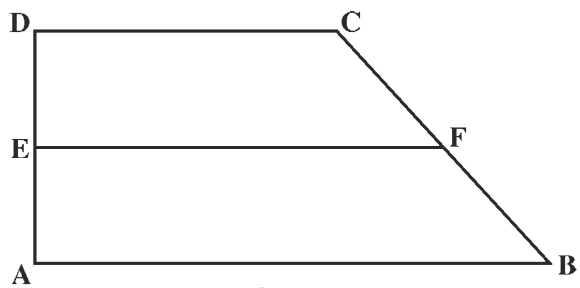
$\because$ AB = BC = CD है। $\therefore$ EF = FG = GH

निष्कर्ष : 1. यदि तीन समांतर रेखाएँ, किसी तिर्यक रेखा पर समान अंत:खंड काटती है, तो वे किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी समान अंत:खंड काटेगी।

2. यदि तीन या अधिक समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक रेखा पर समान अंत:खंड काटती हैं तो वे किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी समान अन्त:खंड काटेगी।

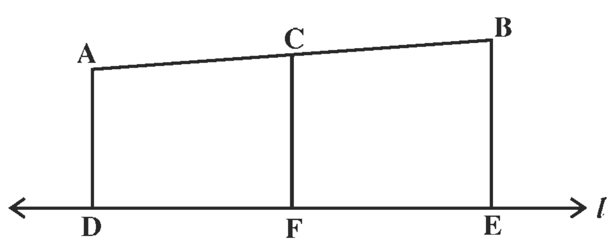
प्रश्नावली 10.4

1. समलंब चतुर्भुज ABCD में AD और BC असमांतर भुजाएँ हैं (आकृति 10.41)। भुजा AD का मध्य बिन्दु E है। AB के समांतर रेखाखण्ड EF, भुजा BC के बिन्दु F पर मिलती हैं। क्या F भुजा BC का मध्य बिन्दु है? यदि हाँ तो क्यों? यदि नहीं, तो क्यों नहीं?



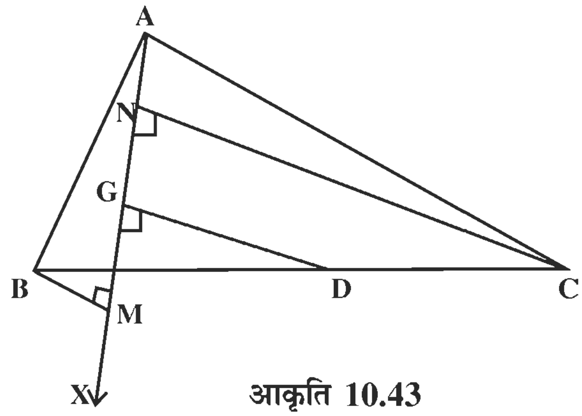
आकृति 10.41

2. रेखा l के बाहर बिंदु A और B हैं (आकृति 10.42)। AB का मध्य बिन्दु C है। AD, BE और CF क्रमश: रेखा l पर लम्ब हैं। क्या DE का मध्य बिंदु F होगा? क्यों या क्यों नहीं?



आकृति 10.42

3. ΔABC में भुजा BC का मध्य बिंदु D है। (आकृति 10.43) अनुसार किरण AX खींची गई है। AX पर क्रमशः BM, CN और DG लम्ब खींचे गए हैं। क्या MG = GN? कारण बताइए।

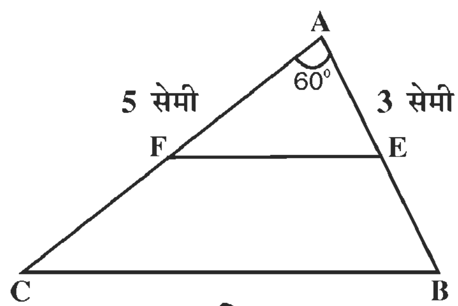


आकृति 10.43

10.6 त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा के द्वारा अन्य दो भुजाओं पर काटे गए रेखाखण्डों का अनुपात

एक भुजा के समांतर खींची गई रेखा के द्वारा अन्य भुजाओं पर काटे गए अंत:खंड समानुपाती होते हैं। इसके लिए हम क्रियाकलाप 8 करते हैं।

क्रियाकलाप 8. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें भुजा AB = 3 सेमी, भुजा AC = 5 सेमी तथा $\angle A = 60^0$ हों।



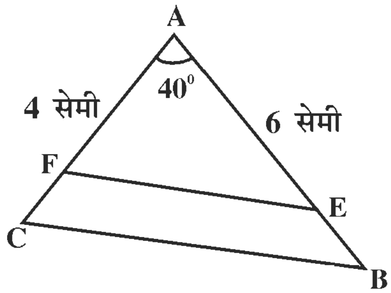
आकृति 10.44

रेखा BC के समांतर रेखाखण्ड EF खींचिए, जो AB से E पर तथा AC से F पर मिले।

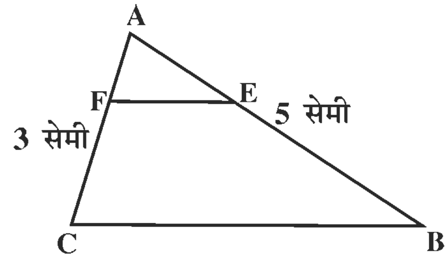
रेखाखण्ड AE, AF, BE और CF को नापिए।

$\frac{AE}{EB}$, $\frac{AF}{FC}$ और $\frac{AE}{EB} - \frac{AF}{FC}$ ज्ञात कीजिए।

अलग-अलग माप की भुजाएँ AB और AC तथा $\angle A$ लेकर दो अन्य त्रिभुज की रचना करके उपर्युक्त क्रियाकलाप की प्रक्रिया दुहराइए। आकृति 10.45 और 10.46 में रेखाखण्डों को नाप कर तालिका का भरिए।



आकृति 10.45



आकृति 10.46

तालिका

आकृति क्र.	**AE**	**AF**	**BE**	**CF**	$\frac{AE}{EB}$	$\frac{AF}{FC}$	$\frac{AE}{EB}-\frac{AF}{FC}$
10.44							
10.45							
10.46							

हम देखते हैं प्रत्येक स्थिति में $\frac{AE}{EB}-\frac{AF}{FC}$ का मान शून्य है।

अतः $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ (प्रत्येक स्थिति में)

निष्कर्ष : यदि कोई रेखा, किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची जाएं, जो अन्य दो भुजाओं को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटे तो यह रेखा इन भुजाओं को ऐसे रेखाखण्डों में विभाजित करेगी जो समानुपाती होंगे।

इसी प्रकार इन रेखाखण्डों का त्रिभुज की भुजाओं से अनुपात भी समान होगा।

$\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$ या $\frac{CF}{AC}=\frac{EB}{AB}$

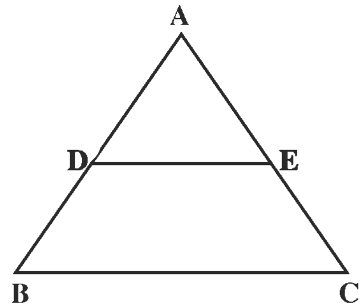
प्रश्नावली 10.5

1. ΔABC में $DE \parallel BC$ भुजाएँ AB और AC से क्रमशः D और E पर मिलती हैं (आकृति 10.47) में।

निम्नांकित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

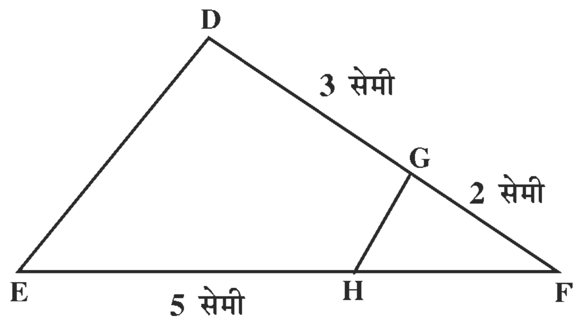
(I) यदि AD = 4 सेमी, DB = 6 सेमी, EC = 8 सेमी. तो AE = ...सेमी.

(II) यदि AB = 12 सेमी, AC = 16 सेमी, EC = 4 सेमी तो AD = ... सेमी।



आकृति 10.47

2. ΔDEF में DF पर बिन्दु G और EF पर बिन्दु H है। GH को मिलाया गया है। (आकृति 10.48 में) यदि $\angle DEF = \angle GHF$, DG = 3 सेमी, GF = 2 सेमी और EH = 5 सेमी हो तो HF का माप ज्ञात कीजिए।



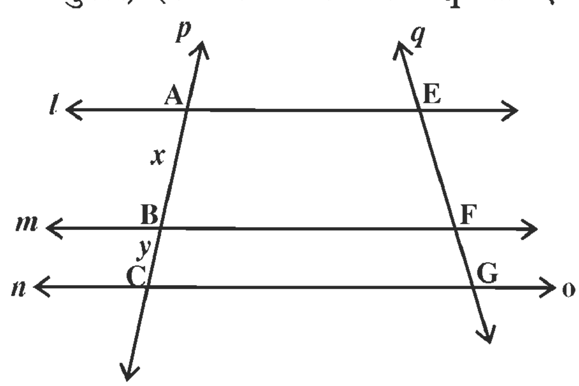
आकृति 10.48

10.7 समांतर रेखाए एवं समानुपाती अंत:खंड :

तीन समांतर रेखाओं द्वारा एक तिर्यक रेखा पर काटे गए अंत:खंडों का अनुपात दूसरी तिर्यक रेखा पर काटे गए अंत:खंडों का अनुपात समान होगा। इसको समझने के लिए क्रियाकलाप 9 करते हैं।

क्रियाकलाप 9.

1. कोई रेखा P खींचिए। रेखा P पर तीन बिंदु A, B और C क्रमश: इस प्रकार लीजिए की AB = x और BC = y हो। यहाँ x और y कोई संख्याएँ हैं, जैसे x = 2.5 और y = 1.6
2. आकृति (10.49) के अनुसार, इसी तल में अन्य रेखा q खींचिए।

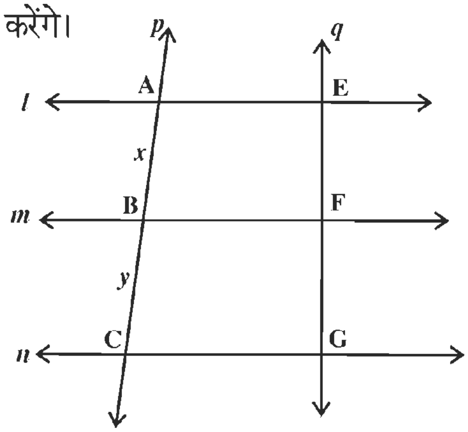


आकृति 10.49

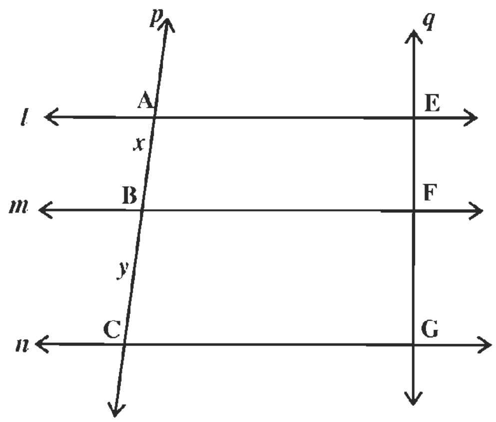
3. अब A, B और C से होकर क्रमशः रेखाएँ l, m और n इस प्रकार खींचिए कि वे परस्पर समांतर हों और रेखा q को क्रमशः E, F और G पर काटे।

EF और FG को मापिए और y(EF) – x(FG) का मान ज्ञात कीजिए।

उपर्युक्त प्रक्रिया, जिनमें x और y के अलग-अलग मानों को लेकर, दो बार और दुहराइए। प्रयोगों से प्राप्त प्रेक्षणों को एक तालिका में अंकित कीजिए। सुविधा के लिए हम आकृतियों को समान अक्षरों से नामांकित करेंगे।



आकृति 10.50



आकृति 10.51

तालिका

आकृति	EF	FG	x	y	y.EF	x.FG	y.EF – x.FG
10.49							
10.50							
10.51							

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में

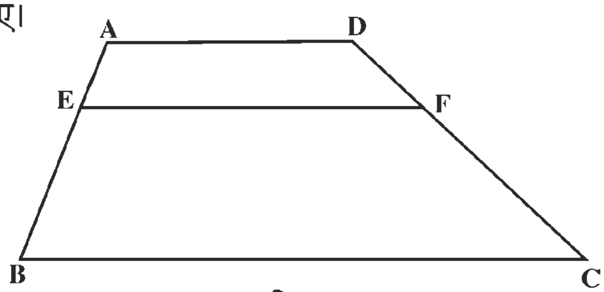
y.EF – x.FG का मान शून्य या लगभग शून्य है।

अतः सभी स्थिति में y.EF – x.FG=0 या y.EF = x.FG या $\frac{EF}{x} = \frac{FG}{y}$ अर्थात $\frac{EF}{FG} = \frac{x}{y}$ है जो $\frac{AB}{BC}$ के बराबर है।

निष्कर्ष : यदि तीन समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा पर एक निश्चित अनुपात में अंतःखंड काटती हैं, तो वे किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी उसी अनुपात में अंतःखंड काटती हैं।

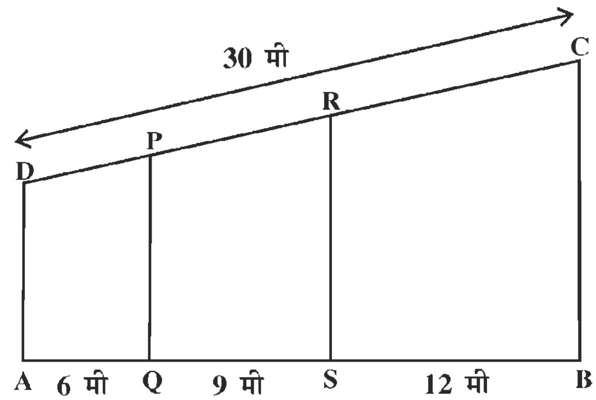
प्रश्नावली 10.6

1. आकृति 10.52 में AD ∥ EF ∥ BC, यदि EB = 2.AE तथा DF = 1.5 सेमी हो तो FC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



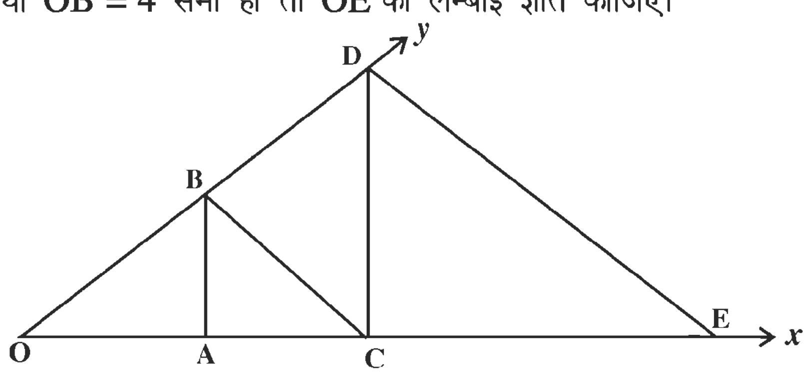
आकृति 10.52

2. एक भूखंड ABCD को तीन भागों में विभक्त किया गया है जैसे आकृति 10.53 में दिखाया गया है। यदि CD = 30 मीटर तथा AD ∥ BC ∥ PQ ∥ RS, हो तो DP, PR और RC की लम्बाईयाँ ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.53

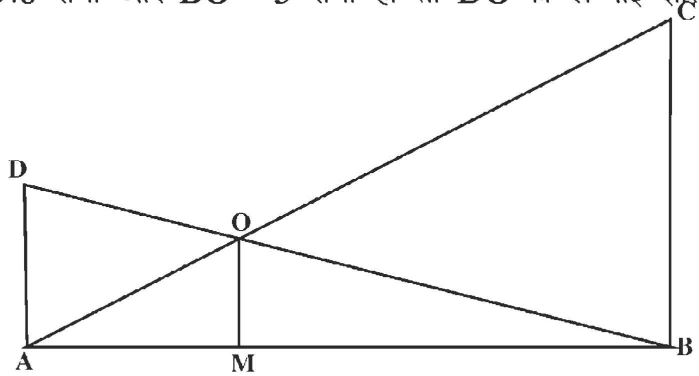
3. आकृति 10.54 में YOX कोई कोण है, BA ∥ DC तथा BC ∥ DE, यदि OA = 2 सेमी, AC = 3 सेमी तथा OB = 4 सेमी हो तो OE की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.54

4. आकृति 10.55 में रेखाखण्ड AB हैं। DA ⊥ AB, CB ⊥ AB, AC और BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हैं। OM ⊥ AB, भुजा AB के M बिन्दु पर मिलती है। यदि AO = 2.4

सेमी, OC = 3.6 सेमी और BO = 3 सेमी हो तो DO की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.55

10.8 किसी रेखाखण्ड को समान भागों में विभाजित करना :

किसी रेखाखण्ड को समान भागों में विभाजित करने के लिए नीचे दी गई आकृतियों 10.56, 10.57, 10.58 को देखिए।

यदि किसी रेखाखण्ड AB में M बिन्दु इस प्रकार है कि AM = MB (आकृति 10.56 में) तो हम कहते हैं कि M बिन्दु AB का समद्विभाजक है।

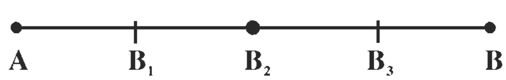
आकृति 10.56

यदि रेखाखण्ड AB में दो बिन्दु M और N इस प्रकार लिए जाए कि AM = MN = NB (आकृति 10.57 में) हो तो AB रेखाखण्ड इन बिन्दुओं द्वारा समत्रिभाजित है।

आकृति 10.57

यदि रेखाखण्ड AB में बिन्दु B_1, B_2 और B_3 इस प्रकार ले कि $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$ (आकृति 10.58 में)

हम कहते हैं कि रेखाखण्ड AB चार समान भागों में विभाजित है।



आकृति 10.58

पटरी और परकार की सहायता से किसी रेखाखण्ड को दिए गए समान भागों में किस प्रकार विभाजित किया जाता है? इस प्रक्रिया को क्रियाकलाप 10 से समझते हैं।

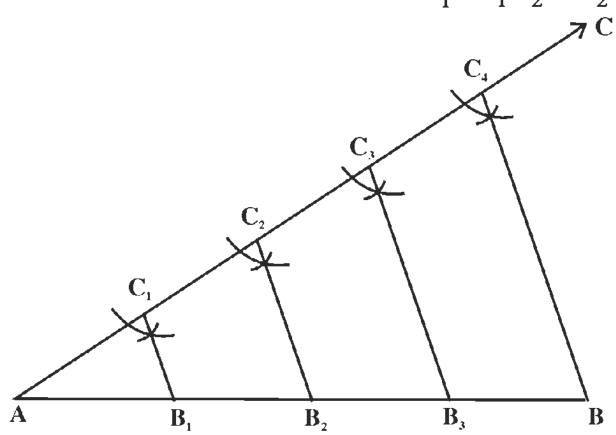
क्रियाकलाप 10

8 सेमी वाले एक रेखाखण्ड को चार भागों में विभाजित करते हैं।

हम यह रचना निम्न चरणों में पूर्ण करते हैं :

1. AB = 8 सेमी खींचते हैं।
2. एक किरण AC इस प्रकार खींचते हैं कि वह AB रेखा में न हो (आकृति 10.59)।
3. बिन्दु A से प्रारंभ करते हुए AC पर चार समान रेखाखण्ड AC_1, C_1C_2, C_2C_3 एवं C_3C_4 परकार की सहायता से किसी भी माप के अंकित करते हैं।
4. C_4B को मिलाइए।
5. बिन्दुओं C_3, C_2 और C_1 से होकर C_4B के समांतर रेखाएँ खींचिए, जो क्रमशः AB को बिन्दुओं B_3, B_2 और B_1 पर प्रतिच्छेद करती हैं।

इस प्रकार रेखाखण्ड AB चार समान रेखाखण्डों AB_1, B_1B_2, B_2B_3 और B_3B में विभाजित हो जाती हैं।



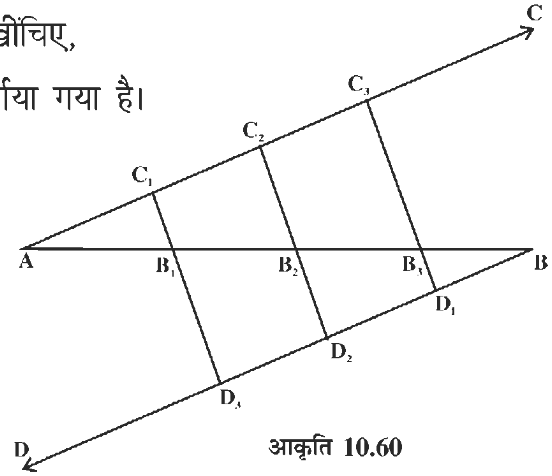
आकृति 10.59

> **टिप्पणी** : हम समान अंत:खंड गुण से यह सरलता से देख सकते हैं कि $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$ हैं। क्योंकि $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4$

वैकल्पिक विधि :

1. AB = 8 सेमी खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी खींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो।

3. CA के समांतर एक किरण BD खींचिए, जैसा कि आकृति (10.60) में दर्शाया गया है।



आकृति 10.60

4. A से प्रारंभ करते हुए, कोई भी मापन लेकर AC पर तीन समान रेखाखण्ड AC_1, C_1C_2 और C_2C_3 अंकित कीजिए।
5. B से प्रारंभ करते हुए चरण 4 वाले मापन को लेकर, BD पर तीन समान रेखाखण्ड BD_1, D_1D_2 और D_2D_3 अंकित कीजिए।
6. C_1D_3, C_2D_2 और C_3D_1 को मिलाइए। जो AB को क्रमश: B_1, B_2 और B_3 पर प्रतिच्छेद करती है।

इस प्रकार रेखाखण्ड AB चार समान रेखाखण्डों AB_1, B_1B_2, B_2B_3 और B_3B में विभाजित हो जाती है।

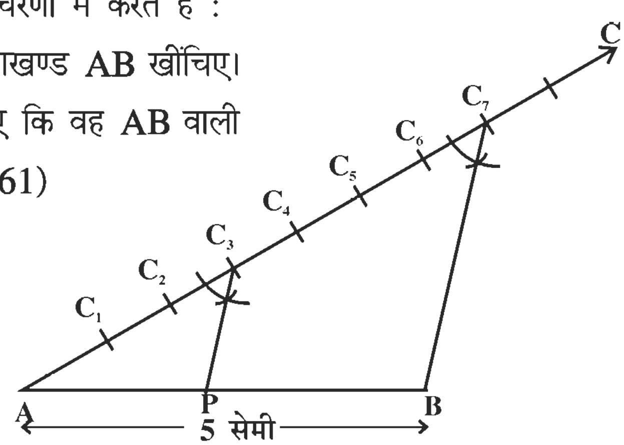
10.9 किसी रेखाखण्ड को एक दिए हुए अनुपात में अंत:विभाजित करना :

किसी रेखाखण्ड को दिए गए अनुपात में विभाजित करने के लिए क्रियाकलाप 11 को करते हैं।

क्रियाकलाप 11. हम 5 सेमी लम्बाई वाले एक रेखाखण्ड AB को 3:4 के अनुपात में अंत:विभाजित करते हैं।

हम यह रचना निम्नलिखित चरणों में करते हैं :

1. 5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड AB खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी खींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो (आकृति 10.61)



आकृति 10.61

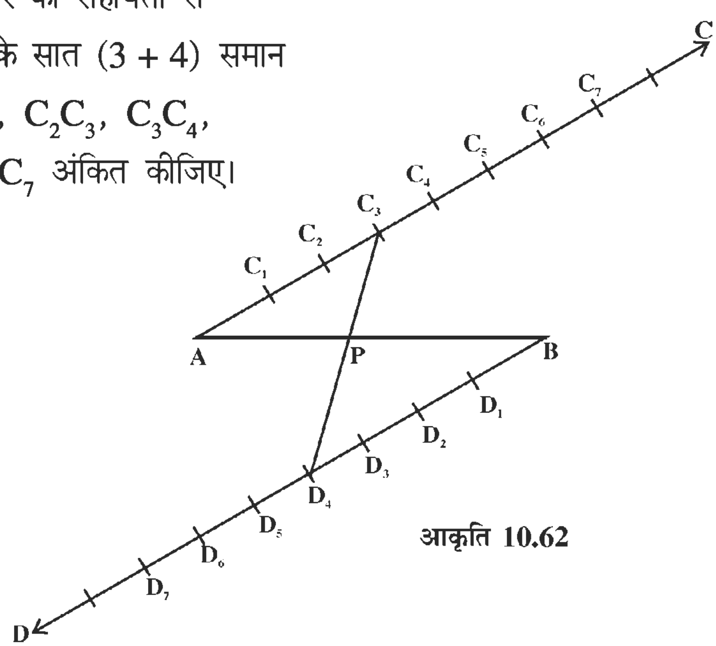
3. AC पर परकार की सहायता से सात (3 + 4) समान रेखाखण्ड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5, C_5C_6 और C_6C_7 अंकित कीजिए।
4. C_7B को मिलाइए।
5. A से प्रारंभ करके अभी खींचे गए तीन रेखाखण्डों को गिनकर हम C_3 पर पहुंचते हैं। इस बिंदु C_3 से होकर, हम C_7B के समांतर एक रेखा खींचते हैं, जो AB को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती है।
6. तब P ही वह बिंदु है जो रेखाखण्ड को 3:4 के अनुपात में दो भागों AP और PB में अंत:विभाजित करता है।

   हम इस रचना की जाँच AP और PB के वास्तविक मापनों द्वारा कर सकते हैं।

> **टिप्पणी :** यह तथ्य कि $\frac{AP}{PB} = \frac{AC_3}{C_3C_7} = \frac{3}{4}$ है, समानुपातिक अंत:खंड गुण से सरलता से प्राप्त हो जाता है।

वैकल्पिक विधि :

1. 5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड AB खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी खींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो।
3. एक किरण BD, CA के समांतर खींचिए जैसा कि आकृति (10.62) में दर्शाया गया है।
4. A से प्रारंभ करके, परकार की सहायता से AC पर किसी भी माप के सात (3 + 4) समान रेखाखण्ड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5, C_5C_6 और C_6C_7 अंकित कीजिए।



आकृति 10.62

5. B से प्रारंभ करके, चरण 4 वाली लम्बाई के सात (3 + 4) समान रेखाखण्ड BD_1, D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4, D_4D_5, D_5D_6 और D_6D_7 किरण BD पर अंकित कीजिए।

चरण 6. AC के अनुदिश तीन रेखाखण्ड गिनने पर, हम बिन्दु C_3 पर पहुँचते हैं। BD के अनुदिश चार रेखाखण्ड गिनने पर, हम बिंदु D_4 पर पहुँचते हैं। इन बिन्दुओं C_3 और D_4 को मिलाने वाला रेखाखण्ड AB को P पर प्रतिच्छेद करता है। तब P ही वह बिन्दु है जो AB को 3:4 के अनुपात में अंत: विभाजित करता है।

टिप्पणी : AD_7 और C_7B को मिलाकर आप सरलता से देख सकते हैं।

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC_3}{C_3C_7} = \frac{D_7D_4}{D_4B} = \frac{3}{4} \text{ है।}$$

प्रश्नावली 10.7

1. 4.5 सेमी का रेखाखण्ड खींचिए एवं इसे समत्रिभाजित कीजिए। प्रत्येक भाग की लम्बाई नापिए।
2. 7.5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड AB खींचिए और इसे तीन समान भागों में विभाजित कीजिए। प्रत्येक भाग की लम्बाई मापिए।
3. 8.5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड XY खींजिए और इसे पाँच समान भागों में विभाजित कीजिए। प्रत्येक भाग की लम्बाई मापिए।
4. 6.6 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड PQ खींचिए। इसे छः समान भागों में विभाजित कीजिए।
5. 4 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड AB खींचिए। अब इसे 2:3 में विभक्त कीजिए। छोटे भाग की लम्बाई नापिए।
6. 10 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड MN खींचिए। इसे 2:3 के अनुपात में अंत:विभाजित कीजिए। छोटे भाग को मापिए।

प्रश्नावली 10.8

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यकछेदी रेखा काटे, तो संगत कोणों के प्रत्येक युग्म में दोनों कोण .... होते हैं।

(ii) एक ही रेखा के समांतर खींची गई दो रेखाएँ परस्पर .... होती हैं।

(iii) किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को .... करती है।

(iv) एक ही तल में वे रेखाएँ जो प्रतिच्छेद नहीं करती .... रेखाएँ कहलाती हैं।

(v) दो रेखाएँ जो एक ही रेखा पर लम्ब होती है परस्पर .... होती है।