प्रारंभिक शिक्षा में डिप्लोमा
(डी.एल.एड.)

पाठ्यक्रम-504
प्राथमिक स्तर पर गणित सीखना

ब्लॉक-2
गणितीय प्रत्ययों एवं विधियों का संवर्धन

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

A 24/25, सांस्थानिक क्षेत्र, सैक्टर-62 नौएडा,

गौतम बुद्ध नगर उत्तर प्रदेश-201309

वैबसाइट : www.nios.ac.in

श्रेय अंक (4=3+1)

ब्लॉक	इकाई	इकाई का नाम	सैद्धान्तिक अध्ययन घंटे		प्रयोगात्मक अध्ययन
			पठ्य-वस्तु	क्रियाकलाप	
ब्लॉक-1 विद्यालय के प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने का महत्व	**इकाई 1**	बच्चे गणित कैसे सीखते हैं	3	2	गणित सबके लिए, गणितीयमय पर सेमिनार
	इकाई 2	गणित एवं गणितीय शिक्षा: महत्व क्षेत्र एवं सार्थकता	4	2	–
	इकाई 3	गणित शिक्षा के उद्देश्य एवं परिप्रेक्ष्य	4	3	कक्षा के बाहर गणित, अपनी कक्षा में गणित शिक्षा से संबंधित समस्याओं की पहचान
	इकाई 4	अधिगमकर्त्ता एवं अधिगम केन्द्रित विधियाँ	5	3	अपने विद्यालय में गणित क्लब का प्रबंधन
खण्ड-2 गणितीय प्रत्ययों एवं विधियों का संवर्धन	**इकाई 5**	संख्याएं एवं संख्याओं पर संक्रियाएं	5	2	–
	इकाई 6	आकृतियाँ एवं स्थानिक संबंध	5	2	–
	इकाई 7	मापें एवं मापन	4	2	–
	इकाई 8	आँकड़ों का प्रबन्धन	4	3	आँकडों का सांख्यिकीय विश्लेषण
	इकाई 9	सामान्यीकृत अंकगणित के रूप में बीजगणित	4	2	–
ब्लॉक-3 गणित में अधिगमकर्ता का आकलन	**इकाई 10**	गणित अधिगम के आकलन के उपागम	3	2	गणित में प्रत्यय निर्माण की तैयारी एवं पाठ योजनाओं का विकास
	इकाई 11	आकलन के साधन एवं प्रविधियाँ	4	3	गणित प्रयोगशाला के लिए प्रदर्शनियों का विकास
	इकाई 12	गणित अधिगम के आकलन हेतु फोलोअप	3	2	गणित अधिगम में समस्याओं की पहचान एवं उपचार
		शिक्षण	15		
		योग	63	27	30
		कुल योग = 63 + 27 + 30 = 120 घण्टे			

ब्लॉक-2

गणितीय प्रत्ययों एवं विधियों का संवर्धन

इकाई 5 : संख्याएं एवं संख्याओं पर संक्रियाएं

इकाई 6 : आकृतियाँ एवं स्थानिक संबंध

इकाई 7 : मापें एवं मापन

इकाई 8 : आँकड़ों का प्रबंधन

इकाई 9 : सामान्यीकृत अंकगणित के रूप में बीजगणित

खंड प्रस्तावना

इकाई-5

यह इकाई आपको संख्याएं एवं संख्याओं पर संक्रियाओं को समझने में सक्षम बना सकेगी। यह इकाई विभिन्न प्रकार की संख्याओं जैसे प्राकृत संख्याएं एवं पूर्ण संख्याएं, पूर्णाक एवं परिमेय संख्याएं इत्यादि की जानकारी देगी तथा साथ ही साथ संख्याओं पर विभिन्न संक्रियाओं के गुणधर्मों से भी परिचित करायेगी। उभयनिष्ठ गुणनखण्ड एवं उभयनिष्ठ गुणक क्या है? तथा महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्तक के प्रत्यय से भी आप भलीभांति परिचित हो सकेंगे।

इकाई-6

यह इकाई आपको आधारभूत ज्यामितीय आकृतियों को समझने में सक्षम बना सकेगी। अब द्विविमीप बंद आकृतियों जैसे त्रिभुज एवं चतुर्भुज इत्यादि से भलीभांति परिचित हो सकेंगे। वृत्त, सर्वांगसमता, समरूपता, छाया/प्रतिबिम्ब एवं सममिति तथा त्रिविमीय आकृतियां जैसे घन, घनाम, बेलन इत्यादि की समझ विकसित हो सकेगी।

इकाई-7

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप मापन एवं विभिन्न प्रकार के मापको तथा दूरी, क्षेत्रफल, आयतन व भार इत्यादि को अमानक इकाइयों एवं मानक इकाईयों द्वारा किस प्रकार मापा जाता है? को समझने में सक्षम हो सकेंगे। आप मापन की मीट्रिक पद्धति एवं समय के मापन से भी भलीभांति परिचित हो सकेंगे।

इकाई-8

यह इकाई आपको आंकड़ों के प्रबंधन को समझने के योग्य बना सकेगी। आप आंकड़ों के प्रबंधन से संबंधित विभिन्न प्रत्ययों जैसे, आंकड़ों का एकत्रीकरण, आकड़ों का सारणीपन, दण्डालेख, आयत चित्र तथा पाई चार्ट की सहायता से आंकड़ों के चित्रात्मक निरुपण से भलीभांति परिचित हो सकेंगे। केंद्रीय प्रवृत्ति की मापों की सहायता से आंकड़ों के विश्लेषण की समझ विकसित हो सकेंगी।

इकाई-9

यह इकाई आपको संख्याओं के स्थान पर गणितीय चिन्हों के प्रयोग, बीजगणितीय पदों एवं व्यंजकों को समझने में सक्षम बना सकेगी। बीजगणित एवं बीजगणित संबंधी संक्रियाओं जैसे जोड़, घटा, गुणा इत्यादि का गणित में महत्वपूर्ण स्थान है। रैखिक समीकरणों को बनाने एवं हल करने की समझ विकसित हो सकेगी।

आप शिक्षार्थी के रूप में ब्लाक 3 : गणित में अधिगमकर्त्ता का आकलन का अध्ययन करेंगे। इस इकाई में गणित में आकलन से संबंधित तीन इकाईयां है। प्रत्येक इकाई खण्डों एवं उपखण्डों में विभाजित है। आप प्रारंभिक स्तर पर गणित सीखने के महत्व एवं बच्चा गणित कैसे सीखता है। को ब्लाक 1 में तथा ब्लाग 2 में विषय वस्तु संवर्द्धन एवं विधियों के बारे में पहले ही पढ़ चुके है।

विषय सूची

क्रम. सं.	पाठ का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	इकाई 5 : संख्याएं एवं संख्याओं पर संक्रियाएं	1
2.	इकाई 6 : आकृतियाँ एवं स्थानिक संबंध	42
3.	इकाई 7 : मापें एवं मापन	92
4.	इकाई 8 : आँकड़ों का प्रबन्धन	129
5.	इकाई 9 : सामान्यीकृत अंकगणित के रूप में बीजगणित	162

टिप्पणी

इकाई 5 : संख्याएं एवं संख्याओं पर संक्रियाएं

संरचना

5.1 प्रस्तावना

5.2 अधिगम उद्देश्य

5.3 संख्याओं के विभिन्न समूह (समुच्चय)

5.3.1 गणन संख्याएं तथा पूर्ण संख्याएं

5.3.2 पूर्णांक

5.3.3 परिमेय संख्याएं

5.4 संख्याओं पर संक्रियाओं के गुण

5.4.1 प्राकृत तथा पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएं

5.4.2 पूर्णांकों पर संक्रियाएं

5.4.3 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएं

5.5 गुणनखंड तथा गुणज

5.5.1 उभयनिष्ठ गुणन खंड तथा महत्तम समापवर्तक

5.5.2 उभयनिष्ठ गुणज तथा लघुत्तम समापवर्त्य

5.6 अंक गणित तथा अनुप्रयोग

5.7 सारांश

5.8 आपकी प्रगति की जांच के लिए आदर्श उत्तर

5.9 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

5.10 अन्त्य-इकाई अभ्यास

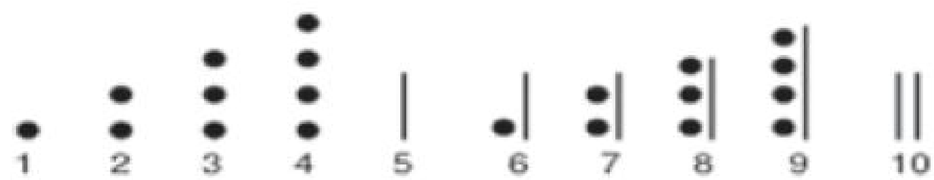
5.1 प्रस्तावना

हमारे दैनिक जीवन में जिन वस्तुओं से हमारा वास्ता पड़ता है अथवा जिनको हम उपयोग में लाते हैं, उनमें से कुछ की राशि (मात्रा) ज्ञात करनी होती है जैसे परिवार में सदस्य,

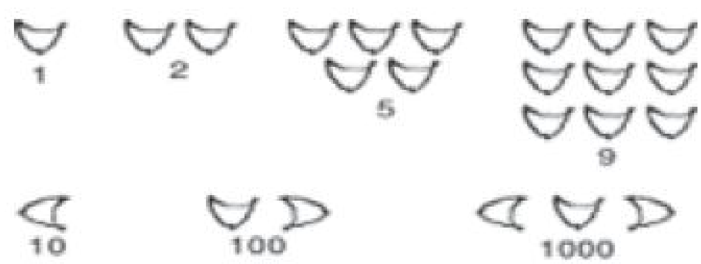
टिप्पणी

कक्षा/विद्यालय में विद्यार्थी, वस्तुएं खरीदने के लिए धन, सब्जियां तथा किराने का सामान, बच्चों के लिए पुस्तकें, घर से विद्यालय की दूरी, कमरे की लम्बाई तथा चौड़ाई, इत्यादि। राशि (मात्रा) ज्ञात करने के लिए संख्याएं आवश्यक हैं। वस्तुओं की गिनती करने, विभिन्न राशियों को व्यक्त करने, लम्बाई, भार, आयतन, समय, आदि को मापने में संख्याओं का ज्ञान आवश्यक है। संख्याएं हमारे जीवन में इतनी घुली मिली हैं कि हम उनके बिना जीवन की कल्पना नहीं कर सकते। किन्तु जिन संख्याओं को आज हम उपयोग में ला रहे हैं, उनका सभ्यता के प्रारंभ में अन्वेषण नहीं हुआ था। विभिन्न प्राचीन सभ्यताओं में भिन्न भिन्न संख्या प्रणालियां विकसित हुई। आइए, विभिन्न प्राचीन सभ्यताओं में विकसित कुछ संख्या प्रणालियों पर दृष्टि डालें :

मायन प्रणाली



बेबीलोनियन प्रणाली



रोमन प्रणाली

I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**	**X**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	**XII**	**XIII**	**XIV**	**XV**	**XVI**	**XVII**	**XVIII**	**XIX**	**XX**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
XXX	**XL**	**L**	**LX**	**LXX**	**LXXX**	**XC**	**C**	**CC**	**CCC**
30	40	50	60	70	80	90	100	200	300
CD	**D**	**M**							
400	500	1000							

संख्याओं की इन प्रणालियों में विभिन्न संख्याओं के लिए संख्यांकों को याद रखना कठिन कार्य था। इसके अतिरिक्त, इनमें योग, व्यवकलन, आदि विभिन्न संक्रियाएं करना कठिन था।

भारत का योगदान

आधुनिक दाशमिक प्रणाली, अर्थात दस अंकों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 तथा 9 पर आधारित संख्याओं को मूलत: भारतीयों ने अभिकल्पित किया तथा इसे अरब वासियों ने पहले अपने देश, तत्पश्चात पश्चिमी संसार में फैलाया। अतएव, इस संख्यांकन प्रणाली को हिंदू-अरेबिक संख्यांकन नाम दिया गया।

संख्याओं की दूसरी प्रणालियों की तुलना में इस प्रणाली का एक अद्वितीय लाभ है कि संख्या चाहे कितनी भी बड़ी हो, इसे इन्हीं दस अंकों के प्रयोग से व्यक्त किया जा सकता है।

किसी संख्या में स्थानीय मान

इन दस अंकों से दस एकांकी संख्याएं अभिव्यक्त होती हैं। यदि हमें 9 से बड़ी किसी संख्या की आवश्यकता है, तो हम दो अंकों वाली संख्याओं, यथा 10, 11, 12, ..., 25,.... 59,.... 98 तथा 99, का सर्जन करते हैं। आपको भली भांति ज्ञात है कि किस प्रकार इन संख्याओं का सर्जन किया गया है। इन दो अंकीय संख्याओं में अंकों के दो स्थान निर्धारित होते हैं, दायीं ओर के स्थान को इकाई का स्थान तथा बायीं ओर के स्थान को दहाई का स्थान कहते हैं।

इकाई के स्थान में अंकों के मान एकिक होते हैं, जैसे संख्या 26 में, इकाई के स्थान पर संख्या 6 है तथा इसका मान भी 6 है। संख्या 26 में दहाई के स्थान पर संख्या 2 का स्थानीय मान दो दहाई (20) है जबकि इसका प्रत्यक्ष मान 2 है। इसी प्रकार, सैंकड़े के स्थान पर स्थित किसी अंक का स्थानीय मान उसके प्रत्यक्ष मान का 100 गुना होता है। इन सभी स्थानीय मानों से आप भली भांति परिचित हैं। किंतु एक अंक ऐसा भी है जिसका स्थानीय मान सभी स्थानों पर एक समान रहता है। आप जानते हैं कि वह अंक 0 (शून्य) है। हिंदू संख्या प्रणाली में शून्य का एक अद्वितीय योगदान है। इसे चाहे किसी भी स्थान पर रखा जाए इसका स्थानीय मान शून्य होता है। फिर, इसका महत्त्व क्या है?

किसी तीन-अंकीय संख्या, जैसे 308, पर विचार कीजिए। दहाई के स्थान पर स्थित अंक 0 का स्थानीय मान शून्य है। किंतु कल्पना कीजिए कि यदि संख्या 0 न हो, तो 308 जैसी संख्याओं का क्या होगा? संख्या कम होकर 38 रह जायेगी तथा एक पूर्ण भ्रम की स्थिति उत्पन्न हो जायेगी। यहां, 0 अपना निधारित स्थान अविकल रखता है तथा संख्या को उचित पहचान प्रदान करता है। अत: 0 को दाशमिक संख्या प्रणाली में स्थान-धारक कहा जाता है।

इस इकाई में हम दैनिक जीवन में प्रयुक्त होने वाली संख्याओं की कुछ अत्यधिक मूल-पद्धति तथा संख्या प्रणाली की चार मूल संक्रियाओं के गुणों के विषय में चर्चा करेंगे।

इस इकाई को पूरा करने में हमें कम से कम 10 (दस) अध्ययन-घंटों की आवश्यकता होगी।

टिप्पणी

5.2 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि

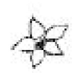
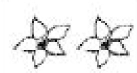
- दाशमिक प्रणाली में संख्याओं का महत्व समझ सकें।
- भिन्न-भिन्न संख्या समूहों, उदाहरणार्थ, प्राकृत संख्याओं, पूर्णांकों तथा परिमेय संख्याओं को पहचान सकें।
- विभिन्न संख्या समूहों में मूल संक्रियाओं योग, व्यवकलन, गुणा तथा भाग के गुणों को जान सकें।
- प्राकृत संख्या समूह में गुणन खंडों तथा गुणजों को ज्ञात कर सकें।

5.3 संख्याओं के विभिन्न समूह

5.3.1 गणन संख्याएं तथा पूर्ण संख्याएं

पुरातन व्यक्ति का प्रमुख उद्देश्य, जिसके कारण उसे एक संख्या प्रणाली की आवश्यकता थी, वस्तुओं की गिनती करना था। अतएव, उसने गणन संख्याओं का सर्जन किया। इन्हें **प्राकृत संख्याएं** भी कहा जाता है।

उसने संख्याओं का वस्तुओं के समूहों से मिलान किया जैसा नीचे प्रदर्शित किया गया है:

वस्तु समूह				
संख्या का नाम	एक	दो	तीन	चार
संख्यांक	1	2	3	4

इस प्रकार, गणन संख्या प्रणाली में प्रत्येक संख्या एक अद्वितीय वस्तु-समूह से सम्बद्ध है। प्रेक्षण करने पर आप पाते हैं कि

(i) सबसे छोटी गणन संख्या 1 है।

(ii) प्रत्येक गणन संख्या की एक परवर्ती संख्या होती है तथा प्रत्येक परवर्ती संख्या संबंधित संख्या से 1 अधिक होती है, अर्थात 4 की परवर्ती संख्या 5 है तथा 29 की परवर्ती संख्या 30 है।

(iii) (1 के अतिरिक्त) प्रत्येक गणन संख्या की एक पूर्ववर्ती संख्या होती हैं अर्थात् 7 की पूर्ववर्ती संख्या 6 है तथा 60 की पूर्ववर्ती संख्या 59 है।

उपर्युक्त (ii) से निष्कर्ष निकलता है कि बड़े से बड़ी संख्या से भी बड़ी संख्या विद्यमान है।

पूर्ण संख्याएं

आपने देखा कि 0 को प्राकृत संख्याओं में सम्मिलित नहीं किया गया है। ऐसा इसलिए है क्योंकि वस्तुओं की गिनती 1 से आरंभ होती है। किन्तु जब हम संख्याओं को संख्याकों के द्वारा निरुपित करते हैं, तो हम संख्याओं 10, 20, 30, ..., 100 आदि के निरुपण में 0 का प्रयोग करते हैं। वस्तुओं को सरलतर बनाने के लिए प्राकृत संख्याओं के समूह में 0 को सम्मिलित करते हैं जिससे नया संख्या समूह 'पूर्ण संख्याएं' बनता है जिसे 'W' द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

आगे बढ़ने से पहले अपनी प्रगति की जांच कीजिए :

E1. गणन संख्या 1 की कोई भी पूर्ववर्ती संख्या क्यों नहीं होती है?

E2. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन सी है?

E3. 8 के स्थानीयमान तथा प्रत्यक्ष मान का अंतर कितना होगा यदि यह

(i) इकाई के स्थान पर हो?

(ii) दहाई के स्थान पर हो?

(iii) सैकड़े के स्थान पर हो?

5.3.2 पूर्णांक

हमें दैनिक जीवन की विभिन्न स्थितियों में परस्पर विरोधी मापन प्राप्त होते हैं जैसे

लाभ-हानि पाना-देना जमा करना-निकालना

ऊपर की ओर-नीचे की ओर

परस्पर विरोधी मापनों के ऐसे युग्मों में एक संतुलन की स्थिति होती है जैसा कि नीचे तालिका में प्रदर्शित किया गया है।

परस्पर विरोधी मापन	संतुलित स्थिति
लाभ-हानि	न लाभ न हानि
पाना-देना	न पाना न देना
जमा करना-निकालना	न जमा न निकाल
ऊपर की ओर-नीचे की ओर	न ऊपर की ओर न नीचे की ओर

उपर्युक्त प्रत्येक उदाहरण में यह देखा जा सकता है कि संतुलित स्थिति शून्य-स्तर निरुपित करती है।

इस प्रकार व्यक्तियों ने संख्याओं 1, 2, 3 आदि को विरोधी प्रवृत्ति वाली संख्याओं के सर्जन करने के विषय में सोच विचार किया।

इसलिए हमें हमें विरोधी प्रवृत्ति वाले निम्नलिखित संख्या-युग्म प्राप्त हुए

+1 तथा −1

+2 तथा −2

उपर्युक्त +3 तथा −3, इत्यादि

प्रत्येक परस्पर विरोधी युग्म की संतुलित संख्या शून्य है। अत: हमें प्राप्त हुआ

$(+1) + (-1) = 0$

$(+2) + (-2) = 0$

$(+3) + (-3) = 0$, इत्यादि

संख्याओं की श्रेणी, जो अब हमें प्राप्त होती है, है :

...., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

संख्याओं के इस समूह को **पूर्णांक** कहते हैं

+1, +2, +3, +4, ... **धन पूर्णांक** तथा −1, −2, −3, −4, ... **ऋण पूर्णांक** कहे जाते हैं।

पूर्णांको के समूह को प्रतीक Z द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

(i) कोई ऐसा पूर्णांक नहीं है जिसे सबसे बड़ा कहा जा सके। कितना भी बड़ा पूर्णांक आप सोचें, उससे भी बड़े पूर्णांक का अस्तित्व होता है।

(ii) कोई ऐसा पूर्णांक नहीं है जिसे सबसे छोटा कहा जा सके। कितना भी छोटा पूर्णांक आप सोचें, उससे भी छोटे पूर्णांक का अस्तित्व होता है।

(iii) पूर्णांकों की श्रेणी में शून्य (0) को छोड़ कर प्रत्येक +p के लिए, एक −p का अस्तित्व होता है ताकि $+p + (-p) = 0$ हो। $+p$ तथा $-p$ परस्पर विरोधी कहे जाते हैं।

पूर्णांकों को क्रम में लगाना तथा उन्हें संख्या रेखा पर निरुपित करना

निम्नलिखित पूर्णांकों की श्रेणी दायीं ओर बढ़ती जाती है तथा बायीं ओर घटती जाती है :

...., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...

इस प्रकार

$\ldots\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 \ldots$

हम यह मानते है कि पूर्णांकों को निरुपित करने के लिए एक सरल रेखा के बिंदुओं का प्रयोग किया जा सकता है। इसकी प्रक्रिया नीचे दी गयी है।

टिप्पणी

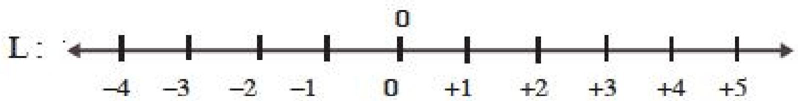
(i) एक सरल रेखा खींचिए तथा इसे L से नामांकित कीजिए। (यहां L पूरी रेखा को निर्दिष्ट करता है। यह इसके किसी एक बिंदु को नामांकित नहीं करता।)

(ii) इस पर समान अंतराल पर बिंदु चिन्हित कीजिए।

(iii) उसके किसी बिंदु को 0 से नामांकित कीजिए और इसे शून्य द्वारा निरुपित कीजिए।

(iv) अब 0 के दायीं ओर के बिंदुओं को क्रमानुसार +1, +2, +3, आदि से निरुपित कीजिए।

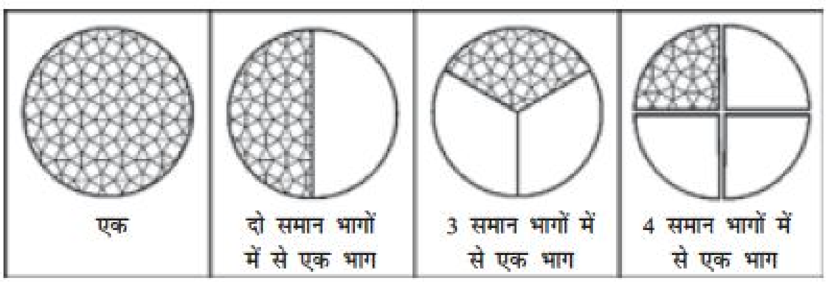
(v) 0 के बायीं ओर के बिंदुओं को क्रमानुसार –1, –2, –3, आदि द्वारा निरुपित कीजिए।



अब हम कहते हैं कि रेखा L एक **संख्या रेखा** है।

5.3.3 परिमेय संख्याएं

आइए, अब एक सम्पूर्ण के भागों पर दृष्टि डालें।

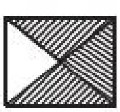


किसी वस्तु के भागों को निरुपित करने के लिए उपर्युक्त प्रदर्शन के अनुसार बनायी गयी संख्याएं नीचे दी गयी हैं।

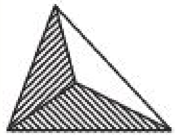
दो समान भागों में से एक भाग : $\frac{1}{2}$ (आधा, एक बटा दो)

3 समान भागों में से एक भाग : $\frac{1}{3}$ (एक तिहाई, एक बटा तीन)

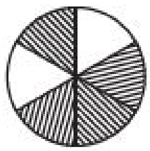
4 समान भागों में से एक भाग : $\frac{1}{4}$ (एक चौथाई, एक बटा चार)


$\frac{3}{4}$ निरुपित करता है। [3 अंश है तथा 4 हर है।]

टिप्पणी



$\frac{2}{3}$ निरुपित करता है। [2 अंश है तथा 3 हर है।]



$\frac{4}{6}$ निरुपित करता है। [4 अंश है तथा 6 हर है।]

किसी पूर्ण वस्तु के विभिन्न भागों को मापने के लिए रचित संख्याओं को **भिन्नात्मक संख्याएं** (अथवा **भिन्न**) कहा जाता है।

भिन्नों के विभिन्न प्रकार होते हैं :

(i) **सम भिन्न :** $\frac{2}{3},\frac{3}{8},\frac{5}{7}$ सम भिन्न हैं जहां अंश $<$ हर

(ii) **विषम भिन्न :** $\frac{5}{3},\frac{11}{7},\frac{28}{5}$ विषम भिन्न हैं जहां अंश $>$ हर

(iii) **मिश्रित संख्या :** $2\frac{1}{3},3\frac{2}{7}$, आदि मिश्रित संख्याएं हैं तथा इनमें से प्रत्येक को एक विषम भिन्न में परिवर्तित किया जा सकता है तथा एक विषम भिन्न को मिश्रित संख्या में परिवर्तित किया जा सकता है जैसे

$$2\frac{1}{3}=\frac{7}{3},\ 3\frac{2}{7}=\frac{23}{7}$$

(iv) **इकाई-भिन्न :** एक भिन्न जिसका अंश 1 हो, इकाई-भिन्न होती है। $\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{9}$ इकाई भिन्नों के उदाहरण हैं।

(v) **तुल्य भिन्न :** जब किसी भिन्न के अंश और हर दोनों को किसी धन पूर्णांक से गुणा किया जाता है तो भिन्न आकार में बदल जाती है किंतु मान में नहीं बदलती। इस प्रकार परिणामी भिन्न आरंभिक भिन्न के बराबर ही रहती है। जिन भिन्नों के मान समान होते हैं, उन्हें तुल्य भिन्न कहते हैं। उदाहरणार्थ

(a) $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$; इस प्रकार $\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{8}{12}$ तुल्य भिन्न हैं।

(b) $\frac{40}{16}=\frac{20}{8}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$; इस प्रकार $\frac{40}{16},\frac{20}{8},\frac{10}{4},\frac{5}{2}$ तुल्य भिन्न हैं।

(vi) सम हर भिन्न : वे भिन्न जिनके हर समान होते हैं, सम हर भिन्न कहलाती हैं। $\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{3}{15},\frac{4}{15}$ सम हर भिन्नों के उदाहरण हैं।

परिमेय संख्याएं

वे संख्याएं, जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो जबकि p तथा q पूर्णांक हों तथा $q \neq 0$, परिमेय संख्याएं कहलाती हैं। परिमेय संख्याओं को प्रतीक Q द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। स्पष्टत: एक भिन्न एक परिमेय संख्या होती है।

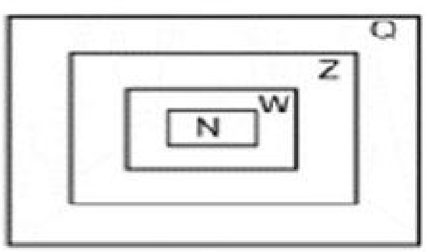
परिमेय संख्याओं के उदाहरण हैं :

$$\frac{2}{7},\frac{-3}{4},\frac{0}{5},\frac{4}{-9}$$

निम्नलिखित का ध्यानपूर्वक अवलोकन कीजिए :

$$1=\frac{3}{3},\ 2=\frac{10}{5},\ -4=\frac{-8}{2},\ 0=\frac{0}{9}$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि सभी पूर्णांकों को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है जहां p तथा q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है। इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है। यहां दिया गया प्राकृत संख्याओं (N), पूर्ण संख्याओं (W) पूर्णांक (Z) तथा परिमेय संख्याओं (Q) को संयोजित करने वाला आरेख उनके अंत-संबंध को प्रदर्शित करता है। Q में सभी पूर्णांक तथा $\frac{1}{2},\frac{2}{7},\frac{-3}{8}$ आदि जैसी अपूर्ण संख्याएं सम्मिलित हैं।



टिप्पणी

Z में सभी पूर्ण संख्याएं तथा –1, –2, –3 जैसे ऋणात्मक पूर्णांक सम्मिलित हैं।

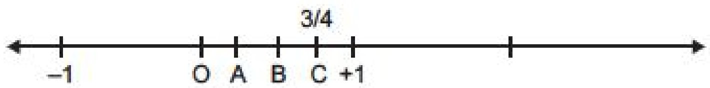
W में सभी प्राकृत संख्याएं तथा शून्य सम्मिलित हैं।

संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएं

हम पहले देख चुके हैं कि पूर्णांकों को एक संख्या-रेखा पर किस प्रकार प्रदर्शित किया जाता है। अब हम संख्या-रेखा पर परिमेय संख्याओं को प्रदर्शित करेंगे।

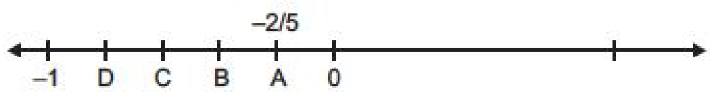
आइए, हम (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $-\frac{2}{5}$ (iii) $2\frac{2}{3}$ को एक संख्या-रेखा पर प्रदर्शित करें।

हम जानते हैं कि $\frac{3}{4}$ किसी सम्पूर्ण के 4 बराबर भागों में से 3 भागों के बराबर है।

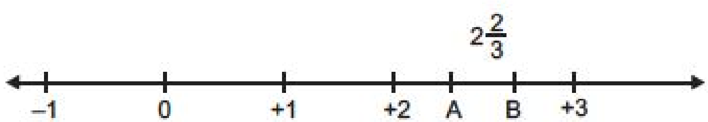


यहां संख्या-रेखा को o तथा +1 के बीच के भाग को 4 बराबर भागों में विभाजित किया गया है तथा A, B तथा C संपूर्ण (0 से 1) के 4 बराबर भागों के विभाजन बिंदु हैं।

संख्या-रेखा पर O से C तक 1 भाग के 4 बराबर भागों में से 3 भाग होते हैं। अत: संख्या रेखा पर बिंदु C, $\frac{3}{4}$ को निरुपित करता है। नीचे संख्या-रेखा पर $\frac{-2}{5}$ को बिंदु B निरुपित करता है।



इसी प्रकार नीचे संख्या-रेखा पर बिंदु $B, \frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ को निरुपित करता है।



एक परिमेय संख्या को लिखने का मानक रूप

जब किसी परिमेय संख्या को ऐसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जाता है ताकि p तथा q का उभयनिष्ठ गुणनखंड केवल 1 हो एवं q>o हो, तो संख्या को मानक रूप में लिखा गया कहा जाता है।

अगले अनुच्छेद पर जाने से पहले अपनी प्रगति की जांच कीजिए।

E4 बताइए निम्नलिखित कथन 'सत्य' हैं अथवा 'असत्य' :

(a) सभी प्राकृत संख्याएं पूर्णांक हैं।

(b) सभी पूर्णांक पूर्ण संख्याएं हैं।

(c) पूर्ण संख्याएं परिमेय संख्याएं नहीं हैं।

(d) ऋणात्मक पूर्णांक परिमेय संख्याएं नहीं हो सकते।

(e) सभी परिमेय संख्याएं पूर्णांक नहीं हैं।

5.4 संख्याओं पर संक्रियाओं के गुण

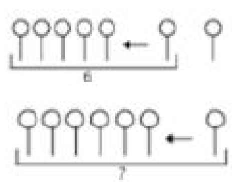
हम चार मूल संक्रियाओं–योग, घटा, गुणा तथा भाग से पूरी तरह परिचित हैं तथा उन्हें कार्यान्वित करने में सक्षम हैं। इस खण्ड में आप इन संक्रियाओं के गुणों को जानेंगे जब इन्हें विभिन्न संख्या समूहों पर निष्पादित किया जाता है।

5.4.1 प्राकृत तथा पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएं

जैसा आप पहले से ही जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं का समूह प्राकृत संख्याओं के समूह में केवल '0' सम्मिलित करने से बनता है, इन दोनों समूहों की संख्याओं पर चार मूल संक्रियाएं लगभग समान हैं, इसीलिए इन पर इसी अनु-खण्ड में एक साथ चर्चा की गयी है।

(a) योग :

जब समान वस्तुओं के दो संग्रहों को एक साथ रख दिया जाता है, तो नये संग्रह में वस्तुओं की कुल संख्या कैसे ज्ञात की जाए। मान लीजिए कि 2 माचिस की तीलियों को 5 माचिस की तीलियों के साथ मिलाया जाता है। हम बच्चों को उनका योग करना दो विधियों से सिखा सकते हैं। एक विधि तो यह है कि दोनों संग्रहों को एक साथ रख लिया जाए तथा मिश्रित संग्रह में माचिस की तीलियों को गिन लिया जाए। दूसरी विधि यह है कि एक संग्रह (मान लीजिए 5 माचिस की तीलियों वाला संग्रह) को अखंड रख लिया जाए तथा दूसरे संग्रह से एक-एक करके उसमें तीलियां जोड़ी जाएं जैसा कि नीचे प्रदर्शित किया गया हैं



$5 + 2$

$= (5+1) +1$

$= (6+1)$

$= 7$

टिप्पणी

प्राकृत तथा पूर्ण संख्याओं में योग के कुछ गुण

(i) **संवृतता का गुण :** दो प्राकृत/पूर्ण संख्याओं का योग एक प्राकृत/पूर्ण संख्या होता है।

(ii) **क्रम विनिमेय गुण :** $p + q = q + p$ जहां p, q प्राकृत/पूर्ण संख्याएं है।

(iii) **सहचारी गुण :** $(p + q) + r = p + (q + r)$ जहां, p, q, r प्राकृत/पूर्ण संख्याएं हैं।

(iv) **पूर्ण संख्याओं में योज्य तत्समक :** पूर्ण संख्याओं के समूह में, $4+0=0+4=4$ होता है। इस प्रकार $p+0=0+p=p$ (जहां p कोई पूर्ण संख्या है।) अतएव, 0 को पूर्ण संख्याओं का **योज्य तत्समक** कहा जाता है।

(b) व्यवकलन (घटाना)

व्यवकलन से अभिप्राय हटाने से है। वस्तुओं के किसी समूह से हम कुछ को अथवा सभी को हटा सकते हैं। उदाहरणार्थ, 5 वस्तुओं में से हम 5 से कम अथवा सभी 5 वस्तुओं को हटा सकते हैं। किसी वस्तु–समूह से जब सभी वस्तुएं हटा ली जाती है तो शेष कुछ नहीं रहती और क्योंकि 'कुछ नहीं होने' को शून्य द्वारा निरुपित किया जाता है, $p–p=0$ (जहां p एक पूर्ण संख्या है।)

(c) गुणन

गुणन किसी संख्या के स्वयं के साथ बारंबार योग को निरुपित करता है। उदाहरणार्थ,

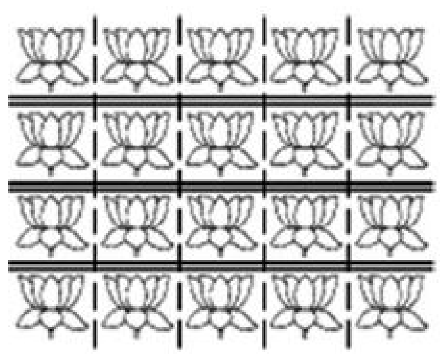
3+3 को 3×2 से निरुपित किया जाता है।

3+3+3 को 3×3 से निरुपित किया जाता है।

3+3+3+3 को 3×4 से निरुपित किया जाता है।

गुणन के गुण

(i) **क्रम विनिमेय गुण :** नीचे दी गयी सारणी को ध्यान पूर्वक देखिए :

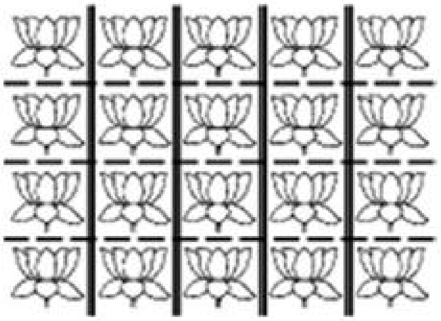


प्रत्येक पंक्ति में 5 फूल

4 पंक्तियां हैं

फूलों की कुल संख्या = 5+5+5+5 अथवा $5 \times 4 = 20$

उपर्युक्त संग्रह नीचे प्रदर्शित किया गया है :



प्रत्येक स्तंभ में 4 फूल

5 स्तंभ हैं।

फूलों की कुल संख्या = 4+4+4+4+4 = 4x5 = 20

किन्तु दोनों संग्रहों में फूलों की संख्या समान है।

अत: यह प्राप्त हुआ कि 5x4 = 4x5

दूसरे शब्दों में, यदि p तथा q दो प्राकृत/पूर्ण संख्याएं हैं, तो pxq=qxp

अत: प्राकृत तथा पूर्ण संख्याओं में गुणन क्रम विनिमेय है।

(ii) संवृतता का गुण : यदि p तथा q प्राकृत अथवा पूर्ण संख्याएं हैं, तो pxq भी एक प्राकृत अथवा पूर्ण संख्या होती है। हम कहते हैं कि प्राकृत/पूर्ण संख्याएं गुणन में संवृत्त हैं।

(iii) सहचारी गुण : (pxq)xr = px(qxr) [जहां p,q तथा r कोई तीन प्राकृत/पूर्ण संख्याएं हैं।]

(iv) गुणन तत्समक : गुणन के संदर्भ में संख्या 1 का निम्नलिखित विशेष गुण है :

px1=1xp=p (जहां p एक प्राकृत/पूर्ण संख्या है।)

अत: हम कहते हैं : संख्या '1' गुणन का तत्समक है।

(v) गुणन का योग पर वितरण गुण :

p x (q+r) = pxq + pxr

हम कहते हैं, "गुणन योग पर वितरित होता है।"

उदाहरण : 5x(3+4) = 5x7=35

तथा 5x3+5x4=15+20=35

अत: 5x(3+5) = 5x3+5x4

टिप्पणी

(d) भाग

जब p तथा q प्राकृत संख्याएं होती हैं तथा $p \times q = r$ होता है, हम करते हैं :

- 'r' 'p' से विभाजित है तथा 'r' 'q' से विभाजित है।
- 'p' तथा 'q' में से प्रत्येक 'r' का एक गुणन खंड है।
- 'r', 'p' तथा 'q' में से प्रत्येक का एक गुणज है।

हम चिन्ह '÷' का प्रयोग करते हैं तथा लिखते हैं

$r \div p = q$ तथा $r \div q = p$

उदाहरणार्थ, 3x5 = 15 । इससे हम कहते हैं

(i) 15, 3 तथा 5 में से प्रत्येक से विभाजित है।

(ii) 3 तथा 5 में से प्रत्येक 15 का एक गुणन खंड है।

(iii) 3 तथा 5 में से प्रत्येक का एक गुणज 15 है।

इसके अतिरिक्त यह देखा जा सकता है कि

(a) 1x12 = 12 (b) 2x6 = 12 (c) 3x4 = 12

इस प्रकार (a), (b), (c) प्रदर्शित करते हैं कि 1, 2, 3, 4, 6 तथा 12 में से प्रत्येक 12 का एक गुणनखंड है।

प्राकृत संख्याओं 1,2,3 के विषय में आप क्या सोचते हैं?

ऐसी कोई भी दो भिन्न प्राकृत संख्याएं नहीं है जिनका गुणनफल 1 हो। अतएव,

- 1 का केवल एक गुणनखंड 1 है।
- क्योंकि 1x2 = 2 तथा दूसरा संख्याओं का कोई युग्म ऐसा नहीं है जिनका गुणनफल 2 हो, अतएव, 2 के केवल दो गुणन खंड 1 तथा 2 हैं।

इसी प्रकार अनेक प्राकृत संख्याएं ऐसी हैं जिनके केवल दो गुणनखंड होते है। 3,5,7,11,13, .. ऐसी प्राकृत संख्याओं के उदाहरण हैं जिनमें से प्रत्येक के दो गुणनखंड हैं। इन संख्याओं को 'अभाज्य संख्याएं' कहा जाता है।

> एक प्राकृत संख्या, जिसके केवल दो भिन्न गुणनखंड 1 तथा स्वयं संख्या हों, को अभाज्य संख्या कहा जाता है।

> एक प्राकृत संख्या, यथा 4,6,8,9,10,12,15, ..., जिसके दो से अधिक गुणनखंड हों, को **संयुक्त (भाज्य) संख्या** कहा जाता है।

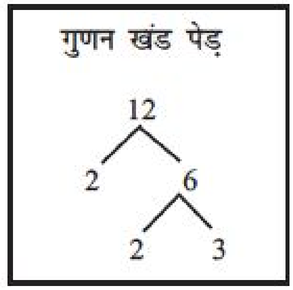
भाज्य (संयुक्त) संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडीकरण

किसी संयुक्त संख्या को अभाज्य संख्याओं की गुणा के रूप में लिखना उसका अभाज्य गुणनखंडीकरण कहा जाता है। यथा

$12 = 2 \times 2 \times 3$

कार्य विधि

2	12
2	6
3	3
	1



इस प्रकार, $12 = 2 \times 2 \times 3$

अभाज्य संख्याओं से संबंधित कुछ पद

असहभाज्य (अथवा परस्पर अभाज्य) संख्याएं

दो प्राकृत संख्याएं असहभाज्य होती है यदि उनका 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो। नीचे उदाहरण दिये गए हैं :

(i) 8 तथा 27 असहभाज्य संख्याएं (यद्यपि उनमें से प्रत्येक भाज्य संख्या है)

(ii) 17 तथा 20 असहभाज्य संख्याएं हैं।

यमज अभाज्य (Twin primes) संख्याएं

ऐसी दो अभाज्य संख्याएं, जिनका अंतर 2 होता है, यमज अभाज्य संख्याएं कहलाती हैं। 3 तथा 5, 5 तथा 7, 11 तथा 13, 17 तथा 19 यमज अभाज्य संख्याओं के उदाहरण हैं।

सम अभाज्य संख्या

केवल 2 ही ऐसी अभाज्य संख्या है जो सम है। यह सबसे छोटी अभाज्य संख्या भी है।

किसी परिसर के अंतर्गत अभाज्य संख्याओं को पहचानना

1 से 100 के बीच की अभाज्य संख्याओं को ज्ञात करने की प्रक्रिया नीचे दी गयी है :

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

[ईरैटोस्थीन्स की छलनी 1 ईरैटोस्थीन्स ग्रीस गणितज्ञ था।]

प्रक्रिया

(i) 2 से बड़े 2 के सभी गुणज काट दीजिए।

(ii) 3 से बड़े 3 के सभी गुणज काट दीजिए।

(iii) 5 से बड़े 5 के सभी गुणज काट दीजिए।

(iv) 7 से बड़े 7 के सभी गुणज काट दीजिए।

(1 को छोड़कर) सभी संख्याएं, जो काटी नहीं गयी, अभाज्य संख्याएं हैं। प्रक्रिया 7 पर क्यों समाप्त हो जाती है?

100 का वर्गमूल 10 है।

10 से ठीक छोटी अभाज्य संख्या 7 है। अत: प्रक्रिया 7 तक जारी रहती है। इस प्रकार 1 से 100 के बीच की अभाज्य संख्याएं हैं :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71 73, 79, 83, 89, 97.

अब अपनी प्रगति की जांच कीजिए।

E5 कौन सी प्राकृत संख्या ऐसी है जो न तो अभाज्य है और न भाज्य?

E6 पूर्ण संख्याओं में योज्य तत्समक क्या है?

E7 दो अभाज्य संख्याओं का अंतर विषम है। यदि उनका योग 15 है, तो वे दो अभाज्य संख्याएं कौन कौन सी हैं?

E8 10 तथा 30 के बीच में यमज अभाज्य संख्याओं के कितने युग्म हैं?

E9 यदि किसी भाग के प्रश्न में भाजक, भागफल तथा शेषफल क्रमश: 8, 12 तथा 5 हों, तो भाज्य क्या होगा?

5.4.2 पूर्णांकों पर संक्रियाएं

A. योग : पूर्ण संख्याओं में योग के सभी गुण जैसे (i) संवृतता का गुण (ii) क्रमविनिमेय गुण (iii) सहचारी गुण (iv) योज्य तत्समक का अस्तित्व पूर्णांकों में भी विद्यमान है।

पूर्णांकों में, जो अतिरिक्त गुण है, वह निम्नलिखित है।

(v) **योज्य प्रतिलोभ (अथवा व्युत्क्रम) का अस्तित्व :** यदि '+p' एक पूर्णांक है, तो एक ऐसा '–p' (0 को छोड़कर) अस्तित्व में होता है ताकि $+p+(-p)=0$ हो। $+p$ तथा $-p$ को एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम अथवा व्युत्क्रम कहा जाता है। आइए अब पूर्णांकों के योग की संक्रिया पर एक प्रक्रिया के रूप में चर्चा करें।

(a) **धन पूर्णांकों का योग :**

धन पूर्णांकों का योग उसी प्रकार से किया जाता है जैसे प्राकृत संख्याओं का योग जैसे कि $(+5) + (+3) = +8$

(b) **एक धन पूर्णांक तथा एक ऋणपूर्णांक का योग :**

यथा : $(+5) + (-3)$

हम जानते हैं कि $+5 = (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1)$

इसी प्रकार, -3 को लिखा जा सकता है

$-3 = (-1) + (-1) + (-1)$

अब,

$(+5) + (-3) = (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (-1) + (-1) + (-1)$

$= \{(+1) + (-1)\} + \{(+1) + (-1)\} + \{(+1) + (-1)\} + (+1) + (+1)$

$= 0 + 0 + 0 + (+2)$

$= 0 + (+2) = +2$

एक लघु विधि

$(+5) + (-3) = (+2) + (+3) + (-3)$ [+5 को (+2) + (+3) से बदला गया है।]

$= (+2) + \{(+3) + (-3)\}$

$= (+2) + 0 = +2$

एक अन्य उदाहरण

$(+4) + (-7) = (+4) + (-4) + (-3)$ [–7 को (–4) + (–3) से बदला गया है।]

$= \{(+4) + (-4)\} + (-3)$

$= 0 + (-3) = -3$

टिप्पणी

(c) **दो ऋण पूर्णांकों का योग**

$(-2) + (-3) = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1)$

$= -5$

B. **व्यवकलन (घटाना)**

पूर्णांकों में घटाने से अभिप्राय है विरोधी संख्या (अर्थात व्युत्क्रम) को जोड़ना। इस प्रकार, यदि 'p' तथा 'q' दो पूर्णांक हैं, तो $p - q = p + (-q)$ उदाहरणार्थ

(i) $(+5) - (+8) = (+5) + (-8)$

(ii) $(+4) - (-3) = (+4) + (+3)$

(iii) $(-5) - (+2) = (-5) + (-2)$

(iv) $(-7) - (-3) = (-7) + (+3)$

और योग के संदर्भ में इस उपर्युक्त परिणामों को जान चुके हैं। पूर्णांकों में व्यवकलन का एक विशेष लक्षण निम्नलिखित है:

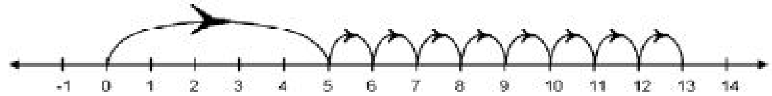
> प्राकृत संख्याओं में p–q उसी दशा में अर्थपूर्ण संक्रिया है जब $q<p$ होता है। किंतु पूर्णांकों में p–q अर्थ पूर्ण संक्रिया है चाहे $q < p$, $q=p$ अथवा $q>p$ हो।

संख्या-रेखाओं पर योग तथा व्यवकलन की संक्रियाएं

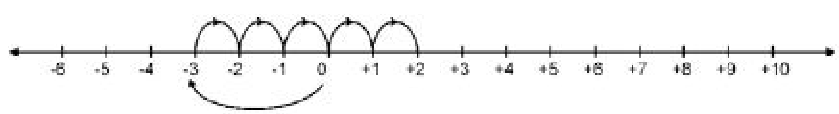
जैसा कि नीचे प्रदर्शित किया गया है, योग तथा व्यवकलन की संक्रियाओं में संख्या-रेखाओं का उपयोग किया जा सकता है:

(a) **योग** : (योग करने में हम दायीं ओर चलते हैं।)

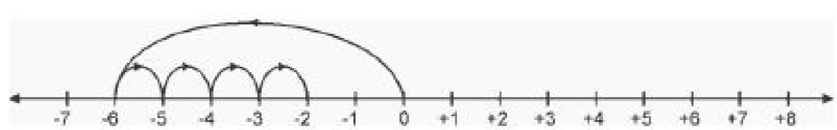
(i) $(+5) + (+8) = +13$



(ii) $(-3) + (+5) = +2$

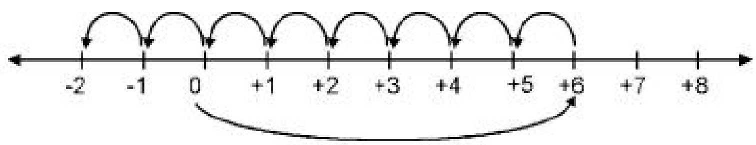


(iii) $(+4) + (-6) = (-6) + (+4) = -2$ [क्रम विनिमेय गुण द्वारा]

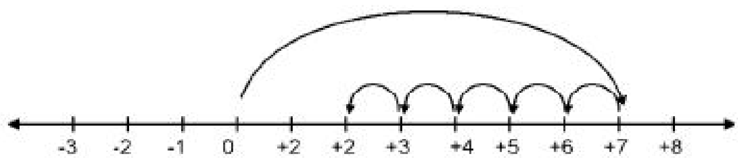


(b) **व्यवकलन :** (घटाने के लिए हम बायीं ओर चलते हैं।)

(i) (+6)–(+8) = – 2 [+6 से हम 8 अंतराल बायीं ओर गिनते हैं।]



(ii) (–5) – (–7) = –5 + 7 = 7 – 5 = +2



(c) **गुणन**

दो पूर्णांकों की गुणा एक योग होती है यदि उन में से एक पूर्णांक ऋणेतर हो। जैसे कि

(i) (+5) + (+5) + (+5) + (+5) = +5x4

इस प्रकार (+5) x (+4) = + 20 [जैसा प्राकृत संख्याओं में किया था]

(ii) (–3) + (–3) + (–3) + (–3) + (–3) = (–3) x 5

इस प्रकार, –3x5 = (–3) + (–3) + (–3) + (–3) + (–3) = –15

पूर्णांकों में गुणन के लिए चिन्हों के नियम

p	*q*	*pxq*
धनात्मक p>o	धनात्मक q>o	धनात्मक pxq >o
ऋणात्मक p<o	ऋणात्मक q<o	धनात्मक pxq>o
धनात्मक p>o	ऋणात्मक q<om	ऋणात्मक pxq<o
ऋणात्मक p<o	धनात्मक q>o	ऋणात्मक pxq<o
धनात्मक p>o	शून्य q=0	शून्य pxq=0
ऋणात्मक p<o	शून्य q=o	शून्य pxq=o

टिप्पणी

पूर्णांकों में गुणन के गुण

(i) गुणन संवृत्त होता है।

(ii) गुणन क्रम विनिमेय होता है।

(iii) गुणन सहचारी होता है।

(iv) गुणात्मक तत्समक का अस्तित्व है। पूर्णांकों में गुणात्मक तत्समक 1 है।

(v) गुणन योग पर वितरित होता है।

क्रियाकलाप 1 :

मूर्त उदाहरण लेकर पूर्णांकों में गुणन के गुण सत्यापित कीजिए।

....

....

....

d. भाग

हम प्राकृत संख्याओं में भाग पर गुणन की विपरीत क्रिया के रूप में चर्चा कर चुके हैं। यहां भी ऐसी ही स्थिति है।

यदि 'p' तथा 'q' शून्येतर पूर्णांक हैं तथा pxq=r, तो हम कहते हैं

(i) $r \div p = q$

(ii) $r \div q = p$

इस प्रकार

(i) $(+5) \times (+3) = +15$

$\therefore \quad (+15) \div (+5) = +3$

तथा $(+15) \div (+3) = +5$

(ii) $(+4) \times (-6) = -24$

$(-24) \div (+4) = -6$

तथा $(-24) \div (-6) = +4$

(iii) $(-3) \times (-5) = +15$

$\therefore \quad (+15) \div (-3) = -5$

तथा $(+15) \div (-5) = -3$

पूर्णांकों में भाग के लिए चिन्हों के नियम

p	q	$p \div q$
धनात्मक p>o	धनात्मक q>0	धनात्मक $(p \div q) > 0$
धनात्मक p>o	ऋणात्मक q<0	ऋणात्मक $(p \div q) < 0$
ऋणात्मक p<o	धनात्मक q>0	ऋणात्मक $(p \div q) < 0$
ऋणात्मक p<o	ऋणात्मक q<0	धनात्मक $(p \div q) > 0$

मुख्य नोटः एक पूर्णांक का शून्य (0) से भाग निरर्थक है।

अपनी प्रगति की जांच के लिए निम्नलिखित के उत्तर दीजिए:

E10 पूर्णांकों में योज्य तत्समक क्या है?

E11 +7 का योज्य प्रतिलोम क्या है?

E12 वह कौन सा पूर्णांक है जिसे स्वयं से गुणा करने पर 1 प्राप्त होता है। ऐसे कितने पूर्णांक हैं?

E13 −8 से +8 तक के सभी पूर्णांकों का योग कितना है?

5.4.3 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएं

A. **योग**

(i) हम परिमेय संख्याओं को समहर भिन्नों में बदल कर जोड़ते हैं।

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{9}{24}+\frac{10}{24}$$ (दोनों परिमेय संख्याओं को समहर भिन्नों में बदला गया है।)

$$=\frac{9+10}{24}$$

$$=\frac{19}{24}$$

(ii) हम परिमेय संख्याओं का योग नियम $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+rq}{qs}$ लगा कर करते हैं।

उदाहरणार्थ,

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\times5+3\times4}{3\times5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$$

नोट : $(-8)\div4=-2,\quad 8\div(-4)=-2$

अतः $\frac{-8}{4}=\frac{8}{-4}=-\frac{8}{4}$; इस प्रकार $\frac{-p}{q}=\frac{p}{-q}=-\frac{p}{q}$

योग के गुण

(i) परिमेय संख्याओं में योग संवृत्त होता है।

(ii) परिमेय संख्याओं में योग क्रमविनिमेय होता है।

(iii) योग सहचारी होता है

(iv) योज्य तत्समक का अस्तित्व होता है। q में योज्य तत्समक शून्य है।

(v) योज्य प्रतिलोम का अस्तित्व होता है। $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{-p}{q}$ एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम हैं।

अतएव $=\frac{p}{q}+\left(-\frac{p}{q}\right)=0$

क्रियाकलाप 2 :

परिमेय संख्याओं के उपर्युक्त योग के गुण मूर्त उदाहरणों से सत्यापित कीजिए।

....

....

....

B. व्यवकलन :

(i) हम एक परिमेय संख्या से दूसरी परिमेय संख्या का व्यवकलन उन्हें समहर भिन्नों में बदलकर करते हैं।

टिप्पणी

उदाहरण :

$$\frac{5}{8}-\frac{7}{12}=\frac{15}{24}-\frac{14}{24}$$

$$=\frac{15-14}{24}=\frac{1}{24}$$

(ii) किसी परिमेय संख्या को एक अन्य परिमेय संख्या से घटाने में हम व्यवकलन को योग में व्यक्त करने के बाद योग में दिए गए नियम का पालन करते हैं। इस प्रकार

$$\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{p}{q}+\left(\frac{-r}{s}\right)$$

$$=\frac{ps-qr}{qs}$$

जैसे कि उदाहरण के लिए

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{3}{4}+\frac{-2}{5}=\frac{3\times5+(-2)\times4}{4\times5}=\frac{15-8}{20}=\frac{7}{20}$$

C. गुणन

यदि $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ दो परिमेय संख्याएं हैं, तो

$$\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{p\times r}{q\times s}$$

उदाहरण

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$$

(ii) $\frac{-3}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{-3\times2}{4\times7}=\frac{-6}{28}=\frac{-3}{14}$

परिमेय संख्याओं में गुणन के गुण

(i) गुणन संवृत्त है।

(ii) गुणन क्रम विनिमेय है।

टिप्पणी

(iii) गुणन सहचारी है।

(iv) गुणात्मक तत्समक का अस्तित्व है। (Q में गुणात्मक तत्समक 1 है।) (मूर्त उदाहरणों से इन गुणों को सत्यापित कीजिए।)

(v) गुणात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व होता है।   तथा $\frac{q}{p}$ परस्पर **गुणात्मक प्रतिलोम हैं**

क्योंकि

$$\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}=1$$

$\frac{p}{q}$ तथा $\frac{q}{p}$ को एक दूसरे के **व्युत्क्रम** भी कहते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{2}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{3}{2}$ है, 5 का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{5}$ है।

(vi) गुणन योग पर वितरित होता है। जैसे कि

$$\frac{p}{q}\times\left(\frac{m}{n}+\frac{k}{e}\right)=\frac{p}{q}\times\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\times\frac{k}{e}$$

उदाहरण,

$$\frac{2}{3}\left(-\frac{4}{5}+\frac{6}{7}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{-4}{5}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$$

गुणन के चिन्हों के नियम वैसे ही है जैसे पूर्णांकों में होते हैं।

क्रियाकलाप 3 :

मूर्त उदाहरणों से परिमेय संख्याओं के गुणन के उपर्युक्त (i) से (iv) गुणों को सत्यापित कीजिए।

....

....

....

D. भाग :

एक परिमेय संख्या का दूसरी से भाग, पहली संख्या का दूसरी के गुणन प्रतिलोभ से गुणा

करना होता है। अर्थात

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}$$

जैसे कि

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{-4} = \frac{14}{-12} = -\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6}$$

नोट : (i) 0 से भाग निरर्थक है।

(ii) भाग के चिन्हों के नियम वैसे ही हैं जैसे पूर्णांकों में होते हैं।

परिमेय संख्याओं की दशमलव समानता

परिमेय संख्याओं, जिनके हर 10 या 10 की कोई घात हों, का निरुपण भिन्न प्रकार का होता है। नीचे उदाहरण दिए गए हैं:

$$\frac{1}{10} = 0.1, \ \frac{2}{10} = 0.2, \ \frac{7}{10} = 0.7$$

$$\frac{1}{100} = 0.01, \ \frac{2}{100} = 0.02, \ \frac{14}{100} = 0.14$$

आइए कुछ अन्य परिमेय संख्याओं को देखें।

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 125}{8 \times 125} = \frac{625}{1000} = 0.625$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = 0.4$$

इस प्रकार, यह देखा जा सकता है कि उन परिमेय संख्याओं, जिनके हरों का 2 तथा 5 के अतिरिक्त कोई अन्य गुणन खंड नहीं है, को दशमलवों के रूप में निरुपित किया जा सकता है। ऐसे दशमलवों को सान्त दशमलव कहते हैं। $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}$, आदि के विषय में आप क्या सोचते

टिप्पणी

हैं? ऐसी स्थितियों में हर को 10 की किसी घात में नहीं बदला जा सकता चाहे उसे किसी भी संख्या से गुणा किया जाए।

अत: हम दशमलव समानता प्राप्त करने के लिए 1 को 3 से भाग देते है

```
     0.333....
3 | 1.0000
  | 0
  --------
    1.0
     9
  --------
     10
      9
  --------
      10
```

ऐसा करने में भाग का कभी अंत नहीं होगा क्योंकि प्रत्येक कदम पर शेषफल आरंभिक भाज्य के बराबर है। अत: हम लगातार 3 प्राप्त करते जाते है। इस प्रकार, हम कहते हैं :

$$\frac{1}{3} = 0.3333 \ldots$$

क्योंकि परिणाम कभी समाप्त नहीं होता तथा हमें बार बार अंक 3 प्राप्त होता रहता है, हम कहते हैं कि परिणाम एक **अनन्त आवर्ति दशमलव** है।

उपर्युक्त प्रकार के अन्य उदाहरण हैं :

0.232323.........

2.537373737..........

1.342342342...........

उपर्युक्त संख्याओं को निम्नलिखित प्रतीकात्मक रूप में भी लिखा जा सकता है :

$0.3333 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.\overline{3}$

$0.232323 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.\overline{23}$

$2.5373737 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2.5\overline{37}$

$1.342342342 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1.\overline{342}$

दशमलव संख्याएं **असांत अनावर्ति** भी होती हैं। नीचे उदाहरण दिये गए हैं :

0.12112111211112 ....

3.201001000100001 ...

टिप्पणी

यह देखा जा सकता है कि न तो किसी एक अंक और न ही किसी अंक-समूह की पुनरावृत्ति हुई है।

किसी असान्त तथा आवृत्ति दशमलव को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करना

उदाहरण : परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए!

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{23}$

हल : (i) आइए $0.\overline{4}$ को x लें।

$0.444 \ldots = x \ldots (1)$

$0.444 \ldots \times 10 = x \times 10$ (दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर)

$4.444 \ldots = 10x \ldots (2)$

(1) तथा (2) से हम प्राप्त करते हैं

$4.444 \ldots - 0.444 \ldots = 10x - x$

$\Rightarrow 4 = 9x$

$\therefore x = \frac{4}{9}$

अतएव $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

(ii) आइए $0.\overline{23}$ को x लें।

$\Rightarrow 0.232323\ldots\ldots = x$ ...(1)

$\Rightarrow 0.232323\ldots\ldots \times 100 = x \times 100$

$\Rightarrow 23.232323\ldots\ldots = 100x$ ...(2)

$(2) - (1) \Rightarrow 23 = 99x$

$\Rightarrow x = \frac{23}{99}$

नोट : एक सांत तथा एक अनंत आवृति दशमलव में से प्रत्येक एक परिमेय संख्या को निरुपित करता है। किन्तु एक अनन्त अनावृति दशमलव एक परिमेय संख्या को निरुपित नहीं करता।

टिप्पणी

स्थानीय मान प्रणाली का विस्तार

10000 $= 10^4$	1000 $= 10^3$	100 $= 10^2$	10 $= 10^1$	1 $= 10^0$	.	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

इस प्रकार इकाई के स्थान के दायीं ओर दसवें, सौवें, आदि स्थान आते हैं।

अतएव, $23.715 = 2x10 + 3x1 + 7x\,\frac{1}{10} + 1x\,\frac{1}{100} + 5x\,\frac{1}{1000}$

अपनी प्रगति की जांच कीजिए।

E14 (a) $\frac{2}{7}$, (b) $\frac{3}{-8}$, (c) 0 के योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

E15 दशमलव समता ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{12}{25}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{2}{7}$

E16 (a) $\frac{3}{7}$ (b) $-\frac{5}{8}$ (c) 0 के गुणन प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

E17 $0.\overline{51}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

5.5 गुणनखंड तथा गुणज

प्राकृत संख्याओं की गुणा तथा भाग के गुणों की चर्चा करते समय हमने प्राकृत संख्याओं के गुणज तथा गुणनखंडों के विषय में बात की थी। इस खण्ड में हमने सर्वनिष्ठ (सार्व) गुणनखंडों तथा गुणजों तथा वास्तविक जीवन की समस्याओं के समाधान में उनके उपयोग का संकते करते हुए उनके क्रमशः म.स. तथा ल.स. के परिकलन में प्रयोग पर चर्चा करने का प्रयास किया है।

5.5.1 सार्व गुणनखंड तथा महत्तम समापवर्तक

आइए संख्याएं 12 तथा 18 लें।

12 के गुणनखंड हैं : 1,2,3,4,6,12 ..... (a)

18 के गुणखंड हैं : 1,2,3,6,9,18 ..... (b)

(a) तथा (b) से यह देखा जा सकता है कि 1,2,3 तथा 6 दोनों सूचियों में सर्वनिष्ठ हैं।

अतएव 1,2,3 तथा 6 को 12 तथा 18 के सार्व गुणनखंड लिया जाता है। **सार्व गुणनखंडों** में सबसे बड़ा 6 है।

अतएव, 6 को 12 तथा 18 का **महत्तम समापवर्तक** (म.स.) कहा जाता है।

म.स. का निर्धारण

प्रक्रिया (i) : प्रत्येक संख्या के गुणनखंडों की सूची लिखने के उपरान्त म.स. ज्ञात किया जा सकता है। (जैसा ऊपर 12 तथा 18 के लिए किया गया था।)

प्रक्रिया (ii) : अभाज्य गुणन खंडन विधि

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$$

म.स. सबसे छोटी घात वाले दोनों संख्याओं के सार्व अभाज्य गुणन खंडों का गुणनफल होता है। अतः 12 तथा 18 का म.स. = $2^1 \times 3^1 = 6$

प्रक्रिया (iii) : सतत भाग विधि

चरण-1 : दोनों संख्याओं में बड़ी को छोटी से भाग दिया जाता है तथा शेषफल प्राप्त किया जाता है।

चरण-2 : पहले भाग के भाजक को भाज्य बनाकर पहले भाग के शेषफल से भाग दिया जाता है।

```
12| 18 |1
  ------
    6 | 12 |2
      | 12
      ----
        0
```

इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि प्राप्त शेषफल शून्य हो।

जब शेषफल शून्य हो, तो उस अंतिम भाग का भाजक वांछित म.स. होता है।

म.स. के अनुप्रयोग (शाब्दिक समस्याएं)

आइए नीचे दिये गए उदाहरण को देखें :

किसी कक्षा में 24 लड़के तथा 30 लड़कियां हैं। लड़के तथा लड़कियों की ऐसी अलग-अलग पंक्तियां तैयार करनी हैं ताकि प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या समान हो। अधिक से अधि क कितने लड़कों (अथवा लड़कियों) की पंक्तियां बनेंगी ताकि सभी विद्यार्थी समायोजित हो जाएं।

प्रत्येक पंक्ति में बच्चों (लड़कों तथा लड़कियों) की अधिक से अधिक संख्या 24 तथा 30 का म.स. होगा।

टिप्पणी

तब हम 24 तथा 30 का मस अर्थात 6 ज्ञात करते हैं। इस प्रकार हम उत्तर प्राप्त करते हैं।

5.5.2 सार्व गुणज तथा लघुतम समापवर्त्य

आइए संख्याएं 8 तथा 12 लें।

8 का गुणज वह संख्या होती है जो 8 से विभाजित होती है।

अतएव, 8 के गुणज 8x1, 8x2, 8x3, 8x4, आदि हैं।

इस प्रकार 8 के गुणज हैं : 8, 16, 24, 32, 49, 48, 56, 64, 82, ...

(यह एक अनन्त संख्याओं की सूची है।)

इसी प्रकार 12 के गुणज हैं : 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

(यह भी एक अनन्त संख्याओं की सूची है।)

अब, यह देखा जा सकता है कि 8 तथा 12 के सार्वगुणज है : 24, 48, 72, ...

सार्व गुणजों की सूची भी अनन्त है।

8 तथा 12 का सबसे छोटा सार्व गुणज (अथवा ल.स.) 24 है।

ल.स. का निर्धारण

प्रक्रिया (i) : प्रत्येक संख्या के गुणजों की सूचियां लिखकर, सार्व गुणज तथा सबसे छोटा सार्व गुणज (ल.स.) उपर्युक्त की भांति ज्ञात किया जा सकता है।

प्रक्रिया (ii) : **अभाज्य गुणन खंडन विधि :** मान लीजिए कि हम 12 तथा 18 का ल.स. ज्ञात करना चाहते हैं।

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$$

जो अभाज्य संख्याएं किसी भी संख्या के अभाज्य गुणन खंडन में अधिकतम बार आती हैं, उन सब का गुणनफल ल.स. होता है।

इस प्रकार ल.स. $2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

दो संख्याओं के ल.स. तथा म.स. में संबंध

आइए निम्नलिखित उदाहरणों का ध्यानपूर्वक अवलोकन करें।

संख्याएं	*संख्याओं का गुणनफल*	*म.स.*	*ल.स.*	*म.स. तथा ल.स. का गुणनफल*
12 तथा 18	216	6	36	216

टिप्पणी

16 तथा 28	448	4	112	448
25 तथा 35	875	5	175	875

इस प्रकार हम देखते हैं कि

दो संख्याओं का गुणनफल = उनके म.स. तथा ल.स. का गुणनफल

E18 : दो असहभाज्य संख्याओं का म.स. कितना होगा?

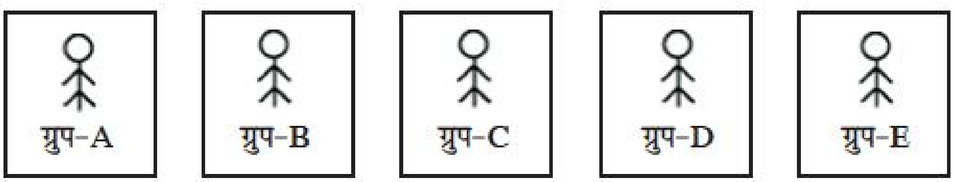
E19 : दो संख्याओं के म.स. तथा ल.स. क्रमशः 8 तथा 96 हैं। यदि उनमें से एक संख्या 24 हो, तो दूसरी क्या होगी?

5.6 अंकगणित तथा अनुप्रयोग

A. **एकिक नियम**

20 बच्चों को बराबर बच्चे वाले 5 समूहों (ग्रुपों) में विभक्त करना है। अब हम विभाजन के कार्य को संपन्न करते हैं।

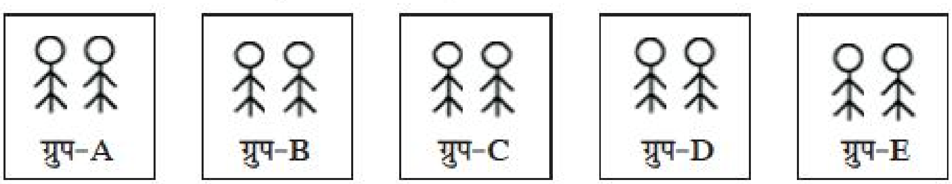
- पांच ग्रुपों के लिए पांच स्थान चिन्हित कर लिए जाते हैं तथा प्रत्येक स्थान पर एक बच्चा खड़ा किया जाता है।



20 में से 5 बच्चे चले गए।

इस प्रकार 20-5 = 15 शेष रहे।

- प्रत्येक स्थान पर एक दूसरा बच्चा खड़ा किया जाता है।

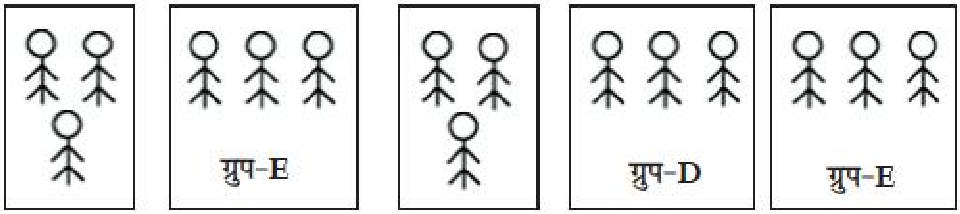


शेष 15 बच्चों में से 5 और बच्चे चले गए।

इस प्रकार 15-5=10 शेष रहे।

टिप्पणी

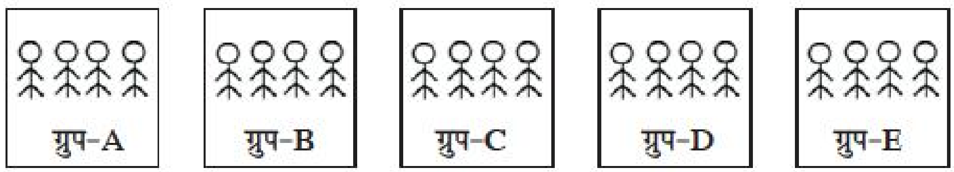
- प्रत्येक स्थान पर एक तीसरा बच्चा खड़ा किया जाता है।



शेष 10 बच्चों में 5 और बच्चे चले गए।

इस प्रकार 10-5 = 5 शेष रहे।

- प्रत्येक स्थान पर एक चौथा बच्चा खड़ा किया जाता है।



अब, 5-5 = 0 शेष रहे।

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक ग्रुप में 4 बच्चे हैं।

किन्तु हम जानते हैं कि 20 में से 5, 20 ÷ 5 बार घटाया जा सकता है।

अतः हम कहते हैं :

यदि 5 समान ग्रुपों में 20 बच्चे हों, तो एक ग्रुप में 20 ÷ 5 = 4 बच्चे होंगे।

दूसरे उदाहरण

(i) यदि समान साइज वाले 5 बरतनों में 20L दूध हो, तो एक बरतन में 20 L ÷ 5 + 4L दूध होगा।

(ii) यदि 5m पट्टी का मूल्य ₹ 20.00 हो, तो 1 m पट्टी का मूल्य ₹ 20.00 ÷ 5 = ₹ 4.00 होगा।

आइए अब हम अनेक के लिए परिकलित करें जब हमें एक के लिए दिया हो।

एक पेन का मूल्य ₹ 8.00 है। 3 पेनों का मूल्य कितना होगा?

स्पष्टतः सभी 3 पेनों का मूल्य = ₹ 8.00 + ₹ 8.00 + ₹ 8.00 किन्तु हम जानते हैं कि 8+8+8 = 8 x 3

∴ हम कह सकते हैं कि 3 पेनों का मूल्य = ₹ 8.00 x 3 इस प्रकार हम जान सके कि

यदि 1 पेन का मूल्य ₹ 8.00 हो, तो 3 पेनों का मूल्य = ₹ 8.00 x 3 = ₹ 24.00

अन्य इस प्रकार के उदाहरण हैं–

(iii) यदि नमक के एक पैकट का भार 600 ग्रा है, तो नमक के 4 पैकटों का भार 600 ग्रा x 4 = 2400 ग्रा = 2.400 किग्रा

(iv) यदि तेल के एक मर्तबान में 12L तेल है, तो 5 मर्तबानों में 12Lx5 = 60L तेल होगा।

आइए उपर्युक्त चर्चा किये गए उदाहरणों का विश्लेषण करें।

उदाहरण	*पहली चर राशि*	*दूसरी चर राशि*
(i)	बरतनों की संख्या	धारिता
(ii)	लम्बाई	मूल्य
(iii)	पैकटों की संख्या	भार
(iv)	मर्तबानों की संख्या	धारिता

उपर्युक्त प्रत्येक उदाहरण में 'जितने गुना' पहली चर राशि है, 'उतने गुना' दूसरी चर राशि है। जैसे कि

बरतनों की संख्या दुगुनी है; तो उनकी धारिता दुगनी होगी;

लम्बाई 3 गुनी है, तो मूल्य 3 गुना होगा; इत्यादि

इस प्रकार,

(i) जब हमें अनेक के लिए ज्ञात होता है और एक के लिए परिकलित करना होता है, तो हम भाग देते हैं।

(ii) जब हमें एक के लिए ज्ञात होता है तथा अनेक के लिए परिकलित करना होता है, तो हम गुणा करते हैं।

ऐसे चर राशियों के युग्मों, जिनमें 'जितने गुना एक होती है, 'उतने गुना' दूसरी होती है, को **'अनुलोम विचरण'** वाले युग्म कहा जाता हैं।

प्रतिलोम विचरण वाली चर राशियां

आइए निम्नलिखित स्थितियों पर विचार करें :

3 कामगार किसी कार्य को 5 दिन में पूरा करते हैं।

यदि 1 कामगार अकेला उस कार्य को करे, तो उसे उस कार्य को पूरा करने में कितने दिन लगेंगे?

हमारा अनुभव बताता है कि वह इसे 5+5+5 = 5x3 दिन में पूरा कर सकता है।

टिप्पणी

अतएव, यह देखा गया है कि

यदि 3 कामगार किसी कार्य को 5 दिन में पूरा करें, तो 1 कामगार उसे 5x3 = 15 दिन में पूरा करता है। इसी प्रकार के अन्य उदाहरण नीचे दिये जा रहे हैं :

(i) यदि 8 व्यक्ति भोजन की किसी मात्रा को 5 दिन में समाप्त करते हैं तब 1 व्यक्ति भोजन की उसी मात्रा को 8x5=40 दिन में समाप्त करेगा।

(ii) यदि 1 व्यक्ति किसी कार्य को 24 दिन में पूरा करता है, तो 3 व्यक्ति उस कार्य को $24 \div 3 = 8$ दिन में पूरा करेंगे।

(iii) यदि 1 व्यक्ति भोजन के किसी भण्डार को 30 दिन में समाप्त करता है, तो 5 व्यक्ति उस भण्डार को $30 \div 5 = 6$ दिन में समाप्त करेंगे।

उपर्युक्त उदाहरणों में चर राशियां हैं :

व्यक्तियों की संख्या	*कार्य करने के लिए वांछित समय*
भोजन के किसी भण्डार को समाप्त करने के लिए व्यक्तियों की संख्या	समाप्त करने में लिया जाने वाला समय

जैसे हमने देखा है :

यदि प्रथम चर राशि दुगुनी की जाए, तो दूसरी आधी हो जाती है।

यदि प्रथम चर राशि एक चौथाई होती है, तो दूसरी 4 गुनी होती है

चर राशियों के उपर्युक्त युग्म, परस्पर **प्रतिलोम विचरण** वाले युग्म कहे जाते हैं।

काम तथा समय में एकिक नियम का अनुप्रयोग

आइए नीचे दिए गए उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण: A किसी कार्य को 24 दिन तथा B उसी कार्य को 18 दिन में पूरा कर सकता है। A तथा B ने मिलकर कार्य करना आरंभ किया 14 दिन के बाद A ने कार्य छोड़ दिया। कार्य को पूरा होने में कितने दिन का समय लगेगा?

हल : A 24 दिन में पूरा कार्य कर सकता है।

$\therefore$ A का 1 दिन का कार्य $= \frac{1}{24}$

B 18 दिन में पूरा कार्य कर सकता है।

$\therefore$ B का 1 दिन का कार्य $= \frac{1}{18}$

A तथा B द्वारा मिलकर किया गया 1 दिन का कार्य = $\frac{1}{24}+\frac{1}{18}=\frac{3+4}{72}=\frac{7}{72}$

A तथा B द्वारा मिलकर किया गया 4 दिन का कार्य = $4\times\frac{7}{72}=\frac{7}{18}$

शेष कार्य जो पूरा किया जाना है = $1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$

B द्वारा 1 दिन में किया जाने वाला कार्य = $\frac{1}{18}$

$\frac{11}{18}$ कार्य को पूरा करने के लिए B द्वारा लिया जाने वाला समय (दिनों में) =

$\frac{11}{18}\div\frac{1}{18}=\frac{11}{18}\times\frac{18}{1}=11$

अत: कुल लगने वाला समय = (11+4) दिन = 15 दिन

एकिक नियम द्वारा परिकलन में निम्नलिखित व्यापकीकरण किये जाने की आवश्यकता है :

(i) इकाई समय में किया गया कार्य = $\frac{\text{किया गया कार्य}}{\text{कार्य करने में लिया गया समय}}$

(ii) वांछित समय = $\frac{\text{किया जाने वाला कार्य}}{\text{इकाई समय में किया गया कार्य}}$

B. प्रतिशतता का परिकलन

पद ''प्रतिशतता' से अभिप्राय

''प्रतिशत'' से अभिप्राय है ''सौ में से''। किन्तु इसका उपयोग कब किया जाता है? आइए नीचे दी गयी स्थिति को समझें।

A तथा B दो विद्यार्थी हैं। A अधिकतम अंक 80 वाली परीक्षा में बैठा तथा उसने 64 अंक प्राप्त किए। B किसी अन्य अधिकतम अंक 75 वाली परीक्षा में बैठा तथा उसने 63 अंक प्राप्त किए।

किसका प्रदर्शन अधिक अच्छा है, 80 अंकों में से 64 प्राप्त करना अथवा 75 अंकों में से 63 प्राप्त करना। यदि दोनों परीक्षाओं के अधिकतम अंक समान होते, तो हम अंकों की तुलना आसानी से कर सकते थे।

अत: हम कुल (अधिकतम) 100 अंक पर विचार करते हैं।

टिप्पणी

A कुल 80 अंकों में से 64 अंक प्राप्त करता है।

$\therefore$ A कुल 100 अंकों में से $\frac{64}{80} \times 100$ अंक = 80 अंक प्राप्त करता है।

अब हम कहते हैं कि A के 100 अंकों में से 80 अंक अर्थात 80 प्रतिशत अंक अथवा 80% अंक हैं।

इसी प्रकार B 75 अंकों में से 63 अंक प्राप्त करता है

$\therefore$ B 100 अंकों में से $\frac{63}{75} \times 100$ अंक = 84 अर्थात अंक प्राप्त करता है।

अब हम कहते हैं कि B के 100 अंकों में से 84 अंक अर्थात 84 प्रतिशत अंक अथवा 84% अंक हैं।

$\therefore$ B का प्रदर्शन A की तुलना में अधिक अच्छा है।

इस प्रकार हम जानते हैं–

- प्रतिशतता एक संख्या की दूसरी से तुलना होती है।
- तुलना करते समय हम दूसरी संख्या को 100 लेते हैं।
- p की q से तुलना करते समय हम प्राप्त करते हैं $\frac{p}{q} \times 100\%$

प्रतिशतता का अनुप्रयोग

निम्नलिखित अवसरों पर हम प्रतिशतता का अनुप्रयोग करते हैं।

- किसी व्यापार में लाभ अथवा हानि को क्रयमूल्य की प्रतिशतता के रूप में व्यक्त किया जाता है। 'लाभ 12% है' से अभिप्राय है लाभ क्रयमूल्य का 12% है।
- ऋण की स्थिति में देय ब्याज को मूलधन के प्रतिशत के रूप में व्यक्ति किया जाता है। 'ब्याज की दर 10% है' से अभिप्राय है एक वर्ष में ब्याज मूलधन के 10% के बराबर है।
- वृद्धि अथवा कमी (उपज में) की स्थिति में वृद्धि अथवा कमी को प्रारंभिक (उपज) के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

(a) लाभ तथा हानि

किसी व्यापार में

लाभ = विक्रयमूल्य − क्रयमूल्य (वि.मू. > क्र.मू.)

हानि = क्रयमूल्य − विक्रय मूल्य (क्र.मू. > वि.मू.)

लाभ% = लाभ क्रय मूल्य के प्रतिशत के रूप में

$$= \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$= \frac{\text{वि.मू.} - \text{क्र.मू.}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

हानि % = हानि क्रयमूल्य के प्रतिशत के रूप में

$$= \frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$= \frac{\text{क्र.मू.} - \text{वि.मू.}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

नोट : यदि किसी वस्तु को खरीदने के बाद, कुछ धन उस वस्तु को वहन करने (ढोनें) अथवा किसी अन्य उद्देश्य के लिए व्यय किया जाता है, तो वास्तविक क्रयमूल्य = क्रय मूल्य + अन्य व्यय होता है। लाभ अथवा हानि के परिकलन में क्रयमूल्य के स्थान पर वास्तविक क्रयमूल्य लिया जाता है।

वि.मू. अथवा क्र.मू. के परिकलन की सुगमता के लिए निम्नलिखित नियमों का उपयोग किया जा सकता है।

$$\frac{\text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ }\%} = \frac{\text{क्र.मू.}}{100}$$

$$\frac{\text{वि.मू.}}{100 - \text{हानि }\%} = \frac{\text{क्र.मू.}}{100}$$

(b) ब्याज का परिकलन

हम धन की बचत करके बैंक में रखते है, हम बैंक से धन उधार भी लेते हैं। जब हम धन की बचत करते हैं, तो हमें बैंक से ब्याज मिलता है। जब हम बैंक से धन उधार लेते हैं, तो हम बैंक को ब्याज का भुगतान करते हैं।

टिप्पणी

ब्याज कैसे परिकलित किया जाता है?

बैंक के साथ लेन-देन में, बैंक ब्याज की दर घोषित करता है।

हम निर्णय करते हैं :–

(i) हमें कितना धन उधार लेना (अथवा जमा करना) है।

(ii) हमें कितने समय के लिए उधार लेना (अथवा जमा करना) है।

मान लीजिए कि उधार लिया गया धन P है तथा इसे 't' वर्ष के लिए उधार लिया गया है।

बैंक द्वारा घोषित ब्याज की दर r% है।

उधार की अवधि के अंत में कितना ब्याज देना होगा?

कुल कितना धन बैंक को वापस करना होगा?

परिकलन

ब्याज की दर r% है। अर्थात्

मूलधन 100 पर एक वर्ष का ब्याज r है।

मूलधन 1 पर एक वर्ष का ब्याज $= \dfrac{r}{100}$

मूलधन p पर एक वर्ष का ब्याज $= \dfrac{r}{100} \times P = \dfrac{Pr}{100}$

मूलधन p पर t वर्ष का ब्याज $= \dfrac{Pr}{100} \times t = \dfrac{Prt}{100}$

इस प्रकार, $\boxed{\text{ब्याज (I)} = \dfrac{Prt}{100}}$ नियम 1 [I.P.t.r–नियम]

उधार की अवधि के अंत में बैंक को लौटाया जाने वाला कुल धन है,

मिश्रधन (A) = P + I

$$\Rightarrow A = P + \frac{Prt}{100}$$

अर्थात् $\boxed{A = P\left(1 + \dfrac{rt}{100}\right)}$ नियम II [A,P.t.r.–नियम]

नियम 1 का अनुप्रयोग

- P.t,r दिये है, I ज्ञात करना
- P,r,I दिये हैं, t ज्ञात करना
- P,I,t दिये हैं, r ज्ञात करना
- I,t,r दिये हैं, P ज्ञात करना

नियम II का अनुप्रयोग

- P,t,r दिये गए हैं, A परिकलित करना
- P,r,A दिये गए हैं, t परिकलित करना
- P,t,A दिये गए हैं, r परिकलित करना
- A,t,r दिये गए हैं, P परिकलित करना

अपनी प्रगति की जांच कीजिए :

E20 गणित की एक पाठय पुस्तक का मूल्य साहित्य की एक पाठय पुस्तक के मूल्य से 2 रुपये अधिक है। यदि 5 साहित्य की पुस्तकों का मूल्य गणित की 3 पुस्तकों से ₹ 38 अधिक हो, तो साहित्य की प्रत्येक पुस्तक का मूल्य क्या है?

E21 तीन व्यक्तियों ने मिलकर किसी कार्य के आधे को 8 दिन में पूरा किया। यदि उन में से एक कार्य को करना छोड़ दे तो शेष आधा कार्य कितने दिनों में पूरा होगा?

E22 गोपाल ने साधारण ब्याज की 12% दर पर कुछ धन उधान लिया। यदि उसे 5 वर्ष के अंत में उधार-ऋण समाप्त करने के लिए ₹ 1280 लौटाने पड़े हों, तो उसने कितनी धन राशि उधार ली थी?

5.7 सारांश

- प्राथमिक विद्यालय स्तर पर गणित पाठ्यक्रम में सम्मिलित चार प्रकार के संख्या निकाय हैं :
  - प्राकृत संख्याएं (N) : 1,2,3,4, ...
  - पूर्ण संख्याएं (W) : 0,1,2,3, ...
  - पूर्णांक (Z) : .... –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, ...
  - परिमेय संख्याएं (Q) : $\frac{p}{q}$ के रूप वाली संख्याएं जहां, p,q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ परिमेय संख्याएं होती हैं।

टिप्पणी

- भिन्न-भिन्न संख्या समूहों में योग के विभिन्न गुण हैं :
  - (i) योग N, W, Z तथा Q में संवृत्त होता है।
  - (ii) N, W, Z तथा Q में योग क्रम विनिमेय तथा सहचारी होता है।
  - (iii) W, Z तथा Q में योज्य तत्समक का अस्तित्व होता है। 0 योज्य तत्समक है।
  - (iv) Z तथा Q में योज्य प्रतिलोभ का अस्तित्व होता है।
- भिन्न-भिन्न संख्या समूहों में गुणन के विभिन्न गुण हैं :
  - (i) N, W, Z तथा Q में गुणन संवृत्त होता है।
  - (ii) N, W, Z तथा Q में गुणन क्रमविनिमेय होता है।
  - (iii) N, W, Z तथा Q में गुणन सहचारी होता है।
  - (iv) N, W, Z तथा Q में गुणन तत्समक का अस्तित्व होता है।
  - (v) Q में गुणन प्रतिलोम का अस्तित्व होता है।
  - (vi) N, W, Z तथा Q में गुणन योग पर वितरित होता है।
- किसी परिमेय संख्या को (i) सान्त दशमलव के रूप में निरुपित किया जा सकता है यदि हर का 2 तथा 5 के अतिरिक्त अन्य कोई गुणनखंड न हो। (ii) अनन्त आवृत्ति दशमलव के रूप में निरुपित किया जा सकता है यदि हर का 2 तथा 5 के अतिरिक्त अन्य गुणनखंड भी है।
- दो अथवा अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने के लिए अभाज्य सार्व गुणनखंडों का प्रयोग किया जा सकता है। इसी प्रकार दो अथवा अधिक प्राकृत संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात करने के लिए सार्व गुणजों का प्रयोग किया जा सकता है।

5.8 आपकी प्रगति की जांच के लिए उत्तर

E1 सबसे छोटी गणन संख्या 1 है।

E2 0

E3 (i) 0 (ii) 72 (iii) 792

E4 (a) सत्य (b) असत्य (c) असत्य (d) असत्य (e) सत्य

E5 1 **E6** 0 **E7** 2 तथा 13 **E8** 2 **E9** 101 **E10** 0

E11 –7 **E12** –1 तथा +1 **E13** 0 **E14** (a) $-\frac{2}{7}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) 0

E15 (i) 0.48 (ii) 0.875 (iii) 0.285714

E16 (a) $\frac{7}{3}$ (b) $\frac{-8}{5}$ (c) अस्तित्व नहीं है।

E17 $\frac{51}{99}$ **E18** 1 **E19** 32 **E20** ₹ 22

E21 12 दिन **E22** ₹ 800

5.9 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद् द्वारा तैयार की गयी तथा छापी गयी कक्षा VI, VII तथा VIII के लिए गणित की पाठय पुस्तकें

5.10 अन्त्य-इकाई अभ्यास

1. −30 तथा +30 के बीच कितने पूर्णांक 3 के गुणज हैं?

2. योग कितना है?

   (i) 1–2+3–4+5–6 .... +45

   (ii) 1+2–3+4+5–6+7+8–9+ .... –48

3. नीचे दी गयी तालिका से भाज्य संख्याएं हटाइए तथा 20 तथा 69 के बीच आने वाली अभाज्य संख्याओं की पहचान कीजिए। यमज अभाज्य संख्याओं के कितने युग्म उनमें सम्मिलित हैं?

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69

4. A ने 200 किग्रा चावल ₹ 18 प्रति किग्रा के भाव से खरीदे तथा उनमें से 150 किग्रा ₹ 22 प्रतिकिग्रा तथा शेष ₹ 19 प्रति किग्रा के भाव पर बेचे। B ने 250 किग्रा चावल ₹ 20 प्रति किग्रा के भाव से खरीदे तथा सबको ₹ 23 प्रति किग्रा के भाव पर बेच दिए। ज्ञात कीजिए किसको अधिक लाभ हुआ।

5. P ने एक बैंक से 8% साधारण ब्याज की दर पर ₹ 80,000.00 की धन राशि उधार ली। 3 वर्ष के पश्चात अपने ऋण को पूरी तरह समाप्त करने के लिए उसे कितना भुगतान करना पड़ेगा?

इकाई–6 आकृतियाँ और स्थानिक संबंध

संरचना

6.0 परिचय

6.1 अधिगम उद्देश्य

6.2 मूल ज्यामितीय आकृतियां

6.2.1 अपरिभाषित पद

6.2.2 मूल आकृतियां

6.3 द्विवीमीय बंद आकृतियां

6.3.1 त्रिभुज

6.3.2 चतुर्भुज

6.3.3 वृत्त

6.3.4 सर्वांगसमता व समरुपता

6.3.5 परावर्तन और सममिति

6.4 त्रिविमीय आकृतियां

6.5 ज्यामितीय उपकरणों की सहायता से रचना

6.6. सारांश

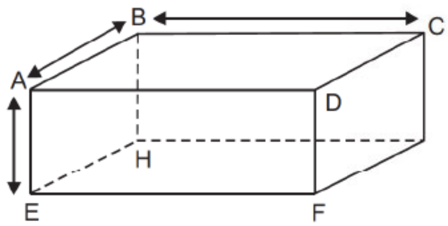
6.7 आपकी प्रगति की जांच के लिए आदर्श उत्तर

6.8 संदर्भ सामग्री

6.9 अन्त्य इकाई अभ्यास

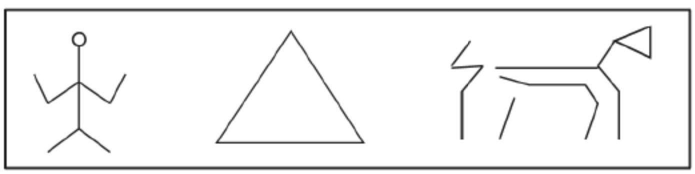
6.0 प्रस्तावना

जब हम अपने चारों ओर देखते है, हमें कई वस्तुएं दिखाई देती है। कुछ हमें नियमित आकृति के रूप में दिखाई देती है जैसे पेड़ पर लटका हुआ अमरुद, पेड़ पर नींबू। कुछ वस्तुएं हमें ऐसी दिखाई देती है जिनकी आकृति नियमित नहीं है जैसे पत्थर का एक टूटा हुआ टुकड़ा।



आकृति 6.1

आओ एक ईंट लेते है। इसका फैलाव 3 दिशाओं में है और इसलिए यह 3 भुजाओं वाली वस्तु है। इन्हें 3-D वस्तुएं भी कहते हैं। इसमें 6 सतह, 12 किनारे, 8 शीर्ष हैं। एक दीवार, एक फर्श, एक मेज का ऊपरी भाग एक तल को प्रदर्शित करते है। एक बर्तन में पानी की सतह सदैव क्षैतिज तल को व्यक्त करती है। एक दीवार पर या छत पर, हम नीचे दिए अनुसार विभिन्न आकृतियां और चित्र बना सकते है।



आकृति 6.2 तल पर आकृतियां

इस द्विविमीय तल–सतह को बायें और दायें, ऊपर व नीचे की ओर विस्तारित किया जा सकता है। उपरोक्त चित्र में जो आकृतियां दिखाई है, द्विविमिय (2-D आकृति) है। इस इकाई में 2-D और 3-D आकृतियों के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे।

इस इकाई को पूर्ण करने के लिए कम से कम 10 घंटों के अध्ययन की आवश्यकता है।

6.1 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप सक्षम होंगे :

- मूल ज्यामितीय आकृतियां जैसे, बिंदु, रेखा, किरण व कोण को पहचानना
- तल पर खींची गई विभिन्न प्रकार की ज्यामितिय आकृतियों की पहचानना
- दो आकृतियां में सर्वागसमता व समरुपता की शर्तो की व्याख्या
- किसी आकृति में छाया व घूर्णनात्मक सममिति की पहचान
- त्रिविमीय आकृतियां की पहचान व उनके गुण

6.2 मूल ज्यामितीय आकृतियां

6.2.1 अपरिभाषित पद

गणितीय प्रकरण को जानने के लिए यह अति आवश्यक है कि उससे संबंधित निश्चित पदों को हम जानें। किसी पद का ज्ञान उसकी परिभाषा से ही निकलता है। लेकिन एक पद को परिभाषित करने के लिए परिभाषा में प्रयोग की गई अन्य पदों की जानकारी भी आवश्यक है। जब हम प्रकरण के साथ शुरू करते है तो प्रकरण के संदर्भ में हमारे पास शब्दों का भण्डार नहीं होता है।

इसलिए प्रायः प्रकरण से संबंधित मूल पदों को परिभाषित करना संभव नहीं होता है। ऐसे पदों को परिभाषित पद कहा जाता है।

ज्यामितीय में कुछ अपरिभाषित पद इस प्रकार है–बिंदु, रेखा, तल (इन पदों को परिभाषित करने के लिए इन पदों पर आते है।)

चूंकि उपरोक्त पदों की कोई परिभाषा नहीं दी गई है जिससे पदों को सही तरह से प्रयोग किया जा सके, नीचे कुछ अभिगृहित दिए जा रहे है–

ज्यामितीय के मूल Axioms अभिगृहित

I. प्रत्येक रेखा (सरल रेखा) और तल बिंदुओं का समुच्चय है।

II. एक बिंदु से गुजरने वाली अंसख्य रेखाएं खींची जा सकती है।

III. दो भिन्न बिंदुओं को मिलाने गली केवल एक रेखा खींची जा सकती है।

IV. एक तल में दो बिंदुओं से गुजरने वाली रेखा भी उसी तरह में होती हैं।

V. तीन ऐसे बिंदु जो रेखा पर नहीं है एक तल में स्थित होते हैं।

VI. यदि दो तल एक दूसरे को काटते हैं तो उनका कटाव एक सरल रेखा होता है।

उपरोक्त स्वयं सिद्ध हमें तीन अपरिभाषित पदों के अंतः संबंधों की व्याख्या के बारे में दिशा प्रदान करते है।

6.2.2 मूल आकृतियां

बिंदु : एक पेन या पेन्सिल की सहायता से एक कागज पर एक चिह्न लगाया जाता है, बिंदु कहलाता है। हमें मस्तिष्क में इसके आकार के बारे में कोई प्रत्यय नहीं रखना चाहिए।

रेखा : जब हम रेखा के बारे में बात करते है इसका मतलब है। सरल रेखा।

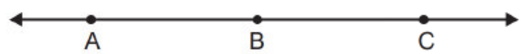
आकृति 6.3

उपरोक्त आकृति सरल रेखा को प्रदर्शित करता है। उसे एक सीधा किनारे की सहायता से खींचा जाता है। दोनों तरफ दो तीर के निशान दोनों दिशाओं में असीमित रूप से विस्तार को संकेत करता है।

समतल : एक कमरे का फर्श दीवार की सतह, एक किताब का पृष्ठ समतल के प्रदर्शित करता है। एक समतल का विस्तार असीमित होता है।

दो बिंदुओं के बीच दूरी : यदि A और B दो बिंदु है तो इन दोनों बिंदुओं के बीच की दूरी एक अद्वितीय धनात्मक वास्तविक संख्या होती है। और इसे संकेत AB से प्रदर्शित करते है।

Betweeness (परिभाषा) : यदि A, B और C तीन भिन्न बिंदु है जो कि सीधी रेखा AB + BC = AC पर स्थित है, ऐसी स्थिति में बिंदु A और C के बीच में स्थित कहा जाता है और इसे संकेत रूप में A–B–C या C–B–A लिखा जाता है।



चित्र 6.4

$\overline{AB}$

उपरोक्त आरेख 3 बिंदुओं को प्रदर्शित करता है जबकि A-B-C (अर्थात B, A और C के मध्य स्थित है)

रेखाखंड (परिभाषा) **:** दो भिन्न बिंदुओं A, B और उनके बीच के बिंदुओं के समूह को रेखाखंड कहते है और बिंदु A, B के द्वारा निर्धारित होता है। इसे $\overline{AB}$ के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

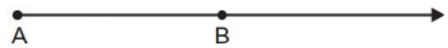
A और B को रेखाखंड   का अंत बिंदु कहते हैं।

एक रेखाखंड सदैव एक रेखा का भाग होता है और इसके दो अंत बिंदु होते है।

रेखाखंड की लम्बाई (परिभाषा) : रेखाखंड के दोनों अंत बिंदुओं के बीच की दूरी को रेखाखंड की लम्बाई कहते है। इस प्रकार   की लम्बाई AB है।

किरण (परिभाषा) : किरण रेखा का एक भाग होता है। यह एक बिंदु से प्रारम्भ होती है (जिसे प्रारंभिक बिंदु कहते है) और एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होती है। चित्र 6.5 में एक रेखा बिंदु A से प्रारम्भ होती है और B दिशा में असीमित रूप से विस्तृत होती है इस चित्र में किरण को   के रूप में प्रदर्शित किया गया है और इसे किरण AB पढ़ते है। अक्षर AB के ऊपर तीर का निशान किरण को प्रदर्शित करता है। और तीर की दिशा यह प्रदर्शित करता है कि किरण बिंदु A से प्रारम्भ हो रहा है।

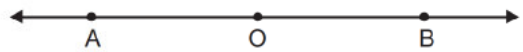
टिप्पणी



चित्र 6.5

बिंदु A को   का शीर्ष या प्रारंभिक बिंदु कहते है।

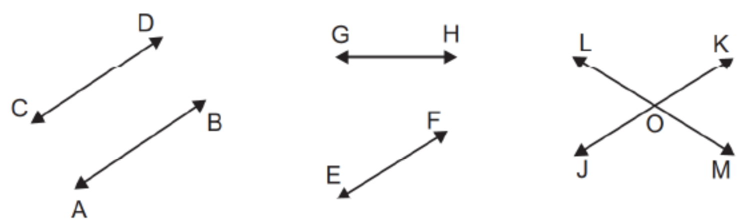
विपरीत किरण :



चित्र 6.6

चित्र 6.6 रेखाखंड   है और दो   और   किरण है जो कि   के भाग है O दोनों किरणों   और   का उभयनिष्ट बिंदु है, ऐसे स्थिति में   और   को विपरीत किरणें कहते है। स्पष्ट है विपरीत किरणें एक रेखा का निर्माण करते है।

रेखायुग्म : तीन रेखा युग्मों को निम्नांकित चित्र में प्रदर्शित किया गया है।



(I)   (II)   (III)

चित्र 6.7

रेखायें   और   चित्र चित्र 6.7 (i) में दिखाया गया है, इस प्रकार से है जो दोनों दिशाओं में विस्तार करने पर कभी नहीं मिलेंगे। ऐसे रेखायें जिनमें कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होता उनको समानान्तर रेखाएं कहते है।

चित्र 6.7 (ii) दो रेखाएं   और $\overleftrightarrow{GH}$ दिखाया गया है यदि $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ को F और H दिशाओं में क्रमशः विस्तार करने पर एक उभयनिष्ठ बिंदु पर मिलेंगे।

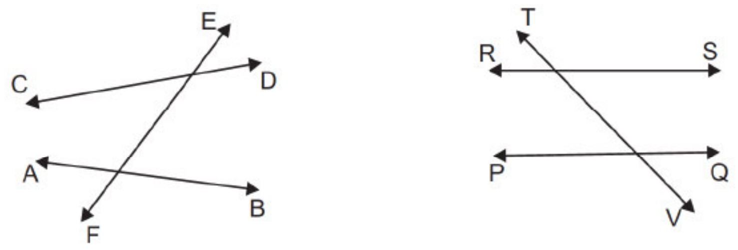
चित्र 6.7 (iii) में रेखाओं $\overleftrightarrow{JK}$ और $\overleftrightarrow{LM}$ में बिंदु O उभयनिष्ठ है। इस प्रकार रेखा $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ चित्र 6.7 (ii) और रेखायुग्म $\overleftrightarrow{JK}$ और $\overleftrightarrow{LM}$ चित्र 6.7 (iii) को असमांतर रेखायें या प्रतिच्छेदी रेखाएं कहते है।

चित्र 6.7 (iii) में बिंदु O को रेखायें $\overleftrightarrow{JK}$ और $\overleftrightarrow{LM}$ का प्रतिच्छेदक बिंदु कहते है। चित्र 6.7 (ii) में रेखाओं $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ के प्रतिच्छेदक बिंदु को रेखाओं $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ को क्रमशः F और H दिशा में विस्तार करके प्राप्त किया जा सकता है।

टिप्पणी

समांतर रेखाओं का सांकेतिक Representation : दो समांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को सांकेकितक रूप से $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ लिखते है।

युग्म रेखाओं का तिर्यक छेदी रेखा



(i) (i)

चित्र 6.8

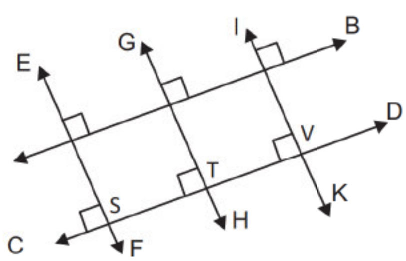
चित्र 6.8 (i) में दो असमांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दिखाया गया है और चित्र 6.8 (ii) में दो समांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ को दिखाया गया है। चित्र 6.8 (i) में रेखा $\overleftrightarrow{EF}$ दोनों असमांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को प्रतिच्छेद कर रहा है। उसी प्रकार चित्र 6.8 (ii) में रेखा $\overleftrightarrow{TV}$ समांतर रेखाओं $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ को प्रतिच्छेद कर रहा है। चित्र 6.8 (i) में रेखा $\overleftrightarrow{EF}$ और चित्र 6.8 (ii) में रेखा $\overleftrightarrow{TV}$ को तिर्यक छेदी रेखा कहते है।

$\overleftrightarrow{AB}$

एक ऐसी रेखा जो दो अथवा अधिक रेखाओं को भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है तिर्यक छेदी रेखा (Transversal) कहलाती है।

समांतर रेखाओं के गुण :

आकृति 6.9 में दो समांतर रेखाओं को $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ तीन तिर्यक रेखायें प्रतिच्छेद कर रही है और रेखा पर समकोण बना रही है।



आकृति 6.9

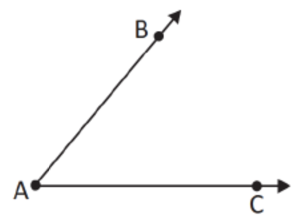
P, Q, R बिंदुओं पर तिर्यक रेखायें रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ को काट रही है और S, T, V बिंदुओं पर तिर्यक रेखायें रेखा $\overleftrightarrow{CD}$ को काट रही है। $\overline{PS}$, $\overline{QT}$ और $\overline{RV}$ की लम्बाई बराबर है।

टिप्पणी

PS, QT और RV दोनों समांतर रेखाओं की बीच की दूरी को दर्शाता है और इसे वास्तविक आरेखन के द्वारा जांच की सकती है कि PS = QT = RV इस प्रकार हम देखते है कि दो समांतर रेखओं के बीच की दूरी हर जगह समान होता है। अत दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी स्थिर होती है।

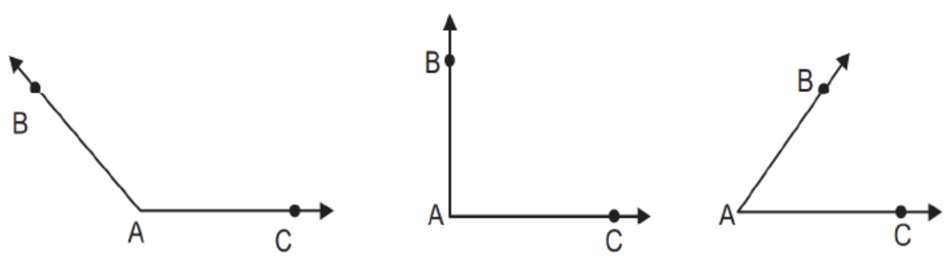
कोण (परिभाषा) : यदि A, B और C तीन अरेखीय बिंदु है तब किरणें $\overrightarrow{AB}$ और द्वारा बनाये गये आकृति को कोण BAC कहा जाता है। (उसे लिखते है)

और , के भुजाएं कहलाती है। और A को कोण का शीर्ष कहते हैं।



आकृति 6.10

बिंदुओं A, B, C की स्थितियों के आधार पर कोण के विभिन्न आकार हो सकते हैं। (निम्नांकित आकृति को देखें)

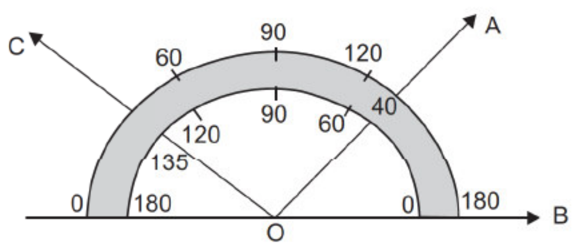


आकृति 6.11

कोण की माप : आपके ज्यामितीय बाक्स में आपको चांदा बना बनाया मिल जायेगा। इस चांदा की सहायता से हम कोण का मापन कर सकते है और कोण मापन की इकाई को डिग्री (Degree) कहते है।

संलग्न आकृति में

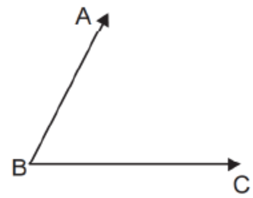
40° की तथा 135° की माप प्रदर्शित करता है।



आकृति 6.12

की माप को से प्रदर्शित किया जाता है।

यदि आकृति 6.13 में की माप 70° है तो हम उसे $= 70^\circ$ लिखते है।



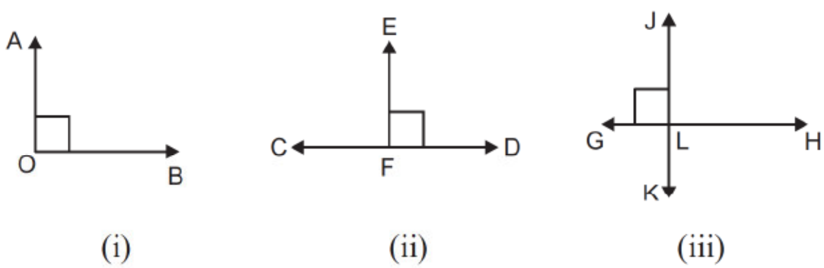
आकृति 6.13

अभिगृहीत : प्रत्येक कोण के साथ एक वास्तविक संख्या 0 से अधिक और 180 से कम जुड़ा होता है।

इस संख्या को कोण की माप C डिग्री में कहते है।

लम्बवत रेखाएं :

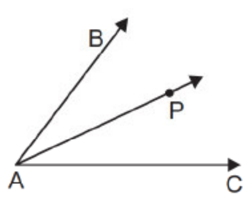
[illegible] $= 90^\circ$ $m\angle PAC$



आकृति 6.14

आकृति 6.14 (i) में है ऐसी स्थिति में किरणे और $\overrightarrow{OB}$ एक दूसरे पर लम्बवत कहलाते है और इसे $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ या $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OA}$ लिखते है।

आकृति 6.14 (ii) में $m\angle CFE = 90^\circ$ है अत: हम लिख सकते है आकृति 6.14 (iii) में $m\angle GLJ = 90^\circ$ है अत: या $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{JK}$



आकृति 6.15

समद्विभाजक कोण : यदि $\angle BAC$ में एक आंतरिक बिंदु P है और तब को $\angle BAC$ का समद्विभाजक कहते हैं। (आकृति 6.15)

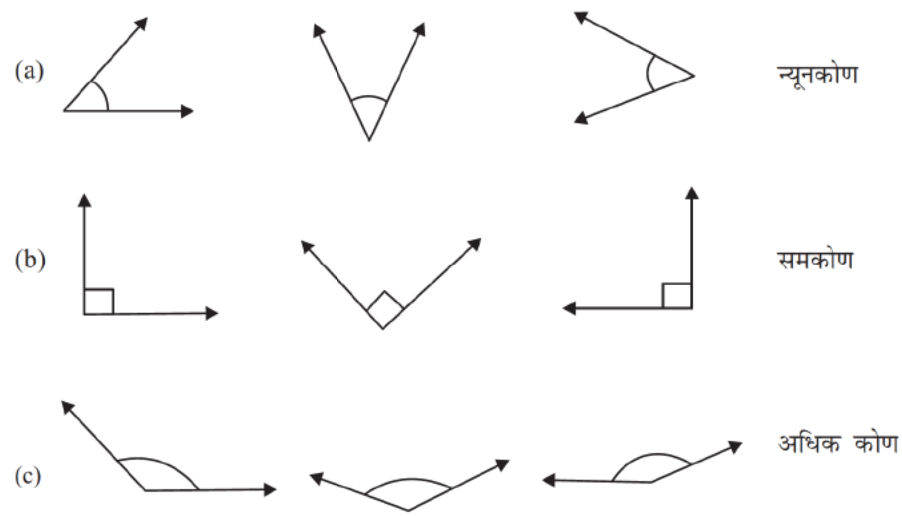
टिप्पणी

कोणों का वर्गीकरण : मापन के दृष्टिकोण से कोणों को निम्नांकित श्रेणी में वर्गीकृत किया जाता है :

(i) एक कोण जिसकी माप 90° से कम और 0° से अधिक हो उसे न्यूनकोण कहते हैं।

(ii) एक कोण जिसकी माप 90° हो उसे समकोण कहते हैं।

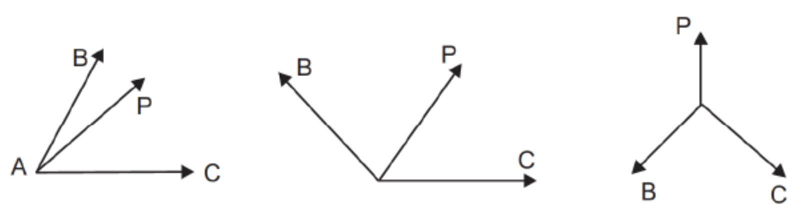
(iii) एक कोण जिसकी माप 90° से अधिक और 180° से कम हो उसे अधिक कोण कहते हैं।



आकृति 6.16

कोणों का युग्म :

आसन्न कोण : यदि दो कोणों में एक उभयनिष्ठ शीर्ष और एक उभयनिष्ठ भुजा होती है परन्तु कोई भी अंत: बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होता है। ऐसे कोणों को आसन्न कोण कहते है।



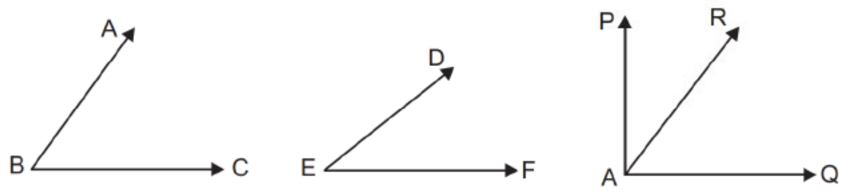
आकृति 6.17

उपरोक्त तीन आकृतियों में दो कोणों का युग्म और इस प्रकार है जिसका उभयनिष्ठ शीर्ष A है, उनका उभयनिष्ठ भुजा है और कोई भी अंत: बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है।

अतः $\angle BAP$ और आसन्न होता है।

पूरक कोण : जब दो कोणों के मापों का योग 90° होता है तो ये पूरक कोण कहलाते हैं। स्पष्ट है कि दोनों कोण न्यूनकोण होंगे।

(i) (ii)



आकृति 6.18

आकृति 6.18 (i) में

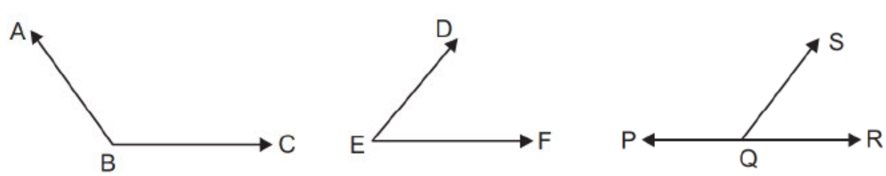
इस तरह और पूरक कोण है।

आकृति 6.18 (ii) में,

इस प्रकार और पूरक कोण है

नोट : पूरक कोण, आसन्न कोण हो सकता है, या नहीं भी हो सकता है।

संपूरक कोण : जब दो कोणों के मापों का योग 180° होता है तो कोणों के ऐसे युग्म संपूरक कोण कहलाते हैं।



(I) (II)

आकृति 6.19

आकृति 6.19 (i) में

अतः और संपूरक कोण बनाते हैं।

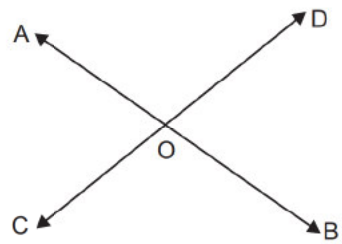
आकृति 6.19 (ii)

अतः और आसन्न संपूरक कोण बनाते हैं।

नोट : संपूरक कोणों के युग्म आसन्न कोण हो सकता है और नहीं भी हो सकता है।

उर्ध्वाधर सम्मुख कोण :

संलग्न आकृति 6.20 में रेखायें और $\overleftrightarrow{CD}$ एक दूसरे को O बिंदु पर प्रतिच्छेद कर रहे है। इस प्रकार आकृति में चार कोण बन रहे है, और $\angle AOD$ उन चार कोणों में से एक है। और $\overrightarrow{OC}$ किरणें $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OD}$ विपरीत दिशा में है।

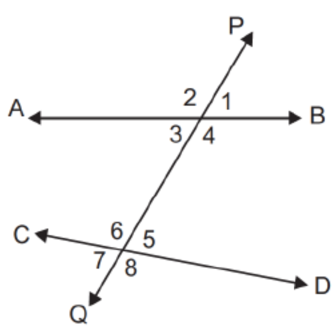


आकृति 6.20

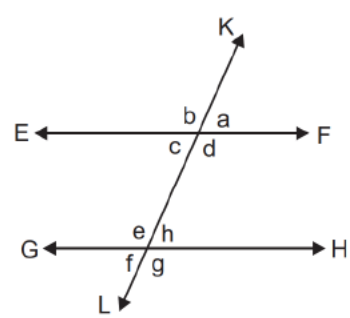
किरणों $\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ द्वारा बनाये गये कोण $\angle BOC$ तथा किरणों और $\overrightarrow{OD}$ द्वारा बनाये गये कोण $\angle AOD$ को उर्ध्वाधर सम्मुख कोण कहते हैं।

इस प्रकार जब दो सीधी रेखायें एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तब उर्ध्वाधर सम्मुख कोण बनता है।

तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटे जाने पर बने कोण : आकृति 6.21 (i) में और $\overleftrightarrow{CD}$ दो असमांतर रेखायें है जिसे तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ काटती है। प्रतिच्छेदक बिंदुओं पर बने कोणों को संख्या 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 द्वारा चिन्हित किया गया है।



आकृति 6.21 (i)



आकृति 6.21 (ii)

आकृति 6.21 (ii) में $\overleftrightarrow{EF}$ और $\overleftrightarrow{GH}$ दो समांतर रेखायें है और तिर्यक रेखा $\overleftrightarrow{KL}$ उन्हें प्रतिच्छेद कर रहा है। प्रतिच्छेदक बिंदुओं पर बने कोणों को अक्षरों a, b, c, d, e, f, g और h द्वारा चिन्हित किया गया है।

आकृति 6.21 (i) में बने कोणों 1 और 5. 2 और 6. 4 और 8. 3 और 7 को संगत कोण कहते हैं।

कोण 1 और 7, 2 और 8 को बाह्य एकांतर कोण कहते हैं। जबकि कोण 3 और 5 4 और 6 को आंतरिक एकांतर कोण कहते हैं।

आकृति 6.21 (ii) कोण a और h, b और e, d और g, c और f संगत कोण हैं।

कोण तिर्यक रेखा द्वारा समांतर रेखाओं पर बनाये गये कोणों को माप सकते हैं। अवलोकन करने पर

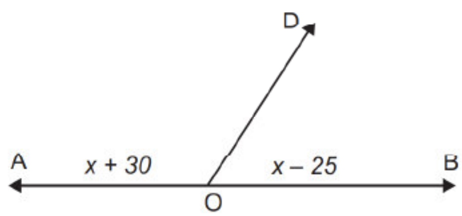
(i) बाह्य एकांतर कोण बराबर माप के होते हैं इसी प्रकार आंतरिक एकांतर कोण भी बराबर होते हैं।

(ii) संगत कोणों के प्रत्येक युग्म का माप समान होता है।

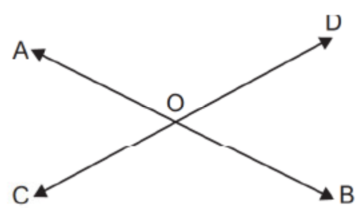
अपनी प्रगति की जांच कीजिए :

E-1 आकृति 6.22 में बिंदु O रेखायें $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{OD}$ पर उभयनिष्ठ है $\angle AOD$ और की माप क्रमशः $x + 30$ और $x - 25$ है। दोनों कोणों की माप ज्ञात कीजिए। (डिग्री में)

$\angle BOD, \angle BOC$



आकृति 6.22



आकृति 6.23

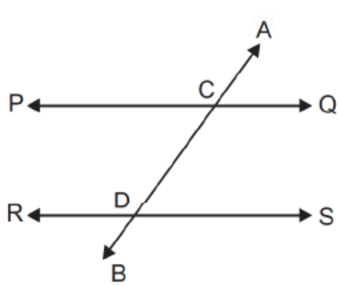
E-2 आकृति 6.23 में कोण , की माप ज्ञात कीजिये।

E-3 आकृति 6.24 में निम्नांकित कोणों की पहचान करिये।

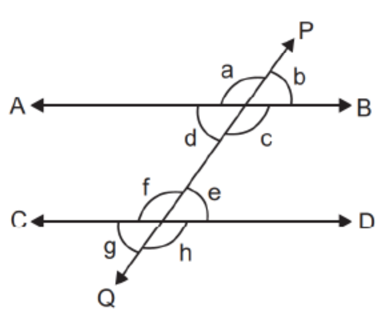
(i) संगत कोणों का युग्म

(ii) आंतरिक कोणों का युग्म

(iii) एकांतर कोणों का युग्म



आकृति 6.24



आकृति 6.25

E-4 आकृति 6.25 में और $\overleftrightarrow{PQ}$ उनको प्रतिच्छेद करता है। प्रतिच्छेदक बिंदुओं पर बने कोणों को a, b, c, d, e, f, g और h से प्रदर्शित किया गया है।

यदि $g = 35^o$ तो a, b, c, d, e, f और h का मान ज्ञात कीजिये।

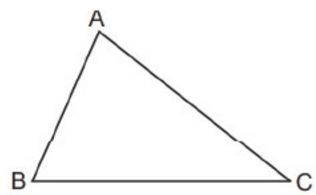
6.3 द्विआयामी बंद आकृतियां

इस भाग में हम तीन प्रकार के द्विआयामी बंद आकृतियों के गुणों एवं प्रकार के बारे में चर्चा करेंगे। इसमें त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त शामिल है।

6.3.1 त्रिभुज

(परिभाषा) यदि तीन अरेखीय बिंदु A, B और C हैं तो $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$ द्वारा निर्मित आकृति को त्रिभुज ABC कहते हैं। (ΔABC के रूप में लिखते हैं)

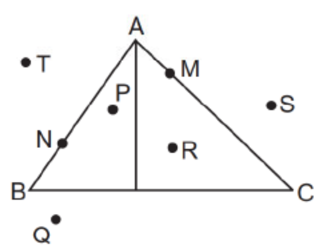
A, B और C को त्रिभुज का शीर्ष कहते हैं। $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$ को भुजा और $\angle ABC$, और को ΔABC के कोण कहते हैं।



आकृति 6.26

त्रिभुज का बहिर्भाग और अभ्यंतर :

ΔABC (आकृति 6.26) से घिरा हुआ क्षेत्र ΔABC का अभ्यंतर कहलाता है। ΔABC और अभ्यंतर दोनों मिलकर त्रिभुजाकार क्षेत्र बनाते हैं। आकृति 6.27 में बिंदु P और R त्रिभुज ABC के अभ्यंतर पर स्थित है। बिंदु M और N त्रिभुज ABC पर स्थित है तथा Q, S, T, ΔABC के बहिर्भाग पर स्थित हैं। ΔABC के बाहर का क्षेत्र (जिस पर बिंदु Q, S, T स्थित है) को Δ का बहिभार्ग कहते हैं।



आकृति 6.27

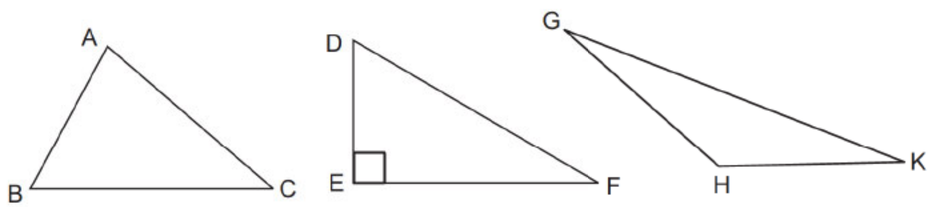
त्रिभुज का वर्गीकरण :

(a) कोणों के आधार पर त्रिभुजों का नामकरण :

(i) **न्यूनकोण त्रिभुज :** यदि त्रिभुज के तीनों कोण न्यून कोण है तो ऐसे त्रिभुज को न्यूनकोण त्रिभुज कहते हैं। आकृति 6.28 (a) न्यूनकोण त्रिभुज है।

(ii) **समकोण त्रिभुज :** ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो ऐसे त्रिभुज को समकोण त्रिभुज कहते हैं। आकृति 6.28 (b) समकोण त्रिभुज है।

(iii) **अधिक कोण त्रिभुज :** यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण हो ऐसे त्रिभुज को अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं। आकृति 6.28 (C) एक समकोण त्रिभुज है।



(a) न्यून कोण त्रिभुज **(b) समकोण त्रिभुज** **(c) अधिक कोण त्रिभुज**

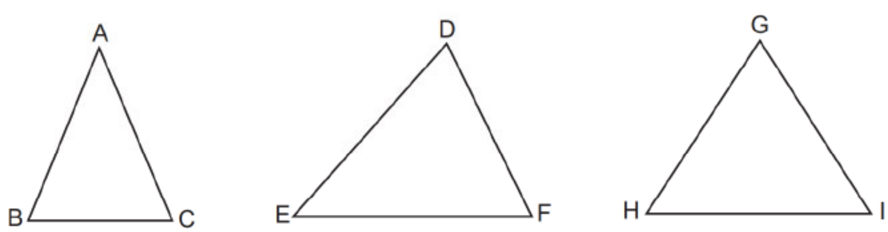
आकृति 6.28

(b) भुजाओं की लम्बाई के आधार पर त्रिभुज का वर्गीकरण :

(i) **समद्विबाहु त्रिभुज :** यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएं की लम्बाई बराबर हो ऐसे त्रिभुज को समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं। (आकृति 6.29 (i))

(ii) **विषमबाहु त्रिभुज :** यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएं बराबर नहीं है ऐसे त्रिभुज को विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं। (आकृति 6.29 (ii))

(iii) **समबाहु त्रिभुज :** यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएं बराबर हो तो ऐसे त्रिभुज को समबाहु त्रिभुज कहते हैं। (आकृति 6.29 (iii))

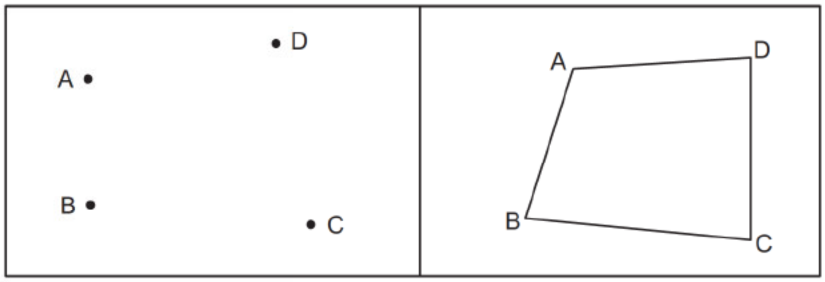


(i) समद्विबाहु त्रिभुज **(ii) विषमबाहु त्रिभुज** **(iii) समबाहु त्रिभुज**

आकृति 6.29

6.3.2 चतुर्भुज

निम्न आकृति को देखें



(i) (ii)

आकृति 6.30

आकृति 6.30 (i) में चार बिंदुएं A, B, C और D है। कोई भी तीन बिंदु संरेखीय नहीं है।

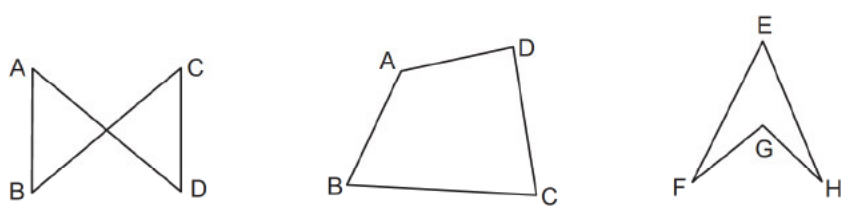
आकृति 6.30 (ii) में बिंदुओं A, B, C और D को सीधी रेखाओं और $\overline{DA}$ के द्वारा जोड़ दिया गया हैं।

रेखाखंड $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ ऐसे है कि कोई भी दो रेखाखंड अंत बिंदु के अतिरिक्त कही पर भी नहीं मिलते है।

ऐसी स्थिति में $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ द्वारा निर्मित आकृति को चतुर्भुज कहते हैं। निर्मित चतुर्भुज को ABCD के द्वारा नामित किया गया है।

बिंदु A, B, C और D चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं, $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ चतुर्भुज ABCD की भुजाएं हैं। चतुर्भुज ABCD के चार कोण $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ और है, और $\overline{BD}$ चतुर्भुज के विकर्ण है।

आकृति 6.31 (a) को देखें इसमें A, B, C और D एक समतल पर है तथा कोई भी 3 बिंदु संरेखीय नहीं हैं।



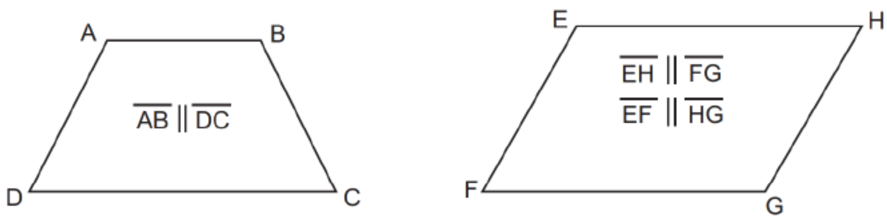
(a) (b) (c)

आकृति 6.31

परन्तु $\overline{AD}$ और $\overline{BC}$ अंत बिंदु के अतिरिक्त भी एक और बिंदु मिल रहे है। अत: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ एक चतुर्भुज नहीं बनाते है। आकृति 6.31 (b) उत्तल चतुर्भुज है। और आकृति 6.31 (c) में Reontraut चतुर्भुज है। हम सिर्फ उत्तल चतुर्भुज के बारे में चर्चा करेंगे।

चतुर्भुजों के प्रकार :

(i) समलंब चतुर्भुज : समलंब एक ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें भुजाओं का एक युग्म समांतर होता है। आकृति 6.32 (i) में एक समलंब है जिसकी $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ है।

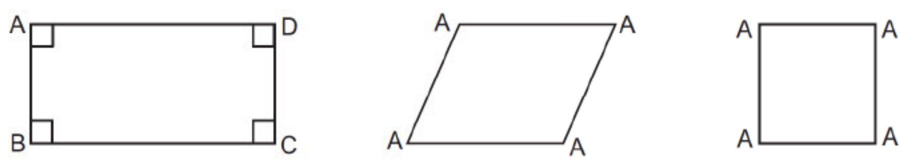


(i) समलंब **(ii) समांतर चतुर्भुज**

आकृति 6.32

$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D,$ **(ii) समांतर चतुर्भुज** : एक ऐसा चतुर्भुज जिसके सम्मुख भुजाएं समांतर होती है, समांतर चतुर्भुज कहलाती है। आकृति 6.32 (ii) में $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ और $\overline{FG} \parallel \overline{EH}$ है अत: EF GH एक समांतर चतुर्भुज है।

(iii) आयत : आयत एक समांतर चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समकोण होते है।



(i) आयत **(ii) सम चतुर्भुज** **(iii) वर्ग**

आकृति 6.33

आकृति 6.33 में $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D,$ समकोण है अत: ABCD एक आयत है।

(iv) सम चतुर्भुज : एक चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएं बराबर लंबाई की होती है उसे सम चतुर्भुज कहते हैं। आकृति 6.33 (ii) एक सम चतुर्भुज है।

(v) वर्ग : एक चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएं बराबर लम्बाई की होती है और सभी कोण समकोण होता है उसे वर्ग कहते हैं। आकृति 6.33 (iii) एक वर्ग है। इसकी सभी भुजाएं AB = BC = CD = DA हैं, और समकोण हैं अत: ABCD एक वर्ग है।

टिप्पणी

सभी प्रकार के चतुर्भुजों को आपस में संबंध का प्रवाह चार्ट :

चतुर्भुज

विपरीत रेखा युग्म समांतर होते हैं

समलंब

↓ सम्मुख भुजाएं समांतर होती हैं

समांतर चतुर्भुज → (एक आसन्न भुजा युग्म की लम्बाई बराबर) → सम चतुर्भुज

समांतर चतुर्भुज ↓ सभी कोण समकोण → आयत

सम चतुर्भुज ↓ सभी कोण समकोण → वर्ग

आयत → (एक आसन्न भुजा युग्म की लम्बाई बराबर) → वर्ग

नोट : विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणों को प्रयोगों के द्वारा जाना जा सकता है।

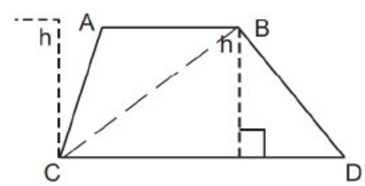
- एक चतुर्भुज का परिमाप = सभी चारों भुजाओं की लम्बाई का योग
  एक चतुर्भुज का क्षेत्रफल = विकर्ण खींचने के पश्चात् बने दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग
- समलंब की परिमाप = सभी चारों भुजाओं की लम्बाई का योग
  समलंब का क्षेत्रफल ABCD (आकृति 6.34)

  = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔBCD का क्षेत्रफल

  $= \frac{1}{2} AB \times h + \frac{1}{2} CD \times h$

  $= \frac{1}{2} h (AB + CD)$

  $= \frac{1}{2} h$ (समांतर भुजाओं का योग)



$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ समलंब

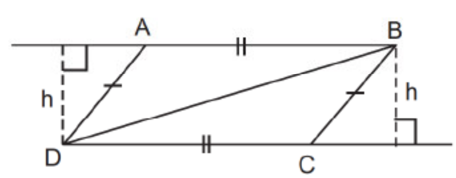
आकृति 6.34

- समांतर चतुर्भुज का परिमाप $= AB + BC + CD + DA$ (आकृति 6.35)

  $= AB + BC + AB + BC$

  $= 2AB + 2BC = 2(AB+BC)$

  क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई
  (आधार DC और ऊंचाई h है)



समांतर चतुर्भुज

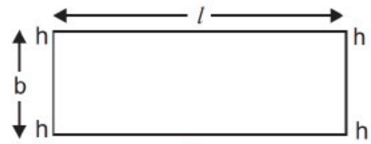
आकृति 6.35

- आयत का परिमाप = AB + BC + CD + DA (आकृति 6.36)

  = l + b + l + b = 2l + 2b = 2 (l + b)

  [जहां l = AD की लम्बाई, b = AB की लम्बाई]

  आयत का क्षेत्रफल = l × b



आकृति 6.36

- सम चतुर्भुज का परिमाप = AB + BC + CD + DA (आकृति 6.37)

  = AB + AB + AB + AB = 4AB = 4 × एक भुजा की लम्बाई सम चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर द्विभाजित करते है।

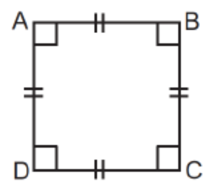
  ∴ सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल ABCD

  = ABC का क्षेत्रफल + ACD का क्षेत्रफल

  = AC × BO + AC × DO

  = AC (BO + DO) = AC × BD

  = (विकर्णो की लम्बाई का गुणनफल)



सम चतुर्भुज

आकृति 6.37

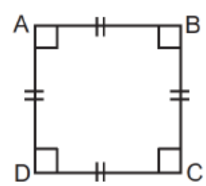
$\frac{A}{2}\overline{AB}$

- वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा की लंबाई

  वर्ग का क्षेत्रफल = AB × AD

  = AB × AB (सभी भुजा बराबर है)

  = AB^2 = एक भुजा की लम्बाई का वर्ग



वर्ग

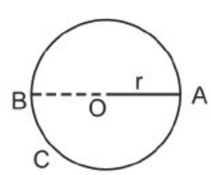
आकृति 6.38

6.3.3 वृत्त

'वृत्त' वक्र रेखा द्वारा किसी समतल पर घेरे गये स्थान की द्वि-आयामी आकृति होती है।

परिभाषा : एक समतल वक्र जिसके सभी बिंदु समतल में स्थित एक 'नियत बिंदु' से एक ही दूरी पर होते हैं।

नियत बिंदु वृत्त का केंद्र तथा नियत दूरी वृत्त की त्रिज्या होती है।

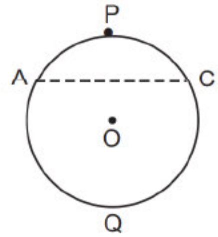


आकृति 6.39

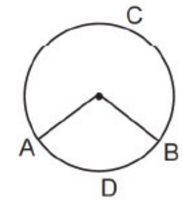
वृत्त पर स्थित दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड 'जीवा' होता है। जिस जीवा पर वृत्त का केंद्र स्थित होता है, उसे 'वृत्त के व्यास के नाम से जाना जाता है। आकृति 6.39 में वृत्त

टिप्पणी

का व्यास है। AB (अर्थात् $\overline{AB}$ की लम्बाई) की माप वृत्त के व्यास की माप है (जो कि 'd' द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।) $\overline{OA}$ और $\overline{OB}$ प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या है।



आकृति 6.40 (अ)



आकृति 6.40 (ब)

∵ .

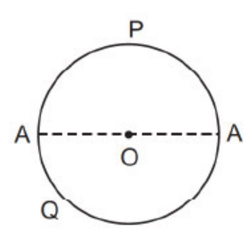
आकृति 6.40 (अ) में, A तथा C वृत्त ABC पर स्थित दो बिंदु हैं। ये दो बिंदु वृत्त को दो भागों में विभाजित करते हैं, यह प्रत्येक भाग 'चाप' के नाम से जाना जाता है जो कि बिंदु A तथा C पर समाप्त होता है। वृत्त का जीवा है। P तथा Q, A और C के अतिरिक्त दो बिंदु हैं। P तथा O जीवा $\overline{AC}$ के विपरीत और है जबकि Q तथा O एक ही और स्थित हैं।

वृत्त के जिस भाग (चाप) में P स्थित है, उसे चाप $\widehat{APC}$ से प्रदर्शित किया गया है, तथा जिस भाग में Q स्थित है उसे चाप $\widehat{AQC}$ द्वारा चित्र 6.40 (अ) में प्रदर्शित किया गया है। $\widehat{APC}$ न्यून चाप तथा $\widehat{AQC}$ बृहद चाप द्वारा जाना जाता है। $\widehat{APC}$ तथा $\widehat{AQC}$ विपरीत चाप का युग्म है।

चित्र 6.40 (ब) में प्रदर्शित वृत्त ABC में, त्रिज्या $\overline{AO}$ और $\overline{BO}$ न्यून चाप $\widehat{ADB}$ के अंतिम बिंदु A तथा B पर खींचे गये हैं। AOB वृत्त के केंद्र O पर निर्मित कोण है। $\angle$AOB, $\widehat{ADB}$ द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण है।

AOB की माप $\widehat{ADB}$ के अंश की माप होगी। (जितना अधिक बड़ा वृत्त का चाप होगा, उतना ही अधिक अंश माप होगा) चाप $\widehat{ADB}$ द्वारा अंतरित कोण की माप $m\widehat{ADB}$ द्वारा प्रदर्शित की जाती है।

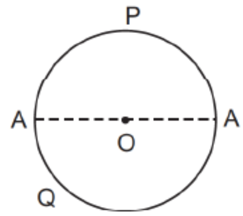
बृहत चाप का अंश माप = 360° – सम्मुख दिशा में निर्मित न्यून चाप का अंश माप



आकृति 6.41

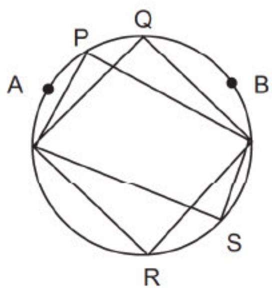
टिप्पणी

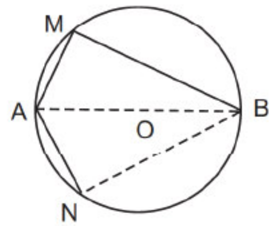
जैसे, $m\widehat{ACB}$ (चित्र 6.40 (ब) में) = 360° − $m\widehat{ADB}$



आकृति 6.41

आकृति 6.41 में, वृत्त APC का व्यास है। प्रत्येक $\widehat{APC}$ तथा $\widehat{AQC}$ दो अर्द्धवृत्त हैं। अर्द्धवृत्त का अंश माप 90° होता है।





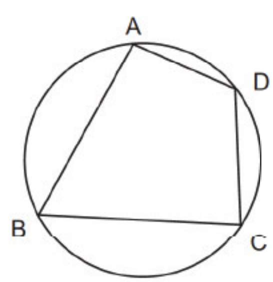
$\angle AQB$

आकृति 6.42 (i) **आकृति 6.42 (ii)**

आकृति 6.42 (i) में, P तथा Q, A तथा B अन्तिम बिंदु वाले न्यून चाप के अंत: बिंदु हैं। $\angle APB$ और , $\widehat{APB}$ में रेखित कोण हैं। इसी प्रकार तथा , $\widehat{ARB}$ में रेखित कोण हैं।

आकृति 6.42 (ii) में, AB वृत्त का व्यास है। M तथा N, A तथा B अंत बिंदु वाले अर्धवृत्त के अंत: बिंदु हैं, AMB और ANB प्रत्येक अर्द्धवृत्त में निर्मित कोण हैं।

चक्रीय चतुर्भुज : एक चतुर्भुज जिसके शीर्ष बिंदु एक वृत्त पर स्थित होते हैं उसे चक्रीय चतुर्भुज कहते है। आकृति 6.43 में चतुर्भुज ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

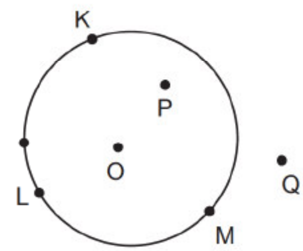


आकृति 6.43

टिप्पणी

वृत्त के अंतः एवं बाह्य बिंदु :

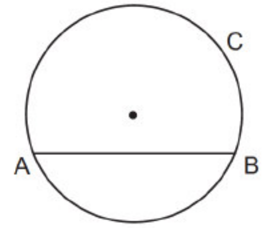
आकृति 6.44 में O वृत्त KLM का केंद्र है। अत: KLM बिंदु वृत्त पर स्थित है। P और Q वृत्त के तल पर दो ऐसे बिंदु हैं जहां $PO < r$ (यहां पर r वृत्त की त्रिज्या है) और $OQ > r$, P को वृत्त KLM का अंत: बिंदु और बिंदु Q को वृत्त KLM का बाह्य बिंदु कहते है। वृत्त पर स्थित सभी बिंदु और सभी अंत: बिंदु मिलाकर वृत्ताकार क्षेत्र बनाते हैं।



आकृति 6.44

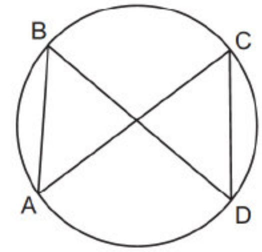
वृत्त का खण्ड :

आकृति 6.45 में वृत्त ABC की जीवा है। $\overline{AB}$ वृत्त को दो भागों में बांटता है, प्रत्येक भाग को वृत्तखंड कहते हैं। वह खण्ड जिसमें केंद्र O स्थित नहीं है उसे न्यून खंड और जिस पर केंद्र O स्थित है उसे वृहद् खंड कहते हैं।



आकृति 6.45

वृत्त के कुछ गुण

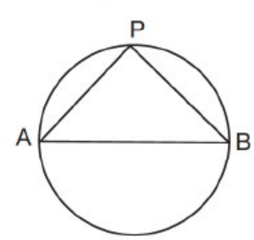


आकृति 6.46

1. एक ही चाप पर अंतरित कोण बराबर होते है (अर्थात एक ही खंड पर बने कोण)

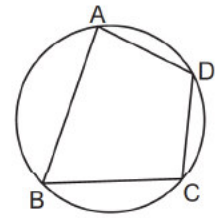
   $m\angle ABD = m\angle ACD$,

2. अर्धवृत्त पर अंतरित कोण समकोण होता है AB वृत्त का व्यास है। अत: $\overset{\frown}{APB}$ एक अर्धवृत्त है।



आकृति 6.47

3. चक्रीय चतुर्भुज के आमने सामने के कोण संपूरक कोण होते हैं। आकृति 6.48 चक्रीय चतुर्भुज ABCD है क्योंकि इसके शीर्ष वृत्त पर स्थित है।

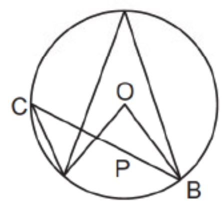


आकृति 6.48

4. किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण चाप द्वारा वृत्त के परिधि पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

आकृति 6.49 में

$= 2m\angle ACB$



आकृति 6.49

अपनी प्रगति की जांच करें :

E-5 रिक्त स्थानों को भरिये:

(a) एक समांतर चतुर्भुज जिसके दो आसन्न भुजाओं की लम्बाई बराबर है .... है।

(b) एक वृत्त की त्रिज्या एक रेखा खंड है जो वृत्त पर एक बिंदु को उसके .... से कहलाता है।

$m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle D = 180^\circ$

$m\angle AOB = 2\, m\angle APB$

(c) किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण 40° है तो उसके द्वारा वृत्त के परिधि पर अंतरित कोण का मान .... होगा।

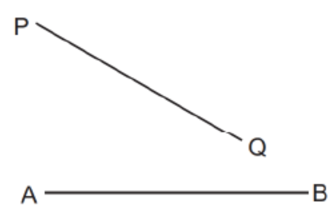
(d) एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग .... डिग्री होता है।

6.3.4 सगसमता और समरूपता

सर्वांगसम आकृति : दो समतल आकृति (एक तल में रेखित आकृति) को संर्वांगसम कहते है यदि एक रेखित आकृति दूसरे रेखित आकृति को अध्यारोपण करने पर पूर्णतया ढक लेता है। तब हम उसे सर्वगिसम कहते है। सर्वगिसम की उपरोक्त विवरण को प्रयोगात्मक कार्य के द्वारा समझा जा सकता है। कार्य को तर्कपूर्ण बनाने के लिए यहां पर कुछ परिभाषायें और कुछ शर्ते दिया गया है जो आकृति को सर्वांगसम बनाता है। सर्वांगसमता को चिन्ह से प्रदर्शित करते है।

(i) **रेखाखंड की सर्वांगसमता :** यदि दो रेखाखंडों की लम्बाई बराबर है तो रेखाखंडों को सर्वांगसम कहते हैं। इस प्रकार दो सर्वांगसम रेखाखंडों की लम्बाई बराबर होती है और

$\overline{AB} \cong \overline{PQ} \Rightarrow AB = PQ$

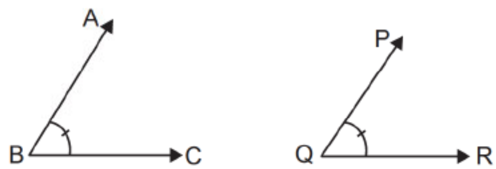


आकृति 6.50

(ii) **कोणों की सर्वांगसमता :** दो कोणों की माप यदि बराबर है तो उसे सर्वांगसम कोण कहते है। इस प्रकार दो सर्वांगसम कोणों की माप बराबर होती है।

$m\angle ABC = m\angle PQR \Rightarrow \angle ABC \cong \angle PQR$

और



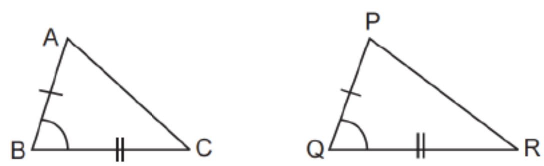
आकृति 6.51

त्रिभुजों की सर्वांगसमता :

निम्नलिखित प्रतिबंधों के अंतर्गत दो त्रिभुज सर्वांगसम बनते है

(i) यदि एक सुमेलन के अंतर्गत, एक त्रिभुज की दो भुजाएं और उनके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हो, तो ये त्रिभुज सर्वांगसम होते है। इसे S - A - S सर्वांगसम प्रतिबंध कहते हैं।

ABC और PQR में यदि $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ और $\angle ABC \cong \angle PQR$, तब



आकृति 6.52

(ii) यदि दिये गये सुमेलन के अंतर्गत एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं क्रमशः किसी दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है। इसे SSS सर्वांगसम प्रतिबंध कहते है।

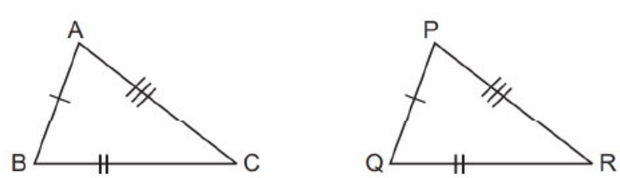
ABC और में

यदि

$\overline{BC} \simeq \overline{QR}$

और $\overline{AC} \cong \overline{PR}$

तो ΔABC PQR



आकृति 6.53

टिप्पणी

(iii) यदि एक सुमेलन में, एक त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

ABC और Δ PQR में

यदि , ,

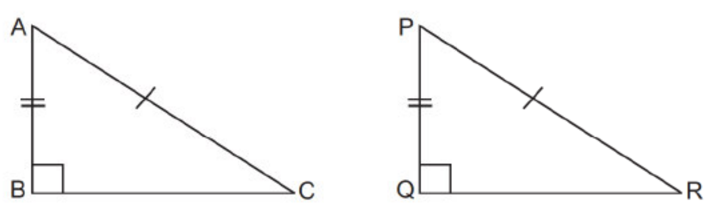
तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

इसे A-A-S सर्वांगसम प्रतिबंध कहते हैं।

आकृति 6.54

(iv) यदि एक सुमेलन के अंतर्गत किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इसे RHS सर्वांगसम प्रतिबंध कहते हैं।



आकृति 6.55

, में, समकोण है और , में समकोण है। यदि कर्ण और भुजा $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

नोट : दो सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल भी बराबर होते हैं।

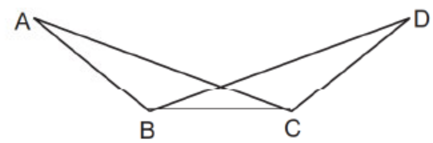
सवंगिसमता का अनुप्रयोग :

जब दो त्रिभुजों के दो कोणों और दो भुजाओं को सर्वांगसमता को सिद्ध करने की आवश्यकता होती है तो हम दोनों त्रिभुजों को सर्वांगसम सिद्ध करने का प्रयास करते हैं।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो ज्यामिति की कई समस्याओं को हल करने में सहायता करता है।

टिप्पणी

उदाहरण : संलग्न आकृति में , $\angle ABC \cong \angle BCD$ सिद्ध करो



आकृति 6.56

हल : ΔABC और में

(दिया हुआ है)

$\overline{BC}$ दोनों त्रिभुजों का उभयनिष्ठ भुजा है

$\angle ABC \cong \angle BCD$ (दिया हुआ है)

(S-A-S सर्वांगसम)

(संगत भुजायें)

त्रिभुजों की समरूपता :

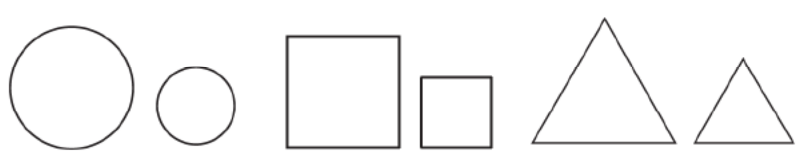
एक सम तल आकृति के दो पहलू होते है, आकार और रूप। यदि दो आकृतियों का आकार और रूप समान है तो वे सर्वांगसम होंगे। इनमें से एक का अक्स बनाकर दूसरी आकृति पर रखते है। यदि ये आकृतियां एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेती हैं तो वे सर्वांगसम कहलाती हैं।

अब दो आकृति लेते हैं जिनके समान रूप है। कुछ उदाहरण निम्न प्रकार से हैं।

(i) एक ही व्यक्ति के दो फोटो एक ही निगेटिव से बनाया गया परन्तु दोनों का आकार अलग-अलग है अर्थात समान रूप परन्तु भिन्न आकारों के।

(ii) भारत का मानचित्र पुस्तक में छपा है और एक मानचित्र दीवार पर बना हुआ है दोनों का रूप समान है परन्तु आकार भिन्न है।

(iii)



(a) (b) (c)

आकृति 6.57

दो वृत्त आकृति 6.57 में एक समान दिखाई दे रहे हैं अत: दोनों समरूप हैं। दोनों वर्ग समरूप हैं तथा दोनों त्रिभुज भी समरूप हैं।

टिप्पणी

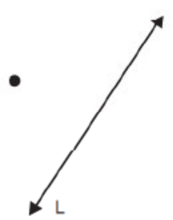
नोट : सर्वांगसम आकृतियां समरूप होते हैं, परन्तु समरूप आकृतियां सर्वांगसम शायद न हो।

6.3.5 परावर्तन और सममिति

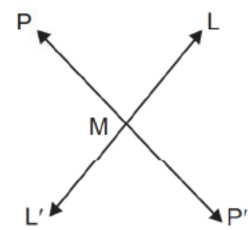
हम जानते हैं कि समतल दर्पण में प्रतिबिंब बनता है और एक छाया का निर्माण होता है। ज्यामिति में परावर्तन की अवधारणा उसी प्रकार है जैसे समतल दर्पण में परावर्तन की अवधारणा है।

(a) **एक रेखा में परावर्तन :**

(i) **एक रेखा में बिंदु का परावर्तन :** आकृति 6.58 (a) में L एक रेखा है और P एक बिंदु है। (कभी-कभी एक रेखा को एक अक्षर से नामित करते हैं) बिंदु P रेखा L से परावर्तित होता है और एक प्रतिबिंब बनाता है। प्रतिबिंब क्या है और कहां बनता है?



आकृति 6.58 (a)

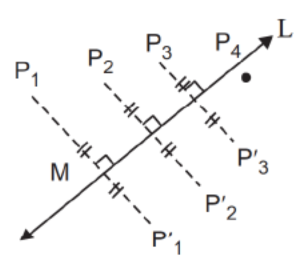


आकृति 6.58 (b)

प्रतिबिंब प्राप्त करने की विधि : आकृति 6.58 (b) P से रेखा L पर एक लम्ब रेखा $\overline{PM}$ खींचा। रेखा $\overrightarrow{PM}$ पर एक बिंदु P^1 इस प्रकार लिया कि $P\text{-}M\text{-}P^1$ और $PM = MP^1$ इस प्रकार हम बिंदु P का रेखा L पर परावर्तन के पश्चात छाया P^1 प्राप्त करते हैं। रेखा L को दर्पण रेखा कहते हैं।

आकृति 6.59 में $P^1{}_1$, P_1, का प्रतिबिंब है $P^1{}_2$ L में P_2 का प्रतिबिंब है

$P^1{}_3$ L में P_3 का प्रतिबिंब है



आकृति 6.59

टिप्पणी

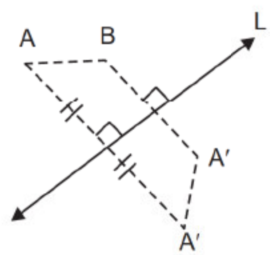
जैसे-जैसे बिंदु L के नजदीक हैं वैसे ही प्रतिबिंब भी L के नजदीक बनते हैं। P_4 रेखा L पर स्थित है। P_4 का प्रतिबिंब कहां पर है? P_4 का रेखा L से दूरी शून्य है क्योंकि P_4 L पर स्थित है। अत: P_4 का प्रतिबिंब का L से दूरी भी शून्य है इस प्रकार P_4 का प्रतिबिंब भी L पर स्थित है। P_4 का प्रतिबिंब स्वयं P_4 है।

अत: हम कह सकते है कि

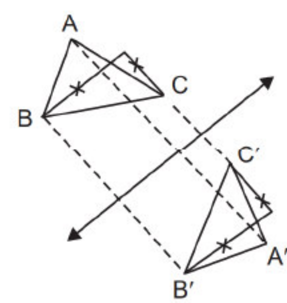
दर्पण रेखा पर स्थित बिंदु का प्रतिबिंब स्वयं बिंदु ही होता है।

(ii) **रेखाखंड का परावर्तन :** L एक दर्पण रेखा है और $\overline{AB}$ को परावर्तित करना है। (आकृति 6.60)

रेखाखंड $\overline{AB}$ का प्रतिबिंब दर्पण रेखा L में $\overline{A'B'}$ है जहां पर A' और B' दर्पण रेखा L पर क्रमश: A और B का प्रतिबिंब है।



आकृति 6.60

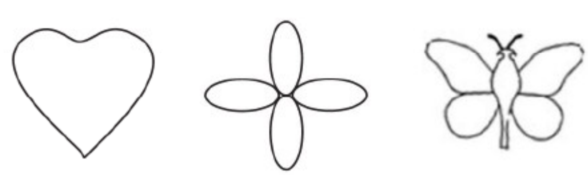


आकृति 6.61

(iii) त्रिभुज का परावर्तन :

आकृति 6.61 में दर्पण रेखा L में ΔABC का प्रतिबिंब है जहां पर A^1 B^1 और C^1 दर्पण रेखा L पर क्रमश: A, B और C का प्रतिबंब है।

सममिति : कुछ वस्तुओं के रूप और डिजाइन हमें बहुत आकर्षक लगता है। हम उन वस्तुओं को बहुत सुंदर कहते हैं। या डिजाइन बुहत अच्छा है कहते हैं। कुछ ऐसी ही रूपाकृति नीचे दी गयी हैं।



पान का पत्ता　　डिजाइन　　तितली

आकृति 6.62

टिप्पणी

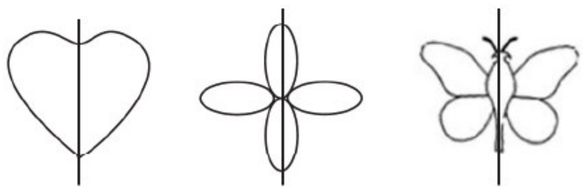
उपरोक्त प्रत्येक आकृति में एक रेखा को उचित रूप से खींचने के बारे में सोचते हैं ताकि

- यदि हम आकृति का अक्स प्राप्त करना चाहे
- आकृति को रेखा के अनुदिश काटना
- आरेखित रेखा के अनुदिश आकृति को मोड़ना

एक आकृति में रैखिक सममिति होती है यदि उसमें एक रेखा ऐसी हो जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, आकृति के दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाते हैं। ऐसी आकृति को सममित कहते हैं।

आरेखित रेखा जिसके अनुदिश आकृति को मोड़ने पर दो संपाती भागों में आकृति विभाजित हो जाता है उसे रैखिक सममिति कहते हैं।

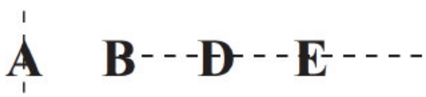
उपरोक्त आकृतियों का रैखिक सममिति नीचे आरेखित है।



आकृति 6.63

$\overleftrightarrow{PQ}$

कुछ अंग्रेजी अक्षर जो रैखिक सममिति है नीचे दिये गये हैं

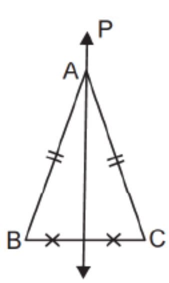


आप इसी प्रकार अन्य रैखिक सममिति अक्षरों की खोज करें।

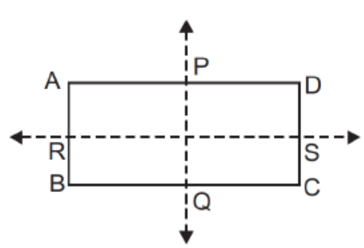
सममित रेखाएं और ज्यामितीय आकृति :

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है और सममित रेखा है, $\overleftrightarrow{PQ}$ शीर्ष A से और आधार के मध्य बिंदु Q से गुजरता है। (आकृति 6.64 देखें)

ABCD एक आयत है और इसके 2 सममित रेखांए है ये है $\overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ जहां P, Q, R और S क्रमशः रेखा $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{AB}$ और $\overline{CD}$ के मध्य बिंदु है। (चित्र 6.65 देखें)

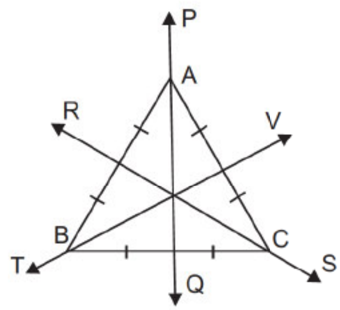


आकृति 6.64

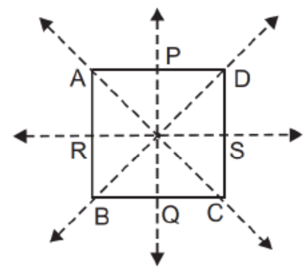


आकृति 6.65

ΔABC एक समबाहु त्रिभुज इसके 3 सममित रेखाएं है और ये रेखाएं है , $\overleftrightarrow{RS}$ और $\overleftrightarrow{TV}$ है। ये सभी रेखायें शीर्ष को उसके सम्मुख भुजाओं के मध्य बिंदु को जोड़ती है। (आकृति 6.66)



आकृति 6.66



आकृति 6.67

ABCD एक वर्ग है (आकृति 6.67) इसके 4 सममित रेखाएं है और ये रेखाएं है $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{PQ}$ और $\overleftrightarrow{RS}$ है जहां P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{AB}$ और $\overline{CD}$ के मध्य बिंदु है।

वृत्त के केंद्र से गुजरने वाली रेखा वृत्त का सममित रेखा है।

इस प्रकार ज्यामितीय आकृतियों की एक या एक से अधिक सममित रेखाएं होती है।

घूर्णन सममिति : क्या आपने कभी कागज की हवाई चकरी बनाई है आकृति 6.68 में एक हवाई चकरी को दिखाया गया है इसके 4 ब्लेड है और इनके नाम A, B, C और D है। यदि आप इसके केंद्र वाले स्थिर बिंदु के पारित वामावर्त घुमाएं तो ब्लेड A, B ब्लेड के स्थान पर होगा और B, C और D क्रमशः C, D और A की जगह पर होंगे।

आकृति 6.68

एक पूरे चक्कर में ऐसी चार स्थितियां हैं जब चकरी पहली जैसी दिखती है। इसी कारण, हम कहते हैं कि चकरी में क्रम 4 (order 4) की घूर्णन सममिति है। जब कोई वस्तु घूर्णन करती है तो उसके आकार और माप में कोई परिवर्तन नहीं होता है। घूर्णन उस वस्तु को एक निश्चित बिंदु के चारों ओर घुमाता है इस बिंदु को सममित बिंदु कहते हैं।

जांच करें कि क्या निम्नांकित आकृतियों का घूर्णन सममिति है यदि है तो प्रत्येक स्थिति में, घूर्णन सममिति का क्रम बतायें।

(a) (b) (c) (d) (e)

आकृति 6.69

अपनी प्रगति की जांच करें

E-6 रिक्त स्थानों को भरिये

(a) दो रेखायें सर्वांगसम होती हैं यदि .... बराबर है।

(b) दो कोण सर्वांगसम है यदि उनके .... बराबर है।

(c) यदि त्रिभुज सर्वांगसम है तो उनके .... कोणों की माप भी बराबर होती है।

(d) दो समरूप त्रिभुजों के .... समान होते है।

$\Delta ABC \Delta PQR$ $m\angle Q$

E-7 ΔABC और , AB = 4 सेमी, BC = 7 सेमी, PQ = 6 सेमी, QR = 10.5 सेमी और

(a) PR ज्ञात करें यदि AC = 8 सेमी।

(b) और के क्षेत्रफलों के अनुपात ज्ञात कीजिये।

6.4 त्रिविमीय आकार

हम पहले ही त्रिविमीय आकारों के बारे में चर्चा कर चुके हैं। ऐसे आकार जो तीन दिशाओं में विस्तारित होते हैं, बांये से दांये, पास से दूर, और ऊपर से नीचे को त्रिविमीय आकार कहते हैं।

आकार जो तीन दिशाओं में परस्पर समकोण पर विस्तारित होते हैं उसे त्रिविमीय आकार कहते है।

विभिन्न प्रकार के सम त्रिविमीय आकार :

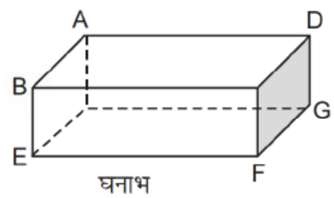
(a) घनाभ :

एक बाक्स, एक ईंट, इसी प्रकार के अन्य आकार घनाभ कहलाता है एक घनाभ आकृति 6.70 में दिखाया गया इसके 8 शीर्ष है। (A, B, C, D, E, F, G, H) 12 किनारे

टिप्पणी

, और 6 फलक है।

(ABCD, EFGH, ABEH, BEF, CFGD और AHGD) BC, EF, HG और AD घनाभ की लम्बाई (l) है, AB, CD, EH और FG घनाभ की चौड़ाई (b) है, AH, BE, CF और DG घनाभ की ऊंचाई (h) है।



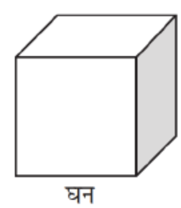
आकृति 6.70

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = उपरीय और तलीय पृष्ठ का क्षेत्रफल + दांये और बांये पृष्ठ का क्षेत्रफल + सामने और पीछे के पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2l \times b + 2\, b \times h + 2lh = 2\,(lb + bh + lh)$ वर्ग इकाई

घनाभ का आयतन : त्रिविमीय वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह उसका आयतन कहलाता है और यह घनाम की लम्बाई, ऊंचाई और चौड़ाई के गुणनफल के बराबर होता है।

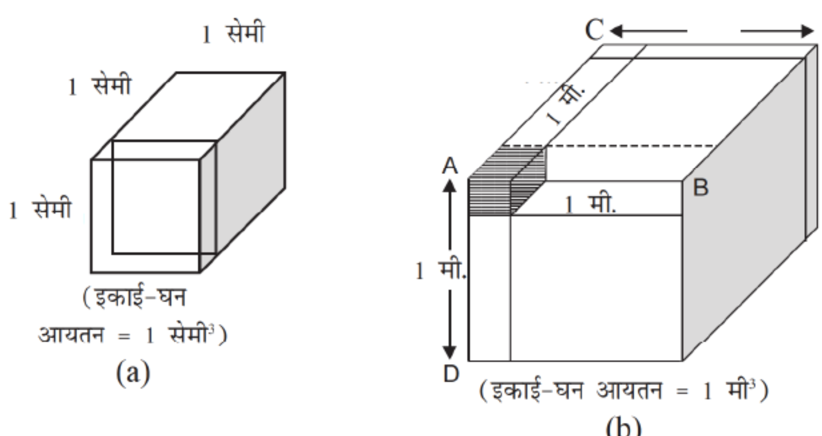
अत: आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊंचाई = $l \times b \times h$ घन इकाई

(b) घन : एक घनाम जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊंचाई बराबर हो उसे घन कहते है। इस प्रकार घन के सभी किनारों की लम्बाई बराबर होती हैं और सभी फलक वर्ग होते हैं।



आकृति 6.71

आयतन माप की इकाई : त्रिविमीय आकार के आयतन की माप के लिए घन इकाई के आयतन का उपयोग करते हैं। एक घन जिसके प्रत्येक किनारे की लम्बाई इकाई हो। यदि इकाई घन की प्रत्येक किनारे की लम्बाई 1 सेमी. है तो उसका आयतन 1 सेमी^{3} है।



आकृति 6.72

एक इकाई घन जिसका प्रत्येक किनारा 1 सेमी लम्बा है, उसे से.मी. घन कहते हैं एक इकाई घन जिसका प्रत्येक किनारा 1 मीटर लम्बा है उसे मी.घन कहते हैं आकृति 6.72 (b) में छायांकित हिस्सा एक सेमी घन है अर्थात प्रत्येक किनारा की लम्बाई एक सेमी है। इस प्रकार यदि मीटर-घन को सेमी. घन में AB किनारे के अनुदिश काटे तो हमें 100 घन प्राप्त होंगे। 100 घन किनारे AC के अनुदिश और 100 घन किनारा AD के अनुदिश काटने पर।

अत: कुल प्राप्त सेमी-घनों की संख्या होगी

$100 \times 100 \times 100 = 10,00,000$

इस प्रकार 1मी.^{3} = 10,00,000 सेमी^{3} = 10^6 सेमी^{3}

1 सेमी^{3} व 1मी^{3} को घन इकाई कहते है

नोट : (i) सेमी-वर्ग, मीटर-वर्ग का क्षेत्रफल का परिकलन नहीं किया गया है। इनको क्रमश: 1 सेमी^{2} और 1 मीटर^2 परिभाषित किया गया है।

(ii) सेमी-घन और मीटर-घन के आयतन को क्रमश: 1 सेमी^{3} और 1 मीटर^3 परिभाषित किया गया है।

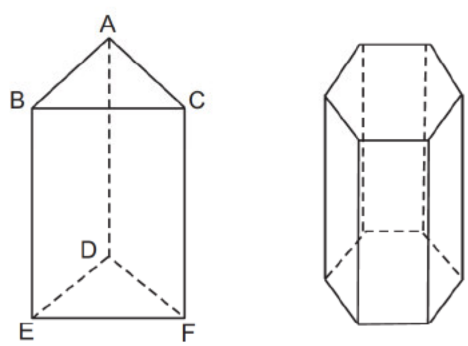
(iii) 1 सेमी^{2} क्षेत्रफल माप की इकाई है परन्तु एक सेमी-वर्ग एक वर्ग है जिसकी लम्बाई 1 सेमी. है। इस प्रकार 1 सेमी^{2} और एक सेमी-वर्ग पूर्णत: अलग-अलग अवधारणाओं को प्रदर्शित करता है।

एक सेमी-वर्ग का क्षेत्रफल - 1 सेमी^{2}। इसी प्रकार 1 मी^{3} और एक मीटर-घन अलग है। एक मीटर-घन का आयतन = 1 मी.^{3}

(b) प्रिज्म : आकृति 6.73 (i) में त्रिविमीय आकार के निम्नलिखित विशेषताएं है।

इसके 2 त्रिभुजाकार फलक है।

(एक ऊपर और एक नीचे) इन्हें हम सामान्यत: आधार कहते हैं। इसके 3 आयाताकार फलक भी हैं जो त्रिभुज की भुजाओं के लम्बवत है, ये पृष्ठ पार्श्वफलक कहलाते हैं। दोनों त्रिभुजों के बीच की दूरी को प्रिज्म की ऊंचाई कहते हैं। (यदि प्रिज्म क्षैतिज अवस्था में हो तो इसे प्रिज्म की लम्बाई कहते हैं)



(i) (ii)

आकृति 6.73

आकृति 6.73 (ii) एक प्रिज्म की आकृति है जिसका आधार षष्टभुज है।

प्रिज्म का पृष्ठीय क्षेत्रफल :

पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल $= AB \times h + BC \times h + CA \times h$ वर्ग-इकाई (h ऊंचाई है)

$= h\,(AB + BC + CA)$ वर्ग-इकाई (h सर्वनिष्ठ है)

$= h \times$ आधार का परिमाप

आधारों का क्षेत्रफल $= 2 \times$ आधार का क्षेत्रफल

प्रिज्म का पृष्ठीय क्षेत्रफल = पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधारों का क्षेत्रफल

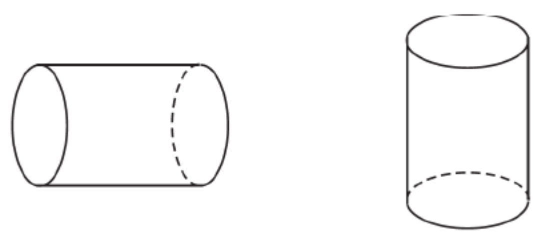
$= h \times$ आधार का परिमाप $+ 2 \times$ आधार का क्षेत्रफल

प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

नोट : ये सभी नियम विभिन्न बहुभुज वाले आधार वाले प्रिज्म के लिए भी लागू होगा।

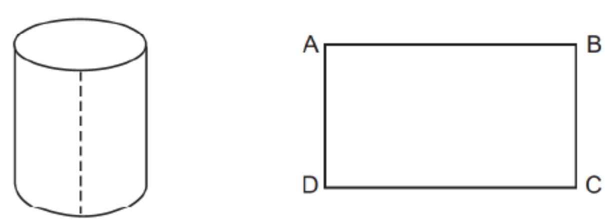
(c) बेलन :

बेलन के दो वृत्ताकार आधार होते है आधार को छोड़कर बेलन के चारों ओर वक्र पृष्ठ है। दोनों आधारों के बीच की दूरी को बेलन की लम्बाई या ऊंचाई कहते है।



आकृति 6.74

वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल : बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल एक आयताकार कागज के सीट के क्षेत्रफल के बराबर है जो उस वक्र पृष्ठ को पूरी तरह ढक ले। ऐसा आयताकार कागज आकृति 6.75(a) में है।



(a) (b)

आकृति 6.75

आयताकार कागज सीट की लम्बाई (l) = आधार के वृत्त की परिमाप

$= 2\pi r$

और आयताकार कागज सीट की चौड़ाई (b) = बेलन की ऊंचाई = h आयताकार कागज का क्षेत्रफल = $l \times b =$ $\times h =$ h वर्ग-इकाई

बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = *वर्ग-इकाई*

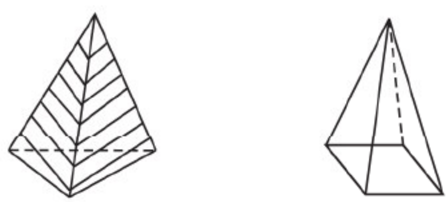
बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई = *घन इकाई*

नोट : एक बेलन का विशेष प्रिज्म है जिसका आधार वृत्ताकार है।

(d) ***पिरामिड :*** पिरामिड मिश्र के खलीफाओं (राजा और रानी) के कब्र है। पिरामिड के आधार त्रिभुज या बहुभुज है और ऊपर एक बिंदु पर समाप्त हो जाते हैं, ऐसी कुछ आकार निम्नांकित है।

त्रिभुजाकार आधार वाले पिरामिड के 4 शीर्ष, 6 किनारे और 4 फलक प्रत्येक त्रिभुज है। चतुर्भुजाकार आधार वाले पिरामिड के 5 शीर्ष हैं 8 किनारे और 5 फलक है जिसके तियर्क फलक त्रिभुजाकार है और आधार चतुर्भुजाकार है।

$2\pi rh$ $\pi r^2 h$



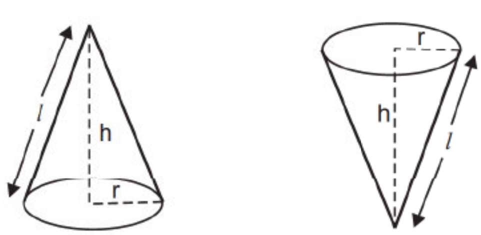
(a) (b)

आकृति 6.76

पिरामिड का पृष्ठीय क्षेत्रफल = तिर्यक फलक का क्षेत्रफल + आधार पिरामिड का आयतन =

$= \frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

(e) ***शंकु :*** सर्कस के एक जोकर की टोपी और कीप बिना नली के एक ऐसे आकार को प्रस्तुत करते हैं जिसे शंकु कहते हैं। इसका एक शीर्ष होता है एक वृत्ताकार किनारा और 2 फलक होते हैं जिसमें से एक वक्र होता है दूसरा वृत्ताकार सपाट आकार का होता है।



शंकु **उल्टा शंकु**

आकृति 6.77

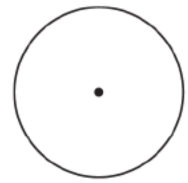
टिप्पणी

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$$= \pi r\sqrt{h^2 + r^2} + \pi r^2 = \pi r\left(\sqrt{h^2 + r^2} + r\right)$$

जहां पर वृत्ताकार आधार की त्रिज्या है। और ऊंचाई h है (आकृति 6.77) तिर्यक ऊंचाई $(\ell) = \sqrt{r^2 + h^2}$

(f) ***गोला :*** फुटबाल का आकार एक गोला को प्रदर्शित करता है इसका कोई शीर्ष नहीं होता है और नहीं उसका कोई किनारा होता है। परन्तु इसका एक वक्र पृष्ठ होता है।



आकृति 6.78

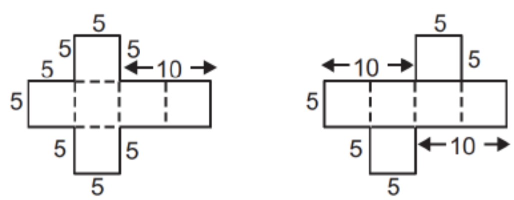
गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r गोले की त्रिज्या है और π = = 3.14 लें)

3-D आकार बनाने के लिए जाल (नेट)

जाल 2-D में एक प्रकार का ऐसा ढांचा (या रूपरेखा) होता है जिसे मोड़ने पर परिणामस्वरूप एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है। एक चार्ट शीट पर एक रेखाकृति इस प्रकार खींचे ताकि इसे उपर्युक्त प्रकार से मोड़ने पर एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है।

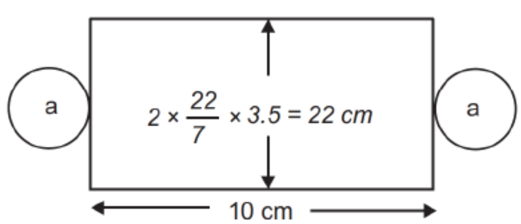
(i) 5 से.मी. किनारे वाले घन प्राप्त करना :



(i) (ii)

उपरोक्त जाल (नेट) के सभी कोण समकोण है और किनारों की माप दी गयी है।

(ii) 3.5 से.मी. त्रिज्या तथा 10 से.मी. ऊंचे बेलन के लिए जाल (नेट) बनाना :



a और b दो वृत्तों को प्रदर्शित करता है जिसकी त्रिज्या 3.5 से.मी. है और शेष भाग एक आयत है जैसा कि उपरोक्त आकृति में दिखाया गया है।

अपनी प्रगति की जांच करें :

E-9 उस सबसे बड़े घन के प्रत्येक किनारों की लम्बाई क्या होगी जिसे 175 से.मी. लम्बे, 105 से.मी. चौड़े और 64 सेमी. ऊंचे वूडन घनाभ को काट कर प्राप्त किया जा सकता है।

E-10 उन दो बेलनाकार के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिये जिसे एक 33 सेमी. लम्बे 22 सेमी. चौड़े आयताकार कागज की शीट का पूरा इस्तेमाल करके तैयार किया जा सकता है।

ज्यामितीय उपकरणों की सहायता से संरचना करना

ज्यामितीय उपकरणों में स्केल या रूलर, परकार, डिवाइडर, सेट स्क्वेयर का युग्म, (एक 30^o-60^o सेट स्क्वेयर और दूसरा 45^o-45^o सेट स्क्वेयर) और चांदा शामिल है। जब हम स्केल के सीधा किनारे का उपयोग करते हैं तब हम इसे रूलर के रूप में विचार करते हैं। अर्थात एक रूलर एक आयताकार प्लेट है जिसके केवल सीधे किनारे हैं।

रूलर और परकार का उपयोग : एक समय था जब गणितज्ञ सोचते थे कि रूलर और परकार का उपयोग करके कई आभारभूत गणितीय कार्यों को पूरा किया जा सकता है। यद्यपि रूलर और परकार के उपयोग करके निम्नलिखित ज्यामितीय आकृति की रचना की जा सकती है।

(i) दिये हुये लम्बाई की रेखाखंड

(ii) दिये हुये रेखाखंड का लम्बवत समद्विभाजक

(iii) एक दिये रेखा के लम्बवत/समांतर रेखा खींचना

(a) एक दिये हुए बिंदु पर

(b) रेखा से बाहर दिये हुए बिंदु पर

(iv) दिये हुए कोण के बराबर माप का कोण

(v) दिये हुए कोण का समद्विभाजक

(vi) 60^o के कोण, इसके गुणक और सहगुणक

(vii) दिये हुए रेखाखंड को दो बराबर भागों में बांटना

(viii) दिये हुए माप का त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त खींचना

आपने अपने विद्यालय के दिनों में इन आकृतियों की अवश्य रचना की होगी। आपके अधिगम को पुनर्बलन प्रदान करने के लिए हम यहां पर संक्षिप्त में संरचना की विधियों को प्रस्तुत किया है।

(i) दिये हुए लम्बाई के रेखाखंड की रचना करना :

(a) एक सीधी रेखा एक स्केल के सीधे किनारे का उपयोग करके खींचा जा सकता है। (आकृति 6.79 (a))

टिप्पणी

(b) दिये हुए लम्बाई के बराबर, परकार में त्रिज्या के रूप में लेंगे, रेखा A पर एक बिंदु को केंद्र मानकार एक चाप काटेंगे जो रेखा को B पर काटती है (आकृति 6.79 (b))

(a) (b)

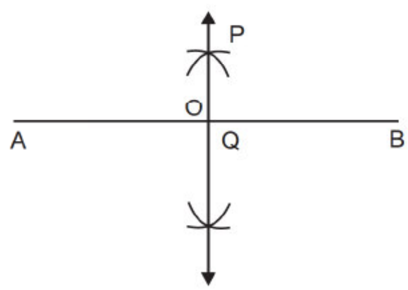
आकृति 6.79

(c) $\overline{AB}$ दिये हुए लम्बाई का रेखाखंड है

(ii) एक रेखाखंड $\overline{AB}$ का लम्बवत समद्विभाजक खींचना :

चरण 1 : परकार में रेखाखंड के आधे से अधिक लम्बाई का त्रिज्या लेते हैं। A को केंद्र मानकर रेखाखंड के दोनों तरफ दो चाप खींचते है। (आकृति 6.80)

चरण 2 : B को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या के दो चाप रेखाखंड $\overline{AB}$ के दोनों ओर पहले से खींचे हुए चाप पर काटते हुए खींचते हैं।



आकृति 6.80

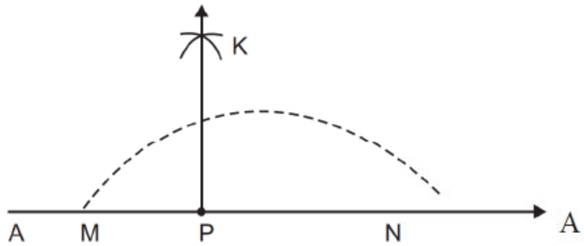
चरण 3 : चरण 2 में प्राप्त चापों के प्रतिच्छेदन बिंदुओं को एक सीधी रेखा खींचकर जोड़ते हैं। इस रेखा का नाम $\overleftrightarrow{PQ}$ दिया गया है। $\overleftrightarrow{PQ}$ रेखाखंड $\overline{AB}$ का लम्बवत समद्विभाजक है।

जांच करे यदि परकार में त्रिज्या की लम्बाई को $\overline{AB}$ की लम्बाई के सटीक आधे या इससे कम लम्बाई की लेते तो क्या होता?

(iii) (a) एक रेखा के दिये हुए बिंदु पर लम्बवत रेखा खींचना :

रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ पर बिंदु P पर लम्बवत रेखा खींचना

चरण 1 : बिंदु P को केंद्र मानकार उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप खींचते हैं जो रेखा $\overline{AB}$ को दो बिंदुओं पर काटता है। इन बिंदुओं को M तथा N नाम दिया।



आकृति 6.81

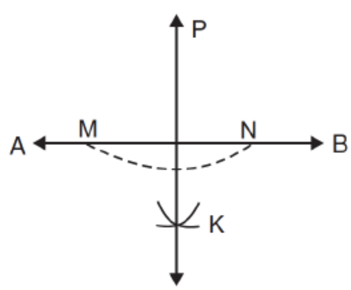
चरण 2 : चरण 1 में लिये गये त्रिज्या से अधिक त्रिज्या लेकर तथा बिंदुओं M और N को केंद्र मानकर दो चाप एक के बाद एक रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ के एक ओर खींचते हैं जो एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं। इस प्रतिच्छेद बिंदु को K नाम दिया।

चरण 3 : रेखा $\overleftrightarrow{PK}$ खींचा, $\overleftrightarrow{PK}$ रेखा AB पर वांछित लम्बवत रेखा है $\overleftrightarrow{PK} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(iii) (b) दिये हुए रेखा पर इसके बाहर दिये गये बिंदु से लम्बवत रेखा खींचना रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ पर बाह्य बिंदु P से लम्बवत रेखा खींचना $\overleftrightarrow{AB}$ दिया गया रेखा है और बिंदु P इससे बाहर स्थित है।

चरण 1 : बिंदु P को केंद्र मान कर उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप खींचते है जो $\overleftrightarrow{AB}$ को दो बिंदुओं पर काटती है, ये बिंदु M और N है।

चरण 2 : M और N को केंद्र मान कर समान त्रिज्या का प्रयोग करके रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ के एक ही ओर खींचे जो परस्पर एक दूसरे को (बिंदु P के दूसरे तरफ) एक बिंदु पर काटते हैं। इस प्रतिच्छेद बिंदु को K नाम दिया। अब रेखा $\overleftrightarrow{PK}$ खींचिये।



आकृति 6.82

$\overleftrightarrow{PK}$ रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ पर लम्बवत रेखा है जो बिंदु P से गुजरता है।

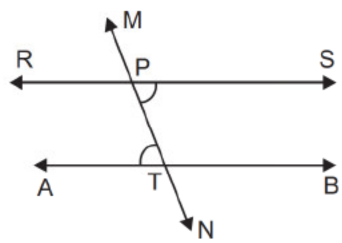
(iii) (c) दिये हुए रेखा के बाहर स्थित बिंदु से गुजरने वाली समांतर रेखा खींचना रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ के समांतर रेखा खींचना जो बिंदु P से गुजरती है।

"$\overleftrightarrow{RS}$ वांछित समांतर रेखा है रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ के'' जिसे खींचना है।

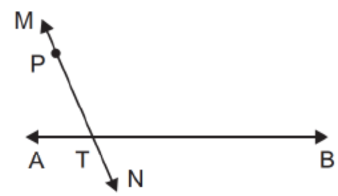
टिप्पणी

$\overleftrightarrow{MN}$ एक रेखा है, P गुजरता है और रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ को बिंदु T पर काटता है।

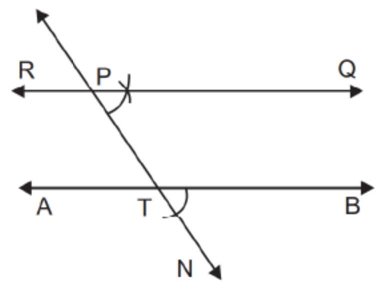
एकांतर कोण $m\angle SPT = m\angle ATP$



आकृति 6.83(a)



आकृति 6.83 (b)

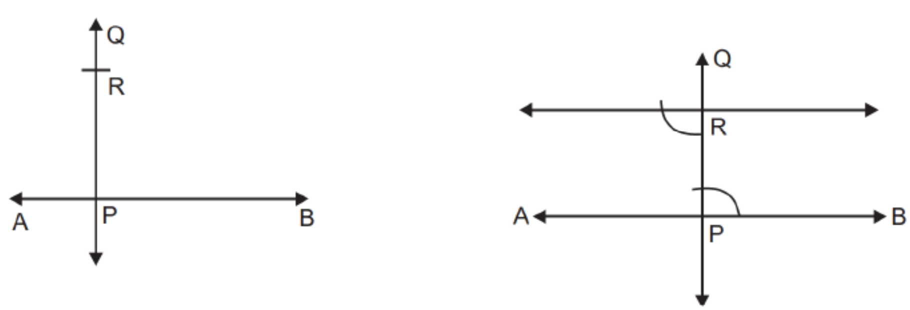


आकृति 6.83 (c)

चरण 1 : एक रेखा MN बिंदु P से गुजरते हुए खींचा जो रेखा AB को बिंदु T पर प्रतिच्छेद करता है।

चरण 2 : एक कोण जो BTN की माप के बराबर है, रेखा PR पर बिंदु P पर बनाया। संरचना (iii) पर की गई चर्चा का अनुसरण किया इस प्रकार रेखा AB के समांतर रेखा RS खींचा जो बिंदु P से गुजरता है।

- एक दिये हुए रेखा से दिये गये दूरी पर एक समांतर रेखा खींचना
  AB दिया गया रेखा है एक दूरी से (5 सेमी.) इसके समांतर रेखा खींचना



(a) (b)

आकृति 6.84

टिप्पणी

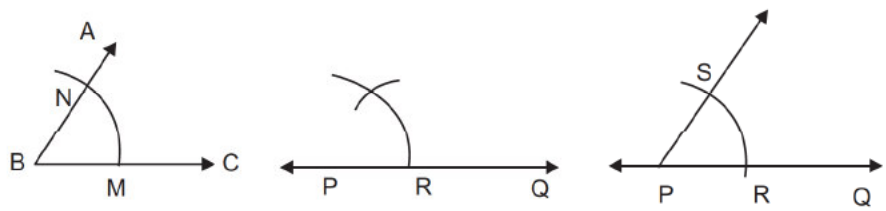
चरण 1 : रेखा पर एक बिंदु लिया। उसे P नाम दिया, P पर एक रेखा खींचा जो रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ पर लम्बवत है [iii (a) में इसकी चर्चा की जा चुकी है] इसे $\overleftrightarrow{PQ}$ नाम दिया।

चरण 2 : 5 सेमी का त्रिज्या लेकर तथा P को केंद्र मानकर एक चाप खींचा जो को काटती है उस प्रतिच्छेद बिंदु को R नाम दिया।

चरण 3 : c (iii) में चर्चा की गई विधि का अनुसरण करते हुए $\angle RPB$ की माप के बराबर रेखा पर R पर एक कोण बनाया जो $\angle RPB$ का एकांतर कोण भी हो। खींचे गये कोण भुजा का विस्तार कीजिये यह के वांछित समांतर रेखा देता है जो इससे दिये गये दूरी (5 सेमी) पर स्थित है।

(iv) दिये गये रेखा पर एक बिंदु पर बने कोण की माप के बराबर एक कोण की रचना करना

$\angle ABC$ दिया हुआ कोण है, और दी गई रेखा है।



(a) (b) (c)

आकृति 6.85

एक कोण की रचना करना जिसकी माप $\angle ABC$ के बराबर हो तथा रेखा के बिंदु P पर बना हो।

चरण 1 : परकार में एक उपर्युक्त त्रिज्या लेकर तथा B को केंद्र मानकर एक चाप इस तरह खींचा कि यह चाप रेखा $\overrightarrow{BA}$ और $\overrightarrow{BC}$ को काटता हो उन प्रतिच्छेद बिंदुओं को क्रमश M और N नाम दिया। (आकृति 6.85 (a))

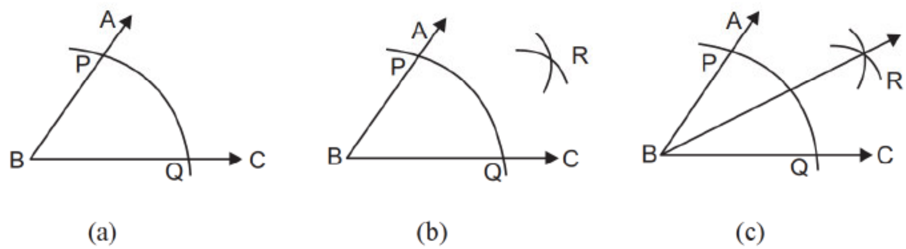
इसी प्रकार एक चाप समान त्रिज्या के और P को केंद्र मानकर एक चाप खींचा जो रेखा $\overrightarrow{PQ}$ को काटती है। प्रतिच्छेदन बिंदु को R नाम दिया। (आकृति 6.85 b)

चरण 2 : M और N की दूरी के बराबर त्रिज्या लेकर तथा R को केंद्र मानकर एक चाप इस प्रकार खींचा जो पहले खींचे गये चाप को काटता हो। इस प्रतिच्छेदन बिंदु को S नाम दिया। (आकृति 6.85 c)

चरण 3 : किरण $\overrightarrow{PS}$ खींचा। $\angle SPR$ वांछित कोण जिसकी माप की माप के बराबर है।

(v) दिये गये कोण का समद्विभाजक खींचना

दिया गया कोण है इस कोण का समद्विभाजक खींचना है



आकृति 6.86

चरण 1 : B को केंद्र मानकर तथा एक उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप इस प्रकार खींचा कि यह कोण की भुजा और $\overrightarrow{BC}$ को प्रतिच्छेद करें। प्रतिच्छेद बिंदुओं को P और Q नाम दिया।

चरण 2 : P और Q को केंद्र मानकर और PQ के आधे से अधिक की त्रिज्या लेकर दो चाप इस प्रकार खींचा कि वे दोनों परस्पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करें प्रतिच्छेदन बिंदु को R नाम दिया।

चरण 3 : किरण $\overrightarrow{BR}$ खींचा, $\overrightarrow{BR}$ $\angle ABC$ का समद्विभाजक है।

इस प्रकार

(vi) एक निर्धारित माप की कोण की रचना करना (60° के काण की माप, और इसके गुणकों के कोण की रचना)

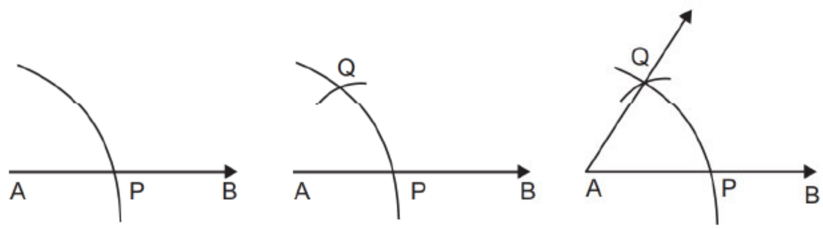
(a) एक 60° के कोण की रचना करना :

एक दिया हुआ किरण है, $\overleftrightarrow{AB}$ के ऊपर बिंदु A पर 60° के कोण की रचना करना है।

चरण 1 : A को केंद्र मान कर और उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप इस प्रकार खींचा जो AB को प्रतिच्छेद करे।

टिप्पणी

इस प्रतिच्छेद बिंदु को P नाम दिया



(a) (b) (c)

आकृति 6.87

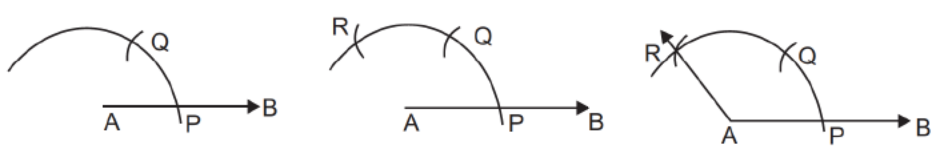
चरण 2 : P को केंद्र मान कर तथा समान त्रिज्या (जैसे चरण 1 में लिया था) लेकर एक एक चाप इस प्रकार खींचा कि वह चरण 1 में खींचे गये चाप को प्रतिच्छेद करें। इस प्रतिच्छेद बिंदु को Q नाम दिया।

चरण 3 : किरण $\overrightarrow{AQ}$ खींचा $\angle QAB$ वांछित कोण है जिसकी माप 60^o है

(a) 120^o के कोण की रचना करना

चरण 1 : एक किरण खींचा बिंदु A को केंद्र मानकर और उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप इस प्रकार खींचा कि वह किरण $\overrightarrow{AB}$ को काटे इस प्रकार प्राप्त प्रतिच्छेद

$\overrightarrow{AB}$ बिंदु को P नाम दिया।



(a) (b) (c)

आकृति 6.88

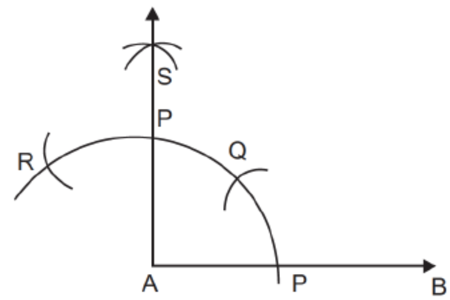
चरण 2 : उसी त्रिज्या के बराबर P को केंद्र मानकर एक चाप इस प्रकार से खींचा कि चरण 1 में खींचे गये चाप को प्रतिच्छेद करें। इस प्रतिच्छेद बिंदु को Q नाम दिया। एक चाप Q को केंद्र मानकर खींचा जो चरण 1 के चाप को प्रतिच्छेद करता है, इस प्रतिच्छेद बिंदु को R नाम दिया।

चरण 3 : किरण $\overrightarrow{AB}$ खींचा $\angle RAB$ वांछित कोण है और इसकी माप 120^o है।

टिप्पणी

(b) 90° के कोण की रचना करना

चरण 1 : किरण पर A को केंद्र मान कर उपयुक्त त्रिज्या लेकर चाप खींचा जो किरण $\overrightarrow{AB}$ को P पर काटता है।



आकृति 6.89

चरण 2 : उसी समान त्रिज्या को लेकर और P को केंद्र मानकर एक चाप खींचा जो पहले खींचे गये चाप (चरण में) को काटता है इस प्रतिच्छेद बिंदु को Q नाम दिया। पुनः Q को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या को लेकर एक चाप खींचा जो पहले चाप को (चरण 1 में) प्रतिच्छेद करता है। इस प्रतिच्छेद बिंदु को R नाम दिया।

चरण 3 : बिंदु P और R को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या को लेकर दो चाप खींचा जो परस्पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं। इस प्रतिच्छेद बिंदु को S नाम दिया।

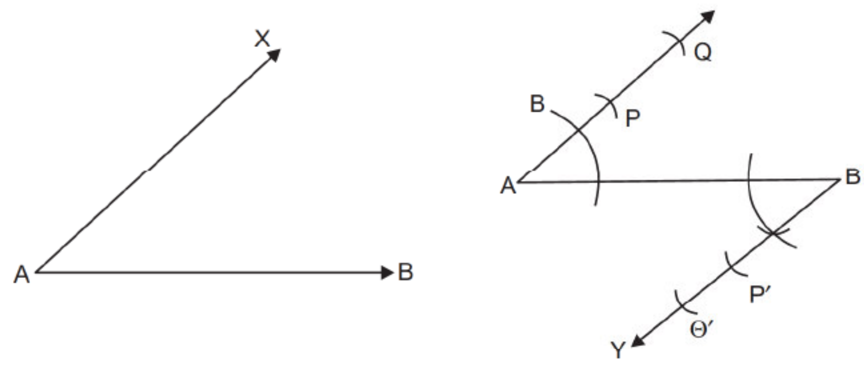
किरण $\overrightarrow{AS}$ खींचा $\angle SAB$ वांछित कोण जिसकी माप 90° है।

- 45° के कोण की रचना, 90° के कोण को समद्विभाजित करके की जा सकती है।
- 22 $^1/_2$° के कोण की रचना, 45° के कोण को समद्विभाजित करके प्राप्त किया जा सकता है।

E-11 बताइये आप (a) 30° (b) 15° (c) 105° के कोण किस प्रकार खींच सकते है।

(vii) एक दिये हुए रेखा को कई बराबर भागों में विभाजित करना

AB दिया गया रेखाखंड है और उसको 3 बराबर भागों में विभाजित करना है।



आकृति 6.90

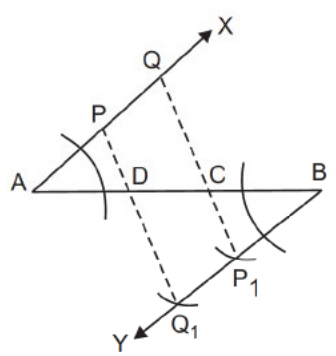
चरण 1 : A को आदि बिंदु मान कर एक किरण खींचा

चरण 2 : $\overrightarrow{AX}$ के समांतर किरण $\overrightarrow{BY}$ खींचा $\angle ABY$ की माप कोण के बराबर है।

चरण 3 : A को केंद्र मानकर तथा उपयुक्त त्रिज्या लेकर एक चाप खींचा जो को काटता है। प्रतिच्छेद बिंदु को P नाम दिया। P को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या को लेकर एक चाप खींचा जो $\overrightarrow{AX}$ को काटता है। इस प्रतिच्छेद बिंदु को Q नाम दिया। इस प्रकार हमें दो भाग AP और PQ (अर्थात जितने भागों में $\overline{AB}$ को विभाजित करना है उससे 1 कम) उसी त्रिज्या को लेकर $\overrightarrow{BY}$ पर दो चाप खींचकर दो प्रतिच्छेद बिंदु प्राप्त किया और इन्हें नाम दिया P_1 और Q_1 (आकृति 6.90 (c))

$\angle BAX$ $\overline{AX}$

चरण 4 : $\overline{QP_1}$ और $\overline{PQ_1}$ $\overline{AB}$ को जहां पर काटते है उन बिंदुओं को क्रमश: C और D नाम दिया (आकृति 6.90 (c)) इस प्रकार $\overline{AB}$ को 3 बराबर भागों में बिंदु C और D पर विभाजित करता है।



आकृति 6.90 (c)

टिप्पणी

अपनी प्रगति की जांच करें

E-12 एक रेखाखंड पर लम्बवत समद्विभाजक रेखा खींच कर रेखाखंड को कितने बराबर भागों में विभाजित किया जा सकता है।

E-13 क्या आप लम्बवत समद्विभाजक विधि का इस्तेमाल करके एक दिये हुये रेखाखंड को

(a) 4 बराबर भागों में

(b) 8 बराबर भागों में

(c) 12 बराबर भागों में

विभाजित कर सकते है?

(viii) (a) एक त्रिभुज की संरचना : जब आप रेखाखंड और निर्धारित माप की कोण की रचना करने की समझ और कौशल अर्जित कर लेते हैं तो आप त्रिभुज की रचना रूलर और परकार की सहायता से कर सकते हैं।

त्रिभुज की रचना करने के लिए वांछित न्यूनतम आंकड़े : त्रिभुज के 3 भुजाओं और 3 कोणों में से, एक त्रिभुज की रचना किया जा सकता है जब निम्नांकित प्रतिबंधितों में से कोई एक प्रतिबंध दिया गया हो।

(a) तीनों भुजाओं की लम्बाई (S-S-S)

(b) दो भुजाओं की लम्बाई और एक कोण की माप (S-S-A)

(c) दो भुजाओं की लम्बाई और उनके अंतर्गत बने कोण की माप (S-A-S)

(d) कोई दो कोणों की माप और एक भुजा की लम्बाई (A-S-A) या (A-A-S)

आपने अवलोकन कर सकते हैं कि उपरोक्त प्रतिबंधों के अनुसार एक त्रिभुज की रचना करने के लिए कम से कम 3 भागों की आवश्यकता होगी। इन प्रतिबंधों के आधार पर आप कई त्रिभुजों की रचना कर सकते हैं।

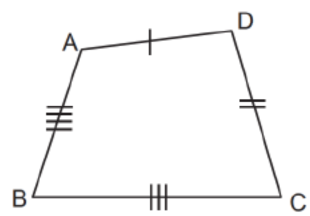
क्रियाकलाप :

एक समकोण त्रिभुज की रचना करने की विधि बताइये जब इसके कोई भी दो भुजाओं की माप दिया हुआ है।

(b) चतुर्भुज की संरचना : एक बार जब आप विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों की संरचना करना सीख जाते है तो चतुर्भुज की रचना करना आपके लिए कठिन नहीं होगा। यह आप जानते है कि प्रत्येक चतुर्भुज को दो बराबर त्रिभुजों में इसके प्रत्येक विकर्णों के द्वारा

विभाजित किया जा सकता है। इसलिए एक चतुर्भुज की संरचना करते समय पहले आप इसके त्रिभुजों की रचना करे उसके पश्चात चतुर्भुज की रचना पूर्ण करें।

उदाहरण के लिए– जब एक चतुर्भुज ABCD के चारों भुजाओं और विकर्ण AC की माप दिया हुआ हो तो आप दो में से कोई भी त्रिभुज की रचना कर सकते हैं जैसे कि त्रिभुज ABC उसके पश्चात आप त्रिभुज ADC की रचना करें। इस प्रकार आपने वांछित चतुर्भुज की रचना को पूरा किया।



आकृति 6.91

इसी प्रकार आप अन्य प्रकार के चतुर्भुजों की संरचना कर सकते हैं:

(a) चारों भुजाओं की लम्बाई दिया हुआ हो

(b) एक सम चतुर्भुज के दो विकर्णो की लम्बाई दिया हुआ हो।

(c) दो कोणों की माप और 3 भुजाओं की लम्बाइ दिया हुआ हो

(d) एक समांतर चतुर्भुज की 2 आसन्न भुजाओं की लम्बाई और एक कोण की माप दिया हुआ हो।

6.6 सारांश

- बिंदु, रेखा और तल समतल ज्यामितीय के तीन अपरिभाषित पद हैं।
- रेखाखंड, किरण, कोण, त्रिभुज और चतुर्भुज आदि आधारभूत पद हैं जिसे अपरिभाषित पदों के इस्तेमाल करके परिभाषित किया गया है।
- आसन्न कोण, संपूरक कोण, पूरक कोण, उध्वधिर सम्मुख कोण युग्म कोणों के उदाहरण है।
- त्रिभुजों को (a) भुजाओं के आधार पर समबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज, विषम बाहु त्रिभुज, (b) कोणों की माप के आधार पर; न्यूनकोण, अधिक कोण, समकोण में वर्गीकृत किया गया है। त्रिभुज के तीनों कोणों के योग 180^{o} होता है।
- त्रिभुज के संदर्भ में (a) परिमाप = 3 भुजाओं की लम्बाई का योग और (b) क्षेत्रफल = ½ आधार × ऊंचाई

- समांतर चतुर्भुज, आयत, समचतुर्भुज, वर्ग और समलम्ब चतुर्भुज विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज हैं। चतुर्भुजों के चारों कोणों का योग 360° होता है।
- वृत्त एक तल पर स्थित बिंदुओं का समूह है जो उस तल पर स्थित एक स्थिर बिंदु से समान दूरी पर स्थित होते हैं। स्थिर बिंदु को वृत्त का केंद्र कहते हैं और केंद्र तथा वृत्त पर किसी बिंदु के बीच की दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं।
- वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखाखंड को जीवा कहते हैं। जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है, प्रत्येक भाग को वृत्त का वृत्तखंड कहते हैं।
- वृत्त की चाप पर अंतरित कोणों की माप बराबर होती है। अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता हैं।
- वृत्त के न्यून चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण, त्रिज्याओं के द्वारा चाप के अंत बिंदुओं को केंद्र से मिलाने से बनता है।
- चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।
- बराबर लम्बाई के रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं जबकि बराबर माप के कोण सर्वांगसम होते हैं। विभिन्न प्रतिबंधों के अंतर्गत (जैसे S-A-S, S-S-S, A-S-A, और RHS त्रिभुजों सर्वांगसम हो सकते हैं।
- सर्वांगसम आकृति समरूप होते हैं परन्तु इसके विपरीत अवस्था सदैव सत्य नहीं होता है। दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल उनके संगत भुजाओं के वर्गो के अनुपातिक होते है।
- ज्यामितीय में परावर्तन दर्पण में परावर्तन के समान होता है। परावर्तन आकृतियों में सममिति उत्पन्न करता है।
- समतल आकृतियों के क्षेत्रफल की गणना करने के लिए सूत्रों का इस्तेमाल करके त्रिविमीय आकारों जैसे घन, घनाभ, बेलन, शंकु, प्रिज्म और पिरामिड का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है।
- केवल रूलर और परकार का इस्तेमाल करके निम्नांकित आकृतियों की रचना की जा सकती है।

  (i) किये हुये लम्बाई का रेखाखंड खींचना

  (ii) दिये हुये रेखाखंड का लम्बवत समद्विभाजक की रचना

  (iii) दिये हुये त्रिज्या का वृत्त की रचना

  (iv) दिये हुये किरण पर दिये हुये बिंदु पर दिये गये कोण की माप के बराबर एक कोण की रचना

  (v) एक दिये हुये रेखा के समांतर/लम्बवत रेखा खींचना

(vi) दिये हुये कोण का समद्विभाजक रेखा खींचना

(vii) 60^o के कोण और इसके गुणक वाले कोण

(viii) बंद ज्यामितीय आकृतियां जैसे त्रिभुज, और चतुर्भुज और वृत्त

टिप्पणी

6.7 अपनी प्रगति की जांच करें

E1. $92\frac{1}{2}°$

E2. 108°, 108°, 72°

E3. (i) $\angle ACQ, \angle CDS$, (ii) (iii)

E4. $a = c = f = h = 145^0$, $e = d = b = 35^0$

E-5 (a) सम चतुर्भुज (b) केंद्र (c) 32^o (d) 180^o

E-6 (a) लम्बाई (b) माप (c) संगत (d) आकार

E-7 PR = 12 सेमी.

E-8 :

$\Delta PQR, \angle CDR$

E-9 63 सेमी.

E-10 आयतनों का अनुपात होगा 3:2

E-11 (a) 60^o कोण का समद्विभाजक खींचकर

(b) 30^o कोण का समद्विभाजक खींचकर

(c) $\angle ABC = 90°, \angle CBD = 120°$, की रचना करके, उसके पश्चात BE खींचिये समद्विभाजक , खींचकर, = 105°

E-12 2 बराबर भाग

E-13 (a) हां (b) हां (c) नहीं

E-14 (a) नहीं (b) हां (c) नहीं (d) हां

6.8 संदर्भित सामग्री

गणित पाठ्यपुस्तक कक्षाओं V से VIII NCERT DELHI

टिप्पणी

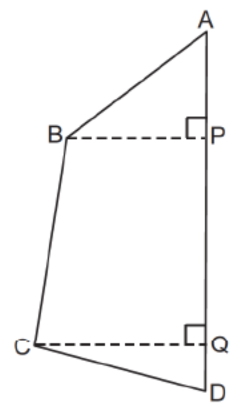
6.9 इकाई-अन्त्य अभ्यास

1. रूलर और परकार का इस्तेमाल करके, संलग्न आकृति के आकार की रचना निम्नांकित मापों के अनुसार करे

   AP = 3 सेमी   BP = 4 सेमी.   BC = 7 सेमी

   PQ = 5 सेमी   QD = 2 सेमी.   और $\overline{CQ} \perp \overline{AD}$

   $\overleftrightarrow{AD}$ को समयित रेखा मानकर एक आकृति की रचना करें।



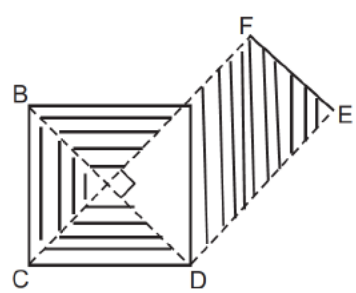
आकृति 6.92

2. संलग्न आकृति में

   AC = BD = PF = DE = 8 सेमी.

   $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle BDE$ और

   प्रत्येक समकोण है।



आकृति 6.93

सेटस्क्वेयर और स्केल का इस्तेमाल करके दिये हुये मापों के अनुसार आकार खींचिये

छायांकित क्षेत्रों (को छोड़कर) का क्षेत्रफल ज्ञात करके तुलना करें।

3. नीचे दिये टेबल के रिक्त स्थानों को भरिये

आकार	घूर्णन का केंद्र	सममिति का क्रम
सम चतुर्भुज		
समबाहु त्रिभुज		
समबाहु षष्ठभुज		
वर्ग		

4. 20 सेमी. लम्बी तार का टुकड़ा लेकर उसे निम्नांकित टेबल में निर्दिष्ट विभिन्न लम्बाई के आयतों में मोड़िये। प्रत्येक स्थित में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करके टेबल को पूरा करें।

आयत की लम्बाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
8 सेमी.		
7 सेमी.		
6 सेमी.		
5 सेमी.		

5. नीचे 3 मापों का सेट दिया गया है। इनमें से किसको 3 भुजाओं की लम्बाई के रूप में लेकर एक त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

   (a) 5.5 सेमी., 6.8 सेमी. और 7.2 सेमी.

   (b) 4.7 सेमी., 5.3 सेमी., और 10.0 सेमी.

   (c) 8.0 से.मी. 7.5 से.मी. और 9.2 सेमी.

   (d) 5.8 सेमी. 12.2 सेमी. और 6.0 सेमी.

6. रूलर और परकार का इस्तेमाल करके 52.5° माप की कोण की रचना करने में दिये गये माप का विभाजन किस प्रकार होना चाहिए?

इकाई-7 माप और मापन

संरचना

7.0 परिचय

7.1 अधिगम उद्‌देश्य

7.2 माप और मापन की अवधारणा

7.3

7.3.1 लम्बाई की माप

7.3.2 क्षेत्रफल की माप

7.3.3 आयतन की माप

7.3.4 भार की माप

7.4 मापन की मीट्रिक पद्धति

7.5 समय की माप

7.6 सारांश

7.7 आपकी प्रगति की जांच के लिए आदर्श उत्तर

7.8 संदर्भ ग्रंथ/कुछ उपयोगी पुस्तकें

7.9 अन्त्य-इकाई अभ्यास

7.0 परिचय

पूर्व की इकाईयों में हम पहले ही चर्चा कर चुके हैं कि हमारे आसपास की प्रत्येक भौतिक वस्तु के दो गुण होते हैं, आकार और रूप। आकार यह बताता है कि वस्तु दिखती कैसी हैं? हम कहते हैं ''यह वृत्त की तरह दिखाई देती है।''। यहां वृत्त शब्द रूप के बारे में बताता है। इसी प्रकार किसी मंदिर के सामने बने पत्थर की मूर्ति को देखते हैं तो कहते हैं 'यह पत्थर से बना शेर है'। यहां पर शेर शब्द वस्तु के रूप के बारे में बताता है। परन्तु जब हम कहते हैं कि किसी पृष्ठ पर खीचा गया वर्ग बहुत बड़ा है तो बड़ा शब्द आकार के बारे में बताता है। समुद्र के किनारे बना प्रकाश स्तम्भ काफी ऊंचा है, यहां ''काफी ऊंचा'' प्रकाश स्तम्भ के आकार के बारे में बताता है।

टिप्पणी

निम्नांकित कथनों पर विचार करें

> ''सर्कस के दो जोकरों में से एक बहुत बड़ा है और दूसरा बहुत ही छोटा है।
>
> क्या हम जोकर के छोटेपन के विस्तार को बता सकते हैं? क्या हम जोकर के विशालता के विस्तार के बारे में कुछ कह सकते हैं? सटीकता के साथ नहीं कह सकते हैं।
>
> एक वस्तु का वह गुण जो हमें उसकी विशालता या छोटेपन को जानने में हमारी सहायता करता है वह उसकी माप है।

विभिन्न वस्तुओं के एक ही प्रकार के गुणों का एक निश्चित माप होता है और अन्य गुणों जो कि चर्चा किये गये गुणों से भिन्न है, कि माप भी भिन्न-भिन्न होती है। उदाहरण के लिए एक आकृति एक समतल पर कितना जगह घेरती है वह उसके क्षेत्रफल की माप है जबकि एक ठोस वस्तु को पानी से भरे बर्तन में डुबाने पर जितना पानी हटता है वह उसकी आयतन की माप है।

इस इकाई में हम विभिन्न प्रकार के मापन, उन मापनों की इकाई और पैमानों तथा विभिन्न भौतिक वस्तुओं के विभिन्न आयामों को मापने के तरीके के बारे में चर्चा करेंगे।

इस इकाई का अध्ययन करने में आपको लगभग 7 घंटे का समय लगेगा।

7.1 अधिगम उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप सक्षम होंगे

- वस्तुओं के विभिन्न पहलुओं के मापन की इकाइयों और उनके मापन विधियों के बारे में जानकारी प्राप्त करने में।
- दैनिक जीवन की विभिन्न क्रियाकलापों में मापन की विभिन्न इकाईयों के उपयोग करने में
- लम्बाई, क्षेत्रफल, आयतन, धारिता, भार और समय से संबंधित गणना करने में।

7.2 मापन और माप

सभी मापन से परिचित है, हमारे दैनिक जीवन में हमें एक वस्तु या दूसरी वस्तु या चीज को मापने की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरण के लिए कमीज बनाने के लिए आवश्यक कपड़े की लम्बाई नापना, बाजार से सब्जी या किराने की दुकान से सामान खरीदते समय उनका वजन तौलना, पानी की मात्रा जिसे एक व्यक्ति प्रतिदिन पीता हो, एक कक्षा के बच्चों की ऊंचाई और वजन ज्ञात करना, घर से विद्यालय पहुंचने तक लगा समय, कक्षा-कक्ष या घर के कमरे का आकार, विद्यालय के बगीचे का क्षेत्रफल, आपके शरीर का तापमान आदि इन सभी स्थितियों

में हम कुछ माप कर रहे है। इन स्थितियों में मापन का अर्थ उनके गुणों को मात्रात्मक रूप में व्यक्त करना है जिसे किसी इकाई से तुलना की जा सकती है। दूसरों शब्दों में मापन आकार का परिमाणन करना है या वस्तु के आकार का निश्चित पहलुओं जैसे लंबाई, आयतन का परिमाणन करना है।

मापन संख्याओं का अनुप्रयोग करना है, और बच्चों के लिए सहायक है जिसके द्वारा बच्चे यह जान पाते हैं कि गणित दिन प्रतिदिन के जीवन में उपयोगी है और कई गणितीय अवधारणाओं और कौशलों का विकास करता है।

प्राथमिक कक्षाओं में बच्चों को कई प्रकार के मापन के बारे में सीखना आवश्यक है। लम्बाई क्षेत्रफल, आयतन, समय के मापन को प्राथमिक विद्यालय के पाठ्यक्रम में शामिल किया गया है। परन्तु 7 से 9 वर्ष के बच्चों के लिए ये अमूर्त लगता है। इसलिए एक अध्यापक के रूप में आप बच्चों को इन अवधारणाओं से परिचित करायें।

एक बच्चा अपने आसपास के वातावरण को अनुभव करने के प्रारम्भिक अवस्था से त्रिआयामी ठोस वस्तुओं से परिचित है जैसे फल, खिलौने, रंगीन ब्लाक, घनों, घनाभ, माचिस की डिब्बी, बेलनाकार ठोस जैसे चाक, बेलन आदि त्रिआयामी वस्तुओं को व्यवस्थित या प्रबंध करके द्विआयामी वस्तुओं के बारे में जानकारी प्राप्त करता है। घन या घनाभ को व्यवस्थित या प्रबंध करने से या इन वस्तुओं को समतल कागज पर आरेखित करने से विद्यार्थी उसके तलों को पहचानता है और यह भी पहचानता है कि इसे किसी टेबल के तल पर फैलाया जा सकता है। त्रिआयामी वस्तुओं के तलों का अवलोकन करके या द्विआयामी तल पर प्रदर्शित करके (जैसे त्रिआयामी वस्तुओं को द्विआयामी तल पर आरेखित करना) बच्चा द्विआयामी की विशेषताओं को अनुभव करता है। आगे त्रिआयामी ठोसों के किनारों का अवलोकन करके और द्विआयामी आकृति की भुजाओं का अवलोकन करके और कुछ वस्तुओं जैसे पतला धागा, तार के अवलोकन विद्यार्थियों को एक आयामी वस्तुओं के बारे अनुभव प्राप्त होता है।

बच्चों को विभिन्न वस्तुओं को उनकी समानता/विशेषताओं के आधार पर अलग-अलग समूह में रखने के लिए क्रियाकलापों में और 3-D और 2-D वस्तुओं की रेखाकृति बनाने में संलग्न करके आप उन वस्तुओं की विमाओं संबंधी प्रत्यय को सशक्त करने में मदद कर सकते हैं। ऐसे क्रियाकलापों से, विद्यार्थी एक विमीय वस्तुओं से एक अंकीय अर्थात् लम्बाई से सम्बद्ध, द्विविमिय वस्तुओं से द्विअंकीय अर्थात् लम्बाई तथा चौड़ाई से सम्बद्ध, और त्रिविमिय वस्तुओं से लम्बाई, चौड़ाई, और ऊंचाई (मोटाई) से संबंद्ध अवधारणा का निर्माण कर पायेंगे। विद्यार्थियों को इस प्रकार के क्रियाकलापों में विभिन्न प्रतिरूपों, विभिन्न आकृतियों और आकारों के साथ संलिप्त करने से विद्यार्थियों की लम्बाई, क्षेत्रफल, आयतन और उनके मापन के प्रति समझ को विकसित करने में सहायता मिलेगी।

निम्न मापक (मानक इकाई) जो कि साधारणत: प्रयोग किये जाते हैं तथा जिन्हें प्राथमिक विद्यालय के विद्यार्थी विभिन्न क्रियाकलापों तथा वास्तविक जीवन के अनुभवों से अनुभूत कर सकता है। अगले खण्ड में, हम इन्हीं मापकों की विस्तार से चर्चा करेंगे।