அத்தியாயம் **11**

தொகை நுண்கணிதம்
INTEGRAL CALCULUS

JZQ56S

"குறியீடுகள் புதிய கண்டுபிடிப்புகளை எளிமையாக்குகின்றன. வியத்தகு வகையில் இவை சிந்தனையை எளிமையாக்குகின்றன"
- லிபினிட்ஸ்

11.1 அறிமுகம் (Introduction)

நியூட்டன்

லிபினிட்ஸ்

காட்ஃபிரைட் வில்ஹெல்ம் லிபினிட்ஸ் (1646–1716) மற்றும் சர் ஐசக் நியூட்டன் (1643–1727) ஆகியோர் 17–ஆம் நூற்றாண்டின் மத்தியில் தனித்தனியாக நுண்கணிதத்தை கண்டுபிடித்தனர். தத்துவஞானி, கணிதவியலாளர், அரசியல் ஆலோசகர், மற்றும் தர்க்கவியலாளர் எனப் போற்றப்பட்ட ஜெர்மானிய நாட்டவரான லிபினிட்ஸ், வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் நுண்கணிதத்தைத் தனித்துவமாக கண்டுபிடித்தார். இதே காலக்கட்டத்தில் இங்கிலாந்து நாட்டைச் சார்ந்த சர் ஐசக் நியூட்டன் ஒரு வளைவரையின் கீழ் உள்ள பரப்பினைக் காண நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை உருவாக்கினார். நியூட்டன் கணிதத்தோடு நிற்காமல், ஒளியியல் மற்றும் புவிஈர்ப்பு ஆகியவற்றின் கோட்பாடுகளையும் உருவாக்கினார்.

வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் இல்லாமல் இவ்வுலகத்தை நம்மால் கற்பனை கூடச் செய்ய இயலாது. கணிதத்தின் வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் ஆகிய இரண்டு அடிப்படைக் கூறுகளின் பயன்பாடுகளால் இந்த நூற்றாண்டில் அறிவியல் வளர்ச்சி குறிப்பிடத்தக்க அளவில் மேம்பட்டு இருப்பதைக் காணலாம். இயற்பியல், வேதியியல், பொறியியல், வானியல், கனிமவியல், உயிரியல் மற்றும் சமூக அறிவியலில் ஏற்படும் பல்வேறு வகையான பிரச்சனைகளின் தீர்வுகளைக் காண்பதற்கு மேற்கூறிய இரண்டு அடிப்படைக் கூறுகளின் பயன்பாடுகள் தவிர்க்க முடியாத ஒன்றாகும்.

நுண்கணிதம் கொள்கை அளவில் இருவகை வடிவியல் கணக்குகளைப் பற்றியது.

(i) ஒரு வளைவரையின் தொடுகோட்டின் **சாய்வினை** எல்லை காணும் முறையில் கற்பதை **வகையிடல்** என்கிறோம்.

(ii) ஒரு வளைவரையின் கீழ் அமைந்துள்ள பகுதியின் **பரப்பளவினை** எல்லை காணும் முறையில் கற்பதைத் **தொகையிடல்** என்கிறோம்.

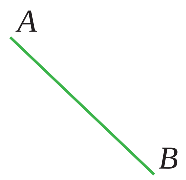
நாம் 9 மற்றும் 10 ஆகிய அத்தியாயங்களில் வகை நுண்கணிதத்தைப் படித்துள்ளோம். இந்த அத்தியாயத்தில் தொகையிடலுக்கான சில அடிப்படை வழிமுறைகளைக் காண்போம்.

கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ள சில எளிமையான நடைமுறைச் சூழ்நிலைகளைக் கொள்வோம்

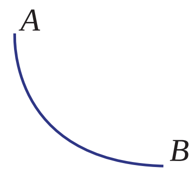
சூழ்நிலை 1

A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளுக்கிடையேயான (படம் 11.1(a)), மீச்சிறு தூரம் அவ்விரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டாகும். ஒரு துகளானது A யிலிருந்து B–க்கு (செங்குத்தாக அமையாத) வழுக்கிச் செல்லும்போது எடுத்துக்கொள்ளும் மிகக்குறைந்த நேரம் கொண்ட பாதையைக் காண முற்படுவதாகக் கொள்வோம். பெரும்பாலானோர் மீச்சிறு தூரம் கொண்ட AB என்ற நேர்க்கோட்டு வழியாக வந்தால் (படம் 11.1(a)) எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் மீச்சிறு நேரம் என நம்புகின்றனர்.

05_11 Integral Calculus.indd 194 25-03-2019 13:52:15



A-க்கும் B-க்கும்
குறைந்த தூரம் உடைய பாதை
படம் 11.1 (a)

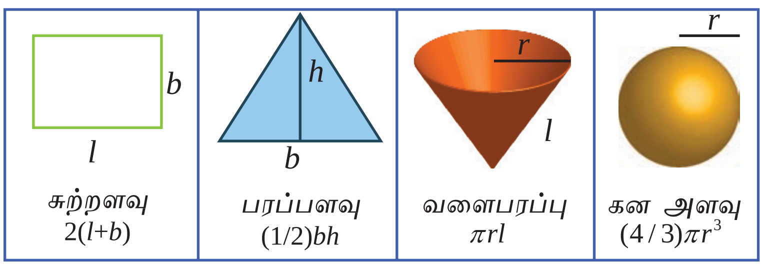


A-க்கும் B-க்கும்
குறைந்த நேரம் உடைய பாதை
படம் 11.1 (b)

ஆனால், *A* யையும் *B* யையும் இணைக்கும் நேர்க்கோடு மீச்சிறு நேரம் கொண்ட பாதையாக இருக்காது. ஏனெனில் *A* க்கு அருகில் அதிக சாய்வு கொண்ட வளைவரையில் (படம் 11.1 (b)) இயங்கும் திசைவேகமானது நேர்க் கோட்டில் (படம் 11.1 (a)) இயங்கும் திசைவேகத்தை விட அதிகமாக இருக்கும். இந்த வளைவரையின் பாதை மிக நீளமானதாக இருந்தபோதிலும், இந்தப் பாதையை அதிவேகமாக மிகக்குறைந்த நேரத்தில் கடக்கலாம். நுண்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தித் இக்கணக்கிற்கான தீர்வு காணலாம் இது 'பிராகிஸ்ட்ஸ்டோக்ரோன் (Brachistochrone)' கணக்கு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

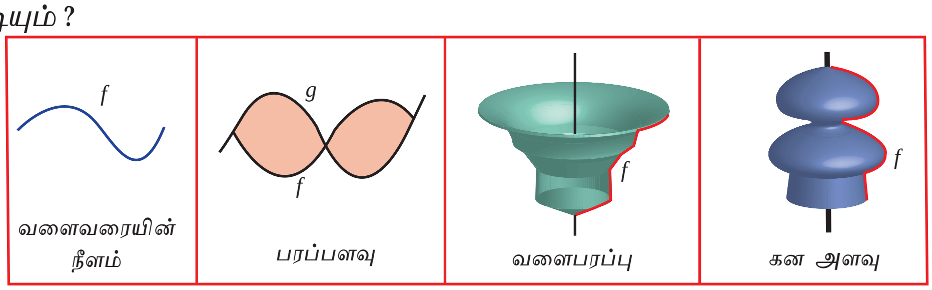
சூழ்நிலை 2

ஆரம்ப வடிவியலில் அறியப்பட்ட சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் ஒழுங்கான வடிவங்களின் அளவீடுகளைக் காண்பதைப் பற்றி ஏற்கனவே நாம் படித்துள்ளோம்.



படம் 11.2 (a)

பின்வரும் வரைபடங்களினால் குறிப்பிடப்பட்ட அளவீடுகளை, சார்புகளைக் கொண்டு எவ்வாறு கணக்கிட முடியும் ?



படம் 11.2 (b)

இந்தக் கணக்குகள் காண்பதற்கு கடினமாக இருந்த போதிலும் நுண்கணிதத் தொகையிடல் மூலம் இவற்றை எளிதாக தீர்க்கலாம்.

சூழ்நிலை 3

மாணவர் ஒருவர் தன் மோட்டார் சைக்கிளில் 24 மீ/வினாடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும்போது, குறிப்பிட்ட தருணத்தில் தனக்கு முன்பாக 40 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கும் தடுப்பின் மீது மோதலைத் தவிர்க்க வாகனத்தை நிறுத்த வேண்டியுள்ளது. உடனடியாகத் தன்னுடைய வாகனத்தை 8 மீ/வினாடி^{2} எதிர் முடுக்கத்தில் வேகத்தைக் குறைக்கிறார் எனில் வாகனம் தடுப்பின் மீது மோதுவதற்கு முன் நிற்குமா ?

படம் 11.3

05_11 Integral Calculus.indd 195
25-03-2019 13:52:16

நம் அன்றாட வாழ்கையில் இயற்கையாகவே நிகழும் பல்வேறு நிகழ்வுகளை நாம் பார்ப்போம்.

- ♦ எந்த வேகத்தில் மேல் நோக்கி உந்தப்படும் ஒரு செயற்கைகோள் மீண்டும் பூமியை நோக்கித் திரும்பாது?
- ♦ கொடுக்கப்பட்டுள்ள சுற்றளவைக் (P) கொண்ட இருசமபக்க முக்கோணத்தை உள்ளடக்கிய சிறிய வட்டத்தகட்டின் ஆரம் எவ்வளவு?
- ♦ 2r ஆரம் கொண்ட திண்மக்கோளத்தின், மையத்திலிருந்து r ஆரம் கொண்ட ஒரு துளையினை உருவாக்கினால் வெளியேற்றப்படும் துகளின் கன அளவு எவ்வளவு?
- ♦ கிருமிகளின் வளர்ச்சி விகிதம் அப்போதைய தொகையைப் பொறுத்து மாறுபடுகிறது மற்றும் அதன் வளர்ச்சி ஒரு மணி நேரத்தில் இரு மடங்காகிறது எனில் இரண்டு மணிநேரம் கழித்து அதன் வளர்ச்சி எவ்வளவாக இருக்கும்?

மேற்கூறிய நிகழ்வுகளுக்குத் தொகையிடல் விடையளிக்கிறது.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

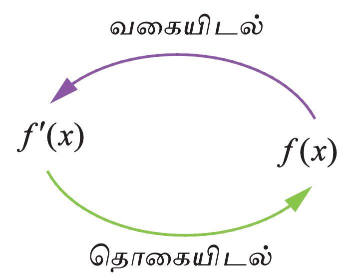
- அறுதியிடப்படாத தொகையிடலின் வரையறையை வகையிடலின் எதிர்ச்செயலாக்கமாக புரிந்துகொள்ளுதல்
- மாறிலியின் மடங்குகள், கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் ஆகிய அடிப்படைச் சார்புகளின் அறுதியிடப்படாத தொகையினைக் கண்டறிதல்
- சேர்ப்புச் சார்புகளின் தொகையினைக் காணப் பொருத்தமான வழி முறைகளைப் பயன்படுத்துதல்
- ஒரு சார்பின் மாறுவீதம் கொடுக்கப்பட்டால் அச்சார்பினைத் தொகையிடல் மூலம் காணல்

ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

11.2 நியூட்டன்-லிபினிட்ஸ் தொகையிடல் (Newton-Leibnitz Integral)

தொகையிடல் நுண்கணிதம் முக்கியமாக அறுதியிடப்படாத தொகை (indefinite integral) மற்றும் வரையறுத்த தொகை (definite integral) எனப் பிரிக்கப்படுகிறது. இப்பாடப்பகுதியில் அறுதியிடப்படாத தொகையை அதன் வகையிடலில் இருந்து பெறப்படும் சார்புகளின் மூலமாகப் படிக்கிறோம்.

$(+,-)$, $(\times,\div)$, $\left((\;)^n, \sqrt[n]{\;}\right)$ போன்ற எதிர்மறைச் செயல்முறை ஜோடிகளைப் பற்றி நாம் ஏற்கனவே நன்கு அறிந்துள்ளோம். இதேபோல் தொகையிடலும் வகையிடலும் $\left(d, \int\right)$ கூட ஒன்றுக்கொன்று எதிர்மறைச் செயல்முறைகளின் ஜோடியாகும். வகையிடலின் எதிர்மறைச் செயல்முறையை 'எதிர் வகையிடல்' என அழைப்போம்.



படம் 11.4

வரையறை 11.1

I என்னும் இடைவெளியில் ஒவ்வொரு x-க்கும் $F'(x) = f(x)$ என இருந்தால் $F(x)$ என்பது I-ன் மீதான $f(x)$ -ன் **எதிர்மறை வகையிடல்** (நியூட்டன்-லிபினிட்ஸ் தொகையிடல்) எனப்படும்.

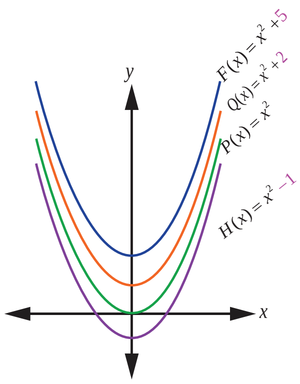
05_11 Integral Calculus.indd 196 25-03-2019 13:52:18

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.1

$F(x) = x^2 + 5$ எனில், $F'(x) = 2x$.

$f(x) = 2x$, என வரையறுத்தால், $f(x)$ என்பது $F(x)$-ன் வகைக்கெழு எனவும், $F(x)$ என்பது $f(x)$-ன் எதிர் வகைக்கெழு எனவும் அழைக்கப்படும்.

பின்வரும் அட்டவணையைக் காண்க.



படம் 11.5

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$	$f(x) = 2x$ - ன் எதிர் வகையீடு
$P(x) = x^2 + 0$ $Q(x) = x^2 + 2$ $H(x) = x^2 - 1$	$P'(x) = 2x$ $Q'(x) = 2x$ $H'(x) = 2x$ } $f(x) = 2x$	$F(x) = x^2 + ?$

$F(x), P(x), Q(x)$ மற்றும் $H(x)$ ஆகியவற்றின் வகையிடல் $f(x)$ எனப் பார்த்தோம். ஆனால் $f(x) = 2x$-ன் எதிர் வகையிடல் ஒருமைத்தன்மையற்றது. அதாவது $f(x)$-ன் எதிர் வகையிடல்கள் எண்ணற்ற பல சார்புகளின் தொகுப்பாகும்.

தேற்றம் 11.1

ஒரு இடைவெளி I-ல் $F(x)$ என்பது $f(x)$-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட எதிர் வகையிடல் எனில் I-ல், $f(x)$-ன் ஒவ்வொரு எதிர் வகையிடலும் $\int f(x)dx = F(x) + c$ எனக் கிடைக்கப்பெறும். இங்கு c என்பது தன்னிச்சை மாறிலி (arbitrary constant) மற்றும் $f(x)$-ன் அனைத்து எதிர் வகையிடலையும் c-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் மூலம் காணலாம்.

சார்பு $f(x)$-ஐ **தொகைச் சார்பு** (Integrand) என அழைக்கிறோம்.

dx -ல் உள்ள **x**-ஐ **தொகையிடல் மாறி** அல்லது **தொகையீட்டு மாறி** (Integrator) என அழைக்கலாம். தொகை காணும் முறையைத் **தொகையிடல்** அல்லது **எதிர் வகையிடல்** என அழைக்கலாம்.

Sum என்ற சொல்லின் முதல் எழுத்தான S ஆனது மேலும் கீழுமாக நீட்டப்பட்டு $\int$ என்ற வடிவம் பெற்றுத் தொகையீட்டுக் குறியானது.

வகையிடலை உள்ளடக்கிய கணக்குகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிபந்தனையைப் பூர்த்தி செய்யக்கூடிய எதிர் வகையீட்டின் தீர்வைக் காண விரும்புகிறோம். இக் குறிப்பிட்ட நிபந்தனையைத் தொடக்க நிபந்தனை அல்லது எல்லை நிபந்தனை என அழைக்கிறோம்.

எடுத்துகாட்டாக, $\frac{dy}{dx}$-ஐ உள்ளடக்கிய சமன்பாட்டில் தொடக்க நிபந்தனைகளாக $x = x_1$ மற்றும் $y = y_1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், அதன் எதிர் வகையிடலைக் கண்டு, அதில் அமைந்துள்ள தன்னிச்சை மாறிலியான c-ஐ $x = x_1$ மற்றும் $y = y_1$ எனப் பிரதியிட்டுக் காணலாம்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 11.2

$x = 2$ எனும்போது $y = 10$ என்ற ஆரம்ப நிபந்தனையுடன் கூடிய $\frac{dy}{dx} = 2x$ எனும் சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும் ஒரு குறிப்பிட்ட எதிர் வகையிடலைக் காண விழைகிறோம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின்படி,

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

05_11 Integral Calculus.indd 197 25-03-2019 13:52:34

$$y = \int 2x\,dx$$

$$y = x^2 + c$$

$y = 10$ மற்றும் $x = 2$, என மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால்

$$10 = 2^2 + c \Rightarrow c = 6$$

$c = 6$ எனப் பிரதியிட $y = x^2 + 6$ என்ற தேவையான எதிர்வகையிடல் சார்பைப் பெறலாம்.

11.3 தொகையிடலின் அடிப்படை விதிகள் (Basic Rules of Integration)

அடிப்படைச் சூத்திரங்கள்:

தொகையிடலானது வகையிடலின் எதிர்மறைச் செயல்முறையானதால், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடிப்படைத் தொகையிடலின் சூத்திரங்களை அதற்கேற்ற வகையிடலின் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி வருவிக்கலாம்.

வகையிடல்	எதிர்வகையிடல்
$\frac{d}{dx}(c) = 0$, c ஒரு மாறிலி	$\int 0\,dx = c$, c ஒரு மாறிலி
$\frac{d}{dx}(kx) = k$, k ஒரு மாறிலி	$\int k\,dx = kx + c$ c ஒரு தன்னிச்சை மாறிலி
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$ (அடுக்கு விதி)
$\frac{d}{dx}(\log x) = \left(\frac{1}{x}\right)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

05_11 Integral Calculus.indd 198 25-03-2019 13:52:43

$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+c$
$\frac{d}{dx}(-\text{cosec}x)=\text{cosec}x\cot x$	$\int \text{cosec}x\cot x\,dx=-\text{cosec}x+c$
$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x dx=e^x+c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right)=a^x$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$

எடுத்துக்காட்டு 11.1

தொகையிடுக :

(i) x^{10} (ii) $\frac{1}{x^{10}}$ (iii) $\sqrt{x}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

தீர்வு

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1.$

$n=10$ எனப்பிரதியிட,

$$\int x^{10}dx = \frac{x^{10+1}}{10+1}+c=\frac{x^{11}}{11}+c$$

(ii) $\int \frac{1}{x^{10}}dx=\int x^{-10}\,dx=\frac{x^{-10+1}}{-10+1}+c=-\frac{1}{9x^9}+c$

(iii) $\int \sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=2\sqrt{x}+c$

05_11 Integral Calculus.indd 199 25-03-2019 13:52:53

எடுத்துக்காட்டு 11.2

தொகையிடுக :

(i) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (ii) $\frac{\cot x}{\sin x}$ (iii) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

தீர்வு

(i) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

(ii) $\int \frac{\cot x}{\sin x} dx = \int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(iii) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x} dx = \int \tan x \sec x \, dx = \sec x + c$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

எடுத்துக்காட்டு 11.3

தொகையிடுக :

(i) $\frac{1}{e^{-x}}$ (ii) $\frac{x^2}{x^3}$ (iii) $\frac{1}{x^3}$ (iv) $\frac{1}{1+x^2}$

தீர்வு

(i) $\int \frac{1}{e^{-x}} \, dx = \int e^x dx = e^x + c$

(ii) $\int \frac{x^2}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

(iii) $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

பயிற்சி 11.1

கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக :

(1) (i) x^{11} (ii) $\frac{1}{x^7}$ (iii) $\sqrt[3]{x^4}$ (iv) $(x^5)^{\frac{1}{8}}$

(2) (i) $\frac{1}{\sin^2 x}$ (ii) $\frac{\tan x}{\cos x}$ (iii) $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ (iv) $\frac{1}{\cos^2 x}$

(3) (i) 12^3 (ii) $\frac{x^{24}}{x^{25}}$ (iii) e^x

(4) (i) $(1+x^2)^{-1}$ (ii) $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

11.4 $\int f(ax+b)dx$ (நேரிய வடிவிலுள்ள தொகைச்சார்பு) வடிவம்

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^{10}}{10}\right] = (x-a)^9 \Rightarrow \int (x-a)^9 \, dx = \frac{(x-a)^{10}}{10} + c$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(x+k)] = \cos(x+k) \Rightarrow \int \cos(x+k)dx = \sin(x+k) + c$$

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து நேரிய வடிவம் கொண்ட தன்னிச்சை மாறி x உடன் எந்த ஒரு மாறிலியைக் கூட்டினாலும் அல்லது கழித்தாலும் அடிப்படைத் தொகையீட்டுச் சூத்திரத்தில் எவ்வித மாற்றமும் ஏற்படுவதில்லை என்பது தெளிவாகிறது.

05_11 Integral Calculus.indd 200 25-03-2019 13:53:05

ஆனால்,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{l}(e^{lx+m})\right] = e^{lx+m} \Rightarrow \int e^{lx+m}dx = \frac{1}{l}e^{(lx+m)}+c$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right] = \cos(ax+b) \Rightarrow \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$$

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் நாம் அறிவது யாதெனில் மாறி x உடன் ஏதேனும் ஒரு மாறிலியைப் பெருக்கினால் அடிப்படைத் தொகையீட்டு சூத்திரத்தை அதே மாறிலியால் வகுத்துத் தேவையான சார்புக்குரிய தொகையைப் பெற முடியும்.

$$\int f(x)dx = g(x)+c \text{ எனில், } \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}g(ax+b)+c$$

மேலுள்ள சூத்திரத்தைப் பிரதியிடல் மூலமும் வருவிக்கலாம் என்பதனைப் பின்னர் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 11.4

கீழ்காண்பவற்றின் மதிப்பைக் காண்க :

(i) $\int (4x+5)^6\, dx$ (ii) $\int \sqrt{(15-2x)}\, dx$ (iii) $\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx$

தீர்வு

(i) $\int (4x+5)^6\, dx = \frac{1}{4}\frac{(4x+5)^{6+1}}{6+1} = \frac{(4x+5)^7}{28}+c$

(ii) $\int \sqrt{(15-2x)}\, dx = \int (15-2x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left(\frac{1}{-2}\right)\frac{(15-2x)^{\frac{1}{2}+1}}{(1/2)+1} = -\frac{(15-2x)^{\frac{3}{2}}}{3}+c$

(iii) $\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx = \int (3x+7)^{-4}\, dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^{-4+1}}{-4+1} = -\frac{1}{9(3x+7)^3}+c$

எடுத்துக்காட்டு 11.5

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\sin(2x+4)$ (ii) $\sec^2(3+4x)$ (iii) $\operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)$

தீர்வு

(i) $\int \sin(2x+4)\, dx = \left(\frac{1}{2}\right)(-\cos(2x+4))+c = -\frac{1}{2}\cos(2x+4)+c$

(ii) $\int \sec^2(3+4x)\, dx = \frac{1}{4}\tan(3+4x)+c$

(iii) $\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\, dx = \left(\frac{1}{a}\right)(-\operatorname{cosec}(ax+b))+c = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b)+c$

எடுத்துக்காட்டு 11.6

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) e^{3x} (ii) e^{5-4x} (iii) $\frac{1}{(3x-2)}$ (iv) $\frac{1}{(5-4x)}$

தீர்வு

(i) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$ (ii) $\int e^{5-4x}\,dx = -\frac{e^{5-4x}}{4} + c$

(iii) $\int \frac{1}{(3x-2)}\,dx = \frac{1}{3}\log|(3x-2)| + c$ (iv) $\int \frac{1}{(5-4x)}\,dx = -\frac{1}{4}\log|(5-4x)| + c$

எடுத்துக்காட்டு 11.7

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\frac{1}{1+(2x)^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}$

தீர்வு

(i) $\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x) + c$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}\,dx = \frac{1}{9}\sin^{-1}(9x) + c$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,dx = \frac{1}{5}\sin^{-1}(5x) + c$

பயிற்சி 11.2

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) (i) $(x+5)^6$ (ii) $\frac{1}{(2-3x)^4}$ (iii) $\sqrt{3x+2}$

(2) (i) $\sin 3x$ (ii) $\cos(5-11x)$ (iii) $\operatorname{cosec}^2(5x-7)$

(3) (i) e^{3x-6} (ii) e^{8-7x} (iii) $\frac{1}{6-4x}$

(4) (i) $\sec^2 \frac{x}{5}$ (ii) $\operatorname{cosec}(5x+3)\cot(5x+3)$ (iii) $\sec(2-15x)\tan(2-15x)$

(5) (i) $\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1-81x^2}}$ (iii) $\frac{1}{1+36x^2}$

11.5 தொகையிடலின் பண்புகள்

(1) k ஒரு மாறிலி எனில், $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$ ஆகும்.

(2) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

JZZ18F

குறிப்பு 11.1

மேலே உள்ள இரண்டு பண்புகளை இணைத்துப் பின்வருமாறு விரிவுபடுத்தலாம்.

$$\int (k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x) \pm k_3 f_3(x) \pm \cdots \pm k_n f_n(x))\,dx$$

$$= k_1\int f_1(x)dx \pm k_2\int f_2(x)dx \pm k_3\int f_3(x)dx \pm \cdots \pm k_n\int f_n(x)dx.$$

அதாவது முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள சார்புகளின் நேரியல் சேர்க்கையின் தொகையிடல் அவற்றின் தொகையிடலின் நேரியல் சேர்க்கைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

05_11 Integral Calculus.indd 202 25-03-2019 13:53:26

எடுத்துக்காட்டு 11.8

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $5x^4$ (ii) $5x^2-4+\frac{7}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$ (iii) $2\cos x-4\sin x+5\sec^2 x+\text{cosec}^2 x$

தீர்வு

(i) $$\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx = 5\frac{x^{4+1}}{4+1}+c = 5\left(\frac{x^5}{5}\right)+c = x^5+c.$$

(ii) $$\int\left(5x^2-4+\frac{7}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = 5\int x^2 dx-4\int dx+7\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 5\frac{x^{2+1}}{2+1}-4x+7\log|x|+2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$= \frac{5}{3}x^3-4x+7\log|x|+4\sqrt{x}+c$$

(iii) $$\int(2\cos x-4\sin x+5\sec^2 x+\text{cosec}^2 x)dx$$

$$= 2\int\cos x\,dx-4\int\sin x\,dx+5\int\sec^2 x\,dx+\int\text{cosec}^2 x\,dx$$

$$= 2\sin x+4\cos x+5\tan x-\cot x+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.9

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\frac{12}{(4x-5)^3}+\frac{6}{3x+2}+16e^{4x+3}$ (ii) $\frac{15}{\sqrt{5x-4}}-8\cot(4x+2)\text{cosec}(4x+2)$

தீர்வு

(i) $$\int\left(\frac{12}{(4x-5)^3}+\frac{6}{3x+2}+16e^{4x+3}\right)dx$$

$$= 12\int\frac{1}{(4x-5)^3}dx+6\int\frac{1}{3x+2}dx+16\int e^{4x+3}dx$$

$$= 12\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2(4x-5)^2}\right)+6\left(\frac{1}{3}\right)\log|3x+2|+16\left(\frac{1}{4}\right)e^{4x+3}+c$$

$$= -\frac{3}{2(4x-5)^2}+2\log|3x+2|+4e^{4x+3}+c.$$

(ii) $$\int\left(\frac{15}{\sqrt{5x-4}}-8\cot(4x+2)\text{cosec}(4x+2)\right)dx$$

$$= 15\int\frac{1}{\sqrt{5x-4}}dx-8\int\cot(4x+2)\text{cosec}(4x+2)\,dx$$

$$= 15\left(\frac{1}{5}\right)(2\sqrt{5x-4})-8\left(\frac{1}{4}\right)(-\text{cosec}(4x+2))+c$$

$$= 6\sqrt{5x-4}+2\text{cosec}(4x+2)+c.$$

05_11 Integral Calculus.indd 203 25-03-2019 13:53:36

பயிற்சி 11.3

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $(x+4)^5+\frac{5}{(2-5x)^4}-\text{cosec}^2(3x-1)$

(2) $4\cos(5-2x)+9e^{3x-6}+\frac{24}{6-4x}$

(3) $\sec^2\frac{x}{5}+18\cos 2x+10\sec(5x+3)\tan(5x+3)$

(4) $\frac{8}{\sqrt{1-(4x)^2}}+\frac{27}{\sqrt{1-9x^2}}-\frac{15}{1+25x^2}$

(5) $\frac{6}{1+(3x+2)^2}-\frac{12}{\sqrt{1-(3-4x)^2}}$

(6) $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-4\right)+\frac{7}{7x+9}+e^{\frac{x}{5}+3}$

11.6 எளிய பயன்பாடுகள் (Simple applications)

இதுவரை நாம் x-ஐ தொகையீட்டு மாறியாகப் பயன்படுத்தினோம். பல நேரங்களில் தொகையிடலில் வேறுபட்ட மாறியைப் பயன்படுத்துவது அவசியமாக இருக்கும். எடுத்துகாட்டாக இயக்கச் சமன்பாட்டில் சாராமாறியாக உள்ள காலம் t ஆனது தொகையீட்டில் தொகையீட்டு மாறி t ஆக மாறும்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பொருளின் முடுக்கம் தரப்பட்டிருந்தால் அப் பொருளின் நிலை மற்றும் திசைவேகம் காண தொகையிடலை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம் என்பதனையும் மற்றும் இதுபோன்ற கணக்குகளையும் விவாதிக்க உள்ளோம். கணித ரீதியாகக் காணும் போது ஒரு சார்பின் வகையிடலில் தொடங்கி அதன் அசல் சார்பை காண்பதாகும். வீதம், வளர்ச்சி, தேய்மானம், இறுதிநிலை, மாற்றம், மாறுபாடுகள், உயர்த்துதல் மற்றும் குறைத்தல் போன்ற பொதுவான சொற்கள் வகையிடுதலைக் குறிக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 11.10

$f'(x)=3x^2-4x+5$ மற்றும் $f(1)=3$, எனில் $f(x)$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு

$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)=3x^2-4x+5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இருபுறமும் தொகையீடு காண,

$$\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-4x+5)\,dx$$
$$f(x)=x^3-2x^2+5x+c$$

$f(1)=3$ எனும் கொடுக்கப்பட்ட தகவலைப் பயன்படுத்தி, தொகை மாறிலி c -ன் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கலாம்.

$$f(1)=3\Rightarrow\ 3=(1)^3-2(1)^2+5(1)+c\Rightarrow c=-1$$

எனவே, $$f(x)=x^3-2x^2+5x-1.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.11

ஒரு தொடர்வண்டி மதுரை சந்திப்பிலிருந்து கோயம்புத்தூர் நோக்கி பிற்பகல் 3 மணிக்கு, $v(t)=20t+50$ கிமீ/மணி என்னும் திசை வேகத்தில் புறப்படுகிறது, இங்கு t ஆனது மணிகளில் கணக்கிடப்படுகிறது எனில், மாலை 5 மணிக்கு அத்தொடர் வண்டி எவ்வளவு தூரம் பயணித்திருக்கும்?

தீர்வு

நுண்கணிதப் பயன்பாட்டில், திசை வேகம் $v=\frac{ds}{dt}$ என்பது காலத்தை பொறுத்து அதன் நிலையில் மாறும் வீதம் ஆகும். இங்கு s என்பது தொலைவினைக் குறிக்கிறது. தொடர்வண்டியின் திசைவேகம்

05_11 Integral Calculus.indd 204 25-03-2019 13:53:43

$$v(t) = 20t + 50$$

ஆகவே $$\frac{ds}{dt} = 20t + 50$$

தொலைத்தூரச் சார்பு s–ஐ காண்பதற்கு வகையிடல் சார்பைத் தொகையிட வேண்டும்.

அதாவது, $s = \int (20t + 50)\, dt$

$$s = 10t^2 + 50t + c$$

காலம் பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் தொடர்வண்டி பயணித்திருக்கும் தூரம் பூஜ்ஜியமாகும். ஆரம்ப கால நிபந்தனை $t = 0$ எனும் போது $s = 0$ எனப் பயன்படுத்தித் தொகை மாறிலி c–ஐக் கணக்கிடலாம்.

$$\Rightarrow s = 10t^2 + 50t + c \quad \Rightarrow c = 0$$

எனவே, $s = 10t^2 + 50t$

2 மணி நேரத்தில் தொடர் வண்டி பயணித்த தூரம் காண $t = 2$ என $s = 10t^2 + 50t$ –ல் பிரதியிடவேண்டும்.

ஆகவே, $s = 10(2)^2 + 50(2) = 140$ கிமீ. மாலை 5 மணிக்கு அத்தொடர் வண்டி 140 கி.மீ தூரம் பயணித்திருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.12

ஒரு நபரின் உயரம் h செ.மீ மற்றும் எடை w கி.கி. அவரின் எடையின் மாறும் வீதம் உயரத்தைப் பொறுத்துத் தோராயமாக $\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், எடையை உயரத்தின் சார்பாகக் காண்க. மேலும் ஒரு நபரின் உயரம் 150 செ.மீ –ஆக இருக்கும் போது எடையைக் காண்க.

தீர்வு

உயரத்தைப் பொறுத்து எடையின் மாறுவீதம்

$$\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$$

$$w = \int 4.364 \times 10^{-5} h^2 \; dh$$

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) + c$$

உயரம் பூஜ்ஜியம் எனும்போது அந்நபரின் எடை பூஜ்ஜயமாக இருக்கும் என்பது தெளிவு. தொடக்க நிபந்தனை $h = 0$ எனும்போது $w = 0$, என்பதை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால், தொகையீட்டு மாறிலியை c–ஐக் கணக்கிடலாம்.

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) + c \Rightarrow c = 0$$

ஒரு நபரின் எடை மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றுக்கிடையேயான தொடர்பானது

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right)$$ ஆகும்

h =150 செ.மீ எனில், $w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{150^3}{3}\right)$

உயரம் h =150 செ.மீ எனும்போது, எடை தோராயமாக $w = 49$ கி.கி ஆகும்.

05_11 Integral Calculus.indd 205 25-03-2019 13:53:52

எடுத்துக்காட்டு 11.13

ஒரு மரத்தின் வளர்ச்சி t ஆண்டுகளில் $\frac{18}{\sqrt{t}}$ செ.மீ/ஆண்டு எனும் வீதத்தில் வளர்கிறது. $t = 0$ என இருக்கும்போது உயரம் 5 செ.மீ இருக்கும் என எடுத்துக்கொண்டால்.

(அ) நான்கு ஆண்டிற்குப் பிறகு மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

(ஆ) எத்தனை ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு மரத்தின் உயரம் 149 செ.மீ வளர்ந்து இருக்கும்.

தீர்வு

காலம் t -ஐ பொறுத்து உயரம் h -ன் மாறு வீதம் என்பது காலம் t-ஐ பொறுத்து h -ஐ வகையீடு செய்வதாகும்.

$$\text{எனவே, } \frac{dh}{dt} = \frac{18}{\sqrt{t}} = 18t^{-\frac{1}{2}}$$

எனவே உயரத்திற்கான பொது வடிவம் பெறுவதற்கு மேலே உள்ள சமன்பாட்டைத் தொகையிடவேண்டும்.

$$h = \int 18t^{-\frac{1}{2}}dt = 18(2t^{\frac{1}{2}}) + c = 36\sqrt{t} + c$$

$t = 0$ என இருக்கும்போது உயரம் 5 செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$5 = 0 + c \Rightarrow c = 5$$

$$h = 36\sqrt{t} + 5.$$

(i) நான்கு ஆண்டிற்குப் பிறகு மரத்தின் உயரத்தை நாம் காண வேண்டும்.

$t = 4$ எனில்,

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow h = 36\sqrt{4} + 5 = 77$$

நான்கு ஆண்டிற்குப் பிறகு மரத்தின் உயரம் 77 செ.மீ ஆக இருக்கும்.

(ii) $h = 149$ செ.மீ எனில், t -ஐ காண வேண்டும்.

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow 149 = 36\sqrt{t} + 5$$

$$\sqrt{t} = \frac{149 - 5}{36} = 4 \Rightarrow t = 16$$

எனவே உயரம் 149 செ.மீ வளர, மரம் 16 ஆண்டுகள் எடுத்துக்கொள்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.14

மாணவன் ஒருவர் தன் மோட்டார் சைக்கிளில் 24 மீ/வினாடி வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கும்போது, குறிப்பிட்ட தருணத்தில் தனக்கு முன்பாக 40 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கும் தடுப்பின் மீது மோதலைத் தவிர்க்க வாகனத்தை நிறுத்த வேண்டியுள்ளது. உடனடியாகத் தன்னுடைய வாகனத்தை 8 மீ / வினாடி^{2} எதிர் முடுக்கத்தில் வேகத்தைக் குறைக்கிறார் எனில் வாகனம் தடுப்பின் மீது மோதுவதற்கு முன் நிற்குமா ?

தீர்வு

மோட்டார் சைக்கிளின் திசைவேகம் v எனவும் மற்றும் முடுக்கம் a எனவும் எடுத்து கொள்வோம், s என்பது தூரத்தை குறிக்கிறது. நுண்கணிதத்தில் v -ஐ $v = \frac{ds}{dt}$ எனவும் a-ஐ $a = \frac{dv}{dt}$

05_11 Integral Calculus.indd 206 25-03-2019 13:53:56

எனவும் குறிப்போம். மோட்டார் சைக்கிளின் வேகத்தைக் குறைக்கும் போது அதன் முடுக்கம் மோட்டார் சைக்கிளின் இயக்கத்தின் எதிர் திசையில் செயல்படுகிறது. ஆகையால் முடுக்கத்தைக் குறைக் குறியீட்டுடன் எழுதுவோம்.

மோட்டார் சைக்கிளின் எதிர்முடுக்கம் 8 மீ / வினாடி^{2} எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$\text{எனவே, } a = \frac{dv}{dt} = -8 \text{ மீ / வினாடி}^2$$

$$v = \int a\,dt = \int -8dt = -8t + c_1$$

$$v = -8t + c_1.$$

பிரேக்கைப் பயன்படுத்தும்போது

$$t = 0, \text{ மற்றும் } v = 24 \text{ மீ/வி.}$$

$$24 = -8(0) + c_1 \Rightarrow c_1 = 24$$

எனவே, $v = -8t + 24.$

அதாவது, $\dfrac{ds}{dt} = -8t + 24.$

தூரம் கேட்கப்பட்டுள்ளதால் அதனைக் காண்பதற்காக மேலும் ஒருமுறை தொகையீடு காண வேண்டியது அவசியமாகிறது.

$$s = \int v\,dt = \int (-8t + 24)dt$$

$$s = -4t^2 + 24t + c_2$$

c_2 –ஐ தீர்மானிக்க, பிரேக்கை எங்கே உபயோகிக்கின்றோமோ, அங்கிருந்து நிறுத்தும் தூரம் s அளவிடப்படுகிறது. அதாவது, $t = 0, s = 0$ எனில்

$$s = -4t^2 + 24t + c_2 \Rightarrow 0 = -4(0)^2 + 24(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$s = -4t^2 + 24t$$

பிரேக்கைப் பயன்படுத்திய பின்பு மோட்டார் சைக்கிள் நிற்பதற்கான நேரம் அறிந்திருந்தால், நிறுத்துதல் தூரத்தை மதிப்பிடலாம். திசைவேகச் சமன்பாட்டிலிருந்து நேரம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

வாகனம் நிறுத்தப்படும் போது, $v = 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow v = -8t + 24 \quad \Rightarrow 0 = -8t + 24 \quad \Rightarrow t = 3.$

$t = 3$, எனில்,

$$s = -4t^2 + 24t \Rightarrow s = -4(3)^2 + 24(3)$$

$$s = 36 \text{ மீட்டர்} < 40 \text{ மீட்டர்}$$

எனவே வாகனம் தடுப்பிற்கு 4 மீட்டர் முன்பே நிற்கும்.

பயிற்சி 11.4

(1) $f'(x) = 4x - 5$ மற்றும் $f(2) = 1$ எனில், $f(x)$ காண்க.

(2) $f'(x) = 9x^2 - 6x$ மற்றும் $f(0) = -3$ எனில் $f(x)$ காண்க.

(3) $f''(x) = 12x - 6$ மற்றும் $f(1) = 30$ $f'(1) = 5$ எனில் $f(x)$ காண்க.

(4) ஒரு பந்து 39.2 மீ/வினாடி ஆரம்ப திசைவேகத்தில் தரையிலிருந்து மேல்நோக்கி செங்குத்தாக எறியப்படுகிறது. இங்கு முடுக்கத்தை ஈர்ப்பு விசையைப் பொறுத்து மட்டும் கருதும்போது

(அ) எவ்வளவு நேரம் கழித்துப் பந்து தரையை வந்து மோதும்.

(ஆ) எந்த வேகத்தில் பந்தானது தரையை மோதும்.

(இ) பந்தானது எவ்வளவு தூரம் மேல் நோக்கிச் செல்லும் என்பதனைக் காண்க.

(5) ஒருவருக்கு ஏற்பட்ட காயம் ஆனது $-\frac{6}{(t+2)^2}$ செமீ^{2}/ நாள், $0 < t \le 8$, என்ற வீதத்தில் ஞாயிற்றுக்கிழமை முதல் காயத்தின் பரப்பு குறைகிறது. திங்கட்கிழமை அன்று காயப்பகுதியின் பரப்பு 1.4 செமீ^{2} எனில் (இங்கு t என்பது நாட்களைக் குறிக்கிறது)

(அ) ஞாயிற்றுக்கிழமையன்று காயப்பகுதியின் பரப்பளவு எவ்வளவாக இருந்திருக்கும் ?

(ஆ) இதே வீதத்தில் தொடர்ந்து குணமாகிக் கொண்டிருக்கும் போது வியாழக்கிழமையன்று எதிர்பார்க்கும் காயப் பகுதியின் பரப்பு எவ்வளவு?

11.7 தொகை காண வழிமுறைகள்(Methods of Integration)

வகையிடுதலைப் போன்று தொகையிடல் காண்பது அவ்வளவு எளிதானதன்று. ஒரு சார்பினை வகையிடவேண்டுமெனில் அதற்கென்று விதிமுறைகள் மற்றும் செயல்பாடுகள் வகையிடலில் திட்டவட்டமாகவும் தெளிவாகவும் உள்ளன. நாம் $f(x)$ –ன் வகையிடுதலை

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

எனத் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதை அறிந்துள்ளோம். இவ்வரையறையைப் பயன்படுத்தி $\log x$–ன் வகையிடுதலைக் காண முறையான வழிமுறைகள் நமக்குத் தெரியும். ஆனால், $\log x$–ன் தொகையைக் காண முறையான வழிமுறைகள் இல்லை.

வகையிடுதலில், அதன் விதிகளைப் பயன்படுத்தி பல்வேறு சார்புகளின் கூட்டல், பெருக்கல், வகுத்தல், சார்புகளின் சேர்க்கை ஆகியவற்றின் வகையிடுதலைக் காணலாம்.

சார்பின் தொகையிடலைக் காண ஒரு சில தொகையீட்டு விதிகளே உள்ளன. மற்றும் இவ்விதிகளைப் பயன்படுத்தப் பல கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன.

தொகையிடலில் மிகப் பொருத்தமான முறையைத் தேர்வு செய்து, அதனை எளிமையாக எவ்வாறு பயன்படுத்துவது என்பதனைக் கண்டறியும் திறன் பல்வேறு தீவிரப் பயிற்சிகளுக்குப் பிறகே கிடைக்கும்.

தொகையிடுதலில் இரண்டு முக்கிய பண்புகளைப் பற்றி ஏற்கனவே நாம் பார்த்துள்ளோம். தொகையிடுதலில் பின்வரும் நான்கு முக்கிய முறைகள் உள்ளன.

(1) கூட்டல் அல்லது கழித்தலாகப் பிரித்துத் தொகையிடுதல்.

(2) பிரதியிடுதல் முறையில் தொகையிடுதல்.

(3) பகுதித் தொகையிடுதல்.

(4) அடுக்குகளைப் படிப்படியாகச் சுருக்கித் தொகையிடுதல்.

K18HA3

இங்கு மேற்கூறிய முதல் மூன்று முறைகளை நாம் படிப்போம். நான்காவது முறையை மேல் வகுப்பில் படிக்க உள்ளோம்.

11.7.1 பிரித்தல் முறை

சில சமயங்களில் கொடுக்கப்பட்ட சார்பினுக்கு, நேரடியாகத் தொகையிடுதல் காண்பது மிகவும் கடினம். ஆனால் அவற்றைச் சார்புகளின் கூடுதல் அல்லது கழித்தலாக பிரித்து ஏற்கனவே நமக்குத்

05_11 Integral Calculus.indd 208 25-03-2019 13:54:05

தெரிந்த தொகையிடுதல் வாயிலாகக் காணலாம். எடுத்துகாட்டாக $\left(1-x^3\right)^2$, $\dfrac{x^2-x+1}{x^3}$, $\cos 5x\sin 3x$ $\cos^3 x$, $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$, ஆகியவற்றை நேரடியாகத் தொகையிடுவதற்கான சூத்திரம் கிடையாது. அவற்றைத் கூடுதல் அல்லது கழித்தலாகப் பிரித்து பிறகு கிடைக்கப்பெறும் தனிப்பட்ட தொகையிடுதல் நமக்கு தெரிந்தவையே. பெரும்பாலான கொடுக்கப்பட்ட தொகையீடுகள் இயற்கணிதம், முக்கோணவியல் அல்லது அடுக்குவடிவு மற்றும் சில சமயங்களில் இவற்றின் சேர்ப்புகள் ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றினை கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.15

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\left(1-x^3\right)^2$ (ii) $\dfrac{x^2-x+1}{x^3}$

தீர்வு

(i)
$$\int\left(1-x^3\right)^2 dx = \int(1-2x^3+x^6)dx$$
$$= \int dx-2\int x^3dx+\int x^6dx$$
$$= x-\frac{x^4}{2}+\frac{x^7}{7}+c.$$

(ii)
$$\int\frac{x^2-x+1}{x^3}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)dx$$
$$= \int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^3}dx.$$
$$= \log|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.16

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\cos 5x\sin 3x$ (ii) $\cos^3 x$.

தீர்வு

(i)
$$\int\cos 5x\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 5x\sin 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\sin 8x-\sin 2x\right)dx$$
$$\int\cos 5x\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}\right)+c.$$

(ii)
$$\int\cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int\left(3\cos x+\cos 3x\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(3\sin x+\frac{\sin 3x}{3}\right)+c$$

எடுத்துக்காட்டு 11.17

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$ (ii) $e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)$.

தீர்வு

(i)
$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx = \int\left(\frac{e^{2x}}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)dx$$
$$= \int\left(e^x-e^{-x}\right)dx = e^x+e^{-x}+c.$$

(ii)
$$\int e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)dx = \int\left(e^{5x}-e^{3x}\right)dx = \frac{e^{5x}}{5}-\frac{e^{3x}}{3}+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.18

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$$
$$= \int \sec^2 x dx+\int \operatorname{cosec}^2 x dx$$
$$= \tan x-\cot x+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.19

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\right)dx$$
$$= \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \int \tan x\sec x dx-\int \tan^2 x dx$$
$$= \int \tan x\sec x dx-\int (\sec^2 x-1)dx$$
$$= \sec x-\tan x+x+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.20

மதிப்பிடுக: $\displaystyle\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx.$

தீர்வு

$$\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{2\cos^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int \cos x dx = \sqrt{2}\sin x+c$$

05_11 Integral Calculus.indd 210 25-03-2019 13:54:24

எடுத்துக்காட்டு 11.21

மதிப்பிடுக : $\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}dx = \int \frac{x^2+1-2x}{x(x^2+1)}dx$$

$$= \int\left(\frac{(x^2+1)}{x(x^2+1)} - \frac{2x}{x(x^2+1)}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \log|x| - 2\tan^{-1}x + c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.22

மதிப்பிடுக: $\int (\tan x + \cot x)^2 dx.$

தீர்வு

$$\int (\tan x + \cot x)^2 dx = \int (\tan^2 x + 2\tan x \cot x + \cot^2 x)dx$$

$$= \int [(\sec^2 x - 1) + 2 + (\operatorname{cosec}^2 x - 1)]dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)dx$$

$$= \tan x + (-\cot x) + c$$

$$= \tan x - \cot x + c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.23

மதிப்பிடுக : $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \tan^2\frac{x}{2}dx$$

$$= \int\left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right)dx = \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - x + c$$

$$= 2\tan\frac{x}{2} - x + c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.24

மதிப்பிடுக: $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx.$

தீர்வு

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{(\cos^2 x + \sin^2 x) + (2\sin x \cos x)}\, dx$$

$$= \int \sqrt{(\cos x + \sin x)^2}\, dx = \int (\cos x + \sin x)dx$$

$$= \sin x - \cos x + c$$

எடுத்துக்காட்டு 11.25

மதிப்பிடுக: $\int \frac{x^3+2}{x-1}dx.$

தீர்வு

$$\int \frac{x^3+2}{x-1}dx = \int \frac{x^3-1+3}{x-1}dx = \int\left(\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{3}{x-1}\right)dx$$

$$= \int\left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}\right]dx$$

$$= \int\left(x^2+x+1+\frac{3}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+3\log|(x-1)|+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.26

மதிப்பிடுக: (i) $\int a^x e^x dx$ (ii) $\int e^{x\log 2} e^x dx.$

தீர்வு

(i) $$\int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\log(ae)}+c$$

(ii) $$\int e^{x\log 2} e^x dx = \int e^{\log 2^x} e^x dx = \int 2^x e^x dx$$

$$= \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\log(2e)}+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.27

மதிப்பிடுக: $\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx.$

தீர்வு

$$\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx = \int (x+2-5)\sqrt{x+2}\, dx$$

$$= \int (x+2)\sqrt{x+2}\, dx - 5\int \sqrt{x+2}\, dx$$

$$= \int (x+2)^{\frac{3}{2}} dx - 5\int (x+2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 5\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+c.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.28

மதிப்பிடுக : $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx.$

05_11 Integral Calculus.indd 212 25-03-2019 13:54:43

தீர்வு

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right]dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}\,dx = \int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \int\sqrt{x+1}\;dx - \int\sqrt{x}\;dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] + c.$$

11.7.2 பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தல்(Decomposition by Partial Fractions)

தொகையிடுதலில் பகுதி பின்னமாகப் பிரித்துத் தொகையிடுதல் ஒரு முக்கியமான முறையாகும். தொகையிடப்பட வேண்டியவை இயற்கணிதப் பின்ன வடிவில் இருந்தால் அதனை எளிதாகத் தொகையிட முடியாது, தொகையிடல் காண்பதற்கு முன்பு பின்னத்தைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுத வேண்டும். விகிதமுறு சார்பு $\frac{p(x)}{q(x)}$, $\left(q(x)\neq 0\right)$ படியானது, p (x) < q (x)-ன் என இருக்க வேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனில், அதனை வகுத்து அதன்பிறகு பகுதி பின்னமாகப் பிரித்துத் தொகை காண வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.29

மதிப்பிடுக : (i) $\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}dx.$

தீர்வு

(i) $$\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{13}{x-2}dx - \int \frac{10}{x-1}dx \quad \text{(பகுதி பின்னங்களாக பிரிக்க)}$$

$$= 13\log|x-2| - 10\log|x-1| + c$$

(ii) $$\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}dx = \int \frac{-2}{x+2}dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}dx + \int \frac{2}{x+1}dx \quad \text{(பகுதி பின்னங்களாக பிரிக்க)}$$

$$= -2\int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}dx + 2\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= -2\log|x+2| - \int (x+2)^{-2}\,dx + 2\log|x+1| + c$$

$$= -2\log|x+2| + \frac{1}{x+2} + 2\log|x+1| + c.$$

பயிற்சி 11.5

x–ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $\dfrac{x^3+4x^2-3x+2}{x^2}$	(2) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$	(3) $(2x-5)(36+4x)$
(4) $\cot^2 x+\tan^2 x$	(5) $\dfrac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha}$	(6) $\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$
(7) $\dfrac{3+4\cos x}{\sin^2 x}$	(8) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$	(9) $\dfrac{\sin 4x}{\sin x}$
(10) $\cos 3x \cos 2x$	(11) $\sin^2 5x$	(12) $\dfrac{1+\cos 4x}{\cot x-\tan x}$
(13) $e^{x\log a}e^x$	(14) $(3x+4)\sqrt{3x+7}$	(15) $\dfrac{8^{1+x}+4^{1-x}}{2^x}$
(16) $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}}$	(17) $\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)}$	(18) $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)^2}$
(19) $\dfrac{3x-9}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}$	(20) $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$	

11.7.3 பிரதியிடல் முறை அல்லது மாறியை மாற்றி அமைக்கும் முறை

தொகையிடலில் பிரதியிடல் முறையானது வகையிடலில் சார்பின் சார்புகளுக்கு வகையிடுதல் போன்றதாகும். பொருத்தமான பிரதியிடலைப் பயன்படுத்தித் தொகையிடலின் மாறியைப் புதிய மாறியாக மாற்றி அமைத்து எளிய முறையில் தொகையிடலாம்.

u ஆனது x–ஆல் ஆன சார்பு எனில், $\dfrac{du}{dx}=u'$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே $\int f(u)u'dx=\int f(u)du$ என எழுதலாம்.

ஆகவே, $\int f[g(x)]g'(x)dx=\int f(u)du$, இங்கு $u=g(x)$

$x=\phi(u)$ அல்லது $u=g(x)$ என்ற பொருத்தமான பிரதியிடலை தேர்வு செய்வதைச் சார்ந்து மேலே சொல்லப்பட்ட முறை எளிதாகிறது.

குறிப்பு 11.2

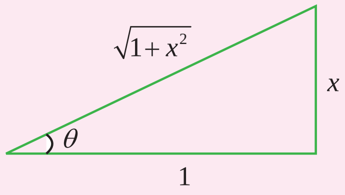
தொகையிடல் மாறியின் பிரதியிடல் முக்கோணவியல் சார்புகளாக இருந்தால் அதன் மறுபிரதியிடலின் மதிப்பைக் காண்பதற்கு மாதிரி வரைப்படத்தை பயன்படுத்தலாம். தொகை மாறி x-ஐ $x=\tan\theta$ எனப் பிரதியிட, தொகையிடலுக்கு பிறகு தீர்வு $\sec\theta+\text{cosec}\theta$ எனக் கிடைத்தால்,

$\sec\theta+\text{cosec}\theta=\sqrt{1+x^2}+\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$ என்றாகும்.

$x=\tan\theta$ எனில் படத்திலிருந்து,

$\text{cosec}\theta=\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$,

$\sec\theta=\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1}\right)$



05_11 Integral Calculus.indd 214 25-03-2019 13:54:59

எடுத்துக்காட்டு 11.30

கீழ்காண்பனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (ii) $\int e^{-x^2}x\,dx$ (iii) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ (v) $\int x(a-x)^8\,dx$

தீர்வு

(i) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$1+x^2=u$ எனில் $2x\,dx=du$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c.$$

(ii) $\int e^{-x^2}xdx$

$x^2=u$ எனில் $2x\,dx=du$

எனவே, $$\int e^{-x^2}x\,dx = \int e^{-u}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-u}du = \frac{1}{2}(-e^{-u})+c = -\frac{1}{2}e^{-u}+c = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c.$$

(iii) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$1+\cos x=u$ எனில் $-\sin x\,dx=du$

எனவே, $$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\log|u|+c = -\log|1+\cos x|+c.$$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$x=\tan u$ எனில் $dx=\sec^2 u\,du$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{\sec^2 u}{1+\tan^2 u}du = \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}du = \int du = u+c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x+c.$$

(v) $\int x(a-x)^8\,dx$

$u=a-x$ எனில் $du=-dx$

$$\int x(a-x)^8\,dx = \int x(a-x)^8\,dx$$

$$= \int (a-u)(u)^8(-du)$$

$$= \int \left(-a(u)^8+u^9\right)du$$

$$= \int u^9 du - a\int u^8 du$$

$$= \frac{u^{10}}{10} - a\frac{u^9}{9} + c$$

$$\int x(a-x)^8\, dx = \frac{(a-x)^{10}}{10} - \frac{a(a-x)^9}{9} + c.$$

11.7.4 சில முக்கியமான தொகையிடல்கள்

(1) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$$

(2) $$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

நிரூபணம்

(1) $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ என்க.

$f(x) = u$ எனில் $f'(x)dx = du$

எனவே, $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c$

ஆகவே, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c.$

(2) $I = \int f'(x)[f(x)]^n dx$ என்க.

$f(x) = u$ எனில் $f'(x)dx = du$

ஆகவே, $I = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

எனவே, $\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c.$

எடுத்துக்காட்டு 11.31

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\int \tan x\, dx$ (ii) $\int \cot x\, dx$ (iii) $\int \operatorname{cosec} x\, dx$ (iv) $\int \sec x\, dx$

தீர்வு

(i) $I = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$\cos x = u$ எனில், $-\sin x\, dx = du$

எனில், $I = \int -\frac{1}{u} du = -\log|u| + c = -\log|\cos x| + c = \log|\sec x| + c.$

(ii) $I = \int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ என்க.

$\sin x = u$ எனில், $\cos x\, dx = du$

$I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\sin x| + c.$

05_11 Integral Calculus.indd 216 25-03-2019 13:55:22

(iii) $$I = \int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{\operatorname{cosec}x(\operatorname{cosec}x - \cot x)}{\operatorname{cosec}x - \cot x}dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec}x \cot x}{\operatorname{cosec}x - \cot x}\,dx$$

$\operatorname{cosec} x - \cot x = u$ எனில், $(\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x\ \cot x)\,dx = du$

எனவே, $I = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + c = \log|\operatorname{cosec}x - \cot x| + c.$

(iv) $$I = \int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx$$ என்க.

$\sec x + \tan x = u$ எனில் $(\sec^2 x + \sec x \tan x)\,dx = du$

ஆகவே, $I = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + c = \log|\sec x + \tan x| + c$

எனில், $\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + c.$

இவ்வாறாகப் பின்வரும் முக்கியமான முடிவுகளைப் பெறுகிறோம்.

(1)	$\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + c$
(2)	$\int \cot x\, dx = \log|\sin x| + c$
(3)	$\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$
(4)	$\int \sec x\, dx = \log|\sec x + \tan x| + c$

எடுத்துக்காட்டு 11.32

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx$ (ii) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$ (iii) $\int \frac{1}{x\log x}dx$

(iv) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}dx$ (v) $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2}dx$

தீர்வு

(i) $$I = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx$$ என்க.

$x^2 + 4x + 6 = u$ எனில் $(2x+4)\,dx = du$

எனவே, $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|x^2 + 4x + 6| + c$

எனவே, $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx = \log|x^2 + 4x + 6| + c.$

(ii) $$I = \int \frac{e^x}{e^x - 1}dx$$ என்க.

05_11 Integral Calculus.indd 217 25-03-2019 13:55:35

$$e^x - 1 = u \text{ எனில் } e^x dx = du$$

$$\text{ஆகவே, } I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|e^x - 1| + c$$

$$\text{எனவே, } \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \log|e^x - 1| + c.$$

(iii)
$$I = \int \frac{1}{x \log x} dx$$

$$\log x = u \text{ எனில் } \frac{1}{x} dx = du$$

$$\text{ஆகவே, } I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\log x| + c$$

$$\text{எனவே, } \int \frac{1}{x \log x} dx = \log|\log x| + c.$$

(iv)
$$I = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx \text{ என்க}$$

$$\sin x - \cos x = u \text{ எனில் } (\cos x + \sin x)\, dx = du$$

$$\text{ஆகவே, } I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\sin x - \cos x| + c$$

$$\text{எனவே, } \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx = \log|\sin x - \cos x| + c$$

(v)
$$I = \int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$1 + \sin 2x = u \text{ எனில் } 2\cos 2x\, dx = du$$

$$\text{எனவே, } I = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\log|u| + c = \frac{1}{2}\log|1 + \sin 2x| + c.$$

பயிற்சி 11.6

கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\frac{x^2}{1+x^6}$ (3) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (4) $\frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{10^x + x^{10}}$

(5) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (6) $\frac{\cot x}{\log(\sin x)}$ (7) $\frac{\text{cosec} x}{\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)}$ (8) $\frac{\sin 2x}{a^2 + b^2 \sin^2 x}$

(9) $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ (10) $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (11) $\frac{1}{x \log x \log(\log x)}$ (12) $\alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}}$

(13) $\tan x\sqrt{\sec x}$ (14) $x(1-x)^{17}$ (15) $\sin^5 x \cos^3 x$ (16) $\frac{\cos x}{\cos(x-a)}$

05_11 Integral Calculus.indd 218 25-03-2019 13:55:48

11.7.5 பகுதித் தொகையிடல் (Integration by parts)

தொகைச் சார்பானது இரண்டு சார்புகளின் பெருக்கலாகவோ அல்லது ஒரே ஒரு மடக்கை சார்பாகவோ அல்லது ஒரே ஒரு நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்பாகவோ அல்லது நேரடியாகத் தொகையிட முடியாத சார்பாகவோ இருந்தால் பொதுவாக பகுதித் தொகையிடலை பயன்படுத்தி தொகையைக் காணலாம். இரண்டு சார்புகளுக்கான பெருக்கல் வகையிடல் சூத்திரத்திலிருந்து இந்தப் பயனுள்ள தொகையீட்டு முறையைப் பெறுகிறோம்.

u மற்றும் v ஆகியவை இரண்டு வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனில்,

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

தொகையீடு காண,

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$\int udv$ –லிருந்து மற்றொரு தொகையீடு $\int vdu$ வடிவில் கிடைக்கிறது மேலும் $\int udv$ –க்கு இறுதி வடிவம் கிடைக்கப் பெறவில்லை. இது udv என்னும் பெருக்கத்தின் தொகையிடுதலில் ஒரு பகுதியை மட்டும் தீர்க்கிறது. இதனை ஐரோப்பிய நாடுகளில் தொகையிடலின் ஒரு பகுதி என்கிறார்கள். பிற நாடுகளைப் போன்றே நாமும் பகுதித் தொகையிடல் என அழைக்கிறோம்.

u–ன் முறையான தேர்வைப் பொறுத்து இந்த முறை பொருத்தமாகிறது. அதாவது,

(i) $\log x, \tan^{-1} x$ போன்ற தொகைச் சார்புகளை நேரடியாகத் தொகையிட முடியாது. தொகைச் சார்புகளை u எனவும் மற்றதை dv எனவும் கொள்ளவும்.

(ii) தொகையீட்டுச் சார்புகள் இரண்டுமே தொகைச் சார்புகளை உள்ளடக்கி இருந்து மற்றும் அதில் ஒன்று x^n (n ஒரு மிகை முழுவெண்) ஆக இருந்தால் அதனை $u = x^n$ எனக் கொள்ளவும்.

(iii) மற்றைய நிலைகளில் u – ன் தேர்வு நம்முடைய விருப்பத்தைப் பொறுத்தது.

எடுத்துக்காட்டு 11.33

மதிப்பிடுக

(i) $\int xe^x dx$ (ii) $\int x\cos x\, dx$ (iii) $\int \log x\, dx$ (iv) $\int \sin^{-1} x\, dx$

தீர்வு

(i) $I = \int xe^x dx$

இங்கு x ஒரு இயற்கணித சார்பு மற்றும் e^x ஒரு அடுக்குக்குறிச்சார்பு ஆதலால்,

$u = x$ எனில், $du = dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

அதாவது, $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$

(ii) $I = \int x\cos x\, dx$ என்க.

x ஒரு இயற்கணித சார்பு $\cos x$ ஒரு முக்கோணவியல் சார்பு ஆதலால்,

$u = x$ எனில், $du = dx$

05_11 Integral Calculus.indd 219 25-03-2019 13:55:54

$$dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \sin x$$

பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\, dx = x\sin x + \cos x + c$$

(iii) $I = \int \log x\, dx$ என்க.

$u = \log x$ என்க. $du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\Rightarrow \int \log x\, dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int \log x\, dx = x\log x - x + c$$

(iv) $I = \int \sin^{-1} x\, dx$ என்க.

$u = \sin^{-1}(x), dv = dx$ என்க.

எனவே, $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad v = x$

$$\int \sin^{-1} x\, dx = x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \sin^{-1} x\, dx = x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}},$$ இங்கு $t = 1-x^2$

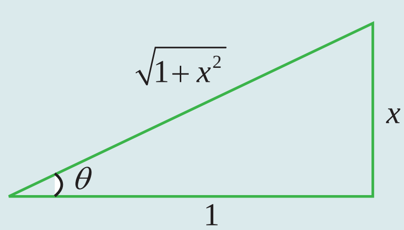
$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{t} + c$$

$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

எடுத்துக்காட்டு 11.34

மதிப்பிடுக : $\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx$

தீர்வு



$I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx$ என்க.

$x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$\tan\theta = x$

$\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$

எனவே, $I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int \tan^{-1}(\tan 2\theta)\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int 2\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2\int (\theta)(\sec^2\theta\, d\theta)$$

05_11 Integral Calculus.indd 220 25-03-2019 13:56:07

பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$I = 2\left[\theta\tan\theta - \int \tan\theta\, d\theta\right]$$

$$= 2\left(\theta\tan\theta - \log\left|\sec\theta\right|\right) + c$$

$$\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx = 2x\tan^{-1}x - 2\log\left|\sqrt{1+x^2}\right| + c$$

11.7.6 பகுதித் தொகையிடலுக்கான பெர்னோலியின் சூத்திரம்

u மற்றும் v ஆகியவை x – ன் சார்புகள் எனில் பெர்னோலியின் சூத்திரமானது $\int u\,dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$ ஆகும்.

இங்கு $u', u'', u''', \ldots$ என்பன u –ன் அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள் ஆகும் மற்றும் $v, v_1, v_2, v_3, \cdots$ என்பன dv –ன் அடுத்தடுத்த தொகையிடல்கள் ஆகும்.

$u = x^n$ (n ஒரு மிகை முழுவெண்) எனக் எடுத்துக்கொள்ளும் போது பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவது எளிதாக இருக்கும் .

பின்வரும் கணக்குகளின் தீர்வு காண்பதற்கு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முறையில் பகுதித் தொகையிடலைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இந்நிலையில் பொதுவாகப் பெர்னோலியின் சூத்திரம் உதவுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.35

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

(i) x^2e^{5x} (ii) $x^3\cos x$ (iii) x^3e^{-x}

தீர்வு

(i) $\int x^2e^{5x}dx.$

$dv = e^{5x}dx$

$u = x^2$	$v = \frac{e^{5x}}{5}$
$u' = 2x$	$v_1 = \frac{e^{5x}}{5^2}$
$u'' = 2$	$v_2 = \frac{e^{5x}}{5^3}$
$u''' = 0$	$v_3 = \frac{e^{5x}}{5^4}$

பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\int u\,dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^2e^{5x}\,dx = \left(x^2\right)\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) - (2x)\left(\frac{e^{5x}}{5^2}\right) + (2)\left(\frac{e^{5x}}{5^3}\right) - (0)\left(\frac{e^{5x}}{5^4}\right) + 0 + \cdots + 0 + c$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + c.$$

(ii) $\int x^3\cos x\,dx.$

$dv = \cos x\,dx$

$u = x^3,$	$v = \sin x$
$u' = 3x,^2$	$v_1 = -\cos x$
$u'' = 6x,$	$v_2 = -\sin x$
$u''' = 6,$	$v_3 = \cos x$

பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\int u\,dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^3\cos x\,dx = \left(x^3\right)\left(\sin x\right) - \left(3x^2\right)\left(-\cos x\right) + \left(6x\right)\left(-\sin x\right) - \left(6\right)\left(\cos x\right) + c$$

$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + c.$$

(iii) $\int x^3 e^{-x} dx$.

பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^3 e^{-x}\, dx = (x^3)(-e^{-x}) - (3x^2)(e^{-x}) + (6x)(-e^{-x}) - (6)(e^{-x}) + c$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + c.$$

$dv = e^{-x}dx$
$u = x^3, \quad v = -e^{-x}$
$u' = 3x^2, \quad v_1 = +e^{-x}$
$u'' = 6x, \quad v_2 = -e^{-x}$
$u''' = 6, \quad v_3 = e^{-x}$

பயிற்சி 11.7

பின்வருவனவற்றின் தொகை காண்க.

(1) (i) $9xe^{3x}$ (ii) $x\sin 3x$ (iii) $25xe^{-5x}$ (iv) $x\sec x\tan x$

(2) (i) $x\log x$ (ii) $27\ x^2 e^{3x}$ (iii) $x^2\cos x$ (iv) $x^3\sin x$

(3) (i) $\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $x^5 e^{x^2}$ (iii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{8x}{1-16x^2}\right)$ (iv) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

11.7.8 (i) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (ii) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ வடிவங்களின் தொகைக காணல்

$e^{ax}\sin bx$ மற்றும் $e^{ax}\cos bx$ ஆகிய தொகைச் சார்புகளின் தொகையிடல்கள் தொடர்ந்து செல்வதால், கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளில் தொகையிடலை இருமுறை பயன்படுத்தி, இருபுறமும் ஒரே தொகையாகக் கொண்டு வந்து தீர்வு காண வேண்டும்.

முடிவு 11.1

(i) $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$$

(ii) $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

நிரூபணம் (i)

$I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$ என்க.

$u = \sin bx, \quad du = b\cos bx\,dx$ என்க.

$$dv = e^{ax}dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{ax}}{a}$$

பகுதித் தொகையிடல் முறையை பயன்படுத்த,

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \int \frac{e^{ax}}{a} b\cos bx\,dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$u = \cos bx, \quad du = -b\sin bx\,dx$ என்க.

$$dv = e^{ax}\,dx\,; v = \frac{e^{ax}}{a},$$

05_11 Integral Calculus.indd 222 25-03-2019 13:56:25

மீண்டும் பகுதித் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \int \frac{e^{ax}}{a} b\sin bx\, dx\right]$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\frac{e^{ax}}{a}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\, dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2} I$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2}$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)I = \frac{e^{ax}[a\sin bx - b\cos bx]}{a^2}$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]+c$$

எனவே, $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]+c$

இதேபோல், $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx]+c$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]+c$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx]+c$$

நினைவில் கொள்க :

பகுதித் தொகையிடலை பயன்படுத்தும் போது u மற்றும் dv யை அடுத்தடுத்து வரும் தொகையிடல்களில் ஒரே மாதிரியாகத் தேர்வு செய்ய வேண்டும். மேலே குறிப்பிட்ட இரண்டு எடுத்துகாட்டுகளைக் காண்க. ஜோடிகளில் வரக்கூடிய சார்புகளை மாற்றி அமைத்தல் கூடாது.

எடுத்துக்காட்டு 11.36

மதிப்பிடுக .

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ (ii) $\int e^{-5x}\sin 3x\,dx$

தீர்வு

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx]+c$ என்ற சூத்திரத்தில் $a = 3, b = 2$

எனப்பிரதியிட

05_11 Integral Calculus.indd 223 25-03-2019 13:56:33

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \left(\frac{e^{3x}}{3^2+2^2}\right)(3\cos 2x + 2\sin 2x) + c$$

$$= \left(\frac{e^{3x}}{13}\right)(3\cos 2x + 2\sin 2x) + c.$$

(ii) $\int e^{-5x}\sin 3x\,dx$

$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$ என்ற சூத்திரத்தில் $a = -5$, $b = 3$ எனப்பிரதியிட

$$\int e^{-5x}\sin 3x\,dx = \left(\frac{e^{-5x}}{(-5)^2+3^2}\right)(-5\sin 3x - 3\cos 3x) + c$$

$$\int e^{-5x}\sin 3x\,dx = -\left(\frac{e^{-5x}}{34}\right)(5\sin 3x + 3\cos 3x) + c.$$

பயிற்சி 11.8

x–ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) (i) $e^{ax}\cos bx$ (ii) $e^{2x}\sin x$ (iii) $e^{-x}\cos 2x$

(2) (i) $e^{-3x}\sin 2x$ (ii) $e^{-4x}\sin 2x$ (iii) $e^{-3x}\cos x$

முடிவு 11.2

$$\int e^{x}[f(x) + f'(x)]dx = e^{x}f(x) + c$$

நிரூபணம்

$I = \int e^{x}[f(x) + f'(x)]dx$ என்க.

$= \int e^{x}f(x)dx + \int e^{x}f'(x)dx$

முதல் தொகையில் $u = f(x);\ du = f'(x)\,dx$ எனக் கொள்க.

$dv = e^{x}\,dx\ ;v = e^{x}$

அதாவது, $I = e^{x}f(x) - \int e^{x}f'(x)dx + \int e^{x}f'(x)dx + c$

எனவே, $I = e^{x}f(x) + c.$ ■

எடுத்துக்காட்டு 11.37

மதிப்பிடுக

(i) $\int e^{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$ (ii) $\int e^{x}(\sin x + \cos x)dx$ (iii) $\int e^{x}\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

தீர்வு

(i) $I = \int e^{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$ என்க.

05_11 Integral Calculus.indd 224 25-03-2019 13:56:46

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ எனில், } f'(x) = \frac{-1}{x^2} \text{ என்க.}$$

I ஆனது $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ எனும் வடிவில் உள்ளது.

$$\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = e^x\frac{1}{x}+c.$$

(ii) $$I = \int e^x(\sin x+\cos x)dx \text{ என்க.}$$

$$f(x) = \sin x \text{ எனில், } f'(x) = \cos x$$

I ஆனது $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ எனும் வடிவில் உள்ளது

$$\int e^x(\sin x+\cos x)dx = e^x\sin x+c.$$

(iii) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

$$I = \int e^x\frac{(1-x)^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx \text{ என்க.}$$

$$= \int e^x\frac{\left(1+x^2-2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$= \int e^x\left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)}-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\left(1+x^2\right)} \text{ எனில் } f'(x) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$\int e^x\left(f(x)+f'(x)\right)dx = e^x f(x)+c$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx = \int e^x\left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)}-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)dx = e^x\frac{1}{\left(1+x^2\right)}+c.$$

பயிற்சி 11.9

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $e^x(\tan x+\log\sec x)$

(2) $e^x\left(\frac{x-1}{2x^2}\right)$

(3) $e^x\sec x(1+\tan x)$

(4) $e^x\left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)$

(5) $e^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)$

(6) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

05_11 Integral Calculus.indd 225 25-03-2019 13:56:53

11.7.9 விகிதமுறு இயற்கணித சார்பின் தொகையிடல்

இப்பிரிவில் விகிதமுறு இயற்கணித சார்புகள் தொகுதி மற்றும் பகுதிகளில் மாறிலிக் குணகத்தையும் x ஆனது முழு எண் அடுக்குகளைப் பெற்றிருக்கும்.

வகை I

$\int \frac{dx}{a^2 \pm x^2}, \int \frac{dx}{x^2 - a^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ எனும் வடிவில் உள்ள தொகைகளைக் காணல்

(i) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

(ii) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(iii) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

நிரூபணம்

(i) $I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ என்க.

$$= \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right]dx \quad \text{(பகுதி பின்னங்களாக மாற்ற)}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|a+x| - \log|a-x|\right] + c$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

(ii) $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ என்க.

$$= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]dx \quad \text{(பகுதி பின்னங்களாக மாற்ற)}$$

05_11 Integral Calculus.indd 226 25-03-2019 13:57:02

$$= \frac{1}{2a}\Big[\log|x-a| - \log|x+a|\Big] + c$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

எனவே, $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ ■

(iii) $I = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$ என்க.

$$x = a\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$dx = a\sec^2\theta\ d\theta$$

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2(1+\tan^2\theta)}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

எனவே, $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ ■

(iv) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$x = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dx = a\cos\theta\ d\theta$$

$$I = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta}d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

எனவே, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ ■

(v) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ என்க.

$$x = a\sec\theta \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad ; \quad dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$I = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta$$

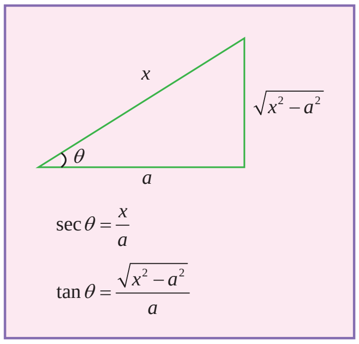
$$= \log|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1, \text{இங்கு } c_1=c-\log a$$

எனவே, $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1$



(vi) $\displaystyle I = \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ என்க.

$$x = a\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$$

$$I = \int\frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}}d\theta = \int\frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2(\tan^2\theta+1)}}d\theta$$

$$= \int\frac{a\sec^2\theta}{a\sec\theta}d\theta = \int\sec\theta\, d\theta$$

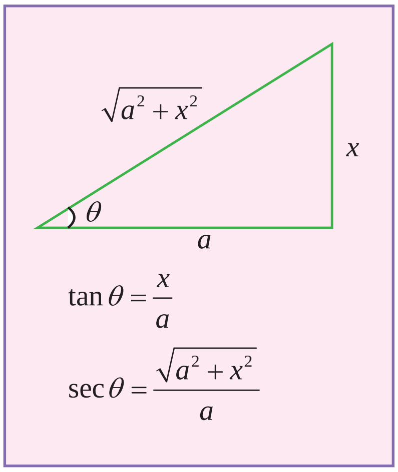
$$= \log|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1, \text{ இங்கு } c_1=c-\log a$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1$$



குறிப்பு: a^2-x^2, a^2+x^2 மற்றும் x^2-a^2 என்ற வடிவங்களுக்கு எளிதாகத் தொகைக் காணப் பயன்படக்கூடிய கீழ்க்காணும் பயனுள்ள பிரதியிடலை நினைவில் கொள்க.

வடிவம்	பிரதியிடல்
a^2-x^2	$x = a\sin\theta$
a^2+x^2	$x = a\tan\theta$
x^2-a^2	$x = a\sec\theta$

எடுத்துக்காட்டு 11.38

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக:

(i) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)^2+1}dx$ (ii) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+5}dx$ (iii) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$ (iv) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx$

05_11 Integral Calculus.indd 228 25-03-2019 13:57:21

தீர்வு

(i) $$I = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1^2}dx$$

$x - 2 = t$ என்க. $\Rightarrow dx = dt$

எனவே, $$I = \int \frac{1}{t^2+1^2}dt = \tan^{-1}(t)+c = \tan^{-1}(x-2)+c$$

(ii) $I = \int \frac{x^2}{x^2+5}\,dx$ என்க.

$$= \int \frac{x^2+5-5}{x^2+5}dx = \int\left(1-\frac{5}{x^2+5}\right)dx = \int dx - \int \frac{5}{x^2+5}dx$$

$$= x - 5\int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}dx$$

$$= x - 5\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$I = x - \sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

(iii) $$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx$$

$2x = t$ என்க. $\Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

எனவே, $$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1^2+t^2}}dt$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right|+c$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right|+c$$

(iv) $$I = \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2-25}}dx$$

$2x = t$ என்க. $\Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

எனவே, $$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-5^2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2-5^2}\right|+c$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2-25}\right|+c$$

வகை II

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ மற்றும் $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **எனும் வடிவில் உள்ள தொகைகளைக் காணல் :**

முதலில் ax^2+bx+c -ஐ இரு வர்க்கங்களின் கூடுதல் அல்லது கழித்தலாகப் பிரித்தெழுதி வகை-I ன் ஏதேனும் ஒரு வடிவத்துக்குக் கொண்டு வந்து தொகையீடு காணலாம். கீழ்காணும் விதியை பயன்படுத்தி ax^2+bx+c -ஐ இரண்டு வர்க்கங்களின் கூடுதலாகவோ அல்லது கழித்தலாகவோ எழுதலாம்.

(1) x^2 –ன் குணகத்தை 1 ஆக மாற்றவும்.

(2) x –ன் குணகத்தை இரண்டால் வகுத்து அதன் வர்க்கத்தினைக் கூட்டியோ அல்லது கழித்தோ முழு வர்க்கமாக மாற்றவும்.

$$\text{அதாவது,}\quad ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 11.39

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx$ (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx$

தீர்வு

(i)

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{1}{x^2-2(1)x+(1)^2+4}dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

(ii)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-25}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-5^2}}dx$$

$$= \log|x+6+\sqrt{(x+6)^2-5^2}|+c$$

$$\text{எனவே,}\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx = \log|x+6+\sqrt{x^2+12x+11}|+c$$

(iii)

$$\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{12-(x^2-4x)}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{12-\{(x-2)^2-4\}}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4^2-(x-2)^2}}dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{4}\right)+c$$

05_11 Integral Calculus.indd 230 25-03-2019 13:57:39

பயிற்சி 11.10

x-ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) (i) $\dfrac{1}{4-x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{25-4x^2}$ (iii) $\dfrac{1}{9x^2-4}$

(2) (i) $\dfrac{1}{6x-7-x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{(x+1)^2-25}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}$

(3) (i) $\dfrac{1}{\sqrt{(2+x)^2-1}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{9+8x-x^2}}$

வகை III

$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ மற்றும் $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ எனும் வடிவில் உள்ள தொகைகளைக் காணல்.

மேற்கண்ட தொகையை மதிப்பிட, முதலில் நாம் கீழ்கண்டவாறு எழுதவும்

$$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B$$

$$px+q = A(2ax+b)+B$$

இரு பக்கங்களிலும் x – ன் கெழுக்களையும் மற்றும் மாறிலிகளையும் தனித்தனியே சமப்படுத்தி A மற்றும் B ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட முதல் தொகையைக் கீழ்கண்டவாறு எழுதுக.

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A(2ax+b)+B}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

(முதல் தொகை $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ எனும் வடிவில் உள்ளது)

$$= A\log|ax^2+bx+c| + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

முந்தைய வகைகளைப் பயன்படுத்தி வலதுபுறத்தில் உள்ள முதல் தொகையை மதிப்பிடலாம்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட இரண்டாவது தொகையைக் கீழ்கண்டவாறு எழுதுக.

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{A(2ax+b)+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

(முதல் தொகை $\int f'(x)[f(x)]^n dx$ எனும் வடிவில் உள்ளது)

$$= A\left(2\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

முந்தைய வகைளைப் பயன்படுத்தி வலதுபுறத்தில் உள்ள இரண்டாவது தொகையை மதிப்பிடலாம்.

05_11 Integral Calculus.indd 231 25-03-2019 13:57:47

எடுத்துக்காட்டு 11.40

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக.

(i) $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$ (ii) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ (iii) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ (iv) $\int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$

தீர்வு

(i) $I = \int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$ என்க.

$$3x+5 = A\frac{d}{dx}(x^2+4x+7)+B$$

$$3x+5 = A(2x+4)+B$$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த ,

$$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}; 4A+B=5 \Rightarrow B=-1$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+7}dx$$

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - \int \frac{1}{x^2+4x+7}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| + c - \int \frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+c$$

(ii) $I = \int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ என்க.

$$x+1 = A\frac{d}{dx}(x^2-3x+1)+B$$

$$x+1 = A(2x-3)+B$$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த ,

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}; -3A+B=1 \Rightarrow B=\frac{5}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{5}{2}}{x^2-3x+1}dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+1}dx$$

05_11 Integral Calculus.indd 232 25-03-2019 13:57:55

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\,\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\log\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\log\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right| + c$$

(iii) $I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ என்க.

$$2x+3 = A\frac{d}{dx}(x^2+x+1)+B$$

$$2x + 3 = A(2x + 1) + B$$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1; \quad A + B = 3 \Rightarrow B = 2$$

$$I = \int \frac{(2x+1)+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$I = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right| + c$$

எனவே, $I = 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + c$

(iv) $\text{I} = \int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$ என்க.

$$5x-7 = A\frac{d}{dx}(3x-x^2-2)+B$$

$$5x - 7 = A(3-2x)+B$$

ஒத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த ,

05_11 Integral Calculus.indd 233 25-03-2019 13:58:02

$$-2A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{2}; 3A + B = -7 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{-5}{2}(3-2x) + \frac{1}{2}}{\sqrt{3x - x^2 + 2}} dx$$

$$I = -\frac{5}{2}\int \frac{3-2x}{\sqrt{3x - x^2 + 2}} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3x - x^2 + 2}} dx$$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right) 2\sqrt{3x - x^2 + 2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} dx$$

$$= -5\sqrt{3x - x^2 + 2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}\right) + c$$

எனவே, $I = -5\sqrt{3x - x^2 + 2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{17}}\right) + c$

பயிற்சி 11.11

x–ஐப் பொறுத்து கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) (i) $\frac{2x-3}{x^2 + 4x - 12}$ (ii) $\frac{5x-2}{2 + 2x + x^2}$ (iii) $\frac{3x+1}{2x^2 - 2x + 3}$

(2) (i) $\frac{2x+1}{\sqrt{9 + 4x - x^2}}$ (ii) $\frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (iii) $\frac{2x+3}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}$

வகை IV

$\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\, dx, \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ எனும் வடிவில் உள்ள தொகைகளைக் காணல்.

முடிவு 11.3

(1) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(2) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

(3) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

நிரூபணம்

(1) $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ என்க.

$u = \sqrt{a^2 - x^2}$ எனில், $du = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

05_11 Integral Calculus.indd 234 25-03-2019 13:58:10

பகுதித் தொகையிடல் முறையை பயன்படுத்த,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow I = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\left(\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{(-a^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

எனவே, $I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

இதே போல் மற்ற இரு முடிவுகளையும் நிறுவலாம்.

குறிப்பு 11.3

$x = a\sin\theta$ எனப் பிரதியிட்டும் மேற்கண்டமுடிவுகளை நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 11.41

பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

(i) $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{25x^2-9}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{x^2+x+1}\,dx$ (iv) $\int\sqrt{(x-3)(5-x)}\,dx$

தீர்வு

(i) $I = \sqrt{4-x^2}\,dx$ என்க.

$$= \int\sqrt{2^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2^2-x^2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

எனவே, $I = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

(ii) $I = \int\sqrt{25x^2-9}\,dx$ என்க.

$$= \int\sqrt{(5x)^2-3^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{(5x)^2-3^2} - \frac{3^2}{2}\log\left|5x+\sqrt{(5x)^2-3^2}\right|\right] + c$$

எனவே, $I = \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{25x^2-9} - \frac{9}{2}\log\left|5x+\sqrt{25x^2-9}\right|\right] + c$

05_11 Integral Calculus.indd 235 25-03-2019 13:58:19

(iii) $I = \int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$ என்க.

$$= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2}\log\left|\left[x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]\right|+c$$

எனவே, $I = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+c$

(iv) $I = \int \sqrt{(x-3)(5-x)}\,dx$ என்க.

$$= \int \sqrt{8x-x^2-15}\,dx$$

$$= \int \sqrt{1^2-(x-4)^2}\,dx$$

$$= \frac{x-4}{2}\sqrt{1^2-(x-4)^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{1}\right)+c$$

எனவே, $I = \frac{x-4}{2}\sqrt{8x-x^2-15}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-4)+c$

பயிற்சி 11.12

பின்வரும் சார்புகளின் தொகைக் காண்க.

(1) (i) $\sqrt{x^2+2x+10}$ (ii) $\sqrt{x^2-2x-3}$ (iii) $\sqrt{(6-x)(x-4)}$

(2) (i) $\sqrt{9-(2x+5)^2}$ (ii) $\sqrt{81+(2x+1)^2}$ (iii) $\sqrt{(x+1)^2-4}$

பயிற்சி 11.13

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளில் இருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) $\int f(x)dx = g(x)+c$ எனில், $\int f(x)g'(x)dx$ என்பது

(1) $\int (f(x))^2\,dx$ (2) $\int f(x)g(x)dx$ (3) $\int f'(x)g(x)dx$ (4) $\int (g(x))^2\,dx$

(2) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = k\,(3^{\frac{1}{x}})+c$ எனில், k –ன் மதிப்பு

(1) $\log 3$ (2) $-\log 3$ (3) $-\frac{1}{\log 3}$ (4) $\frac{1}{\log 3}$

(3) $\int f'(x)e^{x^2}dx = (x-1)e^{x^2}+c$ எனில், $f(x)$ என்பது

(1) $2x^3-\frac{x^2}{2}+x+c$ (2) $\frac{x^3}{2}+3x^2+4x+c$ (3) x^3+4x^2+6x+c (4) $\frac{2x^3}{3}-x^2+x+c$

05_11 Integral Calculus.indd 236 25-03-2019 13:58:32

(4) (x, y) என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஒரு வளைவரையின் சாய்வு $\frac{x^2-4}{x^2}$ ஆகும்.

. இவ்வளைவரை (2, 7) என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்றால் , வளைவரையின் சமன்பாடு

(1) $y = x+\frac{4}{x}+3$ (2) $y = x+\frac{4}{x}+4$ (3) $y = x^2+3x+4$ (4) $y = x^2-3x+6$

(5) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\, dx =$

(1) $\cot(xe^x)+c$ (2) $\sec(xe^x)+c$ (3) $\tan(xe^x)+c$ (4) $\cos(xe^x)+c$

(6) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}\, dx =$

(1) $\sqrt{\tan x}+c$ (2) $2\sqrt{\tan x}+c$ (3) $\frac{1}{2}\sqrt{\tan x}+c$ (4) $\frac{1}{4}\sqrt{\tan x}+c$

(7) $\int \sin^3 x\, dx =$

(1) $\frac{-3}{4}\cos x-\frac{\cos 3x}{12}+c$ (2) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{\cos 3x}{12}+c$

(3) $\frac{-3}{4}\cos x+\frac{\cos 3x}{12}+c$ (4) $\frac{-3}{4}\sin x-\frac{\sin 3x}{12}+c$

(8) $\int \frac{e^{6\log x}-e^{5\log x}}{e^{4\log x}-e^{3\log x}}\, dx =$

(1) $x+c$ (2) $\frac{x^3}{3}+c$ (3) $\frac{3}{x^3}+c$ (4) $\frac{1}{x^2}+c$

(9) $\int \frac{\sec x}{\sqrt{\cos 2x}}\, dx =$

(1) $\tan^{-1}(\sin x)+c$ (2) $2\sin^{-1}(\tan x)+c$ (3) $\tan^{-1}(\cos x)+c$ (4) $\sin^{-1}(\tan x)+c$

(10) $\int \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}\right) dx =$

(1) x^2+c (2) $2x^2+c$ (3) $\frac{x^2}{2}+c$ (4) $-\frac{x^2}{2}+c$

(11) $\int 2^{3x+5}\, dx =$

(1) $\frac{3(2^{3x+5})}{\log 2}+c$ (2) $\frac{2^{3x+5}}{2\log(3x+5)}+c$ (3) $\frac{2^{3x+5}}{2\log 3}+c$ (4) $\frac{2^{3x+5}}{3\log 2}+c$

(12) $\int \frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}\, dx =$

(1) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (2) $-\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (3) $\frac{1}{2}\cos 2x+c$ (4) $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

(13) $\int \frac{e^x(x^2 \tan^{-1} x + \tan^{-1} x + 1)}{x^2+1}\, dx =$

(1) $e^x \tan^{-1}(x+1)+c$ (2) $\tan^{-1}(e^x)+c$ (3) $e^x \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2}+c$ (4) $e^x \tan^{-1} x + c$

(14) $\int \frac{x^2+\cos^2 x}{x^2+1} \operatorname{cosec}^2 x dx =$

(1) $\cot x + \sin^{-1} x + c$ (2) $-\cot x + \tan^{-1} x + c$

(3) $-\tan x + \cot^{-1} x + c$ (4) $-\cot x - \tan^{-1} x + c$

(15) $\int x^2 \cos x \, dx =$

(1) $x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$ (2) $x^2 \sin x - 2x\cos x - 2\sin x + c$

(3) $-x^2 \sin x + 2x\cos x + 2\sin x + c$ (4) $-x^2 \sin x - 2x\cos x + 2\sin x + c$

(16) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx =$

(1) $\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x + c$ (2) $\sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$

(3) $\log|x+\sqrt{1-x^2}| - \sqrt{1-x^2} + c$ (4) $\sqrt{1-x^2} + \log|x+\sqrt{1-x^2}| + c$

(17) $\int \frac{dx}{e^x-1} =$

(1) $\log|e^x| - \log|e^x-1| + c$ (2) $\log|e^x| + \log|e^x-1| + c$

(3) $\log|e^x-1| - \log|e^x| + c$ (4) $\log|e^x+1| - \log|e^x| + c$

(18) $\int e^{-4x} \cos x \, dx =$

(1) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos x - \sin x] + c$ (2) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x + \sin x] + c$

(3) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos x + \sin x] + c$ (4) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x - \sin x] + c$

(19) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1} dx =$

(1) $2\log\left|\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right| + c$ (2) $\log\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right| + c$

(3) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}\right| + c$ (4) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}\right| + c$

05_11 Integral Calculus.indd 238 25-03-2019 13:59:07

(20) $\int e^{-7x}\sin 5x\,dx =$

(1) $\dfrac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x-5\cos 5x]+c$ (2) $\dfrac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5x+5\cos 5x]+c$

(3) $\dfrac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5x-5\cos 5x]+c$ (4) $\dfrac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x+5\cos 5x]+c$

(21) $\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx\ =$

(1) $x^2e^{\frac{x}{2}}-4xe^{\frac{x}{2}}-8e^{\frac{x}{2}}+c$ (2) $2x^2e^{\frac{x}{2}}-8xe^{\frac{x}{2}}-16e^{\frac{x}{2}}+c$

(3) $2x^2e^{\frac{x}{2}}-8xe^{\frac{x}{2}}+16e^{\frac{x}{2}}+c$ (4) $x^2\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2}-\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{4}+\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{8}+c$

(22) $\int \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}dx\ =$

(1) $\sqrt{x^2-1}-2\log|x+\sqrt{x^2-1}|+c$ (2) $\sin^{-1}x-2\log|x+\sqrt{x^2-1}|+c$

(3) $2\log|x+\sqrt{x^2-1}|-\sin^{-1}x+c$ (4) $\sqrt{x^2-1}+2\log|x+\sqrt{x^2-1}|+c$

(23) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{(\log x)^2-5}}dx =$

(1) $\log|x+\sqrt{x^2-5}|+c$ (2) $\log|\log x+\sqrt{\log x-5}|+c$

(3) $\log|\log x+\sqrt{(\log x)^2-5}|+c$ (4) $\log|\log x-\sqrt{(\log x)^2-5}|+c$

(24) $\int \sin\sqrt{x}dx\ =$

(1) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}\right)+c$ (2) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)+c$

(3) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\right)+c$ (4) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+c$

(25) $\int e^{\sqrt{x}}dx =$

(1) $2\sqrt{x}(1-e^{\sqrt{x}})+c$ (2) $2\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}}-1)+c$

(3) $2e^{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})+c$ (4) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$

05_11 Integral Calculus.indd 239 25-03-2019 13:59:21

பாடத் தொகுப்பு

வகையிடல்	எதிர்வகையிடல்
$\frac{d}{dx}(c)=0$, இங்கு c ஒரு மாறிலி	$\int 0\,dx = c$, இங்கு c ஒரு மாறிலி
$\frac{d}{dx}(kx)=k$, இங்கு k ஒரு மாறிலி	$\int k\,dx = kx + c$ c ஒரு தன்னிச்சை மாறிலி
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1$ (அடுக்குக் விதி)
$\frac{d}{dx}\log x = \left(\frac{1}{x}\right)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\|x\| + c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x$	$\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(-\text{cosec}\, x) = \text{cosec}\, x \cot x$	$\int \text{cosec}\, x \cot x\,dx = -\text{cosec}\, x + c$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$

05_11 Integral Calculus.indd 240 25-03-2019 13:59:22

(1) k ஒரு மாறிலி எனில், $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$	
(2) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$	

$$\int f(x)\ dx = g(x)+c \text{ எனில், } \int f(ax+b) = \frac{1}{a}g(ax+b)+c$$

(1)	$\int \tan x\ dx = \log\lvert\sec x\rvert + c$
(2)	$\int \cot x\ dx = \log\lvert\sin x\rvert + c$
(3)	$\int \operatorname{cosec} x\ dx = \log\lvert\operatorname{cosec} x - \cot x\rvert + c$
(4)	$\int \sec x\ dx = \log\lvert\sec x + \tan x\rvert + c$

பகுதித் தொகையிடலுக்கான பெர்னோலியின் சூத்திரம்

u மற்றும் v ஆகியவை x – ன் சார்புகள் எனில் பெர்னோலியின் சூத்திரமானது

$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$ ஆகும்.

இங்கு $u', u'', u''', \ldots$ என்பன u –ன் அடுத்தடுத்த வகையிடல்கள் ஆகும் மற்றும் $v, v_1, v_2, v_3, \cdots$ என்பன dv –ன் அடுத்தடுத்த தொகையிடல்கள் ஆகும்

$u = x^n$ (n ஒரு மிகை முழுவெண்) என எடுத்துக்கொள்ளும்போது பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவது எளிதாக இருக்கும்

$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]+c$
$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx]+c$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + c$

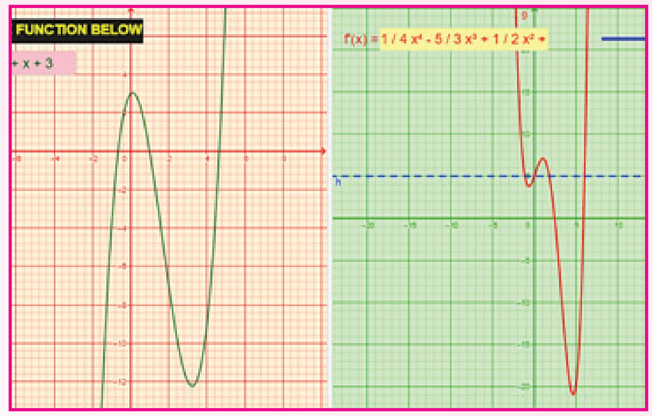
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$
$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+c$
$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert+c$

05_11 Integral Calculus.indd 241 25-03-2019 13:59:31

இணையச் செயல்பாடு 11 (a)

தொகை நுண்கணிதம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப் பெறுவது

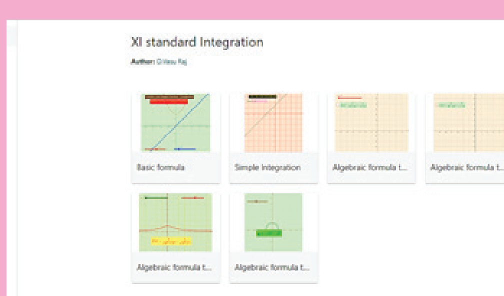


படி – 1

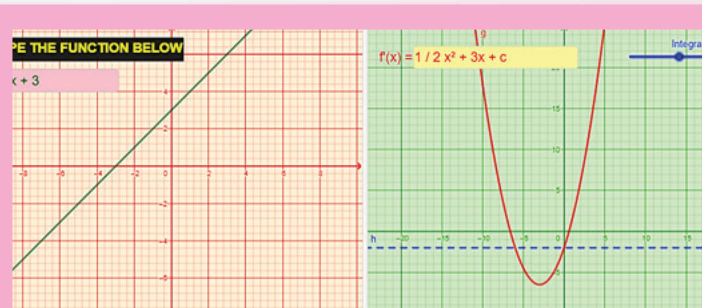
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra-வின் "XI standard Integration" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Simple Integration" என்ற பணித்தாளைத் தேர்வு செய்யவும். f(x) என்ற பெட்டியில் எந்த சார்புகளையும் உள்ளீடு செய்யலாம். அவ்வாறு உள்ளீடுசெய்யும் போது f(x)-ற்கான வரைபடம் இடது பக்கத்திலும், தொகைப்படுத்தப்பட்டது வலது பக்கத்திலும்தோன்றும். (குறிப்பு : x^5 என்பதற்கு x^5 என்று உள்ளீடு செய்யவும்). "integration constant" என்னும் நழுவலை நகர்த்தி தொகையீட்டு மாறிலி மதிப்பை மாற்றவும்.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/c63hdegc

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

B125_11_MAT_TM

05_11 Integral Calculus.indd 242 25-03-2019 13:59:33

இணையச் செயல்பாடு 11 (b)

தொகை நுண்கணிதம்

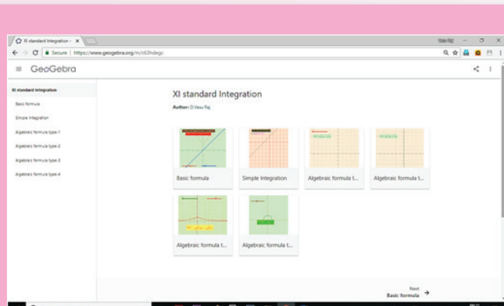
செயல்பாட்டின் இறுதியில்
கிடைக்கப் பெறுவது

படி – 1

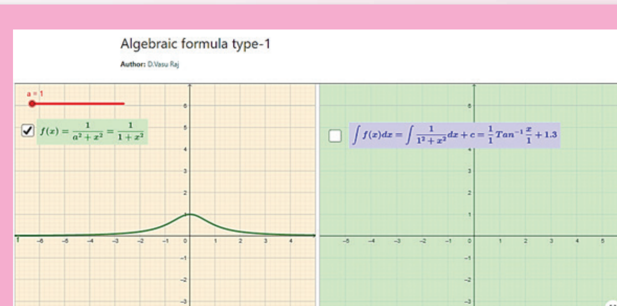
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra–வின்"XI standard Integration" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Algebraic type–1" என்பதைத் தேர்வு செய்க. செயலுக்கான வரைபடம் இடது பக்கத்திலும், தொகைப்படுத்தப்பட்டது வலது பக்கத்திலும்தோன்றும். வரைபடத்தைக்காண இரண்டையும் சொடுக்கவும். நழுவலைநகர்த்தி (a)–ன் மதிப்பினை மாற்ற முடியும். இதே போன்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மற்ற Algebraic type களையும் செய்து மாற்றங்களைஉற்று நோக்குக.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/c63hdegc

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

B125_11_MAT_TM