क्रमचय एवं संचय
(Permutation and Combination)

क्रमचय एवं संचय को समझने के लिए हम दो उदाहरण लेते हैं:

उदा. 1: एक समतल में दिए हुए चार बिन्दुओं A, B, C एवं D से कितने त्रिभुज बन सकते हैं?

यह दिया हुआ है कि 3 बिन्दु एकरेखस्थ (collinear) नहीं हैं। तीन बिन्दुओं A, B एवं C से केवल एक ही त्रिभुज बन सकता है। किस बिन्दु से आरम्भ किया जाता है यह महत्वपूर्ण नहीं है। यद्यपि कि बिन्दुओं का क्रम अलग-अलग हो सकता है। भिन्न-भिन्न क्रम निम्नलिखित प्रकार का हो सकता है : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB एवं CBA, लेकिन इन सभी स्थितियों में जितने त्रिभुज (जैसे ΔABC, ΔACB, ΔBAC, ΔBCA, ΔCAB एवं ΔCBA) बनते हैं वे सभी एक ही हैं। चार बिन्दुओं A, B, C एवं D से अधिकतम चार त्रिभुज बन सकते हैं। वे निम्नलिखित हैं: ΔABC, ΔABD, ΔACD एवं ΔBCD ।

उदा. 2: चार अंक 1, 2, 3 एवं 4 से 3 अंकों का कितना 'नम्बर प्लेट' बन सकता है?

यहाँ अंकों का क्रम महत्वपूर्ण है। अंक 1, 2 एवं 3 के लिए विभिन्न व्यवस्थाएँ (arrangements) निम्नलिखित हैं: 123, 132, 213, 231, 312 एवं 321।

यहाँ कुल नंबर प्लेट (123, 132, 213, 231, 312 एवं 321) 6 विभिन्न गाड़ियों के हैं। जबकि उदा.-1 में सभी 6 त्रिभुज एक ही थे।

3 अंकों वाली नम्बर प्लेटों की कुल संख्या $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

(3 अंकों वाले नम्बर प्लेटों पर निम्नलिखित नम्बर लिखे होंगे : 123, 132, 124, 142, 134, 143, 213, 231, 214, 241, 234, 243, 312, 321, 314, 341, 324, 342, 412, 421, 413, 431, 423, एवं 432)

नोट: उदा.-1 एक संचय (Combination) का उदाहरण है जबकि उदा.-2 क्रमचय (Permutation) का उदाहरण है।

उदा.-1 में त्रिभुजों की कुल संख्या $= {}^4C_3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)} = 4$

Factorial Notation: 1 से प्रारंभ होने वाले 'n' लगातार धनात्मक पूर्णांकों के गुणनफल को **n!** या $\underline{|n}$ से निरूपित किया जाता है और इसे 'factorial n' पढ़ा जाता है। (5! या $\underline{|5}$ को 'factorial' पांच एवं 13! को 'factorial 13' पढ़ा जाता है)

$$\therefore\ n! = 1 \times 2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots\ldots \times 2 \times 1$$

उदाहरण के लिए, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$$\frac{9!}{4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

$$\frac{3!}{7!} = \frac{3!}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!} = \frac{1}{7 \times 6 \times 5 \times 3} = \frac{1}{840}$$

यदि r एवं n दो धनात्मक पूर्णांक हों तथा $r > n$, तो

$$\frac{n!}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ..... \times 2 \times 1}{r \times (r-1) \times ..... \times 2 \times 1}$$

$$= n \times n - 1) \times ..... \times (r+1)$$

उसी प्रकार, $\frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times ..... \times (n-r+1)$

व्यवस्था* (arrangement)*: मान लिया कि हमारे पास चार विभिन्न वस्तुएँ A, B, C एवं D हैं। इन चार वस्तुओं से हमें दो वस्तुओं का एक समूह बनाना है।

दूसरे शब्दों में, दिए हुए 4 वस्तुओं के समूह में से 2 वस्तुओं को एक साथ लेकर हमें एक समूह बनाना है।

स्पष्टत: हमारे पास इस प्रकार 6 समूह होंगे। (i) A एवं B (ii) A एवं C (i) A एवं D (iv) B एवं C (v) B एवं D (vi) C एवं D

सांकेतिक निरूपण (notational representation) से इस प्रकार के समूहों की कुल संख्या

$$= {}^4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

अब, प्रत्येक समूह के दो वस्तुओं को दो भिन्न-भिन्न तरीके से सजाया (arranged) जा सकता है:

(i) A एवं B तथा B एवं A (ii) A एवं C तथा C एवं A और इसी तरह से आगे भी। इसलिए, इस प्रकार की कुल 12 व्यवस्थाएँ (arrangements) हैं।

व्यवस्थाओं की कुल संख्या (total no. of arrangements) = समूहों की संख्या (total no. of groups) ×r! जहाँ, r प्रत्येक समूह में वस्तुओं की संख्या है। उपर्युक्त उदाहरण में व्यवस्थाओं (arrangements) की कुल संख्या $= 6 \times 2! = 6 \times (2 \times 1) = 12$

क्रमचय की परिभाषा (Definition of Permutation)

दिए हुए वस्तुओं में से कुछ या सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जा सकने वाले विभिन्न व्यवस्थाओं को क्रमचय या Permutation कहा जाता है। दिए हुए n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले व्यवस्थाओं की संख्या को ^nP_r से निरूपित किया जाता है। यहाँ अक्षर 'P' Permutation के लिए प्रयुक्त हुआ है।

$$\therefore {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

इस प्रकार ^9P_r निरूपित करता है : 9 विभिन्न वस्तुओं में से 4 वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों (permutations) या व्यवस्थाओं (arrangements) की संख्या को एवं

$$^9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!}$$

$$= 9 \times (9-1) \times (9-2) \times (9-3) = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

संचय की परिभाषा (Definition of Combination)

दिए हुए वस्तुओं में से कुछ या सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले विभिन्न चयनों (selections) या समूहों (groups) को संचय (combination) कहा जाता है।

n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले विभिन्न संचयों (Combinations) को चिह्न ^nC_r से निरूपित किया जाता है। अक्षर 'C' Combination के लिए प्रयुक्त हुआ है।

$$\therefore {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

इस प्रकार, चिह्न $^9C_4$ निरूपित करता है : 9 विभिन्न वस्तुओं के समूह में से 4 वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले चयनों (selections) या समूहों (groups) को। एवं

$$^9C_4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5!}{4\times3\times2\times1\times5!} = 126$$

नोट: Arrangement में, व्यवस्थाओं (arrangements) की कुल संख्या = समूहों या चयनों की कुल संख्या $\times r!$

जहां; r = प्रत्येक समूह (group) या चयन (selection) में वस्तुओं की संख्या,

$\therefore {}^nP_r = {}^nC_r \times r!$

उदाहरण के लिए $^9P_4 = 4! \times {}^9C_4$

गिनती के कुछ मूलभूत सिद्धांत (Some Fundamental Principles of Counting)

I. *गुणा का नियम* (Multiplication Rule):

मान लिया कि एक व्यक्ति अपनी यात्रा स्थान X से प्रारंभ करता है तथा उसे एक भिन्न जगह Y से होकर जगह Z तक जाना है। X से Y के लिए आवागमन के तीन साधन उपलब्ध हैं:

बस, रेलगाड़ी तथा हवाई जहाज। Y से Z के लिए हवाई जहाज की सेवा उपलब्ध नहीं है।

वह Y से Z तक केवल या तो बस से जा सकता है या रेलगाड़ी से। तथा X से Z के लिए सीधा न कोई बस सेवा है न ही कोई रेल सेवा। हमें X से Z तक की अधिकतम संभव रास्ते की संख्या ज्ञात करना है जिससे होकर वह X से Z तक पहुँच सकता है।

X से Y तक जाने के लिए प्रत्येक आवागमन के साधन के लिए, Y से Z तक जाने के लिए दो आवागमन के साधन हैं। इस प्रकार Y से होकर X से Z तक जाने के लिए कुल तरीकों की संख्या (no. of ways)

= 2 (पहला, बस से Y तक तथा पुन: Y से Z तक बस से; दूसरा; बस से Y तक तथा उसके बाद रेलगाड़ी से Z तक।)

+ 2 (पहला, रेलगाड़ी से Y तक तथा उसके बाद बस से Z तक, दूसरा रेलगाड़ी से Y तक उसके बाद रेलगाड़ी से Z तक।)

+ 2 (पहला, हवाई जहाज से Y तक तथा उसके बाद बस से Z तक; दूसरा हवाई जहाज से Y तक तथा उसके बाद रेलगाड़ी से Z तक।)

$= 3 \times 2 = 6$ होगा

निष्कर्ष:

यदि एक काम A को m तरीकों से किया जा सकता है तथा एक दूसरा काम B जिसको n तरीकों से किया जा सकता है तथा अंतिम काम C को तभी किया जा सकता है जब काम A एवं B दोनों किया जा चुका हो तो अंतिम काम C को करने के तरीकों की संख्या $= m \times n$.

उपर्युक्त उदाहरण में, मान लिया कि X से Y तक पहुँचने का काम = काम $A \to m$ अर्थात् 3 तरीकों से। Y से Z तक पहुँचने का काम = काम $B \to n$ अर्थात 2 तरीकों से। तो X से Z तक पहुँचने का अंतिम काम = अंतिम काम C $\to m \times n$ अर्थात् $3 \times 2 = 6$ तरीकों से।

II. *जोड़ का नियम* (Addition Rule):

मान लिया कि एक पार्टी में 42 आदमी तथा 16 औरतें हैं। प्रत्येक आदमी केवल सभी आदमियों से ही हाथ मिलाता है तथा प्रत्येक औरत केवल सभी औरतों से ही अपना हाथ मिलाती है। हमें पार्टी में कुल हस्तमिलापों (handshakes) की अधिकतम संख्या ज्ञात करनी है।

प्रत्येक समूह से दो व्यक्तियों के बीच एक हस्तमिलाप होता है।

***स्थिति* I:** 42 आदमियों के समूह में कुल हस्तमिलापों की संख्या

$$= {}^{42}C_2 = \frac{42!}{2!(42-2)!} = \frac{42!}{2!40!} = \frac{42\times41\times40!}{2\times1\times40!} = 21 \times 41 = 861$$

***स्थिति* II:** 16 औरतों के समूह में कुल हस्तमिलापों की संख्या

$$= {}^{16}C_2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16\times15\times14!}{2\times1\times14!} = 8 \times 15 = 120$$

$\therefore$ हस्तमिलापों की कुल संख्या $= 861 + 120 = 981$

प्रदत्त n विभिन्न वस्तुओं में से n वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए गए व्यवस्थाओं (permutations or arrangements) की कुल संख्या ज्ञात करना:

मान लिया कि एक विद्यार्थी के पास 3 किताबें B_1, B_2 तथा B_3 हैं। तथा उसके किताब की रैक में केवल 3 शेल्फ हैं। उसे इन शेल्फों में किताबों को व्यवस्थित करना है।

स्थिति I: वह प्रत्येक शेल्फ में एक किताब रखता है।

वह पहले शेल्फ में तीनों किताबों में से किसी एक को रखता है। अब उसके पास 2 किताबें शेष हैं और वह दूसरे शेल्फ में इन दो किताबों में से किसी एक को 2 तरीके से रख सकता है। अब उसके पास मात्र एक किताब बच जाती है जिसको वह तीसरे शेल्फ में 1 तरीका से रख सकता है।

कुल तरीकों की संख्या जिसमें वह किताबों को शेल्फ में रख सकता है

$= 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

स्थिति II: वह दो किताबों को एक साथ एक शेल्फ में रखता है तथा शेष 1 किताब को दूसरे शेल्फ में।

वह 3 विभिन्न किताबों में से दो किताबों को एक साथ एक शेल्फ में $^3P_2$ तरीके से रख सकता है। शेष एक किताब को बचे हुए दो शेल्फों में से किसी एक शेल्फ में 1 तरीका से रख सकता है।

∴ किताबों को रखने के कुल तरीकों की संख्या

$$= {}^3P_2 \times 1 = {}^3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3! = 6$$

स्थिति III: वह तीनों किताबों को एक साथ किसी एक शेल्फ में रखता है।

वह तीन किताबों को किसी एक शेल्फ में निम्नलिखित में से किसी एक क्रम में रख सकता है:

जब किताब B_1 सबसे ऊपर रखी जाती है तो B_2 एवं B_3 को 2 तरीकों से रखी जा सकती है: B_2 बीच में एवं B_3 सबसे नीचे तथा B_3 बीच में एवं B_2 सबसे नीचे। इसलिए हम देखते हैं कि यदि किताब B_1 सबसे ऊपर किसी एक शेल्फ में रखी जाती है तो कुल दो तरीकों की व्यवस्थाएँ (arrangements) हैं।

उसी प्रकार, जब B_2 को सबसे ऊपर रखा जाता है तो 2 तरीके की व्यवस्थाएँ हैं तथा जब B_3 को सबसे ऊपर रखा जाता है तो 2 तरह की व्यवस्थाएँ हैं।

∴ किताबों को रखने के तरीकों की कुल संख्या $= 2 + 2 + 2 = 3 \times 2\ (=3!) = 6$

हम देखते हैं कि उपर्युक्त सभी स्थितियों में तीनों किताबों को रखने के तरीकों की कुल संख्या $= 3!$ है।

इस प्रकार, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि प्रदत्त n विभिन्न वस्तुओं में से सभी वस्तुओं (n वस्तुएँ) को एक साथ लेकर बनाए गए व्यवस्थाओं (arrangements) की कुल संख्या $= {}^nP_n = n!$ ......(i)

अब, हम जानते हैं कि

$$ {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

$$ \therefore\ {}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \qquad ....(ii) $$

∴ (i) एवं (ii) से,

$$ n! = \frac{n!}{0!} \text{ या } 0! = \frac{n!}{n!} = 1 $$

इस प्रकार हमें $0! = 1$ प्राप्त होता है।

n *विभिन्न वस्तुओं में से* r *वस्तुओं को एक साथ लेकर, जहाँ प्रत्येक वस्तु की पुनरावृत्ति* (repetition) *कितनी बार भी हो सकती है, बनाए गए व्यवस्थाओं* (permutations *या* arrangements) *की कुल संख्या ज्ञात करना:*

नोट: ${}^nP_r$ (n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए गए व्यवस्थाओं की संख्या $= \frac{n!}{(n-r)!}$, जबकि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

अब, मान लिया कि एक पेंटर को किसी गाड़ी के नंबर प्लेटों पर लिखे चार अंकों की संख्या को रंगना है। इन चार अंकों की संख्याओं को अंक 1, 2, 3, ..., 9 का प्रयोग कर बनाना है तथा अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति है (अर्थात् वह 1111, 1112, 1211, 1121, 1221, 2121 इत्यादि संख्याओं को रंग सकता है)

हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
9 अंकों 1, 2, 3, ..., 9 में से कोई एक अंक 9 तरीकों से			

वह नम्बर प्लेट पर 9 अंकों 1, 2, 3, 4, ..., 9 में से कोई एक अंक हजार स्थान पर 9 तरीकों (ways) से लिख सकता है।

हजार स्थान पर एक अंक लिखने के बाद उसके पास पुन: 9 अंक 1, 2, 3, 4, ..., 9 रह जाता है क्योंकि पुनरावृत्ति (repetition) की अनुमति है। इसलिए वह सैकड़ा स्थान पर भी 9 तरीकों से लिख सकता है। उसी प्रकार वह दहाई एवं इकाई स्थान पर भी 9 तरीकों से लिख सकता है। इस प्रकार, वह कुल $9 \times 9 \times 9 \times 9$ ($= 9 \times 9$........ 4 बार $= 9^4$) $= 6561$ नंबर प्लेट लिख सकता है।

अब, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर जहाँ पुनरावृत्ति की अनुमति है (repetition is allowed) बनाए गए व्यवस्थाओं (permutations या arrangements) की कुल संख्या = n^r

अब, मान लिया कि पेंटर को नंबर प्लेटों पर सभी 10 अंकों (0, 1, 2, ..., 9) का प्रयोग करते हुए बनाए गए 4 अंकों की संख्याओं को रंगना है तथा अंकों की पुनरावृत्ति की भी अनुमति है।

हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
9 अंकों 1, 2, 3, ..., 9 में से कोई एक अंक 9 तरीकों से	10 अंकों 0, 1, 2, 3, ..., 9 में से कोई एक अंक 10 तरीकों से	उसी प्रकार 10 तरीकों से	उसी प्रकार 10 तरीकों से

नोट: यदि वह हजार स्थान पर 0 रखता है तो 4 अंकों की संख्या, 3 अंकों की संख्या में बदल जाएगी। इसलिए वह ऐसा नहीं कर सकता है।

∴ अभीष्ट कुल संख्या $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

परीक्षा की दृष्टि से निम्नलिखित कुछ परिणाम काफी उपयोगी हैं।

(i) यदि $^nC_x = {^nC_y}$ हो तो $x = y$ या $x + y = n$

(ii) n वस्तुओं को, जिनमें p वस्तुएँ एक समान हैं एवं एक प्रकार के हैं , q वस्तुएँ एक समान हैं एवं दूसरे प्रकार के हैं तथा शेष सभी भिन्न-भिन्न प्रकार के हैं, व्यवस्थाओं (permutations) की कुल संख्या = $\dfrac{n!}{p!q!}$

(iii) n एकरूप (identical) वस्तुओं में से r वस्तुओं के ($r \le n$) कुल चयनों (selections) की संख्या = 1

(iv) n एकरूप (identical) चीजों में से शून्य या उससे अधिक चीजों के चयनों (selections) की कुल संख्या = n + 1

(v) n भिन्न-भिन्न (different) वस्तुओं में से शून्य या उससे अधिक वस्तुओं के चयनों (selections) की कुल संख्या $= {^nC_0} + {^nC_1} + {^nC_2} + ... + {^nC_n} = 2n$

(vi) n एकरूप (identical) वस्तुओं को r व्यक्तियों के बीच बाँटने (distribute या divide), जहाँ कोई भी व्यक्ति कितनी भी संख्या में वस्तु प्राप्त कर सकता है, के तरीकों की कुल संख्या $= {^{n+r-1}C_{r-1}}$

हल किए हुए प्रश्न:

उदा. 1: यदि $^nP_3 = 210$ तो n ज्ञात करें।

हल: $\dfrac{n!}{(n-3)!} = 210$ या, $n \times (n-1) \times (n-2) = 7 \times 6 \times 5$ ∴ $n = 7$

उदा. 2: यदि $^7P_r = 210$ तो n ज्ञात करें ।

हल: $\frac{7!}{(7-r)!} = 210$

या, $7 \times 6 \times ...... \times (7 - r + 1) = 7 \times 6 \times 5$

$\Rightarrow 7 - r + 1 = 5$ या, $8 - r = 5$ $\quad \therefore \; r = 8 - 5 = 3$

उदा. 3: यदि $^{m+n}P_4 = 3024$ एवं $^{m-n}P_4 = 120$, तो m और n ज्ञात करें ।

हल: $^{m+n}P_4 = \frac{(m+n)!}{(m+n-4)!}$

$= (m+n) \times (m+n-1) \times (m+n-2) \times (m+n-3)$

$= 3024 = 9 \times 8 \times 7 \times 6$

$\therefore \; m + n = 9$ .... (i)

पुन: $^{m-n}P_4 = (m-n) \times (m-n-1) \times (m-n-2) \times (m-n-3)$

$= 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$

$\Rightarrow m - n = 5$ .... (ii)

(i) एवं (ii) से $m = 7$ एवं $n = 2$

उदा. 4: यदि $^nC_2 = {^nC_5}$ तो n ज्ञात करें ।

हल: $\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{5!(n-5)!}$

या, $5!\,(n-5)! = 2!\,(n-2)!$

या, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times (n-5)! = 2 \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)!$

या, $5 \times 4 \times 3 = (n-2) \times (n-3) \times (n-4)$

$\therefore \; n - 2 = 5$ या, $n = 7$

नोट: जब कभी $^nC_x = {^nC_y}$ एवं $x \neq y$ तो n को $x + y$ के अवश्य ही बराबर होना चाहिए। यहाँ, $2 \neq 5 \therefore n = 2 + 5 = 7$

उदा. 5: किसी अष्टभुज (Octagon) के शिर्षों को मिलाकर कितने समानांतर चतुर्भुज (quadrilateral) बनाए जा सकते हैं?

हल: एक समानांतर चतुर्भुज की चार भुजाएँ या 4 शिर्ष होते हैं जबकि एक अष्टभुज की 8 भुजाएँ या 8 शिर्ष होते हैं।

$\therefore$ अभीष्ट समानांतर चतुर्भुजों की संख्या $= {^8C_4} = \frac{8!}{4!(8-9)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{24} = 70$

उदा. 6: अंक 1, 3, 5, 7 एवं 9 से पाँच अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं। (किसी भी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होनी चाहिए)

हल: प्रदत्त अंकों की संख्या = 5 $\therefore$ अभीष्ट संख्या = $^5P_5 = 5! = 120$

नोट: यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो तो अभीष्ट संख्या = $5^5 = 3125$

उदा. 7: अंक 0, 2, 4, 6 एवं 7 से पाँच अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?

हल:

दस हजार स्थान	हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
$^4P_1$ अर्थात् 4 तरीके से (2, 4, 6, 8 में से कोई भी एक)	दस हजार स्थान को भरने के बाद हमारे पास चार अंक (0 की शामिल करके) बच जाते हैं तथा खाली स्थानों की संख्या भी 4 है $\therefore$ $^4P_4 = 4! = 24$ तरीके से			

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = $4 \times 24 = 96$

नोट: **1.** यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो तो अभीष्ट संख्या = $4 \times 5^4 = 2500$

2. दस हजार स्थान के लिए हम अंक 0 नहीं रख सकते हैं।

उदा. 8: अंक 0, 1, 2, 3, 4, 6 एवं 8 से 5 अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?

हल: यहाँ अंकों की पुनरावृत्ति (repetition) के बारे में कुछ भी नहीं कहा गया है इसका तात्पर्य है कि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

दस हजार स्थान	हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
$^6P_1 = 6$ तरीके से 0 को शामिल नहीं करने के	दस हजार स्थान को भरने के बाद हमारे पास 6 अंक (0 की शामिल करके) रह जाते हैं तथा खाली स्थान 4 हैं। इसलिए $^6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ तरीकों से			

$\therefore$ अभीष्ट कुल संख्या $6 \times 360 = 2160$

उदा. 9: अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 एवं 6 से 3 अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?

हल: ***स्थिति* I:** इकाई स्थान पर जब 0 आता है।

सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
$^6P_2 = 6 \times 5 = 30$ तरीकों से		केवल 0 अर्थात् 1 तरीका से

$\therefore$ इस प्रकार की कुल संख्याएँ = $30 \times 1 = 30$

***स्थिति* II:** जब इकाई स्थान पर 0 नहीं आता है।

सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
इकाई स्थान को भरने के बाद हमारे पास 6 अंक बच जाते हैं लेकिन 0 सैकड़ा स्थान पर नहीं आ सकता है। अंतत: हमारे पास 5 अंक बच जाते हैं, इसलिए $^5P_1 = 5$ तरीकों से	इकाई स्थान एवं सैकड़ा स्थान को भरने के बाद हमारे पास 6 अंक बच जाते हैं। (0 को शामिल करके) इसलिए 5 तरीकों से।	2, 4 एवं 6 में से कोई भी 3 तरीके से

इस प्रकार की कुल संख्या $= 5 \times 5 \times 3 = 75$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 30 + 75 = 105$

उदा. 10: अंक 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9 से वैसी संख्याएँ जो 800 से बड़ी तथा 4000 से छोटी हों कितनी बन सकती हैं? किसी भी संख्या में कोई भी अंक एक बार से ज्यादा प्रयुक्त नहीं हुआ हो।

***हल: स्थिति* I:** 3 अंकों की संख्या :

सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
8 या 9 अर्थात् 2 तरीके से	$^7P_2 = 7 \times 6 = 42$ तरीके से	

$\therefore$ कुल संख्या $= 2 \times 42 = 84$

***स्थिति* II:** 4-अंकों की संख्या:

हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
1 या 2 अर्थात् 2 तरीके से	$^7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ तरीके से		

$\therefore$ कुल संख्या $= 2 \times 210 = 420$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 84 + 420 = 504$

उदा. 11: 'DELHI' शब्द में प्रयुक्त अक्षरों से बनाए जाने वाले वैसे शब्दों की संख्या ज्ञात करें

(i) जो D से शुरू होता है।

(ii) जिसके अंत में I हो।

(iii) जिसका अक्षर L हमेशा बीच में हो एवं

(iv) जो D से शुरू होता है तथा I से अंत होता है।

हल: 'DELHI' शब्द में 5 अक्षर हैं।

स्थिति (i):

D				
1 तरीका	$^4P_4 = 24$ तरीके			

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 1 \times 24 = 24$

स्थिति (ii):

				I
$^4P_4 = 24$ तरीके				1 तरीका

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 1 \times 24 = 24$

स्थिति (iii):

		L		
		1 तरीका		

शेष 4 स्थानों को $^4P_4 = 24$ तरीकों से भरा जाएगा।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 1 \times 24 = 24$

स्थिति (iv):

D				I
1 तरीका	$^3P_3 = 6$ तरीके			1 तरीका

∴ अभीष्ट संख्या $= 6 \times 1 \times 1 = 6$

उदा. 12: 'EQUATION' शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: n विभिन्न वस्तुओं में से सभी को एक साथ लेकर बनाए गए व्यवस्थाओं (permutations या arrangements) की संख्या $^nP_n = n!$

यहाँ, शब्द 'EQUATION' में 8 अक्षर हैं।

∴ अभीष्ट शब्दों की संख्या $= 8! = 40320$

उदा. 13: 'EQUATION' के अक्षरों से कितने वैसे शब्द बनाए जा सकते हैं जिसके शुरू के अक्षर स्वर (voerl) हों?

हल: 'EQUATION' शब्द में 8 अक्षर हैं।

A E I O U							
5 तरीकों से	$^7P_7 = 7! = 5040$ तरीकों से						

∴ अभीष्ट संख्या $= 5 \times 5040 = 25200$

उदा. 14: शब्द 'INTERNATIONAL' के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: शब्द 'INTERNATIONAL' में 13 अक्षर हैं, जिसमें N तीन बार आता है, I, T एवं A में से प्रत्येक 2 बार आता है। तथा शेष भिन्न-भिन्न हैं।

∴ अभीष्ट संख्या $= \dfrac{13!}{3!\,2!\,2!\,2!}$

$$= \frac{13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{6\times2\times2\times2}$$

$$= 13 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2 = 129729600$$

उदा. 15: एक कतार (row) में 4 लड़कों एवं 5 लड़कियों को बारी-बारी से कितने तरीकों से बैठाया जा सकता है?

हल:

G	B	G	B	G	B	G	B	G

उपर्युक्त चित्र लड़के एवं लड़कियों के बैठने की संभव व्यवस्था को दर्शाता है।

∴ 4 लड़के 4 जगहों पर $^4P_4 = 4!$ एवं 5 लड़कियाँ 5 जगहों पर 5! तरीके से बैठाए जा सकते हैं।

∴ अभीष्ट तरीकों की संख्या $= 4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$

उदा. 16: 4 लड़के एवं 4 लड़कियाँ हैं। एक कतार में इनको इस तरह से बैठाया जाता है कि सभी लड़कियाँ एक साथ नहीं बैठती हैं। इस तरह से बैठाने के कितने तरीके हो सकते हैं?

हल: कुल व्यक्तियों (persons) की संख्या $= 4 + 4 = 8$। जब किसी तरह की कोई पाबंदी नहीं हो तो इन सभी को कतार में 8! तरीकों से बैठाया जा सकता है। परन्तु जब सभी लड़कियाँ एक साथ बैठती हों तो हम 4 लड़कियों के समूह को एक व्यक्ति मान सकते हैं। इसलिए हमारे पास केवल 4 (लड़कों की संख्या) + 1 = 5 व्यक्ति हैं। इन सभी को एक कतार में 5! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है। परंतु 4 लड़कियों को आपस में $^4P_4 = 4!$

तरीकों से व्यवस्थित (arranged) किया जा सकता है।

∴ जब सभी लड़कियाँ एक साथ हों तो तरीकों की संख्या = $5! \times 4!$

∴ जब सभी लड़कियाँ एक साथ नहीं बैठती हों तो तरीकों की संख्या

$$= 8! - 5! \times 4!$$
$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5! - 5! \times 24$$
$$= 5!(336 - 24)$$
$$= 120 \times 312 = 37440$$

उदा. *17:* 'EQUATION' शब्द के अक्षरों से, स्वरों (vowels) एवं व्यंजनों (consonants) के आपेक्षिक क्रम (relative order) बिना बदले, कितने विभिन्न शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: 'EQUATION' शब्द में, पाँच स्वर (vowels) E, U, A, I एवं O क्रमशः पाँच जगहों 1, 3, 4, 6 एवं 7 को घेरता है जबकि 3 व्यंजन (consonants) Q, T एवं N क्रमशः 3 जगहों 2, 5, एवं 8 को घेरता है। शब्द के सभी अक्षर भिन्न-भिन्न हैं अर्थात् किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति (repetition) नहीं हुई है।

5 स्वर 5 जगहों पर $^5P_5 = 120$ तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं जबकि 3 व्यंजन को 3 जगहों पर $^3P_3 = 3! = 6$ तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

∴ अभीष्ट संख्या = $120 \times 6 = 720$

उदा. *18:* 'BANANA' शब्द के अक्षरों से वैसे कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जिनके व्यंजन सम स्थानों को घेरता हो?

हल:

1	2	3	4	5	6

शब्द 'BANANA' में कुल 6 अक्षर हैं जिसमें A तीन बार आता है तथा N दो बार। 3 व्यंजनों B एवं N (जो दो बार आता है) को 3 सम स्थानों 2, 4 एवं 6 पर $\left(\frac{3!}{2!} = \right)$ 3 तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

शेष तीन विषम स्थानों को 3 A से $\frac{3!}{3!} = 1$ तरीका से व्यवस्थित किया जा सकता है।

∴ अभीष्ट शब्दों की कुल संख्या = $3 \times 1 = 3$

उदा. *19:* 6, एकरूप (identical) बॉक्सों में 4 एकरूप गेंदों को कितने तरीके से डाला जा सकता है, यदि एक बक्सा में एक से अधिक गेंदें नहीं रखी जा सकती हों?

हल: एकरूप गेंदों की संख्या = 4 एवं एकरूप बॉक्सों की संख्या = 6

अब, 4 एकरूप गेदों को 6 एकरूप बॉक्सों में जहाँ एक बॉक्स में एक से अधिक गेंदें नहीं जा सकते हैं डालने का मतलब है 6 बॉक्सों में से 4 बॉक्सों का चयन करना (select)

जो कि $^6C_4 = \frac{6!}{4!2!} = 15$ तरीकों से किया जा सकता है।

उदा. *20:* 12 भुजाओं की एक बहुभुज के शीर्षों (vertices) को मिलाने से बने त्रिभुजों की कुल संख्या ज्ञात करें।

हल: m भुजाओं की एक बहुभुज के m शीर्ष होते हैं। बहुभुज के किसी भी तीन शीर्षों के मिलाने से एक त्रिभुज बनेगा।

$\therefore$ त्रिभुजों की संख्या $= {}^{m}C_3 = \dfrac{m!!}{3!(m-3)!}$

$$= \frac{m\times(m-1)\times(m-2)\times(m-3)!}{6\times(m-3)!}$$

$$= \frac{m\times(m-1)\times(m-2)}{6}$$

अब $m = 12$ रखने पर,

त्रिभुजों की अभीष्ट संख्या $= \dfrac{12\times11\times10}{6} = 220$

उदा. 21: 12 भुजाओं के एक बहुभुज के विकर्णों की संख्या बताएँ।

हल: m भुजा वाले बहुभुज के m शीर्ष होते हैं।

बहुभुज का एक विकर्ण या एक भुजा बहुभुज के दो शीर्षों को मिलाने से बनता है।

बहुभुज के विकर्णों की संख्या + बहुभुज की भुजाओं की संख्या $(= m) = {}^{m}C_2$

$\therefore$ बहुभुज के विकर्णों की संख्या $= {}^{m}C_2 - m$

$$= \frac{m!}{2!(m-2)!} - m = \frac{m\times(n-1)}{2} - m$$

$$= \frac{m\times(m-1)-2m}{2} = \frac{m(m-3)}{2}$$

$m = 12$ रखने पर, विकर्णों की अभीष्ट संख्या $= \dfrac{12\times9}{2} = 54$

उदा. 22: एक पार्टी में प्रत्येक व्यक्ति प्रत्येक दूसरे व्यक्ति से हाथ मिलाता है। यदि पार्टी में कुल हस्तमिलापों (handshakes) की संख्या 210 हो तो पार्टी में उपस्थित व्यक्तियों की संख्या ज्ञात करें।

हल: प्रत्येक दो व्यक्तियों के चयन (selection) के लिए एक हस्तमिलाप (handshake) होगा।

इसलिए, पार्टी में हस्तमिलापों की संख्या ${}^{n}C_2$ जहाँ; n = पार्टी में उपस्थित व्यक्तियों की संख्या

अब, ${}^{n}C_2 = 210$ (दिया हुआ है)

या, $\dfrac{n\times(n-1)}{2} = 210$

या, $n\times(n-1) = 2\times(2\times3\times5\times7) = 21\times20$

$\therefore n = 21$

उदा. 23: एक 5 सदस्यों की प्रतिनिधिमंडल (delegation) को विदेश भेजी जानी है। सदस्यों की कुल संख्या 10 है। चयन (selection) कितने तरीके से की जा सकती है ताकि एक खास

सदस्य हमेशा (i) शामिल हो तथा (ii) शामिल नहीं हो?

हल: एक खास सदस्य का चयन $^1C_1 = 1$ तरीके से किया जा सकता है। किसी खास सदस्य के चयन के बद हमारे पास 9 सदस्य बच जाते हैं तथा प्रतिनिधिमंडल के लिए हमें 4 और सदस्यों की आवश्यकता है। इसलिए चयन $^9C_4$ तरीकों से किया जा सकता है।

$\therefore$ चयन करने के अभीष्ट तरीके $= {}^1C_1 \times {}^9C_4$

$$= \frac{1\times9\times8\times7\times6}{24} = 126$$

(ii) जब एक खास व्यक्ति को पाँच सदस्यीय प्रतिनिधिमंडल से हमेशा अलग रखा जाता है तो हमारे पास (10–1=) 9 सदस्य बच जाते हैं।
इसलिए चयन $^9C_5$ तरीके से किया जा सकता है।
$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= {}^9C_5 = 126$

उदा. 24: एक समतल में दिए गए 11 बिन्दुओं (जिनमें से 5 एकरेखीय (collinear हैं) से बनाए गए त्रिभुजों की संख्या ज्ञात करें।

हल: माना कि 11 ऐसे बिन्दु हैं जिनका कोई भी 3 बिन्दु एक रेखीय नहीं हैं। अब, 11 बिन्दुओं में से किसी भी 3 बिन्दुओं को मिलाने से एक त्रिभुज बन सकता है।
इसलिए, 11 बिन्दुओं में से किसी भी 3 बिन्दुओं का चयन (selection) $^{11}C_3$ तरीकों से किया जा सकता है।
5 बिन्दुओं से बने त्रिभुजों की संख्या जब कोई भी 3 या उससे अधिक बिन्दु एक रेखीय (collinear) नहीं हों $= {}^5C_3$
परंतु 3 या उससे अधिक एकरेखीय बिन्दुओं से त्रिभुज नहीं बनाया जा सकता है।
$\therefore$ त्रिभुजों की अभीष्ट संख्या $= {}^{11}C_3 - {}^5C_3$

$$= \frac{11\times10\times9}{6} - \frac{5\times4}{2}$$

$$= 165 - 10 = 155$$

उदा. 25: एक व्यक्ति के 12 दोस्त हैं जिसमें से 7 उसके रिस्तेदार हैं। 6 दोस्तों को, जिसमें कम-से-कम 4 रिस्तेदार हों, कितने तरीके से आमंत्रित कर सकता है?

हल: वेसे दोस्तों की संख्या जो रिस्तेदार नहीं हैं $= 12 - 7 = 5$
वह 6 दोस्तों को निम्नलिखित तरीकों से आमंत्रित कर सकता है।

I: 4 रिस्तेदार + 2 जो रिस्तेदार नहीं हैं
$\Rightarrow {}^7C_4 \times {}^5C_2$

II: 5 रिस्तेदार + 1 जो रिस्तेदार नहीं हैं
$\Rightarrow {}^7C_5 \times {}^5C_1$

III: 6 रिस्तेदार + 0 जो रिस्तेदार नहीं हैं
$\Rightarrow {}^7C_6$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= {}^7C_4 \times {}^5C_2 + {}^7C_5 \times {}^5C_1 + {}^7C_6$
$= 35 \times 10 + 21 \times 5 + 7 = 462$

उदा. 26: एक परीक्षा में सफल होने के लिए प्रत्येक 6 विषयों में एक न्यूनतम अंक प्राप्त करना आवश्यक है। एक विद्यार्थी कितने तरीके से असफल हो सकता है?

हल: एक विद्यार्थी असफल होगा यदि वह 6 विभिन्न विषयों में से एक या एक से अधिक विषयों में असफल होता है।

अर्थात् $^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$= ({}^6C_0 + {}^6C_1 + ... + {}^6C_6) - {}^6C_0 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ तरीकों से

***दूसरी विधि* (Other Approach):**

यदि वह किसी भी 6 विषयों में असफल होता है तो वह असफल हो जाता है। प्रत्येक विषय के साथ दो सम्भावनाएँ हैं या तो सफल या असफल। इस प्रकार, 6 विषयों के लिए संभावनाएँ

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$ हैं।

यह उस स्थिति, जब वह सभी 6 विषयों में सफल होता है, को भी शामिल करता है। इसलिए वह असफल (64 – 1=) 63 तरीके से हो सकता है।

नोट : एक प्रश्नपत्र में 6 प्रश्न हैं। एक विद्यार्थी एक या एक से अधिक प्रश्नों को कितने तरीके से हल कर सकता है? यह उपर्युक्त प्रश्न की तरह ही है। इसलिए अभीष्ट उत्तर है 63।

उदा. 27: 12 विभिन्न पुस्तकों को बराबर-बराबर कितने तरीकों से निम्नलिखित में बाँटा जा सकता है :

a) 4 व्यक्तियों के बीच एवं

b) 3 व्यक्तियों के बीच ?

हल: (a) प्रत्येक व्यक्ति को $12 \div 4 = 3$ किताबें मिलेंगी अब, पहले व्यक्ति को 12 किताबों में से 3 किताबें $^{12}C_3$ तरीकों से दिया जा सकता है। दूसरे व्यक्ति को 3 किताबें शेष (12 – 3 =) 9 किताबों में से $^9C_3$ तरीकों से दिया जा सकता है। इसी प्रकार, तीसरे व्यक्ति को $^6C_3$ एवं चौथे व्यक्ति को $^6C_3$ तरीकों से।

$\therefore$ तरीकों की अभिष्ट संख्या $= {}^{12}C_3 \times {}^9C_3 \times {}^6C_3 \times {}^3C_3$

$$= \frac{12!}{3!\,9!} \times \frac{9!}{3!\,6!} \times \frac{6!}{3!\,3!} \times \frac{3!}{3!\,0!}$$

$$= \frac{12!}{(3!)^4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 6 \times 6 \times 6} = 369600$$

(b) अब, प्रत्येक व्यक्ति $12 \div 3 = 4$ किताबें प्राप्त करेगा।

उसी प्रकार, तरीकों की अभीष्ट संख्या $= {}^{12}C_4 \times {}^8C_4 \times {}^4C_4$

$$= \frac{12!}{4!\,8!} \times \frac{8!}{4!\,4!} \times \frac{4!}{4!\,0!} = \frac{12!}{(4!)^3}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 24 \times 24} = 34650$$

उदा. 28: 12 विभिन्न किताबें बराबर-बराबर कितने तरह से निम्नलिखित में बाँटा जा सकता है?

a) 4 समूहों या दलों के बीच तथा

b) 3 समूहों या दलों के बीच

हल: (a) तरीकों की अभीष्ट संख्या $= \dfrac{{}^{12}C_3 \times {}^{9}C_3 \times {}^{5}C_3 \times {}^{3}C_3}{4!} = \dfrac{12!}{4!(3!)^4} = 15400$

(b) तरीकों की अभीष्ट संख्या $= \dfrac{{}^{12}C_4 \times {}^{8}C_4 \times {}^{4}C_4}{4} = \dfrac{12!}{3!\times(4!)^3} = 5775$

उदा. 29: 'EXTRA' शब्द के अक्षरों से वैसे कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जिसमें स्वर (vowels) हमेशा एक साथ हों?

हल: E एवं A को एक अक्षर मानते हुए, शब्द EXTRA में अक्षरों की कुल संख्या = 4 जो कि ${}^4P_4$ अर्थात् 4! तरीके से व्यवस्थित किया जा सकता है एवं दो स्वरों को आपस में 2! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 4! \times 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$

उदा. 30: 'DIRECTOR' शब्द के अक्षरों को इस तरह से व्यवस्थित किया गया है कि सभी स्वर एक साथ आ गए हैं। इस तरह की व्यवस्था को बनाने के तरीकों की संख्या ज्ञात करें।

(1) 4320 (2) 2720 (3) 2160

(4) 1120 (5) इनमें से कोई नहीं

हल: सभी स्वरों (I, E, O) को एक अक्षर मानते हुए (चूँकि वे एक साथ आते हैं), अक्षरों की कुल संख्या 6 हैं तथा उसमें R दो बार आया है।

$\therefore$ व्यवस्थाओं (arrangements) की संख्या $= \dfrac{6!}{2!} \times 3! = 2160$

तीन स्वरों को आपस में 3! तरीके से व्यवस्थित किया जा सकता है, इसलिए 3! से गुणा किया गया है। इसलिए (3) उत्तर है।

उदा. 31: 'RECOVER' शब्द के अक्षरों से कितने विभिन्न शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: संभव व्यवस्थाएँ (arrangements) हैं:

$$\frac{7!}{2!2!} = 1260$$

2! से दो बार भाग दिया गया है क्योंकि E एवं R की पुनरावृत्ति (repetition) हुई है।

उदा. 32: एक कतार (row) में 4 लड़कों एवं 2 लड़कियों को इस प्रकार बैठाया जाता है कि दो लड़कियाँ हमेशा साथ बैठती हैं। कितने विभिन्न तरीकों से वे बैठाए जा सकते हैं?

1) 1200 2) 7200 3) 148 4) 240 5) इनमें से कोई नहीं

हल: एक साथ बैठने वाले दो छात्रों को 1 छात्र मानें। अब, 5 छात्र हैं।

उनको व्यवस्थित (arrange) करने के संभव तरीके हैं = 5! = 120

अब, वे (दो लड़कियों) आपस में 2! तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

इसलिए कुल तरीका = 120 × 2 = 240

उदा. 33: एक सभा में प्रत्येक सदस्य दूसरे सदस्यों के साथ हाथ मिलाते हैं। यदि हस्तमिलापों (handshakes) की कुल संख्या 28 थी तो सभा में कितने सदस्य उपस्थित थे?

1) 14 2) 7 3) 9 4) 8 5) इनमें से कोई नहीं

हल: जब दो व्यक्ति हाथ मिलाते हैं तो एक हस्तमिलाप (handshake) प्राप्त होता है। यदि हम मान लें कि सभा में कुल x व्यक्ति उपस्थित थे तो हस्तमिलापों की कुल संख्या $= {}^xC_2 = 28$

या, $\frac{x(x-1)}{2!} = 28$ या $x(x-1) = 56 = 7\times 8 \quad \therefore x = 8$

उदा. 34: अंक 3, 1, 7, 0, 9, 5 से 6 अंकों की कितनी विभिन्न संख्याएँ (बिना अंकों की पुनरावृत्ति के) बनाई जा सकती हैं?

(i) कितनी संख्याओं में इकाई स्थान पर '0' होगा?

(ii) कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी?

(iii) कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य नहीं होंगी?

हल: 6 अंकों की संख्याओं की कुल संख्या $= 6! - 5! = 600$

(**नोट:** 5! वे संख्याएँ हैं जिनके पहले स्थान पर 0 है तथा इन्हें शामिल नहीं किया जाएगा।)

(i) $5! = 120$

(ii) संख्याएँ जो 5 से विभाज्य हैं:

(a) जब इकाई स्थान पर 0 हो तथा शेष 5 अंकों को $5! = 120$ तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

(b) जब अंतिम स्थान पर 5 हो तथा ऊपर की तरह हम इसे $5! = 120$ तरीकों से व्यवस्थित कर सकते हैं। वैसी संख्याएँ जिनके प्रथम स्थान पर 0 हो (अर्थात् पाँच अंकों वाली संख्या) को भी शामिल किया जाता है। इसलिए वे संख्याएँ जिनका पहला अंक 0 हो तथा इकाई अंक 5 हो 4! होंगी।

$\therefore$ 6 अंकों की वैसी संख्याएँ जिसके अंत में 5 हो $= 5! - 4! = 120 - 24 = 96$

इसलिए 6 अंकों की संख्याओं जो 5 से विभाज्य हैं की कुल संख्या $= 120 + 96 = 216$

(iii) जो 5 से विभाज्य नहीं हैं

कुल - (5 से विभाज्य) $= 600 - 216 = 384$

उदा. 35: 9 अंकों की वैसी संख्याएँ, जिनके सभी अंक भिन्न-भिन्न हैं, की संख्या ज्ञात करें।

हल: 9 अंकों की संख्याओं की कुल संख्या $= {}^{10}P_9 - {}^9P_8 = \frac{10!}{1!} - \frac{9!}{1!}$

$= 9!(10-1) = 9(9!)$

$= 9 \times (9 \times 8 \times 7 \times 6!)$

$= 81 \times 56 \times 720 = 3265920$

***वैकल्पिक विधि* (Alternative Method):**

संख्या 9 अंकों की है। पहला स्थान (बाईं ओर से) केवल 9 तरीकों से भरा जा सकता

है। क्योंकि पहले स्थान पर 0 नहीं हो सकता है। पहले स्थान को भरने के बाद शेष 8 जगहों को बचे हुए 9 अंको से $^9P_8 = 9!$ तरीकों से भरा जा सकता है।

इसलिए कुल $= 9 \times 9!$

उदा. 36: 'MATHEMATICS' शब्द के सभी अक्षरों का प्रयोग करते हुए कितनी विभिन्न व्यवस्थाएँ (arrangements) बनायी जा सकती हैं?

(a) उनमें से कितने C से शुरू होते हैं तथा उनमें से कितने T से शुरू होते हैं?

(b) 'MATHEMATICS' शब्द के अक्षरों में 4 अक्षरों को एक साथ लेकर कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: (a) कुल 11 अक्षर हैं : दो M, दो A, दो T, H, E, L, C, S

सभी अक्षरों को एक साथ लेकर बनाए गए शब्दों की संख्या

$$= \frac{11!}{2!\times 2!\times 2!} = \frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6!!}{2\times 2\times 2} = 990\times 7\times 720 = 990\times 5040 = 4989600$$

C से शुरू करने पर,

C को पहले स्थान पर रखने पर हमारे पास शेष 10 अक्षर हैं जिसमें दो M हैं, दो A हैं, तथा दो T हैं एवं शेष 4 भिन्न-भिन्न अक्षर हैं।

bl fy, 'Khkdh la;k= $\frac{10!}{2!\,2!\,2!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{2\times 2\times 2} = 90\times 7\times 720$

$$= 630\times 720 = 453600$$

T से शुरू करने पर,

T को पहले स्थान पर रखने पर हमारे पास केवल 10 अक्षर बच जाते हैं जिसमें दो M हैं, एवं दो A हैं तथा शेष 6 हैं H, E, I, C, S तथा T

$\therefore$ शब्दों की संख्या है $\frac{10!}{2!\times 2!} = 907200$

(b) हमलोग भाग (a) में उल्लिखित 11 अक्षरों में से 4 अक्षरों को निम्नलिखित तरीकों से चुन सकते हैं।

सभी चार भिन्न-भिन्न हैं :

हमारे पास 8 भिन्न-भिन्न प्रकार के अक्षर हैं जिसमें से 4 को $^8P_4 = \frac{8!}{4!}$

$= 8\times 7\times 6\times 5 = 1680$ तरीके से चुना जा सकता है।

दो भिन्न-भिन्न एवं दो एक समान,

हमारे पास एक समान अक्षरों के तीन जोड़े हैं जिसमें से एक जोड़ा को $^3C_1 = 3$ तरीकों से चुना जा सकता है। अब हमें शेष 7 भिन्न-भिन्न अक्षरों में से दो को चुनना है जो कि

$^7C_2 = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7\times 6}{2} = 21$ तरीकों से किया जा सकता है इसलिए अक्षरों (जिसमें 2

भिन्न-भिन्न हैं तथा 2 एक तरह के हैं) के समूहों की संख्या $= 3 \times 21 = 63$

मान कि इस प्रकार का एक समूह = M, H, M, I

इस प्रकार के प्रत्येक समूह में 4 अक्षर हैं जिसमें दो एक समान हैं तथा इन्हें आपस में $\frac{4!}{2!} = 12$ तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

$\therefore$ शब्दों की कुल संख्या $= 63 \times 12 = 756$

एक प्रकार का दो एकसमान तथा दूसरे प्रकार का दो एकसमान :

एक तरह के अक्षरों के तीन जोड़ों में से दो जोड़ों को ${}^3C_2 = 3$ तरीकों से चुना जा सकता है।

इस प्रकार का एक समूह MMAA है।

ये चार अक्षर जिसमें एक प्रकार के दो एकसमान हैं तथा दूसरे प्रकार के दो एकसमान हैं, को $\frac{4!}{2!2!} = 6$ तरीकों से व्यवस्थित (arranged) किया जा सकता है।

इसलिए इस प्रकार के शब्दों की कुल संख्या $= 3 \times 6 = 18$

$\therefore$ 4 अक्षर के शब्दों की कुल संख्या $= 1680 + 756 + 18 = 2454$

अभ्यास प्रश्न

1. यदि ${}^{15}C_{r-1} : {}^{15}C_r = 5 : 11$ हो तो r ज्ञात करें।
2. यदि ${}^nC_{n-6} = 462$ हो तो ज्ञात करें।
3. 0, 1, 2, 4, 6 एवं 8 अंकों से पाँच अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?
4. 0, 1, 2, 3, 4, 5 एवं 6 अंकों से तीन अंकों की कितनी विषम संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?
5. 0, 2, 5, 6 एवं 9 अंकों से 4 अंकों की वैसी संख्याएँ जो 5 से विभाज्य हों कितनी बनायी जा सकती हैं?
6. EQUATION शब्द के अक्षरों से 4 अक्षरों का वैसा शब्द जिसके प्रारंभ में या तो A हो या E कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?
7. INTERMEDIATE शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित (arranged) किया जा सकता है?
8. ARTICLE शब्द के अक्षरों से वैसे कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जिनके सम स्थानों (even places) पर स्वर (vowels) हों?
9. EQUATION शब्द में प्रयुक्त अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जबकि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति कितनी बार भी हो सकती है?
10. EQUATION शब्द के अक्षरों से पाँच अक्षरों के वैसे कितने शब्द जिनके विषम स्थानों पर स्वर (vowels) हों बनाए जा सकते हैं?
11. यदि 7 समानान्तर रेखाओं को दूसरी 7 समानांतर रेखाएँ काटती हों तो इस प्रकार बने समानान्तर चतुर्भुजों (parallelograms) की संख्या ज्ञात करें?
12. A, B, C, D एवं E कुल 5 विद्यार्थी हैं।

(i) वे कितने तरीके से बैठ सकते हैं जिसमें B एवं C एक साथ नहीं बैठते हों?

(ii) तीन सदस्यों की समिति, जिसमें A हमेशा समिति में शामिल हो तथा E हमेशा समिति से बाहर हो, कितने तरीके से बनाया जा सकता है?

13. एक समतल (plane) में 12 बिन्दु हैं जिसमें 5 एकरेखीय (collinear) हैं। इन बिन्दुओं को मिलाने से बनी सीधी रेखाओं (straight lines) को ज्ञात करें।

14. एक छात्र को 10 प्रश्न, जो कि समूहों में विभाजित हैं तथा प्रत्येक समूह में 5 प्रश्न हैं, में से 5 प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है। यदि उसे एक समूह से 4 से अधिक प्रश्नों के उत्तर देने की अनुमति नहीं हो तो वह कितने तरीके से प्रश्नों का उत्तर दे सकता है?

15. 5 लड़कों एवं 8 लड़कियों में से 8 सदस्यों की एक समिति बनानी है। इस तरह की कितनी समितियाँ बनाई जा सकती हैं जिसमें लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से कम नहीं हो?

16. 6 पुरुषों एवं 5 महिलाओं में से 5 सदस्यों की एक समिति बनानी है। इस तरह की कितनी समितियाँ बनाई जा सकती हैं जिसमें कम-से-कम एक महिला अवश्य हो?

17. 4 महिलाओं एवं 3 पुरुषों में से टेनिस खेलने के लिए कितने प्रकार की भिन्न-भिन्न दलें (groups) बनायी जा सकती हैं जिसमें प्रत्येक ओर एक महिला एवं एक पुरुष हो?

उत्तर

1. उत्तर = 5
2. उत्तर = 11
3. संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 5 \times {}^5P_4 = 5 \times 5! = 5 \times 120 = 600$
4. संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 5 \times 5 \times 3 = 75$
5. 5 से विभाजित होने के लिए किसी संख्या के इकाई अंक या तो 0 होता है या 5
   जब इकाई स्थान पर 0 हो तो संख्याओं की
   संख्या $= {}^4P_3 \times 1 = 24$
   जब 5 इकाई स्थान पर हो तो संख्याओं की
   संख्या $= 3 \times {}^3P_2 \times 1 = 3 \times 6 \times 1 = 18$
   $\therefore$ कुल अभीष्ट संख्या $= 24 + 18 = 42$
6. इस प्रकार के शब्दों की अभीष्ट संख्या $= {}^2P_1 \times {}^7P_3 = 2 \times (7 \times 6 \times 5) = 420$
7. प्रदत्त शब्द में 12 अक्षर हैं, जिसमें E तीन बार आता है, I एवं T प्रत्येक दो बार आता है तथा शेष केवल एक बार आता है।

   $\therefore$ इस प्रकार के शब्दों की कुल संख्या $= \dfrac{12!}{3! \times 2! \times 2!} = 19958400$
8. तीन स्वर एवं चार व्यंजन हैं। इसलिए तीन स्वरों को 3 सम स्थानों पर ${}^3P_3 = 6$ तरीकों से रखा जा सकता है। तथा 4 व्यंजनों को 4 विषम स्थानों पर ${}^4P_4 = 24$ तरीकों से रखा जा सकता है।
   $\therefore$ शब्दों की कुल संख्या $= 6 \times 24 = 144$
9. शब्दों की अभीष्ट संख्या $= 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$
10. तीन विषम स्थानों को 5 स्वरों से ${}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ तरीकों से भरा जा सकता है।

दो सम स्थानों को 3 व्यंजनों से $^3P_2 = 3 \times 2 = 6$ तरीकों से भरा जा सकता है।

$\therefore$ शब्दों की अभीष्ट संख्या $= 60 \times 6 = 360$

11. इस प्रकार के समानांतर चतुर्भुजों की संख्या $= {}^7C_2 \times {}^7C_2 = 21 \times 21 = 441$

12. (i) A एवं B को एक साथ बैठने के तरीकों की संख्या $= 2 \times 4! = 48$

$\therefore$ A एवं B को एक साथ नहीं बैठने के तरीकों की संख्या $= 5! - 48 = 120 \times 48 = 72$

(ii) A को चुनने के बाद, हमारे पास 3 व्यक्ति बच जाते हैं (E को शामिल नहीं करते हुए) जिसमें से 2 को चुना जाता है।

$\therefore$ अभीष्ट तरीकों की कुल संख्या $= 1 \times {}^3C_2 = 1 \times 3 = 3$

13. सीधी रेखाओं (straight lines) की अभीष्ट संख्या $= {}^{12}C_2 = {}^5C_2 + 1 = 57$

14. तरीकों की कुल संख्या $= ({}^5C_2 \times {}^5C_4) + ({}^5C_3 \times {}^5C_3) + ({}^5C_4 \times {}^5C_2) = 200$

15. तरीकों की कुल संख्या $= {}^8C_8 + ({}^5C_1 \times {}^8C_7) + ({}^5C_2 \times {}^8C_6) + ({}^5C_3 \times {}^8C_5) + ({}^5C_4 \times {}^8C_4)$
$= 1230$

16. 5 सदस्यों की एक समीति में 6 पुरुष एवं 4 महिलाएँ हैं।

कम-से-कम एक महिला को शामिल करने के लिए, संचयों (combinations) की संख्या है:

(1L, 4G), (2L, 3G), (3L, 2G), (4L, (1G)

$${}^4C_1 \times {}^6C_4 + {}^4C_2 \times {}^6C_3 + {}^4C_3 \times {}^6C_2 + {}^4C_4 \times {}^6C_1 = 60 + 120 + 60 + 6 = 246$$

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

[(समितियों की कुल संख्या (6 पुरुषों एवं 6 स्त्रियों से)]

[बिना महिला के समितियों की कुल संख्या (केवल पुरुष)]

$$= {}^{10}C_5 - {}^6C_5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} - \frac{6}{1} = 252 - 6 = 246$$

17. 4 महिलाएँ 3 पुरुष

A B

1 म., 1 पु. 1 म., 1 पु.

A का चयन $= {}^4C_1 \times {}^3C_1 = 4 \times 3 = 12$

A का चयन करने के बाद, हमारे पास 3 महिलाएँ एवं 4 पुरुष रह जाते हैं तथा प्रत्येक में से एक सदस्य को B के लिए चुनना है।

B का चयन $= {}^3C_1 \times {}^2C_1 = 3 \times 2 = 6$

$\therefore$ दल के चयन के तरीकों की कुल संख्या $= 12 \times 6 = 72$