अध्याय

13

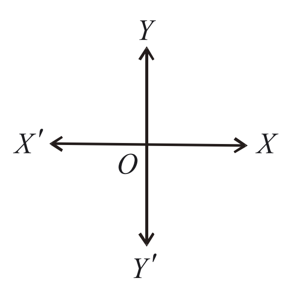
कोण एवं उनके माप
(Angle and their Measurement)

13.01 त्रिकोणमिति (Trigonometry) :

त्रिकोणमिति शब्द 'त्रिकोण एवं 'मिति' दो शब्दों से मिलकर बना है। त्रिकोणमिति का तात्पर्य है तीन कोणों वाली आकृति अर्थात् 'त्रिभुज' एवं मिति का अर्थ है 'माप'। अतः त्रिकोणमिति गणित की वह शाखा है जिसका विषय त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों की माप से संबंधित है। ऊँचाई दूरी एवं क्षेत्रफल आदि को ज्ञात करने के लिए त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों के परस्पर संबंधों का प्रयोग होता है। बहुधा ऐसी ऊँचाई और दूरी अथवा क्षेत्रफल आदि ज्ञात करने की आवश्यकता होती है, जिसको सरलता से मापा नहीं जा सकता उनको भी हम त्रिकोणमिति की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ पृथ्वी से चन्द्रमा, सूर्य आदि की दूरियाँ ज्ञात करने में एवं किसी देश या क्षेत्र का मानचित्र बनाने में त्रिकोणमितीय सूत्रों का प्रयोग होता है। त्रिकोणमिति का ज्ञान भौतिकी, नौ सेना एवं इन्जिनियरिंग आदि मे भी बहुत उपयोगी है।

13.02 धनात्मक एवं ऋणात्मक दूरियाँ

XOX' एवं YOY' दो परस्पर लम्ब रेखाएँ एक दूसरे को बिन्दु O पर काटती है। इस प्रकार समतल चार भागों में विभक्त हो जाता है। ऐसी स्थिति में

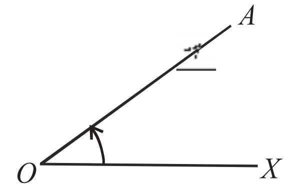


चित्र 13.01

(i) O से OX, दिशा में मापी गयी दूरियाँ धनात्मक तथा OX' की दिशा में मापी गयी दूरियाँ ऋणात्मक मानी जाती है।

(ii) O से OY दिशा में मापी गयी दूरियां धनात्मक तथा O से OY' की दिशा में मापी गयी दूरियाँ ऋणात्मक मानी जाती हैं। $XOY, YOX', X'OY'$ तथा $Y'OX$ को क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ चतुर्थांश (quadrant) कहते हैं। यह ध्यान देने योग्य है कि यह क्रम घड़ी की सुईयों के घूमने की विपरीत दिशा में है।

13.03 कोण (Angle) :

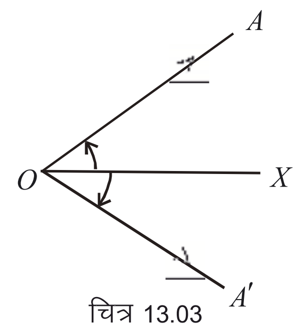


चित्र 13.02

कोई किरण OA अपनी प्रारंभिक स्थिति OX से OA तक जाने में जितना घुमाव उत्पन्न करती है उसे कोण कहते हैं। इस प्रकार चित्र13.02 में XOA एक कोण है। कोण के लिए हम संकेत $\angle$ का प्रयोग करते हैं।

साधारणतया कोणों के शीर्षों को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों यथा $A, B, C, \ldots$ से तथा कोणों की माप को α (एल्फा), β (बीटा), γ (गामा), θ (थीटा), ϕ (फाई), ψ (साई) आदि अक्षरों से व्यक्त किया जाता है।

धनात्मक तथा ऋणात्मक कोण :



चित्र 13.03

यदि किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर घड़ी की सुईयों के विपरीत दिशा में (वामावर्त) घूमती है तो इस प्रकार निर्मित कोण धनात्मक कोण है। चित्र 10.03 में $\angle XOA$ एक धनात्मक कोण है।

यदि किरण OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से घड़ी के सुईयों की दिशा में (दक्षिणावर्त) घूमती है तो इस प्रकार निर्मित कोण ऋणात्मक माना जाता है। अतः $\angle XOA'$ एक ऋणात्मक कोण है।

13.04 किसी भी परिमाण के कोण :

(i) कोई परिक्रामी किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर प्रथम चतुर्थांश में जो कोण बनाती है वह $0°$ से $90°$ के मध्य होगा। उदाहरणार्थ : चित्र 13.04 (i) में $\angle XOA$.

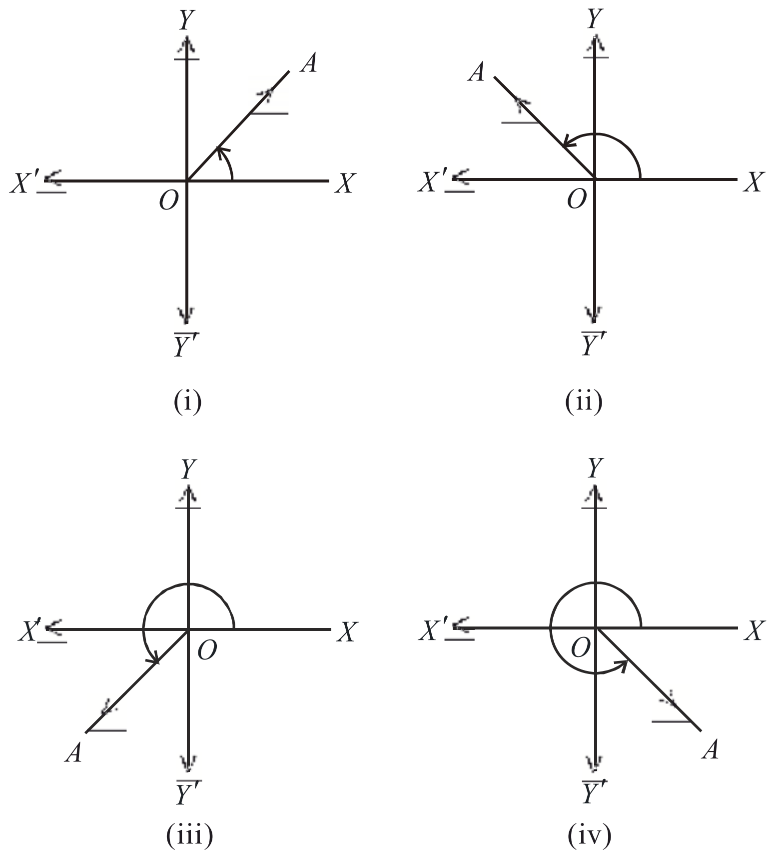
(ii) कोई परिक्रामी किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर द्वितीय चतुर्थांश में जो कोण बनाती है वह $90°$ से $180°$ के मध्य होगा। उदाहरणार्थ : चित्र 13.04 (ii) में $\angle XOA$.

(iii) कोई परिक्रामी किरणOA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर तृतीय चतुर्थांश में जो कोण बनाती है वह $180°$ से $270°$ के मध्य होगा। उदाहरणार्थ : चित्र 13.04 (iii) में $\angle XOA$.

(iv) कोई परिक्रामी किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर चतुर्थ चतुर्थांश में जो कोण बनाती है वह $270°$ से $360°$ के मध्य होगा। उदाहरणार्थ : चित्र 13.04(iv) में $\angle XOA$.

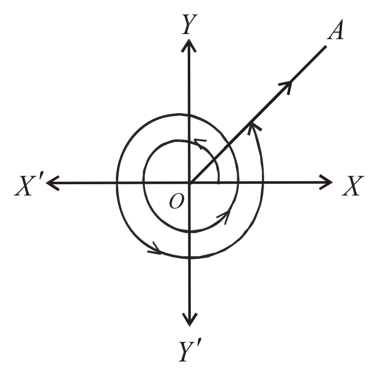
यदि किरण OA वामावर्त घूमकर एक पूरा चक्कर लगाकर अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX में आ जाती है, तो वह $360°$ का कोण बनाती है और यदि दक्षिणावर्त घूमकर अपनी प्रारंभिक स्थिति में आ जाती है, तो वह $-360°$ का कोण बनाती है।

अब तक हमने देखा कि कोण की अधिकतम माप $360°$ या 4 समकोण के बराबर हो सकती है, किन्तु कोण की माप $360°$ से भी अधिक हो सकती है। परिक्रामी किरण अपनी मूल स्थिति के परितः प्रत्येक पूर्ण चक्कर में $360°$ का कोण बनाती है।



चित्र 13.04

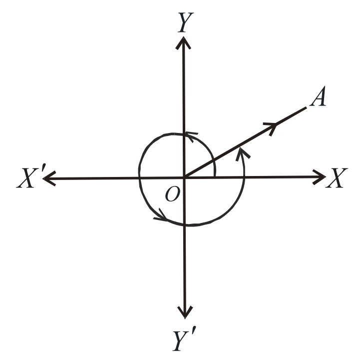
यदि परिक्रामी किरण OA, अपनी प्रारंभिक स्थिति OX से प्रारंभ कर O के परितः पूरे दो चक्कर लगाती है तो वह $2\times360°=720°$ का कोण बनाती है। यदि वह दो चक्कर लगाने के बाद पुनः OA की स्थिति में आ जाती है, तो इस प्रकार निर्मित कोण $=2\times360°+\angle XOA$ होता है। (चित्र 13.05)।



चित्र 13.05

उदाहरण 1. चित्र की सहायता से 390° का कोण निरूपित कीजिए।

हल : $390° = 1 \times 360° + 30°$ अतः परिक्रामी किरण OA अपनी प्रारंभिक स्थिति OX से प्रारंभ कर वामावर्त घूमकर एक पूर्ण चक्कर लगाकर फिर $30°$ पहले की दिशा में घूमेगी। इस प्रकार OA की अन्तिम स्थिति प्रथम चतुर्थांश में चित्रानुसार होगी।

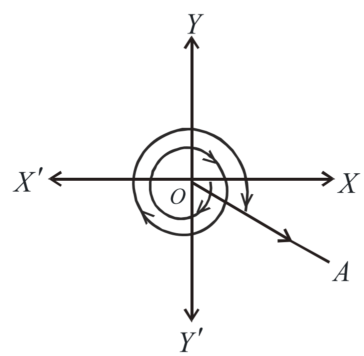


चित्र 13.06

उदाहरण 2. चित्र की सहायता से –750° का कोण निरूपित कीजिए।

हल : $-750° = -(2 \times 360°) - 30°$

अतः परिक्रामी रेखा OA अपनी प्रारंभिक स्थिति OX से प्रारंभ कर दक्षिणावर्त घूमकरदो पूर्ण चक्कर लगाकर फिर उसी दिशा में $30°$ घूमेगी। इस प्रकार उसकी अन्तिम स्थिति चतुर्थ चतुर्थांश में चित्रानुसार होगी।



चित्र 13.07

13.05 कोणों की माप (Measurement of Angles):

(i) षष्टिक पद्धति (Sexagesimal system)

(ii) शतिक पद्धति (Centesimal system)

(iii) वृत्तीय पद्धति (Circular system)

(i) **षष्टिक पद्धति** : इस पद्धति में हम कोण को अंश, मिनट तथा सैकण्ड में मापते हैं। इनके पारस्परिक संबंध निम्नलिखित है :

एक समकोण = नब्बे अंश $= 90°$

एक अंश $(1°) =$ साठ मिनट $= 60'$

एक मिनट $(1') =$ साठ सैकण्ड $= 60''$

(ii) **शतिक पद्धति :** इस पद्धति को फ्रांसीसी पद्धति भी कहते है। इस पद्धति में हम कोण को ग्रेड़ कला तथा विकला में मापते हैं। इसके पारस्परिक संबंध निम्नलिखित हैं :

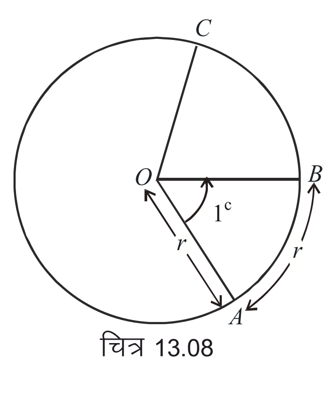
एक समकोण = 100 ग्रेड $= 100^g$

एक ग्रेड $(1^g) =$ 100 कला $= 100'$

एक कला $(1') =$ 100 विकला $= 100''$

टिप्पणी : यह पद्धति प्रचलन में नहीं है।

(iii) **वृत्तीय पद्धति :** इस पद्धति में कोण के माप की इकाई रेडियन (Radian) है। ''किसी वृत्त के केन्द्र पर उसकी त्रिज्या के बराबर लम्बाई के चाप द्वारा अंतरित कोण एक रेडियन का होता है''।



चित्र 13.08

माना किसी वृत्त की त्रिज्या r तथा केन्द्र O है और वृत्त की परिधि पर कोई बिन्दु A है। बिन्दु A से एक चाप AB त्रिज्या r के बराबर लिया। इस प्रकार बना हुआ कोण $\angle AOB$ एक रेडियन कहलाता है। प्रतीक द्वारा एक रेडियन 1^c द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। अतः चित्र 13.08 में $\angle AOB = 1^c$.

माना वृत्त की परिधि पर कोई अन्य बिन्दु C है, तो

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{चाप } AC}{\text{चाप } AB}$$

या $$\frac{\angle AOC}{\text{चाप } AC} = \frac{\angle AOB}{\text{चाप } AB}$$

$$\angle AOC = \frac{\text{चाप } AC}{\text{चाप } AB} \times \angle AOB$$

$$= \frac{\text{चाप } AC}{\text{चाप } AB} \times 1^c$$

$$= \frac{\text{चाप } AC}{\text{चाप } AB} \text{ रेडियन} \qquad \cdots(1)$$

यदि $\angle AOC = \theta^c$ (θ रेडियन) तथा चाप $AC = x$ हो तो समीकरण (1) से

$$\theta^c = \frac{x}{r} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} \text{ रेडियन}$$

13.06 (पाई) का मान

किसी वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अनुपात सदैव अचर होता है। इस अचर राशि को ग्रीक अक्षर (पाई) द्वारा व्यक्त किया जाता है, जो एक अपरिमेय संख्या है। दशमलव के 8 स्थानों तक π का मान $3{\cdot}14159265$ है, भिन्न रूप में इसका मान $22/7$ लेते हैं।

13.07 रेडियन का मान

हम जानते हैं कि

$$\pi = \frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{वृत्त का व्यास}}$$

अतः यदि किसी वृत्त की त्रिज्या r हो तो उसका व्यास $2r$ तथा परिधि $2\pi r$ होती है। हम यह भी जानते हैं कि वृत्त के किसी चाप और उस चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण में एक निश्चित संबंध होता है चित्र 10.08 से

$$\frac{\angle AOB}{360^\circ} = \frac{\text{चाप } AB}{\text{वृत्त की परिधि}}$$

या $$\frac{\angle AOB}{\text{चाप } AB} = \frac{360^\circ}{\text{वृत्त की परिधि}}$$

या $\frac{1^c}{r} = \frac{360°}{2\pi r}$

या $1^c = \frac{180°}{\pi}$ ... (1)

या $1^c = 57°17'45''$ लगभग (π का मान $3 \cdot 1416$ लेने पर)

इस प्रकार हम देखते हैं कि रेडियन का मान वृत्त की त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता है। अर्थात् सभी वृत्तों के लिए एक रेडियन का मान अचर होता है।

समीकरण (1) से

$$\pi^c = 180°$$

व्यवहार में चिह्न 'c' को छोड़ देते हैं और π^c के स्थान पर मात्र π का ही प्रयोग करते हैं। अर्थात् $180° = \pi$.

उदाहरण 3. 60° को रेडियन में परिवर्तित कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $180° = \pi$ रेडियन

$\therefore$ $1° = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

$\therefore$ $60° = \frac{\pi}{3}$ रेडियन

उदाहरण 4. $\frac{\pi}{4}$ रेडियन को अंशों में परिवर्तित कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $1^c = \frac{180°}{\pi}$

$\therefore$ $\frac{\pi}{4}$ रेडियन $= \frac{180°}{4} = 45°$

उदाहरण 5. किसी वृत्त के केन्द्र पर $\frac{\pi}{3}$ रेडियन का कोण अंतरित करने वाले चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : यदि वृत्त की त्रिज्या r तथा $\frac{\pi}{3}$ रेडियन का कोण अंतरित करने वाले चाप की लम्बाई x हो तो

$$\frac{\pi}{3} = \frac{x}{r}$$

या $x = \frac{\pi}{3} r.$

उदाहरण 6. किसी वृत्त की सम्पूर्ण परिधि द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि r त्रिज्या के वृत्त की सम्पूर्ण परिधि $2\pi r$ होती है और r लम्बाई के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण 1 रेडियन होता है।

$\because$ r लम्बाई की चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण $=1$ रेडियन

$\therefore$ 1 लम्बाई की चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण $=\frac{1}{r}$ रेडियन

$\therefore$ $2\pi r$ लम्बाई की चाप (परिधि) द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण $=\frac{1}{r}\times 2\pi r$ रेडियन $=2\pi$ रेडियन

अतः वृत्त की सम्पूर्ण परिधि $2\pi r$ द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण का मापांक 2π रेडियन या $2\pi^c$ होता है।

उदाहरण 7. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{3\pi}{2}$ रेडियन कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा?

हल : हम जानते हैं कि

4 समकोण $=2\pi$ रेडियन

$\because$ घड़ी के मिनट की सुई को 2π रेडियन कोण की रचना करने में समय लगता है $=1$ घंटा

$\therefore$ घड़ी के मिनट की सुई को 1 रेडियन कोण की रचना करने में समय लगेगा $=\frac{1}{2\pi}$ घंटा

$\therefore$ घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{3\pi}{2}$ रेडियन कोण की रचना करने में समय लगेगा $=\frac{1}{2\pi}\times\frac{3\pi}{2}$ घंटा

$=\frac{3}{4}$ घंटा $=\frac{3}{4}\times 60$ मिनट $=45$ मिनट

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. परिक्रामी रेखा के वामावर्त दिशा में घूमने पर धनात्मक कोण और दक्षिणावर्त दिशा में घूमने पर ऋणात्मक कोण बनता है।
2. कोणों के माप की निम्नलिखित पद्धतियाँ हैं :
   (i) षष्टिक पद्धति (ii) शतिक पद्धति (iii) वृत्तीय पद्धति
3. षष्टिक पद्धति में कोण को मापने की इकाई 'डिग्री' है।
   1 समकोण $=90°$, $1° = 60'$ (मिनट) तथा $1' = 60''$ (सैकंड)
4. किसी वृत्त के केन्द्र पर बना वह कोण जो वृत्त की त्रिज्या के बराबर लम्बाई के चाप द्वारा अंतरित होता है उसे एक **'रेडियन'** कहते हैं। वृत्तीय पद्धति में कोण को मापने की इकाई **'रेडियन'** है।
5. वृत्त की सम्पूर्ण परिधि द्वारा उसके केन्द्र पर अंतरित कोण 2π रेडियन होता है।
6. षष्टिक व वृत्तीय पद्धति में संबंध $D=\left(\frac{180°}{\pi}\right)R$ होता है जहां D व R क्रमशः डिग्री व रेडियन में कोण हैं।

विविध प्रश्नमाला 13

वस्तुनिष्ठ प्रश्न [1 – 5]

1. $750°$ का कोण अनुरेखित करने वाली परिक्रामी रेखा स्थित है :
   (A) प्रथम चतुर्थांश में (B) द्वितीय चतुर्थांश में
   (C) तृतीय चतुर्थांश में (D) चतुर्थ चतुर्थांश में [ ]
2. $30°$ के कोण में रेडियन की संख्या है :
   (A) $\frac{\pi}{3}$ रेडियन (B) $\frac{\pi}{4}$ रेडियन
   (C) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन (D) $\frac{3\pi}{4}$ रेडियन [ ]
3. $\frac{3\pi}{4}$ का मान षष्टिक पद्धति में है :
   (A) $75°$ (B) $135°$
   (C) $120°$ (D) $220°$ [ ]

4. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{\pi}{6}$ रेडियन कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा ?

(A) 10 मिनट (B) 20 मिनट

(C) 15 मिनट (D) 5 मिनट [ ]

5. 100 मीटर त्रिज्या वाले वृत्तीय पथ पर 25π मीटर चलने पर केन्द्र पर अंतरित कोण का मान रेडियन में होगा :

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$ [ ]

6. परिक्रामी रेखा की स्थिति कौनसे चतुर्थांश में होगी, जबकि वह प्रारम्भिक स्थिति से निम्नलिखित कोण बनाती हो :

(i) $240°$ (ii) $425°$

(iii) $-580°$ (iv) $1280°$ (v) $-980°$

7. निम्नलिखित कोणों को रेडियन में परिवर्तित कीजिए।

(i) $45°$ (ii) $120°$

(iii) $135°$ (iv) $540°$

8. निम्नलिखित कोणों को षष्टिक पद्धति में व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{2\pi}{5}$

(iii) $\frac{5}{6}\pi$ (iv) $\frac{\pi}{15}$

9. 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र पर 12 सेमी लम्बाई के चाप द्वारा कितने रेडियन का कोण बनेगा ?

10. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{3\pi}{2}$ रेडियन कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा ?

11. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $120°$ के कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा ?

12. किसी वृत्त में 10 सेमी लम्बाई का चाप केन्द्र पर $60°$ का कोण अंतरित करता है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

13. यदि ठीक दोपहर पश्चात् घड़ी के मिनट की सुई 30 समकोण परिक्रमण कर चुकी हो, तो घड़ी में समय बताइए।

14. किसी त्रिभुज के कोण $2:3:4$ के अनुपात में हैं। तीनों कोणों को रेडियन में ज्ञात कीजिए।

15. $\frac{3}{5}\pi$ रेडियन को षष्टिक पद्धति में व्यक्त कीजिए।

उत्तरमाला

विविध प्रश्नमाला 13

1. (A) **2.** (C) **3.** (B)

4. (D) **5.** (A)

6. (i) तृतीय (ii) प्रथम (iii) द्वितीय (iv) तृतीय (v) द्वितीय

7. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$ (iv) 3π

8. (i) 90° (ii) 72° (iii) 150° (iv) 12°

9. $\frac{12}{5}$ रेडियन

10. 45 मिनिट

11. 20 मिनिट

12. $\frac{30}{\pi}$ सेमी

13. सांय 7 बजकर 30 मिनिट

14. $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$

15. 108°

❑