13

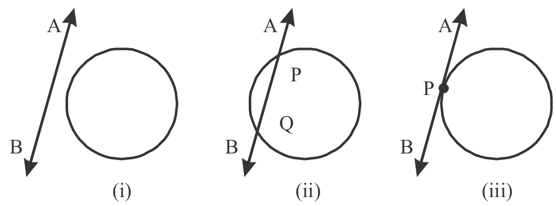
वृत्त एवं स्पर्श रेखा (Circle and Tangent)

13.01 प्रस्तावना

पिछले अध्याय में आपने वृत्त से संबंधित कुछ अवधारणाओं के बारे में अध्ययन किया है जैसे – जीवा, चाप के द्वारा बने कोण, चक्रीय चतुर्भुज इत्यादि। इस अध्याय में समतल पर एक रेखा एवं वृत्त की विभिन्न स्थितियों में स्थित होने पर उनमें कुछ विशेष संगत गुण दिखाई देने लगते हैं, के बारे में अध्ययन करेंगे।

13.02 छेदन रेखा एवं स्पर्श रेखा

एक सफेद कागज पर एक वृत्त और एक रेखा को एक साथ लेकर आकृति बनाइए। अब अपने द्वारा बनाए गए उस आकृति की निम्न आकृतियों से तुलना कीजिए। निश्चित ही दिए गए तीनों आकृतियों में से एक आकृति से उसकी समानता अवश्य दिखाई देगी अर्थात् एक रेखा और एक वृत्त को एक साथ बनाने पर आकृति 13.01 में दिखाई गई तीनों आकृत्तियाँ ही बनना संभव है। आइए यहाँ इन तीनों आकृतियों पर विचार करते हैं।



आकृति 13.01

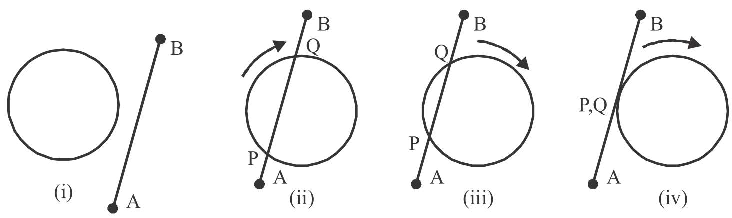
1. आकृति 13.1 (i) में रेखा AB वृत्त के बाहर से निकल रही है। अतः रेखा एवं वृत्त समतल पर बनी अलग – अलग आकृतियाँ है परस्पर इनमें कोई सम्बन्ध नहीं है।

2. आकृति 13.1 (ii) में रेखा AB, वृत्त के लिए एक छेदन रेखा है। यदि कोई एक रेखा किसी वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करे तो उस रेखा को छेदन रेखा कहते हैं।

13. आकृति 13.1 (iii) में रेखा AB, वृत्त की एक स्पर्श रेखा है। यहां रेखा AB, वृत्त को बिन्दु P पर छूती हुई निकल रही है या यों कहें की रेखा AB वृत्त को एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। इस बिन्दु P को रेखा AB एवं वृत्त का स्पर्श बिन्दु कहेंगे।

अर्थात् वह रेखा जो किसी वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है वह उस वृत्त की स्पर्श रेखा के नाम से जानी जाती है।

वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा के अस्तित्व को समझने के लिए आइए निम्न क्रिया कलाप को करते हैं।



आकृति 13.02

क्रिया कलाप– एक ड्राइंग बोर्ड अथवा लकड़ी की टेबिल पर एक सफेद कागज को रखकर दो आलपिन A व B गाढ़ दें। अब सामान्य तनाव रखते हुए उनसे एक काले रंग का धागा बांधिए और एक दूसरे सफेद कागज पर एक वृत्त बनाइए। देखिए आकृति 13.02 (i) वृत्त पर बने कागज को धागे के नीचे इतना सरका दीजिए कि धागा वृत्त को दो स्थानों पर काटता हुआ दिखाई दे। उन दोनों स्थानों को P व Q नाम दीजिए तथा वृत्त के कागज को स्थिर रखते हुए बिन्दु P पर तीसरा आलपिन गाढ़ दीजिए।

इस प्रकार वृत्त वाला कागज P के सापेक्ष धूम सकता है देखिए आकृति 13.02 (ii) अब वृत्त वाले कागज को धीरे–धीरे बाएँ से दाएँ धुमाएँ इस प्रक्रिया में आप क्या देखते है? अवलोकन कीजिए, हम पाएंगे।

(i) P व Q के मध्य की दूरी वृत्त के धूमने के साथ ही कम होती जाती है अर्थात् प्रत्येक स्थिति में जीवा कि लम्बाईपूर्व की लम्बाई से छोटी हो जाती है। देखिए आकृति 13.02 (iii)

(ii) जब Q बिन्दु P पर आ जावे अर्थात् दोनों सम्पाती हो जाए जीवा की लम्बाई शून्य हो जाती है। रेखा वृत्त को एक ही ब्न्दिु पर प्रतिच्छेद करती हुई दिखाई देती है। देखिए आकृति 13.02 (iv) इस स्थिति में रेखा AB वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

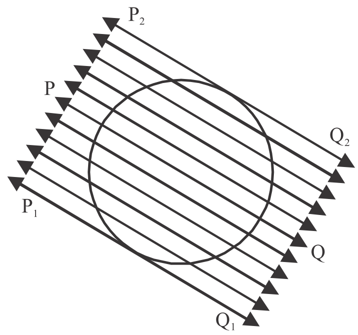
(iii) वृत्त को ओर अधिक उसी दिशा में धुमाते जाए तो हम पायेंगे कि जीवा की लम्बाई एक निश्चित स्थिति तकबढ़ती है और उसके बाद घटती हुई पुनः उपरोक्त (i) व (ii) में वर्णित परिणाम प्राप्त होते हैं।

इसी प्रक्रिया को विपरीत दिशा में भी घुमाकर देखिए आप निश्चित ही उपरोक्त परिणाम ही प्राप्त करेंगे।

इस प्रयोग के बाद हम कह सकते है कि

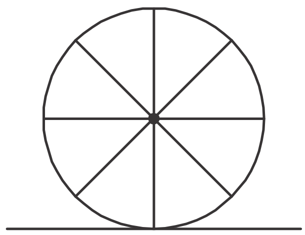
किसी वृत्त की छेदन रेखा जो वृत्त की जीवा है, के दोनों प्रतिछेदी सिरे एक विशिष्ट स्थिति में सम्पाती होने पर वह स्पर्श रेखा में परिवर्तित हो जाती है। अर्थात् वृत्त के एक बिन्दु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा ही विद्यमान रहती है।

क्रिया कलाप– एक सफेद कागज पर एक वृत्त और उसकी एक छेदन रेखा PQ खींचिए। अब छेदन रेखा PQ के समान्तर अनेक रेखाएं खींचिए आप देखेंगे कि कुछ चरणों के बाद छेदन रेखाओं द्वारा काटी गई जीवाएँ लगातार छोटी होती जाती हैं। एक स्थिति में छेदन रेखाPQ के दोनों ओर की जीवाओं का माप शून्य हो जाता है। अर्थात् छेदन रेखाएँ P_1Q_1 एवं P_2Q_2 वृत्त के दोनों ओर उस वृत्त की स्पर्श रेखाएं हो जाती हैं। देखिए आकृति 13.3 इस प्रयोग से स्पष्ट होता है कि एक छेदन रेखा के समान्तर दो से अधिक समान्तर स्पर्श रेखाएं नहीं हो सकती। या किसी एक वृत्त पर केवल दो समान्तर स्पर्श रेखाएं ही विद्यमान रह सकती है।

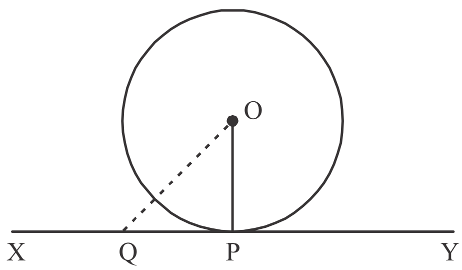


आकृति 13.03

क्रिया कलाप– एक सफेद कागज पर परकार की सहायता से वृत्त बनाइए। इस वृत्त पर अनेक त्रिज्याएं स्केल की सहायता से खींचकर उक्त आकृति को एक गत्ते चिपका दीजिए और वृत्त की सीमाओं के अनुसार काट दीजिए। इस प्रकार आपके पास एक वृत्ताकार पहिया तैयार हो गया है। अब इसके केन्द्र में पिन लगाकर पहिए को धराताल पर केन्द्र के सापेक्ष घुमाते हुए लुडकाइए। आप क्या देखतेहै? आप देखेंगें कि लुडकाते समय वृत्त पर खींची गई सभी त्रिज्याएँ धरातल के साथ लम्बवत रहती हुई नजर आती है। (देखिए आकृति 13.04)


आकृति 13.04

प्रमेयः 13.1 वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिन्दु से केन्द्र को मिलाने वाली रेखा (त्रिज्या) पर लम्ब होती है।



आकृति 13.05

दियाहुआ हैः O केन्द्र वाले वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा XY है और OP वृत्त की त्रिज्या है

सिद्ध करना हैः $OP \perp XY$

रचनाः XY पर कोई अन्य बिन्दु Q लिया और OQ को मिलाया

उपपत्तिः चूंकि स्पर्श रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु, स्पर्श बिन्दु को छोड़कर वृत्त के बाहर स्थित होगा। अतः $OP < OQ$ (वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु की केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक होती है)

अर्थात् OP (त्रिज्या), XY पर स्थित सभी बिन्दुओं से दूरियों में सबसे छोटी होगी। परन्तु हम जानते हैं कि किसी बिन्दु की किसी सरल रेखा के सभी बिन्दुओं की दूरियों में लम्ब सबसे छोटा होता है।

अतः $OP \perp XY$ इतिसिद्धम्

प्रमेयः 13.2 (प्रमेय 13.1 का विलोम): वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से खींची गई कोई रेखा त्रिज्या पर लम्ब हो तो, वहस्पर्श रेखा होती है।

दिया हुआ हैः O वृत्त का केन्द्र OP त्रिज्या तथा $OP \perp XY$

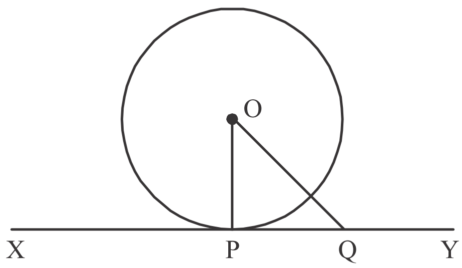
सिद्ध करना हैः XY, बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा है।

रचनाः XY पर स्थित अन्य बिन्दु Q को O से मिलाया।

उपपतिः $\because\ OP \perp XY$

अतः $OP < OQ$

(किसी बिन्दु से एक सरल रेखा पर डाला गया लम्ब उस रेखा के सभी बिन्दुओं से उस बिन्दु को मिलाने वाले सभी रेखाखण्डों से छोटा होता है) चूंकि Q सहित XY पर स्थित सभी बिन्दु वृत्त के बाहर है अतः XY वृत्त की स्पर्श रेखा है।



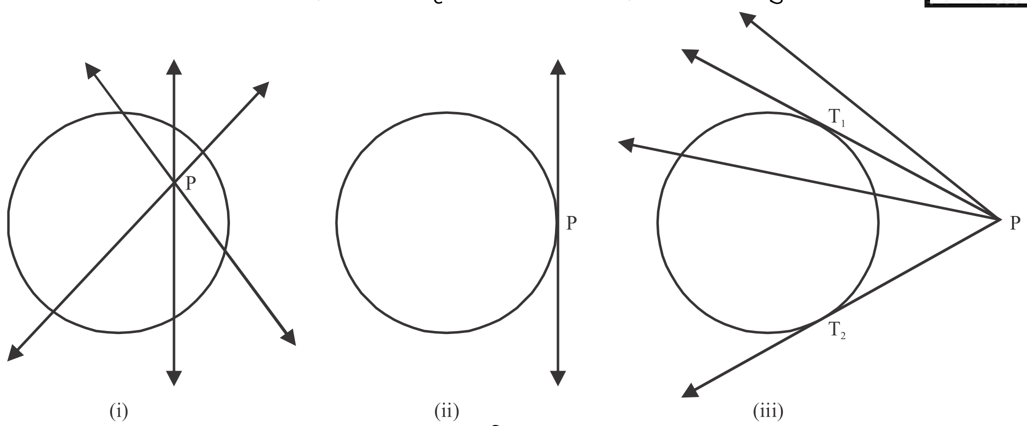
आकृति 13.06

किसी बिन्दु से एक सरल रेखा पर डाला गया लम्ब, उस रेखा के सभी बिन्दुओं से उस बिन्दु को मिलाने वाले सभी रेखाखण्डों से छोटा होता है।

13.03 एक बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची जा सकने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या

PUFH9D

पिछले अनुच्छेद में आपने छेदन रेखा एवं स्पर्श रेखा के बारे में जानकारी ली। क्या आप जानते हैं कि वृत्त के अन्दर या वृत्त के बाहर स्थित एक बिन्दु से उस वृत्त पर कितनी संख्या में स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैऔर उन स्पर्श रेखाओं में क्या सम्बन्ध होता है? आइए निम्न आकृतियों के माध्यम से इस पहेली को सुलझाते हैं।



आकृति 13.07

एक समतल पर स्थित वृत्त के लिए समतल के सभी बिन्दुओं में से एक बिन्दु का चयन करना चाहें तो वह वृत्त केअन्दर या वृत्त पर अथवा वृत्त के बाहर इन तीन में से एक ही स्थान का चयन करेगें तीनों विकल्पों में से अब हम क्रमशः एक–एक पर अलग–अलग विचार

करते हैं।

(i) जब बिन्दु P वृत्त के अन्दर स्थित है। वृत्त पर P बिन्दु से गुजरने वाली सभी रेखाओं को देखें तो, वे सभी छेदन रेखाएँ प्राप्त होती है (देखिए आकृति 13.07 (i) में) अर्थात् इस स्थिति में स्पर्श रेखाओं की संख्या शून्य है।

(ii) जब बिन्दु P वृत्त पर स्थित है। पिछले अनुच्छेद में हम पढ़ चुके हैं कि "वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से एक और केवल एकस्पर्श रेखा खींची जा सकती है।" (देखिए आकृति 13.07 (ii) में)

(iii) जब बिन्दु P वृत्त के बाहर स्थित है। वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं शेष खाएँ या तो छेदन रेखाएँ होंगी या वृत्त के बाहर ही रहेंगी (देखिए आकृति 13.07 (iii) में)

आकृति 13.07 (iii) में वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PT_1 एवं PT_2 दिखाई दे रही हैं। आप बता सकते हैं इनमें आपस में क्या सम्बन्ध है? वास्तव में ये दोनो स्पर्श रेखाएँ बराबर हैं। आइए निम्न प्रमेय के माध्यम से इस तथ्य को सिद्ध करते हैं।

प्रमेयः 13.3 वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ परस्पर समान होती हैं।

दिया हुआ हैः O केन्द्र वाले वृत्त के बाहर स्थित P बिन्दु से PT_1 एवं PT_2 दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना हैः $PT_1 = PT_2$

रचनाः O को T_1, T_2 एवं P से मिलाया

उपपत्तिः ΔOPT_1 एवं ΔOPT_2 में

$\angle OT_1P = \angle OT_2P = 90°$

(स्पर्श रेखा एवं त्रिज्या परस्पर लम्ब होते है प्रमेय 1 से)

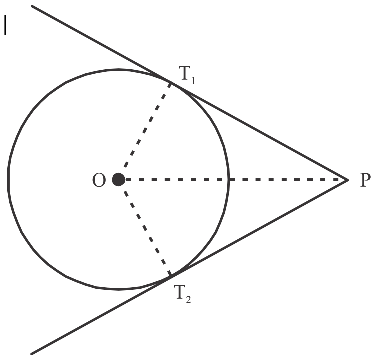
$OT_1 = OT_2$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएं)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

समकोण त्रिभुज में कर्ण भुजा सर्वांगसता के नियम से

$\Delta OPT_1 \cong \Delta OPT_2$

अतः $PT_1 = PT_2$ इतिसिद्धम



आकृति 13.08

दृष्टांतीय उदाहरण

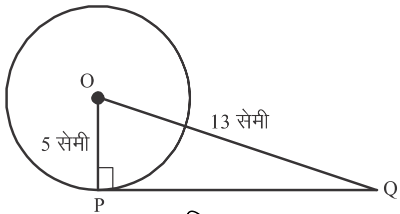
उदाहरण-1. एक बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जबकि बिन्दु की वृत्त के केन्द्र से दूरी 13 सेमी है और वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है।

हलः चूंकि $OQ^2 = OP^2 + PQ^2$ (समकोण ΔOPQ में)

या $PQ^2 = OQ^2 - OP^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

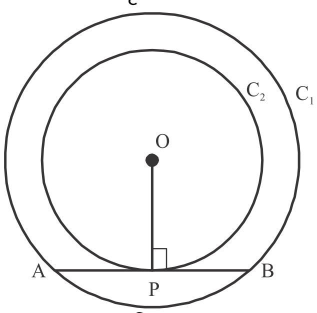
या $PQ = \sqrt{144} = 12$

अतः $PQ = 12$ सेमी



आकृति 13.09

उदाहरण-2. दो संकेद्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा यदि छोटे वृत्त को स्पर्श करे तो, स्पर्श बिन्दु उस जीवा का समद्विभाजन करता है।



आकृति 13.10

हलः दिया हुआ हैः दो संकेन्द्रीय वृत्त जिनका केन्द्र O है। AB बडे वृत्त C_1 की जीवा है जो छोटे वृत्त C_2 को P बिन्दु पर स्पर्श करती है।

सिद्ध करना हैः $AP = PB$

उपपत्ति : AB, वृत्त C_2 को P पर स्पर्श करती है।

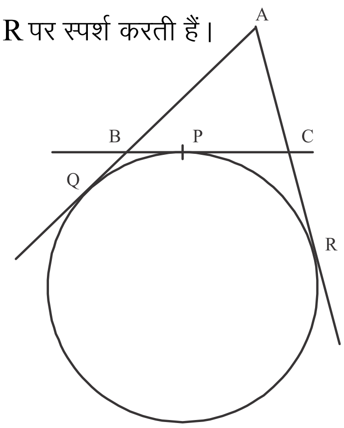
अतः $OP \perp AB$ (प्रमेय –1 से)

चूंकि O वृत्त C_1 का भी केन्द्र है और AB वृत्त, C_1 की जीवा है। अतः कक्षा IX के प्रमेय अनुसार वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा का समद्विभाजन करता है।

अतः AP = PB इति सिद्धम्

उदाहरण-3. एक वृत्त ΔABC की भुजा BC को P पर बाह्य स्पर्श करता है तथा AB व AC को बढ़ाए जाने पर Q और R पर स्पर्श करता है तो सिद्ध कीजिए कि $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC की परिमिति)

हलः दिया हुआ हैः ΔABC की भुजा BC वृत्त को P पर एवं AB व AC बढ़ाने पर क्रमशः Q व R पर स्पर्श करती हैं।



आकृति 13.11

सिद्ध करना हैः $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC की परिमिति)

उपपत्तिः AQ = AR (प्रमेय 2 से) ...(1)

इसी प्रकार BQ = BP ...(2)

एवं CP = CR ...(3)

अब AQ + AR = [AB + BQ] + [AC + CR]

= [AB + BP] + [AC + CP] = AB + (BP + CP) + AC

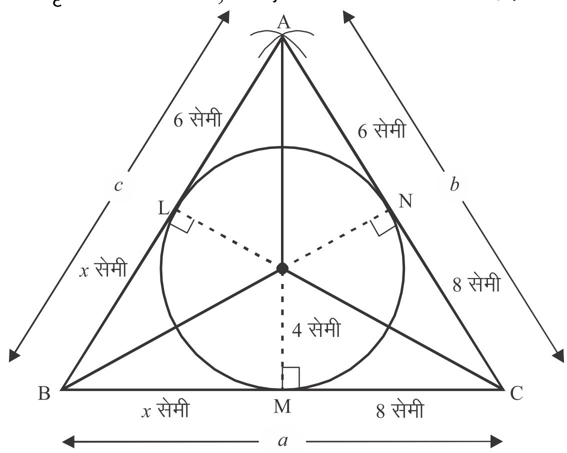
2AQ = AB + BC + AC ...[(1) से]

या $AQ = \frac{1}{2}[AB + BC + AC]$

या $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC की परिमिति) इति सिद्धम्

उदाहरण-4. ΔABC की भुजाएँ AB, BC एवं CA एक 4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त को क्रमशः L, M एवं N पर स्पर्श करती हैं। यदि AN = 6 सेमी एवं CN = 8 सेमी हो तो ABC की परिमिति ज्ञात कीजिये।

हलः माना कि त्रिभुज ABC के अन्तर्गत वृत्त का केन्द्र O है।



आकृति 13.12

अर्थात् OL = OM = ON = 4 सेमी,

माना कि BL = x सेमी

तो BL = BM = x सेमी (देखिए आकृति 13.12 में)

∵ AN = AL = 6 सेमी

इसी प्रकार CN = CM = 8 सेमी

तो BC = $(x + 8)$ सेमी = a एवं AB = $(x + 6) = c$

तथा AC = 6 + 8 = 14 सेमी = b

हीरों के सूत्र में $2s = a + b + c$

या $2s = x + 8 + 14 + x + 6$

या $2s = 2x + 28$

या $s = x + 14$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{(x+14)(x+14-x-8)(x+14-14)(x+14-x-6)}$

$\sqrt{(x+14)\times 6\times x\times 8} = \sqrt{48x(x+14)}$ ...(1)

तथा ΔABC का क्षेत्रफल $= \Delta AOB$ का क्षेत्रफल + ΔBOC का क्षेत्रफल + ΔAOC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}AB\times OL + \frac{1}{2}BC\times OM + \frac{1}{2}AC\times ON$

$$= \frac{1}{2}(x+6)\times 4 + \frac{1}{2}(x+8)\times 4 + \frac{1}{2}14\times 4$$

$$= 2(x+6) + 2(x+8) + 28$$

$$= 2x + 12 + 2x + 16 + 28$$

$$= 4x + 56 \qquad \ldots(2)$$

(1) व (2) से $\sqrt{48x(x+14)} = 4x + 56$

$$4\sqrt{3x(x+14)} = 4(x+14)$$

या $\sqrt{3x(x+14)} = (x+14)$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$3x(x+14) = (x+14)^2$$

या $3x = x + 14$

या $3x - x = 14$

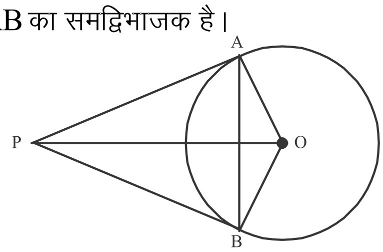
या $x = 7$

अतः $AB = 6 + 7 = 13$ एवं $BC = 7 + 8 = 15$

इस प्रकार ΔABC की परिमिति $= (13 + 15 + 14)$ सेमी $= 42$ सेमी

प्रश्नमाला 13.1

1. निम्न में से प्रत्येक कथन सत्य या असत्य है लिखिए और उत्तर का कारण भी लिखिए।
   (i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो वृत्त को दो बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।
   (ii) एक स्पर्श रेखा XY, O केन्द्र वाले वृत्त को P पर स्पर्श करती है और Q स्पर्श रेखा पर अन्य बिन्दु है तो $OP = OQ$ होता है।
   (iii) वृत्त पर स्थित बिन्दु P व Q पर दो स्पर्श रेखाएं LM एवं XY खींची गई है। यदि PQ व्यास है तो $LM \parallel XY$ है।
   (iv) एक वृत्त का केन्द्र O दूसरे वृत्त पर स्थित है जिसका केन्द्र A है। यदि O केन्द्र वाला वृत्त बिन्दु A और B से इस प्रकार गुजरता है कि AOB एक ही रेखा पर हो, तो B से खींची गई स्पर्श रेखाएँ दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेदी बिन्दुओं से गुजरती हैं।
2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) एक वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से .... स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
   (ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा .... कहलाती हैं।
   (iii) एक वृत्त की .... समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
   (iv) वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को .... कहते हैं।
3. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिजाएँ 5 सेमी तथा 3 सेमी है। बडे वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।
4. किसी वृत्त के केन्द्र से 10 सेमी दूर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई यदि 4 सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या कितनी होगी?
5. एक O केन्द्र वाला वृत्त, चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाओं को अन्तः स्पर्श इस प्रकार करता है यदि AB को स्पर्श बिन्दु 3 : 1 भागों में विभाजित करे तथा $AB = 8$ सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जबकि $OA = 10$ सेमी है।
6. एक वृत्त एक चतुर्भुज की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि केन्द्र पर सम्मुख भुजाओं द्वारा आन्तरित कोण सम्पूरक होते हैं।
7. आकृति 13.13 में वृत्त का केन्द्र O है और बाह्य बिन्दु P से खींची हुई स्पर्श रेखाएँ PA और PB वृत्त को क्रमशः A व B पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि OP रेखाखण्ड AB का समद्विभाजक है।



आकृति 13.13

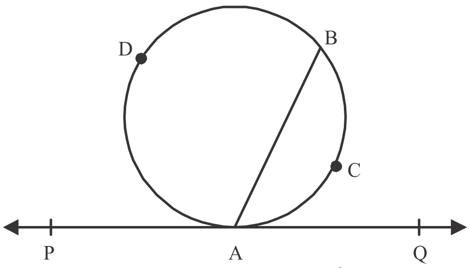
8. आकृति 13.13 में बाह्य बिन्दु P से O केन्द्र वाले वृत्त को PA एवं PB दो स्पर्श रेखाएँ क्रमशः A व B पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि PAOB एक चक्रीय चतुर्भुज है।

अब तक आपने वृत्त की स्पर्श रेखाओं सम्बन्धित अनेक जानकारियाँ प्राप्त की और उन पर आधारित अनेक प्रश्नों को हल किया है। अब यदि वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से वृत्त पर खींची जाने वाली जीवा द्वारा विभाजित वृत्तखण्डों में बनने वाले कोणों पर विचार करें तो हमें कुछ अन्य जानकारियाँ ओर प्राप्त हो सकती हैं। आइए इन्हे समझने का प्रयास करते हैं।

13.04 एकान्तर वृत्तखण्ड के कोण

PUPSB1

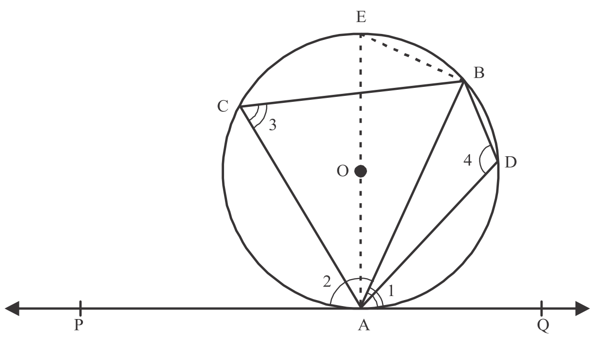
आकृति 13.14 में एक वृत्त की एक जीवा AB वृत्त की स्पर्श रेखा PAQ के स्पर्श बिन्दु A से खींची गई है जो PAQ के साथ $\angle BAP$ एवं $\angle BAQ$ बनाती है।



आकृति 13.14

जीवा AB वृत्त के दो वृत्तखण्डों ADB और ACB में विभाजित करती है। वृत्तखण्ड ADB और ACB क्रमशः $\angle BAQ$ एवं $\angle BAP$ के एकान्तर वृत्तखण्ड कहलाते हैं।

प्रमेय–13.4. यदि वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से एक जीवा खींची जाए तो इस जीवा द्वारा दी गई स्पर्श रेखा से बनाए गए कोण क्रमशः उसी जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्डों में बने कोणों के बराबर होते हैं।



आकृति 13.15

दिया हुआ है: वृत्त के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा PQ है।

जीवा AB स्पर्श रेखा के साथ क्रमशः $\angle 1$ एवं $\angle 2$ की रचना करती है। $\angle 3$ एवं $\angle 4$ क्रमशः $\angle 1$ एवं $\angle 2$ के एकान्तर वृत्त खण्डों के C एवं D पर बने कोण हैं।

सिद्ध करना है: $\angle 1 = \angle 3$ एवं $\angle 2 = \angle 4$

रचना है: व्यास AOE खींचकर EB को मिलाया

उपपत्ति: ΔAEB में

$\angle ABE = 90°$ (अर्द्धवृत्त में बना कोण)

अतः $\angle AEB + \angle EAB = 90°$ ...(1)

$\because$ $\angle EAP = 90°$ (व्यास स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है)

अतः $\angle EAB + \angle 1 = 90°$ ...(2)

(1) एवं (2) से $\angle EAB + \angle 1 = \angle AEB + \angle EAB$

या $\angle 1 = \angle AEB$ ...(3)

$\because$ $\angle AEB = \angle 3$ (एक ही वृत्तखण्ड पर बने कोण बराबर होते हैं) ...(4)

(3) एवं (4) से

$\angle 1 = \angle 3$ ...(5)

पुनः $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (रैखिक युग्म)

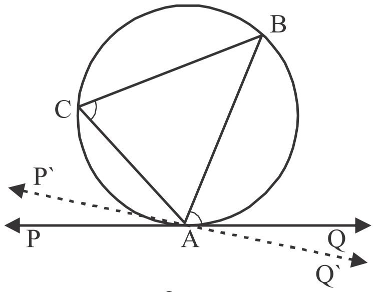
तथा $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं)

अतः $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$

परन्तु $\angle 1 = \angle 3$ ((5) से)

अतः $\angle 2 = \angle 4$ इति सिद्धम्

प्रमेय—13.5. (प्रमेय 13.4 का विलोम): यदि वृत्त की जीवा के एक सिरे पर एक ऐसी रेखा खींची जाती है कि जीवा द्वारा इसके साथ बना कोण इसके एकान्तर वृत्त खण्ड में जीवा द्वारा बनाए कोण के बराबर हो, तो वह रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।



आकृति 13.16

दिया हुआ है: किसी वृत्त की AB जीवा है तथा रेखा PAQ इस प्रकार की है कि $\angle BAQ = \angle ACB$ है जहाँ C एकान्तर वृत्तखण्ड में कोई बिन्दु है।

सिद्ध करना है: PAQ वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

उपपत्ति: $\angle BAQ = \angle ACB$ ...(1) (दिया हुआ)

माना कि PAQ के स्थान पर रेखा P'AQ' वृत्त को बिन्दु A पर स्पर्श करती है।

अतः $\angle BAQ' = \angle ACB$ (प्रमेय द्वारा) ... (2)

(1) व (2) से $\angle BAQ = \angle BAQ'$ ...(3)

आकृति के अनुसार $\angle BAQ' = \angle BAQ + \angle QAQ'$ ...(4)

अर्थात् $\angle BAQ = \angle BAQ + \angle QAQ'$

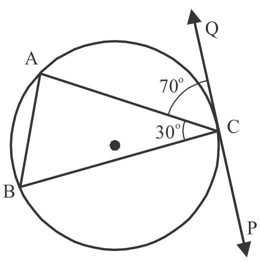
अतः $\angle QAQ' = 0$ ...(5)

यह तभी सम्भव है जब PAQ एवं P'AQ' परस्पर सम्पाती हो अर्थात् PAQ वृत्त की A पर एक स्पर्श रेखा है। इति सिद्धम।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर सत्य या असत्य लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(i) आकृति 13.17 के अनुसार $\angle A = 70°$ होगा जहाँ PQ वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श करती है।



आकृति 13.17

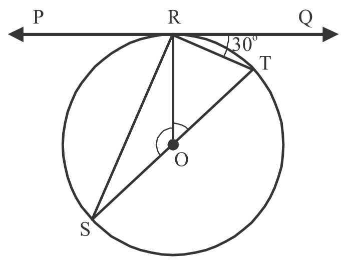
हल: असत्य, चूंकि $\angle PCB$ का एकान्तर वृत्तखण्ड पर बना कोण $\angle A$ है

अतः $\angle A = \angle PCB$

और $\angle PCB = 180-(70+30) = 80°$

अतः $\angle A = 80°$ होगा।

उदाहरण-2. आकृति 13.18 में PQ, O केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्श रेखा है जो वृत्त को R पर स्पर्श करती है। यदि कोण $TRQ = 30°$ हो, तो $\angle SOR$ एवं $\angle RTO$ का मान ज्ञात कीजिये।



आकृति 13.18

हल: चूंकि SOT वृत्त का व्यास है।

अतः $\angle SRT = 90°$

तथा RT जीवा द्वारा $\angle TRQ$ का एकान्तर वृत्तखण्ड RST है

अतः $\angle RST = \angle TRQ = 30°$

परन्तु ΔORS एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी OS = OR एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं

अतः $\angle RST = \angle SRO = 30°$

$\therefore$ $\angle SOR = 180-(30+30) = 180-60 = 120°$

एवं $\angle ORT = \angle SRT - \angle SRO$

$= 90-30 = 60°$

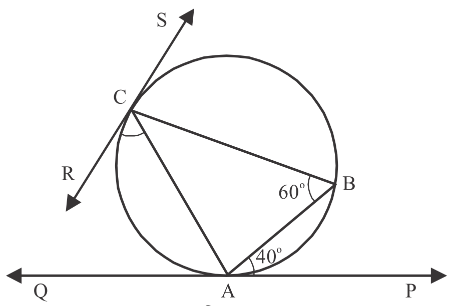
अब ΔORT में

OR = OT (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

अतः $\angle RTO = \angle ORT = 60°$

एवं $\angle SOR = 120°$

उदाहरण-3. आकृति 13.19 में PQ तथा RS एक वृत्त पर क्रमशः बिन्दु A और C पर स्पर्श रेखाएँ है। यदि $\angle ABC = 60°$ और $\angle BAP = 40°$ हो तो $\angle BCR$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.19

हल: स्पर्श रेखा PQ और जीवा AB स्पर्श बिन्दु A से गुजरते हैं, (प्रमेय 13.04)

अतः $\angle ACB = \angle BAP = 40°$ . . . (1)

इसी प्रकार स्पर्श रेखा CR एवं जीवा AC के बिन्दु C से गुजरते हैं

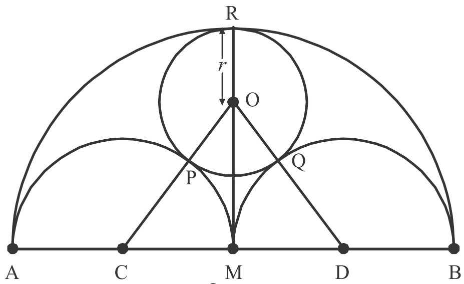
अतः $\angle ACR = \angle ABC = 60°$ . . . (2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$\angle ACB + \angle ACR = 40 + 60 = 100°$$

या $\angle BCR = 100°$

उदाहरण-4. आकृति 13.20 मे रेखा खण्ड AB का मध्य बिन्दु M है, AM, MB एवं AB को व्यास मानकर AB के एक ही ओर अर्द्धवृत्त खींचे गए हैं। 'O' को केन्द्र मानकर r त्रिज्या का एक वृत्त इस प्रकार खींचा गया है जो तीनों अर्द्धवृत्तों को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिये $r = \frac{1}{6}AB$ ।



आकृति 13.20

हल: दिया हुआ है: आकृति 13.24 में C,M,D एवं O को केन्द्र मानकर अर्द्धवृत्त प्रश्नानुसार बने हुए है।

सिद्ध करना है: $r = \frac{1}{6}AB$

उपपत्ति है: माना कि AB $= a$ तो $AM = \frac{a}{2}$ परन्तु AC = CM = MD = DM = CP = DQ बराबर अर्द्धवृत्तों की त्रिज्याएं है।

अतः $\text{CM} = \text{MD} = \text{CP} = \text{DQ} = \frac{a}{4}$ . . . (1)

अब $OC = OD = \left(\frac{a}{4} + r\right)$ . . . (2)

$OM = (MR - OR) = \left(\frac{a}{2} - r\right)$ . . . (3)

चूंकि ΔOCD एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा OC = OD है एवं M,CB का मध्य बिन्दु है

अतः $OM \perp CD$

अब समकोण त्रिभुज OMC में $OC^2 = CM^2 + OM^2$

अतः (1), (2) एवं (3) से

$$\left(\frac{a}{4} + r\right)^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - r\right)^2$$

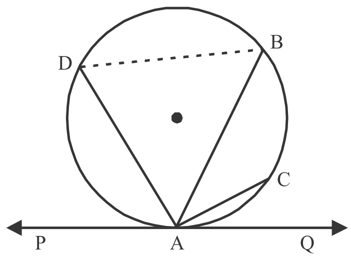
या $\frac{a^2}{16} + r^2 + \frac{1}{2}ra = \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{16} + r^2 - ra$ या $\frac{1}{2}ra + ra = \frac{a^2}{16}$

या $\frac{3}{2}ra = \frac{a^2}{16}$ या $a(6r - a) = 0$ परन्तु $a \neq 0$

अतः $6r = a$ या $r = \frac{1}{6}a$ या $r = \frac{1}{6}AB$ इति सिद्धम्

प्रश्नमाला 13.2

1. आकृति 13.21 को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए।



आकृति 13.21

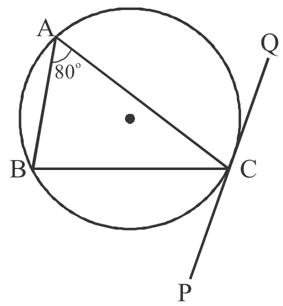
(i) $\angle BAQ$ का एकान्तर वृत्तखण्ड है।

(ii) $\angle DAP$ का एकान्तर वृत्तखण्ड है।

(iii) यदि C को B से मिला दें तो बनने वाले $\angle ACB$ किस कोण के बराबर है।

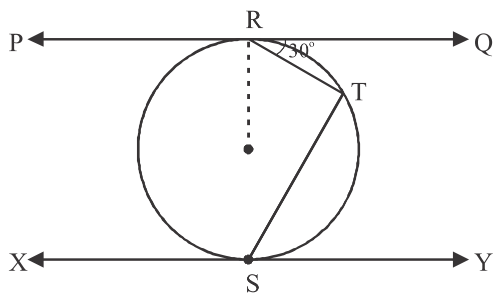
(iv) $\angle ABD$ एवं $\angle ADB$ किन–किन कोणों के बराबर है।

2. आकृति 13.22 के अनुसार यदि $\angle BAC = 80^\circ$ हो तो $\angle BCP$ का मान ज्ञात कीजिए।



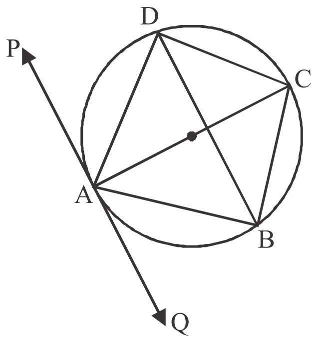
आकृति 13.22

3. आकृति 13.23 के अनुसार आकृति में PQ और XY समानान्तर स्पर्श रेखाएँ है यदि $\angle QRT = 30^\circ$ हो, तो $\angle TSY$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.23

4. आकृति 13.24 चक्रीय चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC कोण C को समद्विभाजित करता है, सिद्ध कीजिए कि विकर्ण BD, बिन्दु A, B, C और D से गुजरने वाले वृत्त के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के समान्तर है।



आकृति 13.24

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 13.1

1. (i) असत्य – वृत्त की स्पर्श रेखा उसे एक और एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।
   (ii) असत्य – क्योंकि OP स्पर्श रेखा पर लम्ब है। और लम्ब सभी दूरियों से छोटा होता है।
   (iii) सत्य – चूंकि स्पर्श रेखा व्यास पर लम्ब होती है।
   (iv) सत्य – क्योंकि AOB एक व्यास है। और अर्द्धवृत्त पर बना कोण समकोण होता।

2. (i) एक, (ii) छेदन रेखा, (iii) दो, (iv) स्पर्श रेखा   3. 8 सेमी   4. $2\sqrt{21}$ सेमी   5. 8 सेमी

प्रश्नमाला 13.2

1. (i) ADB, (ii) ACBD, (iii) $\angle BAP$, (iv) $\angle DAP$ एवं $\angle BAQ$ 2. 80^o 3. 60^o