(9) લાસ્પેયરનો સૂચક આંક $I_L = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

(10) પાશેનો સૂચક આંક $I_P = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$

(11) ફિશરનો સૂચક આંક $I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$ અથવા

$$I_F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$$

(12) જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક :

[1] કુલ ખર્ચની રીત :

જ્યારે આધાર વર્ષનો જથ્થો (q_0) આપેલ હોય ત્યારે,

સૂચક આંક $= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$ (**નોંધ :** આ લાસ્પેયરનો સૂચક આંક છે.)

જ્યારે ચાલુ વર્ષનો જથ્થો (q_1) આપેલ હોય ત્યારે,

સૂચક આંક $= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$ (**નોંધ :** આ પાશેનો સૂચક આંક છે.)

[2] કૌટુંબિક બજેટની રીત (સાપેક્ષ કિંમતોની ભારિત સરેરાશ)નું સૂત્ર :

સૂચક આંક $= \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$ જ્યાં, $I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$

$W = p_0 q_0$

(13) નાણાંની ખરીદશક્તિ $= \frac{1}{\text{જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક}} \times 100$

(14) વાસ્તવિક વેતન $= \frac{\text{વેતન}}{\text{જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક}} \times 100$

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. ચલ રાશિની કિંમતમાં થતા લાંબા ગાળાના ફેરફારોની સરખામણી માટે કઈ રીત ઉપયોગી છે ?

(a) પરંપરિત આધારની રીત (b) લાસ્પેયરની રીત

(c) અચલ આધારની રીત (d) પાશેની રીત

2. લાસ્પેયરના સૂચક આંકની ગણતરીમાં કયો વપરાશ લેવામાં આવે છે ?

(a) આધાર વર્ષનો વપરાશ (b) ચાલુ વર્ષનો વપરાશ

(c) સરેરાશ વર્ષનો વપરાશ (d) કોઈ પણ વર્ષનો વપરાશ

3. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની રચનામાં કયા ભાવ ધ્યાનમાં લેવાય છે ?

(a) બજાર ભાવ (b) જથ્થાબંધ ભાવ (c) સરેરાશ ભાવ (d) છૂટક ભાવ

4. કૌટુંબિક બજેટની રીતમાં વસ્તુનું કયું ખર્ચ ભાર તરીકે લેવામાં આવે છે ?

(a) પસંદગીના વર્ષનું ખર્ચ (b) સરેરાશ વાર્ષિક ખર્ચ

(c) આધાર વર્ષનું ખર્ચ (d) ચાલુ વર્ષનું ખર્ચ

5. સૂચક આંકની રચનામાં કઈ સરેરાશને શ્રેષ્ઠ સરેરાશ ગણવામાં આવે છે ?

(a) હરાત્મક મધ્યક (b) સમાંતર મધ્યક (c) ભારિત મધ્યક (d) ગુણોત્તર મધ્યક

6. કયા સૂચક આંક લોકોના જીવનધોરણનો ખ્યાલ આપે છે ?

(a) ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનનો સૂચક આંક (b) જથ્થાનો સૂચક આંક

(c) ફિશરનો સૂચક આંક (d) જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક

7. એક વસ્તુનો ભાવ આધાર વર્ષની સરખામણીમાં ચાલુ વર્ષમાં 4.5 ગણો વધે છે, તો ભાવ સૂચક આંક કેટલો થાય ?

(a) 45 (b) 450 (c) 550 (d) 350

8. જો આધાર વર્ષ 2015ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2016માં નાણાંની ખરીદ શક્તિ 0.75 હોય તો વર્ષ 2016 માટે ભાવનો સૂચક આંક કેટલો હોય ?

(a) 750 (b) 175 (c) 133.33 (d) 275

9. જો વર્ષ 2010ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2016નો એક વર્ગના લોકોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક 200 થાય, તો નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) તે વર્ગ દ્વારા વપરાશમાં લેવાતી ચીજવસ્તુઓના ચાલુ વર્ષના ભાવમાં 200 ટકાનો સરેરાશ વધારો થયો છે.

(b) તે વર્ગ દ્વારા વપરાશમાં લેવાતી ચીજવસ્તુઓના ચાલુ વર્ષના ભાવમાં 100 ટકાનો સરેરાશ ઘટાડો થયો છે.

(c) નાણાંની ખરીદશક્તિ ₹ 0.5 છે.

(d) તે વર્ગ દ્વારા વપરાશમાં લેવાતી ચીજવસ્તુઓના ચાલુ વર્ષના ભાવ સ્થિર રહ્યા છે.

10. જો $I_P = I_F$ હોય તો નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) $I_P = 2I_L$ (b) $I_F = \frac{I_L}{2}$ (c) $I_F = I_P = I_L$ (d) $4I_F = I_L$

11. જો વર્ષ 2013 માટે એક વર્ગનાં કુટુંબોની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવક ₹ 20,000 હોય અને જો તે વર્ગનો 2013ના વર્ષના આધારે 2015ના વર્ષ માટેનો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક 130 હોય, તો 2015ના વર્ષ માટે આ વર્ગનાં કુટુંબોની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવક કેટલી થાય ?

(a) ₹ 26,000 (b) ₹ 20,130 (c) ₹ 20,000 (d) ₹ 14,000

12. પાશેના સૂચક આંકનું સૂત્ર મેળવવા વસ્તુઓના ભાવ સાપેક્ષ $\frac{p_1}{p_0}$ ને ખર્ચનો કયો ભાર આપવામાં આવે છે ?

(a) p_0q_0 (b) p_1q_1 (c) p_0q_1 (d) p_1q_0

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ભાવ સાપેક્ષ એટલે શું ?

2. ચલ રાશિમાં બે ભિન્ન સમયે થતાં ફેરફારો સરખાવવા માટે કઈ રીતનો ઉપયોગ કરવો વધુ અનુકૂળ છે ?

3. એક વસ્તુ માટે જથ્થાનો કોઈ એક વર્ષનો સૂચક આંક 130 હોય, તો તેનું અર્થઘટન કરો.

4. આધાર વર્ષ એટલે શું ?

5. પરંપરિત આધારના સૂચક આંકનું અચલ આધારના સૂચક આંકમાં પરિવર્તન કરવાનું સૂત્ર લખો.

6. સૂચક આંકની વ્યાખ્યા આપો.

7. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની વ્યાખ્યા આપો.

8. ભાર એટલે શું ?

9. ગર્ભિત ભાર કોને કહેવાય ?

10. સૂચક આંકનાં અગત્યના મૂળભૂત પરીક્ષણોનાં નામ આપો.

11. પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક એટલે શું ?

12. 'તેલના ભાવનો સૂચક આંક ₹ 500 છે.' આ વિધાન ખરું છે કે ખોટું તે જણાવી જો ખોટું હોય તો સુધારીને ફરીથી લખો.

13. ફુગાવાનો દર શોધવા માટે કયા સૂચક આંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ફુગાવાનો દર શોધવાનું સૂત્ર આપો.

14. ભારતમાં મોંઘવારી ભથ્થાનો દર શોધવા કયા સૂચક આંકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે ?

15. અચલ આધારની રીત અને પરંપરિત આધારની રીત વચ્ચેનો મુખ્ય તફાવત લખો.

16. કઈ પદ્ધતિમાં આધાર વર્ષ પ્રત્યેક વર્ષે બદલાતું રહે છે ?

17. સૂચક આંકની રચનામાં કઈ સરેરાશ પ્રચલિત છે ?

18. સૂચક આંકની ગણતરીમાં આધાર વર્ષ કેવું હોવું જોઈએ ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. આધાર વર્ષ એટલે શું ? તેની પસંદગીમાં મુખ્ય કઈ બાબતો ધ્યાનમાં લેવી જોઈએ ?

2. સૂચક આંકનાં લક્ષણો જણાવો.

3. જથ્થા સૂચક આંક એટલે શું ?

4. સૂચક આંકની રચનામાં ભાર એટલે શું ? ભારના પ્રકાર જણાવો.

5. ફિશરના સૂચક આંકને આદર્શ સૂચક આંક શા માટે કહે છે ?

6. સ્પષ્ટ ભાર અને ગર્ભિત ભાર વચ્ચેનો મુખ્ય તફાવત જણાવો.

7. એક સમયગાળા દરમિયાન જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક 280 થી વધીને 340 થયો અને વેતન ₹ 13,500થી વધીને 14,750 થયું હોય, તો કામદારને વાસ્તવમાં કેટલો ફાયદો કે નુકસાન થશે તે શોધો.

8. વર્ષ 2010 થી 2013 સુધીના જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંક અને સરેરાશ માસિક વેતન નીચે મુજબ આપેલ છે. તે પરથી દરેક વર્ષ માટે વાસ્તવિક વેતન શોધો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013
સરેરાશ માસિક વેતન (₹)	35,000	40,000	42,000	50,000
જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક	120	150	130	160

9. વર્ષ 2014 અને વર્ષ 2015ના જથ્થાબંધ ભાવના સૂચક આંક અનુક્રમે 177.6 અને 181.2 મળ્યા છે. આ બંને વર્ષના સૂચક આંકનો ઉપયોગ કરી ફુગાવાનો દર શોધો.

10. ત્રણ વસ્તુઓના ભાવ સાપેક્ષ આંકમાં થયેલ ટકાવારી વધારો અનુક્રમે 315, 328 અને 390 છે. જો આ વસ્તુઓના મહત્ત્વનું પ્રમાણ 5 : 7 : 8 હોય, તો ભાવનો સામાન્ય સૂચક આંક ગણો.

11. જો વર્ષ 2014ના માટે એક વર્ગના કુટુંબની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવક ₹ 25,000 હોય અને જો તે વર્ગનો વર્ષ 2014ના આધારે વર્ષ 2016ના માટેનો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક 120 હોય, તો વર્ષ 2016ના માટે આ વર્ગનાં કુટુંબની ખર્ચપાત્ર સરેરાશ આવકનું અનુમાન કરો.

12. એક કામદારની વર્ષ 2015માં માસિક સરેરાશ આવક ₹ 16,000 હતી અને વર્ષ 2016માં વધીને ₹ 20,000 થઈ, વર્ષ 2015ની સરખામણીમાં વર્ષ 2016 માટે આવકનો સૂચક આંક શોધો.

13. જો એક વસ્તુનું ઉત્પાદન વર્ષ 2016માં આધાર વર્ષની સરખામણીએ $\frac{9}{5}$ ગણું વધ્યું હોય, તો વર્ષ 2016ના માટે ઉત્પાદનનો સૂચક આંક શોધો.

14. જો $I_L = 221.5$ અને $I_F = 222$ હોય, તો I_P શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. અચલ આધારે સૂચક આંક શોધવાની રીતના ગુણ અને મર્યાદા જણાવો.

2. પરંપરિત આધારે સૂચક આંક શોધવાની રીતના ગુણ અને મર્યાદા જણાવો.

3. અચલ આધાર અને પરંપરિત આધારની રીત વચ્ચેનો તફાવત આપો.

4. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકનો અર્થ આપી તેની રચના કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવાના મુદ્દાઓ જણાવો.

5. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકના ઉપયોગ જણાવો.

6. જીવનનિર્વાહ ખર્ચના સૂચક આંકની મર્યાદા જણાવો.

7. બળતણની પાંચ વસ્તુઓમાંથી ત્રણ વસ્તુઓના ભાવમાં આધાર વર્ષ 2014ની સરખામણીએ વર્ષ 2015માં અનુક્રમે 50 %, 90 %, 110 % નો વધારો થયો છે. અન્ય બે વસ્તુઓના ભાવમાં અનુક્રમે 5 % અને 2 % ઘટાડો થયો છે. જો પાંચ વસ્તુઓની સાપેક્ષ અગત્યતા 5 : 4 : 3 : 2 : 1ના પ્રમાણમાં હોય, તો વર્ષ 2015નો બળતણના ભાવનો સૂચક આંક શોધો.

8. કોઈ એક કંપનીમાં કામ કરતાં કર્મચારીઓની વર્ષ 2008 થી વર્ષ 2014 સુધીની સરેરાશ વાર્ષિક આવક અંગેની નીચે મુજબની માહિતી પરથી અચલ આધારની રીતે સૂચક આંક શોધો.
(આધાર વર્ષ 2008 લો.)

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
સરેરાશ વાર્ષિક આવક (₹ 10,000)	36	40	48	52	60	80	95

9. કોઈ એક કંપનીના શેરના જાન્યુઆરી 2014ને આધારે જુદા જુદા મહિનાના સરેરાશ બંધ ભાવો અંગેના સૂચક આંક નીચે મુજબ છે. તે પરથી પરંપરિત આધારે સૂચક આંક ગણો.

મહિનો	જાન્યુઆરી '14	ફેબ્રુઆરી '14	માર્ચ '14	એપ્રિલ '14	મે '14	જૂન '14
અચલ આધારે સૂચક આંક	100	104	105	108	109	127

10. નીચે આપેલ પરંપરિત આધારે મેળવેલ સૂચક આંક પરથી અચલ આધારના સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014
સૂચક આંક	120	90	140	125

11. એક વસ્તુના ભાવ અંગેની નીચેની માહિતી પરથી પરંપરિત આધારની રીતે સૂચક આંક મેળવો.

વર્ષ	2009	2010	2011	2012	2013	2014
ભાવ ₹	40	45	48	55	60	70

12. ઔદ્યોગિક કામદારના જીવનનિર્વાહની વસ્તુઓના સમૂહના સૂચક આંક અને ભાર અંગેની વર્ષ 2015ના એપ્રિલ માસની આપેલી માહિતી પરથી જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધો.

સમૂહ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
સૂચક આંક	247	167	259	196	212	253
ભાર	44	20	16	6	10	4

13. જો $\Sigma p_1q_0 : \Sigma p_0q_0 = 5:3$ અને $\Sigma p_1q_1 : \Sigma p_0q_1 = 3:2$ હોય, તો લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરના સૂચક આંક ગણો.

14. જો લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંકોના ગુણોત્તર 4 : 5 હોય અને ફિશરનો સૂચક આંક 150 હોય, તો પાશેનો સૂચક આંક ગણો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. વર્ષ 2010ને આધાર વર્ષ લઈ વર્ષ 2012 ની જુદી જુદી વસ્તુઓના ભાવ અંગેની નીચેની માહિતીનો ઉપયોગ કરી સામાન્ય સૂચક આંક શોધો.

વસ્તુ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
એકમ	ક્વિન્ટલ	કિલોગ્રામ	ડઝન	મીટર	લિટર
વર્ષ 2010ના ભાવ (₹)	110	50	40	80	20
વર્ષ 2012ના ભાવ (₹)	120	70	60	90	20

2. નીચેની માહિતી પરથી કુલ ખર્ચની પદ્ધતિથી વર્ષ 2010ના આધારે વર્ષ 2015 માટે સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	*A*	*B*	*C*	*D*
વર્ષ 2010ના ભાવ (₹)	10	30	40	20
વર્ષ 2015ના ભાવ (₹)	14	42	80	26
વર્ષ 2010નો જથ્થો	8	4	4	16

3. નીચેની માહિતી પરથી વર્ષ 2013ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2014ના માટે કુલ ખર્ચની પદ્ધતિથી સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	**વર્ષ 2014**		**વર્ષ 2013**
	વપરાશ (જથ્થો)	**ભાવ (₹)**	**ભાવ (₹)**
ઘઉં	15 કિગ્રા	24	20
ચોખા	10 કિગ્રા	45	40
બાજરી	5 કિગ્રા	20	16
તુવેર દાળ	3 કિગ્રા	90	80

4. નીચેની માહિતી પરથી (i) 2008ના વર્ષને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ અચલ આધારે સૂચક આંક (ii) વર્ષ 2008 અને 2009ના સરેરાશ ભાવને આધાર વર્ષના ભાવ તરીકે લઈ સૂચક આંક શોધો.

વર્ષ	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
ભાવ (₹)	32	38	40	42	45	60	65

5. એક શહેરના ઔદ્યોગિક પેદાશના જુદા જુદા સમૂહોના સૂચક આંક તથા સમૂહના ભાર નીચે મુજબ આપેલ છે. તે પરથી ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનનો સૂચક આંક મેળવો.

સમૂહ	**સૂચક આંક**	**ભાર**
લોખંડ	390.2	30
ટેક્સટાઇલ	247.6	31
કેમિકલ ઉદ્યોગ	510.2	18
ઈજનેરી માલસામાન	403.3	17
સિમેન્ટ	624.4	4

6. વર્ષ 2010ના સાપેક્ષમાં વર્ષ 2015માં ઘઉંના ભાવ 70 % વધે છે અને ચોખાના ભાવ 40 % વધે છે. બાજરીના ભાવ 25 % ઘટે છે. જ્યારે તેલના ભાવ 40 % વધે છે અને ઘીના ભાવ 5 % ઘટે છે. જો ઘી કરતા તેલનું મહત્ત્વ ત્રણ ગણું હોય તથા ચોખાનું બમણું હોય અને ઘઉં તથા બાજરી દરેકનું મહત્ત્વ ચોખા કરતાં બમણું હોય તો, ખોરાકની આ પાંચેય વસ્તુઓના સમૂહના ભાવનો સૂચક આંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

7. કામદાર વર્ગના માસિક વેતનની નીચેની માહિતી પરથી તેમના વાસ્તવિક વેતનની ગણતરી કરો. વર્ષ 2008ને આધાર વર્ષ ગણી વર્ષ 2015ની નાણાંની ખરીદશક્તિ શોધો.

વર્ષ	2010	2011	2012	2013	2014	2015
સરેરાશ માસિક વેતન (₹)	15,000	18,000	19,000	20,000	22,000	25,000
જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક (આધાર વર્ષ 2008)	120	180	205	220	235	260

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો.

1. નીચેની માહિતીને આધારે વર્ષ 2014ને આધાર વર્ષ તરીકે લઈ વર્ષ 2015 માટે લાસ્પેયર અને પાશેના સૂચક આંક મેળવો. ઉપરાંત ફિશરનો સૂચક આંક મેળવો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

વસ્તુ	આધાર વર્ષ 2014		ચાલુ વર્ષ 2015	
	એકમ દીઠ ભાવ (₹)	કુલ ખર્ચ (₹)	એકમ દીઠ ભાવ (₹)	કુલ ખર્ચ (₹)
ઘઉં	16	224	18	270
ચોખા	35	140	40	200
તુવેર દાળ	100	200	120	360
તેલ	108	432	120	600

2. ચાર જુદી-જુદી વસ્તુઓના વપરાશનો જથ્થો અને કુલ ખર્ચ નીચે મુજબ આપેલ છે. વર્ષ 2013ની સરખામણીમાં વર્ષ 2015ના વર્ષ માટે પાશે અને ફિશરના સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	આધાર વર્ષ 2013		ચાલુ વર્ષ 2015	
	કુલ ખર્ચ (₹)	વપરાશ (જથ્થો)	કુલ ખર્ચ (₹)	વપરાશ (જથ્થો)
A	360	60 કિગ્રા	375	25 કિગ્રા
B	160	10 લિટર	416	20 લિટર
C	480	15 કિગ્રા	613.2	6 કિગ્રા
D	336	3 કિગ્રા	400	2.5 કિગ્રા

3. છ જુદી જુદી વસ્તુઓ અંગે નીચે આપેલ માહિતી પરથી વર્ષ 2015 માટે ફિશરનો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
એકમ	20 કિગ્રા	ક્વિન્ટલ	કિગ્રા	લિટર	મીટર	ડઝન
વર્ષ 2013 જથ્થો	5 કિગ્રા	10 કિગ્રા	1200 ગ્રામ	30 લિટર	12 મીટર	20 નંગ
વર્ષ 2013 ભાવ (₹)	600	1600	60	52	8	30
વર્ષ 2015 જથ્થો	12 કિગ્રા	12 કિગ્રા	2000 ગ્રામ	36 લિટર	20 મીટર	16 નંગ
વર્ષ 2015 ભાવ (₹)	880	2400	75	32	12	36

4. નીચે આપેલી માહિતી પરથી વર્ષ 2015 માટે લાસ્પેયર, પાશે અને ફિશરના સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	જથ્થો		ભાવ (₹)	
	વર્ષ 2014	વર્ષ 2015	વર્ષ 2014	વર્ષ 2015
A	25 કિગ્રા	32 કિગ્રા	42	45
B	15 લિટર	20 લિટર	28	30
C	10 નંગ	20 નંગ	30	36
D	8 મીટર	15 મીટર	20	25
E	30 લિટર	36 લિટર	60	65

5. નીચે આપેલ માહિતી પરથી કુલ ખર્ચની રીતે અને કૌટુંબિક અંદાજપત્રની રીતે વર્ષ 2015નો સૂચક આંક ગણો અને આ બંને સૂચક આંક સમાન છે કે કેમ તે જણાવો.

વસ્તુ	એકમ	વર્ષ 2013	વર્ષ 2013	વર્ષ 2015
		વપરાશ (જથ્થો)	ભાવ (₹)	ભાવ (₹)
ઘઉં	ક્વિન્ટલ	100 કિગ્રા	1800	2400
ચોખા	20 કિગ્રા	40 કિગ્રા	700	800
ખાંડ	કિગ્રા	40 કિગ્રા	30	36
તેલ	કિગ્રા	60 કિગ્રા	108	120
દાળ	20 કિગ્રા	40 કિગ્રા	2000	2400
ઘી	કિગ્રા	36 કિગ્રા	400	480

6. અમદાવાદ શહેરના વર્ષ 2014 અને વર્ષ 2015ના ઔદ્યોગિક કામદારોના જીવનનિર્વાહની વસ્તુઓના સમૂહોના સૂચક આંક અને ભાર અંગેની માહિતી નીચે મુજબ આપવામાં આવેલી છે. તે પરથી ઔદ્યોગિક કામદારોના જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધો અને જો કામદારના વેતનમાં વર્ષ 2015માં 5 % વધારો કરવામાં તો વર્ષ 2015ના ભાવવધારા સામે રક્ષણ આપવા માટે વધારો પૂરતો છે ?

સમૂહ	ખોરાક	બળતણ અને વીજળી	રહેઠાણ	કાપડ	પરચૂરણ ખર્ચ
ભાર	31	14	22	10	23
વર્ષ 2014નો સૂચક આંક	270	168	205	174	303
વર્ષ 2015નો સૂચક આંક	281	178	210	177	337

7. એક શહેરના વર્ષ 2014ના ઔદ્યોગિક કામદારોના જીવનનિર્વાહની વસ્તુઓના સૂચક આંક અને ભાર અંગેની નીચે મુજબ માહિતી આપેલ છે. તે પરથી ઔદ્યોગિક કામદારોનો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સૂચક આંક શોધો. આ કામદારોને વર્ષ 2012માં ચૂકવાતો સરેરાશ માસિક પગાર ₹ 6,000 હોય તો હાલનું જીવનધોરણ ટકાવી રાખવા માટે ચાલુ વર્ષ 2014નો સરેરાશ માસિક પગાર કેટલો હોવો જોઈએ ?

સમૂહ	ખોરાક	બળતણ અને વીજળી	રહેઠાણ	કાપડ	પરચૂરણ ખર્ચ
વર્ષ 2014નો ભાવાંક (આધાર વર્ષ 2012)	255	174	234	153	274
ભાર	42	8	12	18	20

8. નીચે આપેલી વર્ષ 2015ના ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન જથ્થા અને ભાર અંગેની માહિતી પરથી ઔદ્યોગિક ઉત્પાદનનો સૂચક આંક ગણો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

ઉદ્યોગ	એકમ	વર્ષ 2013 ઉત્પાદન	વર્ષ 2015 ઉત્પાદન	ભાર
ખાણ	લાખ ટન	10	15	4
ટેક્ષટાઈલ્સ	કરોડ મીટર	20	25	6
ઈજનેરી	લાખ ટન	30	25	30
કેમિકલ્સ	સો ટન	40	50	3
ખાદ્ય	લાખ ટન	50	60	4

9. ચાર જુદી-જુદી વસ્તુઓના વર્ષ 2014 અને વર્ષ 2015માં એકમ દીઠ ભાવ અને ભાર અંગે માહિતી નીચે મુજબ આપેલ છે. તે પરથી વર્ષ 2015નો સૂચક આંક ગણો.

વસ્તુ	ભાર	વર્ષ 2014	વર્ષ 2015
		એકમ દીઠ ભાવ (₹)	એકમ દીઠ ભાવ (₹)
A	40	32	40
B	25	80	100
C	20	24	30
D	15	4	6

10. વર્ષ 2015માં જીવનનિર્વાહ ખર્ચના જુદા જુદા સમૂહો પૈકી ખોરાકનો અને કાપડનો સૂચક આંક અનુક્રમે 150 અને 224.7 છે. બળતણના ભાવમાં 220 % વધારો થયો છે. ભાડાનો ખર્ચ ₹ 4000 થી વધીને ₹ 6000 અને પરચૂરણ ખર્ચ 1.75 ગણો વધ્યો છે. પ્રથમ ચાર સમૂહો પાછળ કરવામાં આવતું ખર્ચ અનુક્રમે 40 %, 18 %, 12 % અને 20 % હોય, તો વર્ષ 2015નો જીવનનિર્વાહ ખર્ચનો સામાન્ય સૂચક આંક ગણો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

Irving Fisher
(1867 – 1947)

Irving Fisher was an American economist, statistician, inventor and Progressive social campaigner. He was one of the earliest American neoclassical economists. He was described as "The greatest economist the United States has ever produced.

Fisher made important contributions to utility theory and general equilibrium. He was also a pioneer in the rigorous study of intertemporal choice in markets, which led him to develop a theory of capital and interest rates. His research on the quantity theory of money inaugurated the school of macroeconomic thought known as "Monetarism". Fisher was also a pioneer of econometrics, including the development of index numbers. Some concepts named after him include the Fisher equation, the Fisher hypothesis, the international Fisher effect, the Fisher separation theorem and Fisher market.

•

"Can we say, in this case, that the cause of a cause is the relevant cause ?"

– Johnny Rich

2

સુરેખ સહસંબંધ
(Linear Correlation)

વિષયવસ્તુ :

2.1 પ્રસ્તાવના

2.2 સુરેખ સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા

2.3 સહસંબંધ અને સહસંબંધાંક

2.4 વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

2.5 કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત

2.6 સહસંબંધાંકના ગુણધર્મો

2.7 સહસંબંધાંકની કિંમતનું અર્થઘટન

2.8 સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત

2.9 સહસંબંધાંકના અર્થઘટનમાં રાખવી પડતી સાવચેતી

2.1 પ્રસ્તાવના

ધોરણ 11માં આપણે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ, પ્રસારમાન, વિષમતા વગેરે જેવાં પ્રકરણોમાં ફક્ત એક ચલનાં લક્ષણોનો અભ્યાસ કર્યો. અત્યાર સુધી આપણો અભ્યાસ એક ચલના વિતરણ સુધી સીમિત હતો, પરંતુ ઘણી પરિસ્થિતિઓ એવી ઉદ્‌ભવતી હોય છે કે, જેમાં બે કે તેથી વધુ ચલોનો સંયુક્ત અભ્યાસ ઇચ્છનીય અને જરૂરી હોય. દા.ત., આપણે કોઈ કંપનીની કોઈ વસ્તુના વાર્ષિક વેચાણનો અભ્યાસ કરતાં હોઈએ તો સાથ-સાથે કંપનીના નફા વિશે પણ જાણવા ઇચ્છીએ છીએ, કારણ કે તે પરથી આ બે ચલો 'ઉત્પાદિત વસ્તુનું વેચાણ' અને 'તેનાથી થતો નફો' વચ્ચે કેવો અને કેટલો સંબંધ છે તે જાણી શકાય છે. કોઈ વિસ્તારમાં વાર્ષિક વરસાદ અને ચોખાની ઊપજ, વસ્તુનો ભાવ અને તેની માંગ, કુટુંબની આવક અને ખર્ચ, પિતા અને પુત્રની ઊંચાઈ, પતિ અને પત્નીની ઉંમર વગેરે કેટલાંક જાણીતાં ઉદાહરણો છે જેમાં ચલોની જોડ વચ્ચે સંબંધ જોવા મળે છે. તે જ રીતે ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં જોઈ શકીએ છીએ કે બે ચલ વચ્ચે સંબંધ હોય છે.

આપણે આ પ્રકરણ અને આ પછીના પ્રકરણમાં બે પરસ્પર સંબંધિત ચલોના સંબંધ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

નોંધ :

- એક ચલની માહિતી એકઠી કરી મેળવેલા તેના વિતરણને એક ચલીય (Univariate) વિતરણ કહે છે. દા.ત., કોઈ એક વિષયમાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ, કોઈ કંપનીમાં કામ કરતા વ્યક્તિઓની માસિક આવક, સ્ટેટ ટ્રાન્સપોર્ટ (ST)ની બસોના ડ્રાઇવરની ઉંમરનું વિતરણ.
- કોઈ એકમના બે જુદાં-જુદાં લક્ષણોની એક જ સમયે એકઠી કરેલી માહિતીને દ્વિચલ માહિતી કહે છે અને તે પરથી મેળવેલા તેના વિતરણને દ્વિચલ (Bivariate) વિતરણ કહે છે. દા.ત. કોઈ વસ્તુના ભાવ અને તેનો પુરવઠો, કોઈ એક સમૂહનાં કુટુંબોનો માસિક ખર્ચ અને બચત, પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમરનું વિતરણ.
- બેથી વધુ ચલોની કિંમતમાં એક સાથે થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ બહુચલીય અને આંશિક સહસંબંધ દ્વારા થઈ શકે છે, પરંતુ અત્રે આપણે ફક્ત બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનો જ અભ્યાસ કરીશું.

2.2 સુરેખ સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા

સૌપ્રથમ આપણે સહસંબંધનો અર્થ સમજીએ. હવે આપણે જાણીએ છીએ કે, ઘણી પરિસ્થિતિમાં બે ચલોની કિંમતોમાં એક સાથે ફેરફાર જોવા મળે છે. બે ચલોની કિંમતોમાં એક સાથે થતા ફેરફારો મુખ્યત્વે બે પ્રકારે થઈ શકે :

જ્યારે,

(1) બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય.

(2) કોઈ અન્ય કારણની અસરને લીધે બંને ચલોની કિંમતમાં ફેરફાર થતા હોય.

કોઈ વિસ્તારમાં વાર્ષિક વરસાદ અને ચોખાની ઊપજનાં ઉદાહરણમાં મોટા ભાગે વરસાદ વધે (અમુક હદ સુધી) તો ચોખાની ઊપજ પણ વધે છે અને વરસાદ ઘટે તો ચોખાની ઊપજ પણ ઘટે છે. તેથી અહીં વરસાદ એ 'કારણ' છે જ્યારે ચોખાની ઊપજ એ 'કાર્ય' છે. તે જ રીતે કોઈ વ્યક્તિની આવક લગભગ સમાન રહેતી હોય ત્યારે તેનો ખર્ચ વધે તો તેની બચત ઘટે છે અને ખર્ચ ઘટે તો બચત વધે છે. અહીં ખર્ચ એ 'કારણ' છે જ્યારે બચત એ 'કાર્ય' છે. ઉપર્યુક્ત બે ઉદાહરણોમાં બંને ચલોમાં થતા ફેરફારો કાર્ય-કારણનો સંબંધ દર્શાવે છે. ક્યારેક બંને ચલો પરસ્પર આધારિત હોય છે અને એટલે કોઈ એક ચલને 'કારણ' અને બીજા ચલને 'કાર્ય' ચોક્કસપણે કહી શકાય નહિ. સામાન્ય રીતે આર્થિક ચલો (Economic Variables)ના કિસ્સામાં આવું બની શકે. દા.ત., માંગ અને પુરવઠો. જો માંગ વધે તો પુરવઠો વધારવાની જરૂર પડે છે, (જે હંમેશાં તાત્કાલિક શક્ય નથી હોતું) અને જ્યારે પુરવઠો વધે ત્યારે ભાવ ઘટવા તરફ જાય છે અને તેને લીધે માંગ વધે છે. આમ, માંગ અને પુરવઠો પરસ્પર આધારિત છે. તે જ રીતે પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર આવા પ્રકારની પરિસ્થિતિનું ઉદાહરણ છે.

રેનકોટનું વેચાણ અને વરસાદ માટેના પગરખાંના વેચાણના ઉદાહરણમાં બંને ચલોની કિંમતો ચોમાસામાં વધે છે. અહીં બંને ચલ વચ્ચે પ્રત્યક્ષ કાર્ય-કારણનો સંબંધ નથી પરંતુ રેનકોટના વેચાણ અને વરસાદ માટેના પગરખાનાં વેચાણમાં થતો ફેરફાર એ ત્રીજા ચલ વરસાદને આભારી છે. આ પરોક્ષ કાર્ય-કારણના સંબંધનું ઉદાહરણ છે.

બે ચલ વચ્ચેના સંબંધનાં ઉદાહરણો જોયા પછી આપણે સહસંબંધની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકીએ. જો બે ચલોની કિંમતોમાં પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ કાર્ય-કારણને લીધે એક સાથે ફેરફારો થતા હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે **સહસંબંધ** છે તેમ કહેવાય. જ્યારે બે સહસંબંધિત ચલોની જોડયુક્ત કિંમતોને આલેખપત્ર પર દર્શાવીએ અને તે આલેખમાંનાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર રહેલા હોય અથવા ખૂબ નજીક હોય ત્યારે તેવા સહસંબંધને **સુરેખ સહસંબંધ** કહે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો બે સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર લગભગ અચળ પ્રમાણમાં હોય તો બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

સામાન્ય રીતે પ્રાકૃતિક વિજ્ઞાન જેવા કે ગણિત અને ભૌતિકશાસ્ત્રમાં બે ચલ સંપૂર્ણ સુરેખસંબંધ ધરાવે છે, તેવું જોવા મળે છે. એટલે કે એક ચલમાં ફેરફાર થવાથી બીજા ચલની કિંમતમાં અચળ પ્રમાણમાં ફેરફાર થાય છે.

દા.ત., (1) વર્તુળની ત્રિજ્યા અને પરિઘ

આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા r એકમ હોય, તો તેનો પરિઘ $2\pi r$ થાય છે. આમ ત્રિજ્યાના માપને 2π (અચળ) વડે ગુણવાથી તે વર્તુળના પરિઘનું માપ મળે છે. તેથી કહી શકાય કે ત્રિજ્યામાં ફેરફાર થવાથી વર્તુળના પરિઘના માપમાં અચળ પ્રમાણમાં ફેરફાર થાય, જે નીચેના કોષ્ટક પરથી સ્વયં સ્પષ્ટ છે :

ત્રિજ્યા (r)	2	3	5	10
પરિઘ $(2\pi r)$	4π	6π	10π	20π

(2) અચળ ગતિએ કોઈ પદાર્થને અંતર કાપતા લાગતો સમય અને પદાર્થે કાપેલું અંતર

જો કોઈ પદાર્થ કલાકના 50 કિમીની ઝડપે ગતિ કરતો હોય તો તેને લાગતા સમયના ચોક્કસ અચળ પ્રમાણમાં જ તે પદાર્થ અંતર કાપે છે, જે નીચેના કોષ્ટક પરથી સહેલાઈથી સમજી શકાય છે :

પદાર્થને અંતર કાપતા લાગતો સમય (કલાક)	2	3	6	10
પદાર્થે કાપેલું અંતર (કિમી)	100	150	300	500

પરંતુ સામાન્ય રીતે વાણિજ્ય, અર્થશાસ્ત્ર અને સામાજિક વિજ્ઞાનમાં બે ચલોની કિંમતમાં થતા ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં હોતા નથી. દા.ત. જો સતત બે વર્ષ માટે આગળના વર્ષની સરખામણીએ ચાલુ વર્ષે વરસાદમાં 10 % વધારો થયો હોય તો જરૂરી નથી કે પાક પણ બંને વર્ષે સરખા પ્રમાણમાં વધે. આમ થવાનું કારણ એ છે કે, બંને ચલો વરસાદ અને પાક બીજાં ઘણાં પરિબળોની અસર હેઠળ બદલાય છે અને તેથી બંને ચલોમાં થતા ફેરફારોમાં અનિશ્ચિતતા (Chance)નું તત્ત્વ રહેલું હોય છે. તેથી બે સહસંબંધિત ચલોની જોડને અનુરૂપ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર નહિ પરંતુ સુરેખાની આસપાસ હોઈ શકે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે સુરેખ સહસંબંધનો અભ્યાસ કરીશું. હવે પછી આપણે સુરેખ સહસંબંધને સહસંબંધ જ કહીશું.

સહસંબંધના મુખ્યત્વે બે પ્રકાર છે : (1) ધન સહસંબંધ (2) ઋણ સહસંબંધ

(1) ધન સહસંબંધ : જ્યારે બંને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં થતા હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વસ્તુનો ભાવ અને પુરવઠો, વ્યક્તિની આવક અને ખર્ચ, પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર, કોઈ માર્ગ પર વાહનોની સંખ્યા અને અકસ્માતોની સંખ્યા, કોઈ વસ્તુનું વેચાણ અને તેનાથી થતો નફો, કોઈ વિસ્તારમાં વરસાદ અને પાકની ઊપજ એ ધન સહસંબંધના કેટલાંક ઉદાહરણો છે.

(2) ઋણ સહસંબંધ : જ્યારે બંને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં થતા હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વસ્તુનો ભાવ અને માંગ, વ્યક્તિનું ખર્ચ અને બચત, શિયાળામાં દિવસનું લઘુતમ તાપમાન અને ગરમ કપડાંનું વેચાણ, સમુદ્રની સપાટીથી કોઈ એક સ્થળની ઊંચાઈ અને તે સ્થળે હવામાં ઑક્સિજનનું પ્રમાણ એ ઋણ સહસંબંધનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે.

2.3 સહસંબંધ અને સહસંબંધાંક

આપણે અગાઉ સહસંબંધનો અર્થ અને તેની વ્યાખ્યાની ચર્ચા કરી. હવે આપણે તેના માપ સહસંબંધાંક વિશે જોઈએ.

બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા (Strength)ના માપને સહસંબંધાંક કહે છે. તેને સંકેતમાં r વડે દર્શાવાય છે. સહસંબંધાંક એ બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેના સુરેખ સંબંધની ઘનિષ્ઠતા કે માત્રા (degree) દર્શાવતું સંખ્યાત્મક માપ છે. આ માપ સૌપ્રથમ કાર્લ પિયર્સને સૂચવ્યું હતું.

સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો

બે ચલો વચ્ચે રહેલા સહસંબંધનું સ્વરૂપ અને તે સંબંધની ઘનિષ્ઠતા જાણવા માટે મુખ્યત્વે નીચેની પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ થાય છે :

(1) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત (Scatter Diagram Method)

(2) કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત (Karl Pearson's Product moment Method)

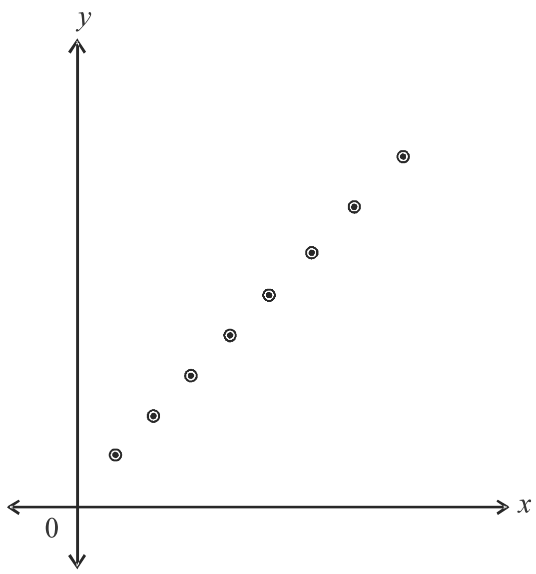
(3) સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત (Spearman's Rank Correlation Method)

2.4 વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

બે સંબંધિત ચલો વચ્ચેના સહસંબંધના સ્વરૂપની આકૃતિ દ્વારા રજૂઆત માટેની આ એક સરળ રીત છે. બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવા માટે આ એક જ રીતનો વ્યાપક ઉપયોગ થાય છે. તદુપરાંત આ રીત દ્વારા થોડા ઘણા અંશે બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ પણ મળે છે.

ધારો કે ચલ X અને Y ની n કિંમતોની ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\ldots\ldots, (x_n, y_n)$ છે. ચલ X ની કિંમતોને X-અક્ષ અને ચલ Y ની કિંમતોને Y-અક્ષ પર યોગ્ય પ્રમાણમાપ લઈ આલેખમાં નિરૂપણ કરવામાં આવે છે. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$ને અનુરૂપ બિંદુઓને આલેખમાં દર્શાવતાં મળતી આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ કહે છે.

વિકીર્ણ આકૃતિમાં દર્શાવેલાં બિંદુઓની ઢબ (pattern) પરથી સહસંબંધનું સ્વરૂપ (કે પ્રકાર) જાણી શકાય છે અને થોડા ઘણા અંશે સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ પણ મેળવી શકાય છે. હવે વિકીર્ણ આકૃતિ દ્વારા બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધના સ્વરૂપ અને ઘનિષ્ઠતા વિશે કેવી રીતે જાણી શકાય તે આપણે જોઈએ.



જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરની દિશામાં જતી હોય તો તે બે ચલ X અને Y વચ્ચે **સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

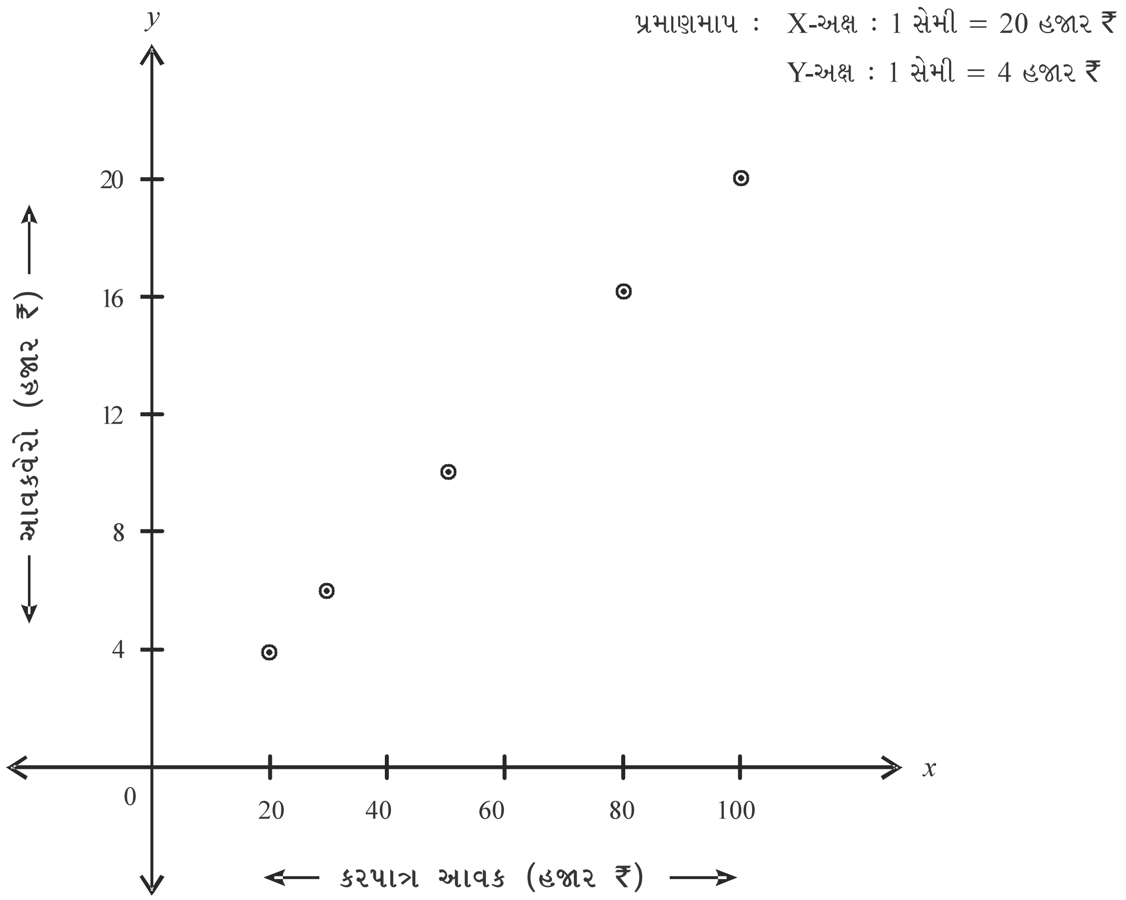
જ્યારે બંને ચલોની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં અને અચળ પ્રમાણમાં થતો હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : કુલ આવકમાંથી મૂળ કપાત (Standard deduction) કર્યા બાદ રહેલી આવક પર 20 ટકાના દરે આવકવેરો (income tax) લાગે છે. નીચે પાંચ વ્યક્તિઓની વાર્ષિક કરપાત્ર (taxable) આવક અને તેને ભરવા પડતા આવકવેરાની વીગત આપેલી છે.

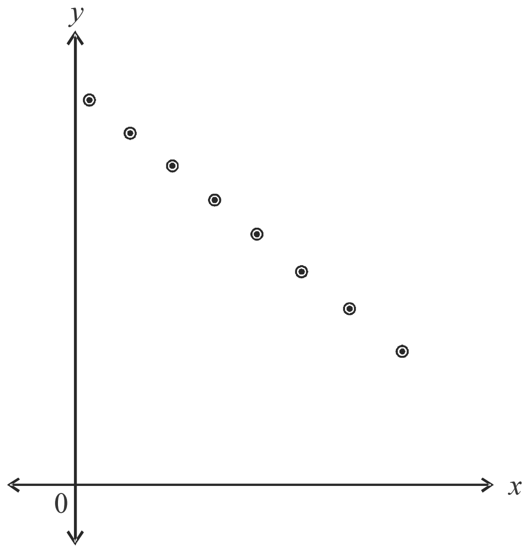
વ્યક્તિ	1	2	3	4	5
કરપાત્ર આવક (હજાર ₹) x	50	30	80	20	100
આવકવેરો (હજાર ₹) y	10	6	16	4	20

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધ વિશે ચર્ચા કરો.

x અને yની ક્રમિત જોડ $(50, 10)$, $(30, 6)$, $(80, 16)$, $(20, 4)$ અને $(100, 20)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતાં આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે.



આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર છે. આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ ચલ X ની કિંમત બદલાય છે તેમ ચલ Y ની કિંમત પણ તે જ દિશામાં અને અચળ પ્રમાણમાં બદલાય છે. (ચકાસો કે, જ્યારે X ની કિંમતને 0.2 (20 %) વડે ગુણવામાં આવે ત્યારે ક્રમિત જોડની તેને અનુરૂપ Y ની કિંમત મળે છે, તેથી અહીં બંને ચલ X અને Y માં સપ્રમાણ ફેરફાર થાય છે.) તેથી, કહી શકાય કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ છે.



જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેની દિશામાં જતી હોય તો બે ચલ X અને Y વચ્ચે **સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

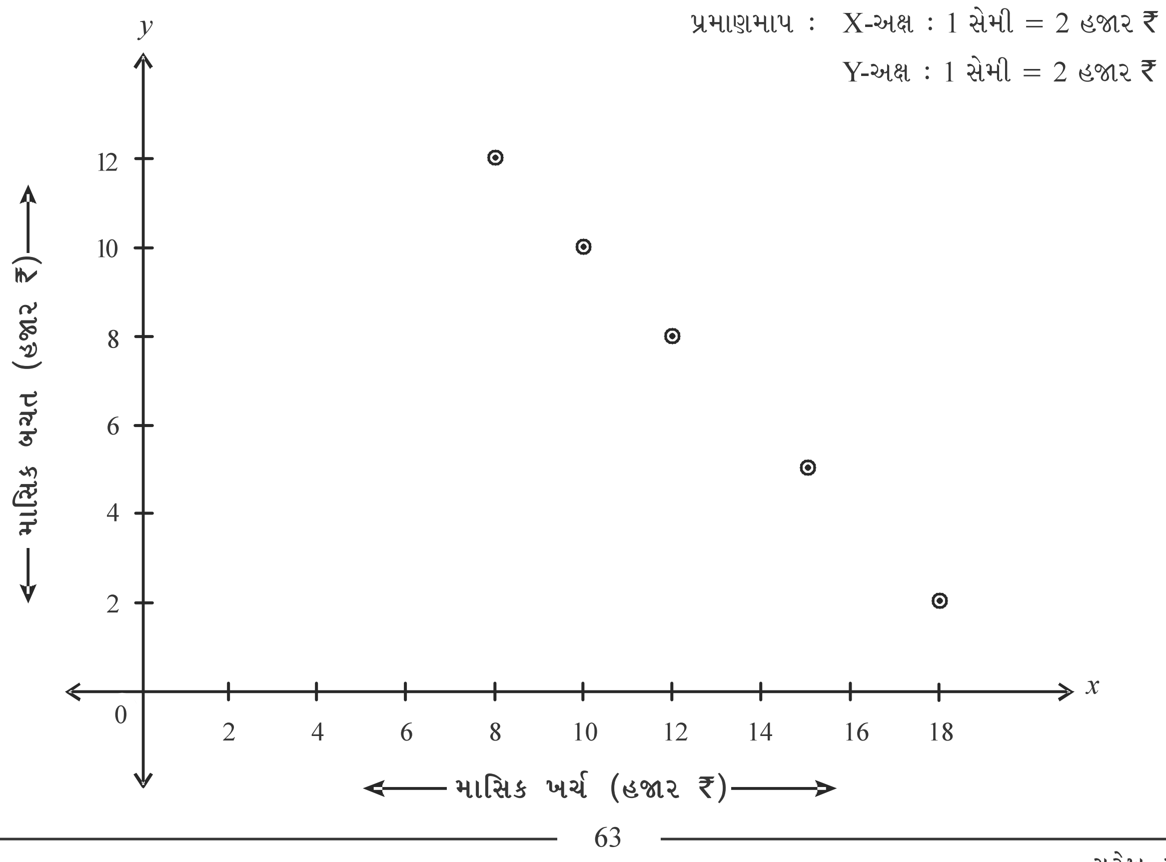
જ્યારે બંને ચલોની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં અને અચળ પ્રમાણમાં થતો હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ **2 : મધ્યમ વર્ગના કુટુંબોના માસિક ખર્ચ અને માસિક બચત વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા લીધેલા 5 કુટુંબોના ખર્ચ અને બચતની વીગત નીચે આપેલી છે. (દરેક કુટુંબની માસિક આવક 20,000 ₹ છે.)**

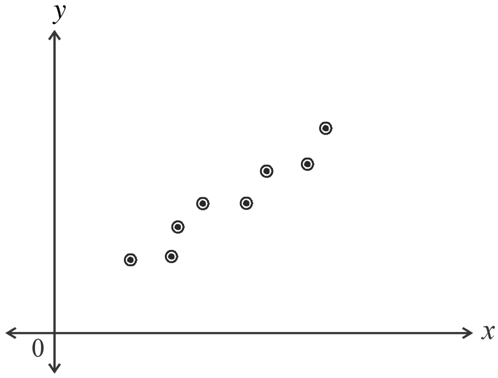
માસિક ખર્ચ (હજાર ₹) x	15	18	8	10	12
માસિક બચત (હજાર ₹) y	5	2	12	10	8

આ માહિતી પરથી માસિક ખર્ચ અને માસિક બચત વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધ વિશે ચર્ચા કરો.

x અને y ની ક્રમિત જોડ $(15, 5)$, $(18, 2)$, $(8, 12)$, $(10, 10)$ અને $(12, 8)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતા આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે :



આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર છે. આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ ચલ Xની કિંમત બદલાય છે તેમ ચલ Yની કિંમત પણ તેની વિરુદ્ધ દિશામાં અને ચોક્કસ પ્રમાણમાં બદલાય છે. (ચકાસો કે, માસિક આવક સ્થિર હોવાથી માસિક ખર્ચમાં થતા વધારા (કે ઘટાડા)ને લીધે માસિક બચતમાં અચળ પ્રમાણમાં ઘટાડો (કે વધારો) જોવા મળે છે.) તેથી કહી શકાય કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે.



જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર ન હોય પરંતુ કોઈ સુરેખાની આસપાસ હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરની દિશામાં જતી હોય, તો તે બે ચલ X અને Y વચ્ચે **આંશિક ધન સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

જ્યારે બંને ચલની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં હોય પણ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં ન હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

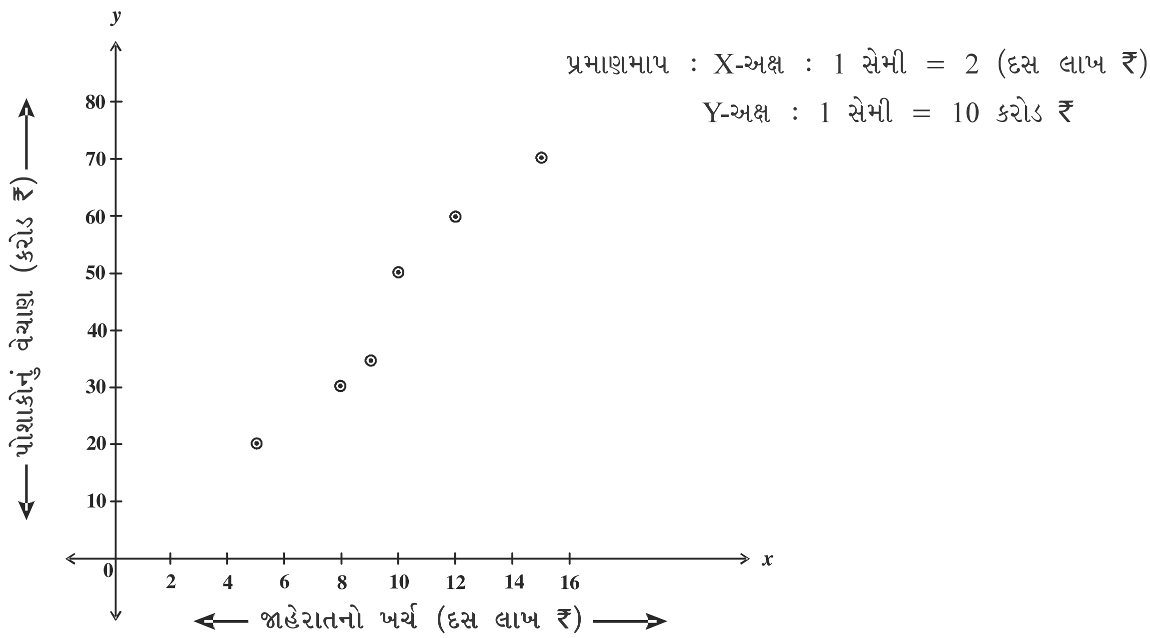
નોંધ : સમષ્ટિના ચલો વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે સામાન્ય રીતે તેમાંથી પ્રમાણસર કદનો નિદર્શ લઈ સહસંબંધાંક મેળવવામાં આવે છે, પરંતુ આપણે ગણતરીની સરળતા ખાતર નિદર્શનું કદ મર્યાદિત અને નાનું રાખીશું.

ઉદાહરણ 3 : એક કંપની તૈયાર પોશાકો બનાવે છે. છેલ્લા છ મહિનામાં થયેલ માસિક જાહેરાત-ખર્ચ (દસ લાખ ₹માં) અને પોશાકોનું વેચાણ (કરોડ ₹માં) નીચે મુજબ છે :

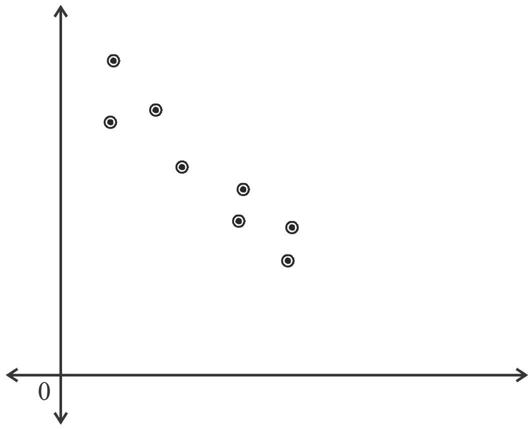
જાહેરાતનું ખર્ચ (દસ લાખ ₹) x	5	8	10	15	12	9
પોશાકોનું વેચાણ (કરોડ ₹) y	20	30	50	70	60	35

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધ વિશે ચર્ચા કરો.

ચલ x અને yની ક્રમિત જોડ $(5, 20)$, $(8, 30)$, $(10, 50)$, $(15, 70)$, $(12, 60)$ અને $(9, 35)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતા આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે :



વિકીર્ણ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર નથી. અહીં, જાહેરાતના ખર્ચ અને વેચાણમાં થતા ફેરફારો એક જ વધતી જતી દિશામાં થાય છે પરંતુ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં નથી. તેથી બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં નથી. તેથી આપણે કહી શકીએ કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે આંશિક ધન સહસંબંધ છે.



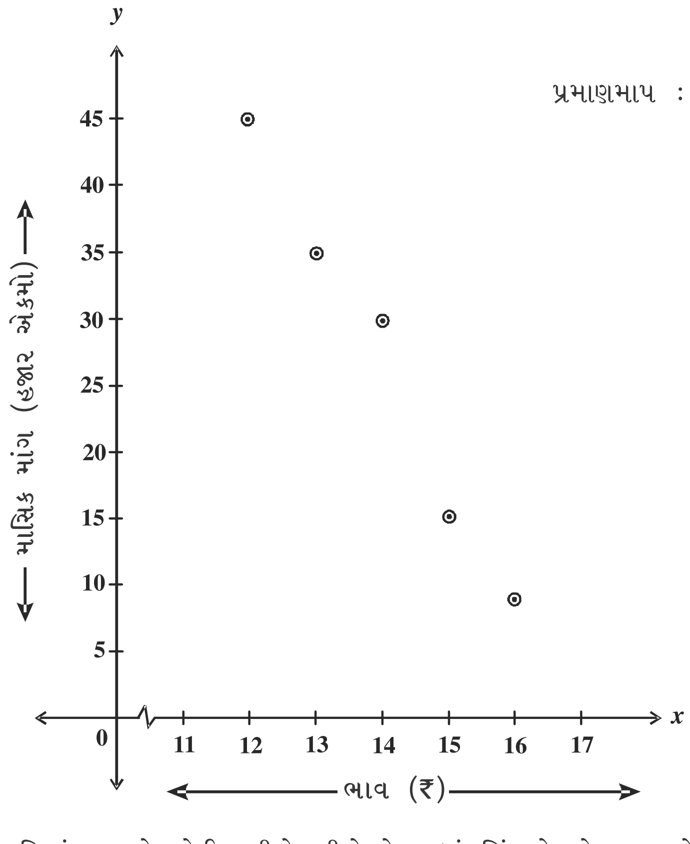
જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર ન હોય પરંતુ કોઈ સુરેખાની આસપાસ હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેની દિશામાં જતી હોય, તો તે બે ચલ X અને Y વચ્ચે **આંશિક ઋણ સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

જ્યારે બંને ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય પણ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં ન હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 4 : વાહનોના સ્પેરપાર્ટસ બનાવતી એક કંપની રબરના બુશરના ભાવની તેની માંગ પર અસર જાણવા માટે છેલ્લાં 5 મહિના જુદા જુદા ભાવ રાખી તેની માંગ વિશે નીચે મુજબ માહિતી મેળવે છે. આ આપેલી માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધના સ્વરૂપ વિશે ચર્ચા કરો.

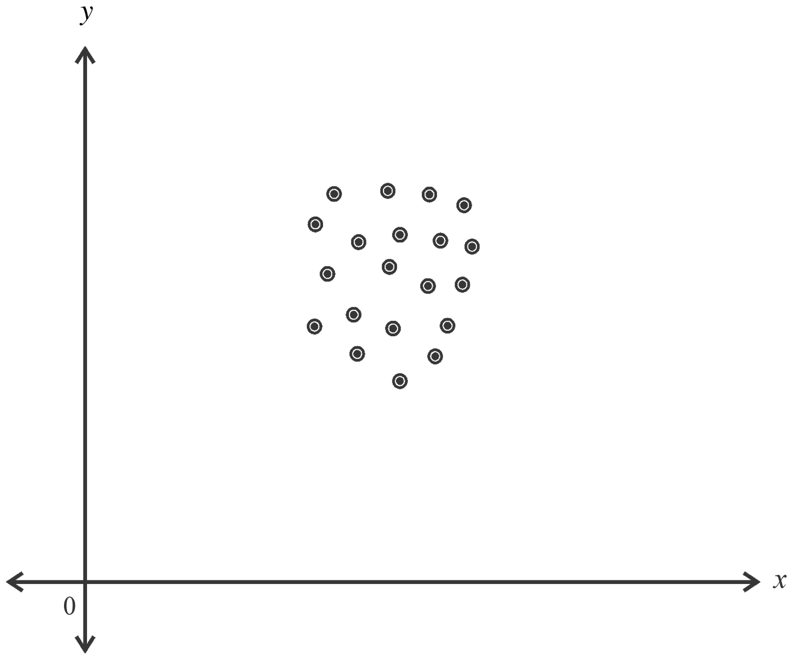
ભાવ (₹) x	12	13	14	15	16
માસિક માંગ (હજાર એકમો) y	45	35	30	15	10

x અને y ની ક્રમિત જોડ $(12, 45), (13, 35), (14, 30), (15, 15)$ અને $(16, 10)$ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતા આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે :



વિકીર્ણ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર નથી. અહીં ભાવ અને માંગમાં થતા ફેરફારો એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં થાય છે પણ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં નથી, તેથી બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં નથી. તેથી આપણે કહી શકીએ કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે.

નોંધ : જ્યારે બિંદુઓ કોઈ સુરેખાની નજીક રહેલાં હોય તો તે વધુ ગાઢ સહસંબંધ સૂચવે છે અને જ્યારે બિંદુઓ કોઈ સુરેખાની આસપાસ દૂર સુધી વિસ્તરેલા હોય તો તે ઓછા ગાઢ સહસંબંધ સૂચવે છે.



જ્યારે વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ યાદચ્છિક રીતે વિખરાયેલાં હોય અને કોઈ ચોક્કસ ઢબ (pattern)માં ન હોય ત્યારે તે **સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ** સૂચવે છે. જો આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિ મળે તો કહી શકાય કે બે ચલ સુરેખ સંબંધ ધરાવતા નથી અર્થાત્ સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે.

વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ગુણ અને મર્યાદા

ગુણ :

(1) બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવા માટેની આ એક સરળ રીત છે.

(2) આ રીતમાં ઓછા ગાણિતીય જ્ઞાનની જરૂર પડે છે, કેમકે ફક્ત આલેખમાં બિંદુના નિરૂપણ અંગેની સમજની જ જરૂર પડે છે.

(3) આ રીતથી બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો પણ થોડો ઘણો ખ્યાલ આવે છે.

(4) વિકીર્ણ આકૃતિમાં બિંદુઓ કેવી રીતે વિખરાયેલાં છે તે પરથી બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સુરેખ છે કે નહિ તે ખ્યાલ આવે છે.

(5) માહિતીમાં કેટલાંક અંતિમ પ્રાપ્તાંકો (extreme observations) હોય તોપણ સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવામાં કોઈ મુશ્કેલી પડતી નથી.

મર્યાદા :

આ રીતથી સહસંબંધનાં સ્વરૂપ વિશે માહિતી મળે છે અને સંબંધની ઘનિષ્ઠતા અંગે થોડી જાણકારી મળે છે પરંતુ ઘનિષ્ઠતા અંગેનું ચોક્કસ માપ મેળવી શકાતું નથી.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. બોલપેન બનાવતી એક કંપની તેની સૌથી વધુ વેચાતી જેલપેનના ભાવ (₹ માં) અને તેના પુરવઠા (હજાર એકમો) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરે છે. તે પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

ભાવ (₹)	14	16	12	11	15	13	17
માસિક પુરવઠો (હજાર એકમો)	32	50	20	12	45	30	53

2. એક કંપની કારખાનાઓ માટે આર.ઓ. પ્લાન્ટ બનાવે છે. તેના વેચાણ માટે કરેલા જાહેરાતનું ખર્ચ અને આર.ઓ. પ્લાન્ટના વેચાણથી થતા નફાની માહિતી નીચે મુજબ છે.

જાહેરાત ખર્ચ (દસ હજાર ₹)	5	6	7	8	9	10	11
નફો (લાખ ₹)	8	7	9	10	13	12	13

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો તથા જાહેરાતના ખર્ચ અને આર.ઓ. પ્લાન્ટના વેચાણથી થતા નફા વચ્ચેના સંબંધનું સ્વરૂપ જણાવો.

3. શિયાળા દરમિયાન કોઈ એક દિવસે જુદાં-જુદાં છ શહેરોનાં દૈનિક ન્યૂનતમ તાપમાન અને ગરમ કપડાંના વેચાણ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચેની માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

દૈનિક ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસ)	12	20	8	5	15	24
ગરમ કપડાંનું વેચાણ (હજાર એકમો)	35	10	45	70	20	8

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

*

2.5 કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત

આપણે અગાઉ જોયું કે બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવતા સંખ્યાત્મક માપને સહસંબંધાંક કહે છે. આ માપ આંકડાશાસ્ત્રી કાર્લ પિયર્સને સૌપ્રથમ સૂચવ્યું હતું. તેથી તેને 'પિયર્સન સહસંબંધાંક' કે 'ગુણનપ્રઘાત આંક' તરીકે પણ ઓળખાય છે. તેને સંકેતમાં r વડે દર્શાવાય છે.

ધારો કે બે ચલ X અને Y પર મેળવેલાં એક નિદર્શના n અવલોકનોની જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ છે. ચલ X અને Y વચ્ચેના સહસંબંધાંકને $r(x, y)$ અથવા ફક્ત r વડે દર્શાવાય છે અને તે નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે :

$$r = \frac{Cov\,(x, y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{\text{સહવિચરણ}\ (x, y)}{(x\text{નું પ્ર.વિ.})\ (y\text{નું પ્ર.વિ.})}$$

જ્યાં,

$$\text{સહવિચરણ}(x, y) = Cov\,(x, y) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

$$x \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન} = s_x = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$y \text{ નું પ્રમાણિત વિચલન} = s_y = \sqrt{\frac{\Sigma\,(y_i - \bar{y})^2}{n}}$$

$$x \text{ નો મધ્યક} = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$y \text{ નો મધ્યક} = \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$$

નોંધ : સરળતા ખાતર, હવે સુરેખ સહસંબંધ અને સુરેખ નિયત સંબંધના અભ્યાસમાં બધાં જ સૂત્રોમાં અનુગ (suffix) i અવગણવામાં આવેલ છે અને સૂત્રો તેમજ ગણતરીમાં X ને બદલે x અને Y ને બદલે y નો ઉપયોગ કર્યો છે.

$Cov(x, y)$, s_x અને s_y ની ઉપર્યુક્ત કિંમતોને r ના ઉપરના સૂત્રમાં મૂકતાં, r નું નીચેનું સ્વરૂપ મળે છે.

$$r = \frac{\Sigma(x - \bar{x})\ (y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y - \bar{y})^2}}$$

સામાન્ય રીતે જ્યારે બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોય ત્યારે r ના ઉપર્યુક્ત સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

નીચે $Cov(x, y)$, s_x અને s_y નાં વૈકલ્પિક સૂત્રો આપેલાં છે.

$$Cov(x, y) = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2}$$

સહસંબંધાંક r માટેનાં બીજાં કેટલાંક સૂત્રો નીચે મુજબ છે :

જ્યારે $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$, x નું પ્ર.વિ s_x, y નું પ્ર.વિ s_y અને n જેવા માપ જાણતા હોઈએ ત્યારે r નું નીચેનું સૂત્ર વાપરી શકાય છે :

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

જ્યારે Σxy, મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$, x અને y ના પ્ર.વિ અને n જેવા માપ જાણતાં હોઈએ ત્યારે r નું નીચેનું સૂત્ર વાપરી શકાય છે :

$$r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

જ્યારે $\Sigma x, \Sigma y, \Sigma xy, \Sigma x^2, \Sigma y^2$ અને n જેવા માપો જાણતા હોઈએ ત્યારે r નું નીચેનું સૂત્ર વાપરી શકાય છે.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

સામાન્ય રીતે જ્યારે મધ્યક $\bar{x}$ અથવા $\bar{y}$ અથવા બંને અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

કાર્લપિયર્સનના સહસંબંધાંકની ધારણાઓ

કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક નીચેની ધારણાઓ પર આધારિત છે.

(1) બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ છે.

(2) બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે. જો આ પ્રકારનો સંબંધ ન હોય, તો સહસંબંધ અર્થહીન છે.

2.6 સહસંબંધાંકના ગુણધર્મ

(1) સહસંબંધાંકની કિંમત –1 થી 1 સુધીના અંતરાલમાં હોય છે.
એટલે કે, $-1 \le r \le 1$

(2) સહસંબંધાંક એકમરહિત માપ છે.
બે ચલોના એકમો ગમે તે હોય પણ r નો કોઈ એકમ હોતો નથી.

(3) X અને Y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક તથા Y અને X વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સરખા હોય છે.
એટલે કે, $r(x, y) = r(y, x)$

(4) ઊગમબિંદુ (origin) અને માપ (scale)ના પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક બદલાતો નથી.
સમજૂતી : ધારો કે ચલ X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક મેળવવો છે. તે માટે સૌપ્રથમ આપણે નવા રૂપાંતરિત ચલ u અને v વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$u = \frac{x-A}{c_x} \quad \text{અને} \quad v = \frac{y-B}{c_y}$$

જ્યાં A, B, c_x અને c_y એ અનુકૂળ વાસ્તવિક અચળાંકો છે અને $c_x > 0$ તથા $c_y > 0$

હવે સહસંબંધાંકના આ ગુણધર્મ પરથી કહી શકાય કે u અને v વચ્ચેનો સહસંબંધાંક તથા X અને Y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સરખા થાય. એટલે કે, $r(u, v) = r(x, y) = r$

(5) $r(-x,\ y) = -r(x,\ y)$

$r(x,\ -y) = -r(x,\ y)$

એટલે કે, જો બે ચલમાંથી કોઈ પણ એક ચલની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન પણ બદલાય છે.

$r(-x,\ -y) = r(x,\ y)$

એટલે કે, જો બંને ચલોની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે, તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન બદલાતું નથી.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

જો ચલની કિંમતમાં કોઈ અચળ સંખ્યા, ઉમેરવામાં કે બાદ કરવામાં આવે તો તેને ઊગમબિંદુ પરિવર્તન કહે છે, કારણ કે આમ કરવાથી તેને અનુરૂપ આલેખમાં ઊગમબિંદુનું સ્થાન બદલાય છે. અહીં બિંદુઓ $(x,\ y)$ના આલેખમાં સ્થાન બદલાય છે પરંતુ તેઓના એકબીજાને સાપેક્ષ સ્થાનો બદલાતાં નથી તેથી ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક rની કિંમત બદલાતી નથી.

તે જ રીતે ચલની કિંમત સાથે કોઈ પણ ધન અચળ સંખ્યા ગુણવા કે ભાગવામાં આવે તો તેને માપ (સ્કેલ) પરિવર્તન કહે છે, કારણ કે, આમ કરવાથી તેને અનુરૂપ આલેખમાં અક્ષ પરના એકમદીઠ માપ બદલાય છે. આમ કરવાથી પણ બિંદુઓ $(x,\ y)$ના એકબીજાને સાપેક્ષ સ્થાનો બદલાતાં નથી તેથી માપ (સ્કેલ) પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક rની કિંમત બદલાતી નથી.

2.7 સહસંબંધાંકની કિંમતનું અર્થઘટન

આપણે જાણીએ છીએ કે સહસંબંધાંક બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનો પ્રકાર અને ઘનિષ્ઠતા દર્શાવે છે. સહસંબંધાંકની કિંમત મેળવ્યા બાદ તેનું અર્થઘટન કરવું જરૂરી છે. સહસંબંધાંકના ચિહ્ન પરથી સહસંબંધનો પ્રકાર અને તેની કિંમત પરથી સંબંધની ઘનિષ્ઠતા જાણી શકાય છે.

સહસંબંધાંકની કિંમતના અર્થઘટન વખતે આપણે એ ધ્યાન રાખવાનું છે કે, સહસંબંધાંકની કિંમત સહસંબંધનો પ્રકાર અને ઘનિષ્ઠતા દર્શાવે છે પણ તે કાર્ય-કારણના સંબંધનો નિર્દેશ કરતી નથી. ખરેખર તો આપણે બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો કે અન્ય પ્રકારનો સંબંધ છે એ ધારી લીધું છે. r ની કિંમત બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે તેમ દર્શાવતી નથી. આ બાબત ધ્યાનમાં રાખી આપણે r ની કિંમતનું અર્થઘટન કેવી રીતે થઈ શકે તે જોઈશું.

$r = 1$નું અર્થઘટન :

જો $r = 1$ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ છે. જ્યારે એક ચલની કિંમતમાં થતા વધારા (કે ઘટાડા)ને લીધે બીજા ચલની કિંમતમાં પણ અચળ પ્રમાણમાં વધારો (કે ઘટાડો) થતો હોય ત્યારે $r = 1$ થાય છે. આવા ચલો માટે વિકીર્ણ આકૃતિમાં આપણને બધાં જ બિંદુઓ વધતી દિશામાં એક જ સુરેખા પર મળે છે. (જુઓ ઉદાહરણ 1)

$r = -1$નું અર્થઘટન :

જો $r = -1$ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે. જ્યારે એક ચલની કિંમતમાં થતા વધારા (કે ઘટાડા)ને લીધે બીજા ચલની કિંમતમાં પણ અચળ પ્રમાણમાં ઘટાડો (કે વધારો) થતો હોય ત્યારે $r = -1$ થાય છે. આવા ચલો માટે વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ ઘટતી દિશામાં એક જ સુરેખા પર મળે છે. (જુઓ ઉદાહરણ 2)

$r = 0$નું અર્થઘટન :

જો $r = 0$ થાય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $r = 0$ એ સહસંબંધનો અભાવ દર્શાવે છે અને તેથી બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સંબંધ નથી તેમ કહેવાય. આવા ચલો માટે વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ યાદચ્છિક રીતે વિખરાયેલાં (કોઈ સુરેખા પર કે તેની નજીક નહિ) જોવા મળે છે.

અત્રે નોંધવું જરૂરી છે કે r ની કિંમત ફક્ત સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવે છે. તેથી જ્યારે $r = 0$ હોય, તો આપણે ફક્ત એ કહી શકીએ કે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે. પરંતુ સુરેખ સિવાયનો બીજો કોઈ સહસંબંધ

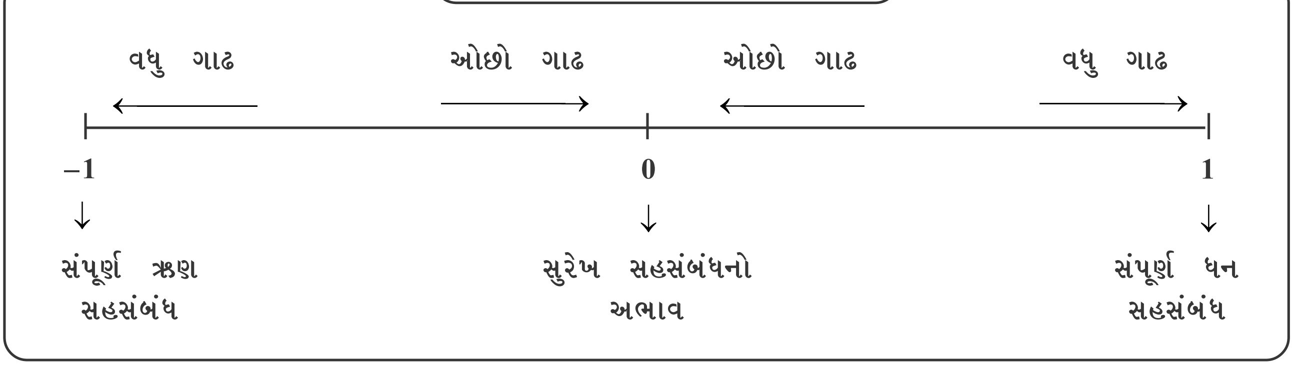
હોઈ શકે. વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ કેવી રીતે વિખરાયેલાં છે તે પરથી સુરેખ સિવાયના સહસંબંધના પ્રકાર વિશે થોડો ખ્યાલ આવે છે.

આંશિક સહસંબંધનું અર્થઘટન

($0 < r < 1$ અને $-1 < r < 0$ નું અર્થઘટન) :

જો r ની કિંમત 0 થી 1 ની વચ્ચે અથવા -1 થી 0 ની વચ્ચે હોય એટલે કે જો $|r| < 1$ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે બે ચલ વચ્ચે આંશિક સહસંબંધ છે. જ્યારે $|r|$ ની કિંમત 1ની નજીક હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સંપૂર્ણ સુરેખ સંબંધની નજીકનો છે અને સંબંધ વધુ ગાઢ પ્રમાણમાં છે. આવા સંબંધ વખતે આપણે એક ચલની કિંમતમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમતમાં કેવી થશે તેનો વિશ્વસનીય અંદાજ મેળવી શકીએ છીએ. જ્યારે $|r|$ની કિંમત 0ની નજીક હોય તો આપણે કહી શકીએ કે સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા ખૂબ જ ઓછી છે અને બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધનો લગભગ અભાવ છે. આ પરિસ્થિતિમાં આપણે એક ચલની કિંમતમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમત પર કેવી થશે તેનો વિશ્વસનીય અંદાજ મેળવી શકીએ નહિ.

સહસંબંધાંક r નું અર્થઘટન



નોંધ :

(1) સામાન્ય રીતે આપણે r ની ગણતરીની શરૂઆત મધ્યક $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ શોધવાથી કરીએ છીએ, પરંતુ તે જરૂરી નથી. આપણે અચલ A, B, c_x, c_y $(c_x > 0, c_y > 0)$ ની અનુકૂળ કિંમતો લઈ r ની ગણતરી શરૂ કરી શકીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે આ અચલાંકોની કોઈ પણ કિંમત લઈ શકાય છે, તેનાથી r ની કિંમત બદલાતી નથી.

(2) બે ચલની આપેલી માહિતી માટે કાર્લ પિયર્સનના કોઈ પણ સૂત્રથી સહસંબંધાંક r ની કિંમત સરખી જ મળે છે.

ઉદાહરણ **5 : એક સામાન્ય જ્ઞાન માટેની સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષામાં પરીક્ષા અગાઉ છેલ્લા દિવસોની તૈયારીની પરીક્ષાના પરિણામ પર અસર જાણવા લગભગ સમાન બૌદ્ધિક ક્ષમતા ધરાવતા સાત ઉમેદવારોનો એક નિદર્શ લઈ નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવે છે :**

છેલ્લા ત્રણ દિવસમાં વાચન (કલાક)	25	38	30	28	34	40	36
પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણ	65	75	68	70	72	79	75

આ માહિતી પરથી છેલ્લા ત્રણ દિવસમાં વાચનના કલાકો અને પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

અહીં $n = 7$, વાચન(x) માટે તેનો મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{231}{7} = 33$, ગુણ$(y)$ માટે તેનો મધ્યક

$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{504}{7} = 72$

અહીં, બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોવાથી r આપણે નીચે મુજબ મેળવી શકીએ.

	વાચન (કલાક) x	ગુણ y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	25	65	–8	–7	56	64	49
	38	75	5	3	15	25	9
	30	68	–3	–4	12	9	16
	28	70	–5	–2	10	25	4
	34	72	1	0	0	1	0
	40	79	7	7	49	49	49
	36	75	3	3	9	9	9
કુલ	**231**	**504**	**0**	**0**	**151**	**182**	**136**

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{182} \cdot \sqrt{136}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{182 \times 136}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{24752}}$$

$$= \frac{151}{157.3277}$$

$$= 0.9598$$

$$\therefore \ r \simeq 0.96$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1 ની ખૂબ નજીક છે. તેથી વાચનના કલાકો અને ગુણ વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે. તે પરથી કહી શકાય કે સામાન્ય રીતે છેલ્લા દિવસોમાં વાચનના કલાકો વધુ હોય તો પરીક્ષામાં ગુણ પણ વધુ પ્રાપ્ત થાય છે.

ઉદાહરણ 6 : એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓની ગુજરાતી વિષયમાં આવડત અને આંકડાશાસ્ત્ર વિષયમાં આવડત વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા છ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ નીચેની માહિતી મેળવેલ છે.

ગુજરાતીમાં ગુણ x	65	72	66	70	72	69
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ y	90	95	88	92	85	90

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓના બંને વિષયના ગુણ વચ્ચે સહસંબંધાંક ગણો.

અહીં, $n=6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{414}{6} = 69$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{540}{6} = 90$

અહીં બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોવાથી આપણે r નીચે મુજબ મેળવી શકીએ.

	ગુજરાતીમાં ગુણ x	આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	65	90	–4	0	0	16	0
	72	95	3	5	15	9	25
	66	88	–3	–2	6	9	4
	70	92	1	2	2	1	4
	72	85	3	–5	–15	9	25
	69	90	0	0	0	0	0
કુલ	**414**	**540**	**0**	**0**	**8**	**44**	**58**

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{58}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2552}}$$

$$= \frac{8}{50.5173}$$

$$= 0.1584$$

$$\therefore\ r \simeq 0.16$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 0ની નજીક છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓના બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે ઓછો ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 7 : મોબાઇલ ફોનનું ઉત્પાદન કરતી એક કંપનીએ છેલ્લા છ માસમાં વેચેલા મોબાઇલ (હજાર એકમમાં) અને તેનાથી થયેલ નફા (લાખ ₹માં)ની વીગત નીચે આપેલી છે.

વેચાયેલા મોબાઇલ ફોનની સંખ્યા (હજાર એકમમાં) x	3	8	12	5	7	5
નફો (લાખ ₹) y	6	10	15	10	9	8

આ પરથી વેચાયેલાં મોબાઇલ ફોનની સંખ્યા અને નફો વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં, $n=6,\quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{40}{6} = 6.67,\quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{58}{6} = 9.67$

અહીં, $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ અપૂર્ણાંક છે અને X અને Y ની કિંમતો બહુ મોટી નથી તેથી આપણે r નીચે મુજબ મેળવી શકીએ.

	વેચાયેલાં મોબાઈલ ફોનની સંખ્યા (હજાર એકમો) x	નફો (લાખ ₹) y	xy	x^2	y^2
	3	6	18	9	36
	8	10	80	64	100
	12	15	180	144	225
	5	10	50	25	100
	7	9	63	49	81
	5	8	40	25	64
કુલ	**40**	**58**	**431**	**316**	**606**

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{6(431) - (40)(58)}{\sqrt{6(316) - (40)^2} \cdot \sqrt{6(606) - (58)^2}}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{\sqrt{1896 - 1600} \cdot \sqrt{3636 - 3364}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{296} \cdot \sqrt{272}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{80512}}$$

$$= \frac{266}{283.7464}$$

$$= 0.9375$$

$$\therefore \ r \simeq 0.94$$

અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1 ની નજીક છે તેથી મોબાઈલ ફોનના વેચાણ અને તેનાથી થતા નફા વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 8 : ઉત્તર ભારતના કોઈ એક શહેરમાં અઠવાડિક ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસમાં) અને તે અઠવાડિયા દરમિયાન હીટરના થયેલા વેચાણ (સો એકમોમાં)ની નીચે પાંચ અઠવાડિયાની આપેલી માહિતી પરથી ન્યૂનતમ તાપમાન અને હીટરના વેચાણ વચ્ચે સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસમાં) x	3	4	6	7	9
હીટરની માંગ (સો એકમો) y	16	15	14	11	9

અહીં, $n = 5$, $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{29}{5} = 5.8$, $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{65}{5} = 13$

અહીં, એક મધ્યક અપૂર્ણાંક છે અને x અને y ની કિંમતો બહુ મોટી ન હોવાથી, આપણે r નીચે મુજબ મેળવીશું.

	ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસ) x	હીટરની માંગ (સો એકમો) y	$x\ y$	x^2	y^2
	3	16	48	9	256
	4	15	60	16	225
	6	14	84	36	196
	7	11	77	49	121
	9	9	81	81	81
કુલ	**29**	**65**	**350**	**191**	**879**

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{5(350) - (29)(65)}{\sqrt{5(191) - (29)^2} \cdot \sqrt{5(879) - (65)^2}}$$

$$= \frac{1750 - 1885}{\sqrt{955 - 841} \cdot \sqrt{4395 - 4225}}$$

$$= \frac{-135}{\sqrt{114} \cdot \sqrt{170}}$$

$$= \frac{-135}{\sqrt{19380}}$$

$$= \frac{-135}{139.2121}$$

$$= -0.9697$$

$$\therefore\ r \simeq -0.97$$

અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત -1ની ખૂબ જ નજીક છે. તેથી ન્યૂનતમ તાપમાન અને હીટરના વેચાણ વચ્ચે વધુ ગાઢ ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

આપણે ઉદાહરણ (7) અને (8)માં જોયું કે બંને મધ્યકો પૂર્ણાંક ન હતા અને ચલ x અને y ની કિંમતો બહુ મોટી ન હતી. તેથી આપણે નીચે જણાવેલ સૂત્ર પરથી r ની ગણતરી કરી.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

પરંતુ જ્યારે બંને ચલની કિંમતો મોટી અને/અથવા અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે xy, x^2, y^2 ની ગણતરી વધુ મુશ્કેલ બને છે અને તેથી r ની ગણતરી કંટાળાજનક બને છે. તેથી સહસંબંધાંક rની ગણતરી સહેલી બને તે માટે એક ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ થાય છે. આ ટૂંકી રીત r ના ગુણધર્મ (નં. 4) પર આધારિત છે.

આ ગુણધર્મ અનુસાર r ના સૂત્રમાં x ને બદલે u અને y ને બદલે v મૂકવાથી સહસંબંધાંક r શોધવા માટેનું ટૂંકી રીતનું સૂત્ર નીચે મુજબ મળે.

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)\ (\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

હવે આપણે ટૂંક રીત દ્વારા r શોધવા માટેનાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 9 : એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના ઊંચાઈ (સેમીમાં) અને વજન (કિગ્રામાં) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે 6 વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ નીચેની માહિતી મેળવવામાં આવે છે. તે પરથી વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

ઊંચાઈ (સેમી) x	155	165	158	162	153	160
વજન (કિગ્રા) y	53	63	56	60	52	60

અહીં $n = 6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{953}{6} = 158.83$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{344}{6} = 57.33$

અહીં, બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ અપૂર્ણાંક છે અને ચલ X અને Y ની કિંમતો મોટી છે, તેથી આપણે r ની ગણતરી કરવા માટે ટૂંકી રીતને અગ્રિમતા આપીશું.

આપણે ઊગમબિંદુ પરિવર્તન માટે $A = 158$ અને $B = 57$ લઈશું અને પ્રમાણમાપ બદલવા કોઈ અનુકૂળ કિંમત નથી તેથી $c_x = 1,\ c_y = 1$ લઈશું.

આપણે નવા ચલ u અને v ને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-158}{1} = x - 158$$

$$v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-57}{1} = y - 57$$

નોંધ : અહીં ફક્ત ઊગમબિંદુ પરિવર્તન જ કરેલ છે પરંતુ માપનું પરિવર્તન કરેલ નથી તેથી આપણે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ પણ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

$u = x - A = x - 158\ ;\ \ v = y - B = y - 57$

	ઊંચાઈ (સેમી) x	વજન (કિગ્રા) y	$u = x - 158$	$v = y - 57$	uv	u^2	v^2
	155	53	–3	–4	12	9	16
	165	63	7	6	42	49	36
	158	56	0	–1	0	0	1
	162	60	4	3	12	16	9
	153	52	–5	–5	25	25	25
	160	60	2	3	6	4	9
કુલ	**953**	**344**	**5**	**2**	**97**	**103**	**96**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(97) - (5)(2)}{\sqrt{6(103) - (5)^2} \cdot \sqrt{6(96) - (2)^2}}$$

$$= \frac{582 - 10}{\sqrt{618 - 25} \cdot \sqrt{576 - 4}}$$

$$= \frac{572}{\sqrt{593} \cdot \sqrt{572}}$$

$$= \frac{572}{\sqrt{339196}}$$

$$= \frac{572}{582.4054}$$

$$= 0.9821$$

$$\therefore \; r \simeq 0.98$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1ની ખૂબ નજીક છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 10 : એક વિસ્તારની સમાન પ્રકારની વસ્તુનું ઉત્પાદન કરતી છ જુદી જુદી ફેક્ટરીના કામદારોની સરેરાશ માસિક આવક (₹ માં) અને ફેક્ટરીમાં ઓવરટાઈમને લીધે થતી આવક (₹ માં) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ માહિતી મેળવવામાં આવે છે. તે પરથી સરેરાશ માસિક આવક અને ઓવરટાઈમથી થતી આવક વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016
સરેરાશ માસિક આવક (₹) x	14,900	15,100	15,000	15,500	15,700	15,800
ઓવરટાઈમથી થતી આવક (₹) y	100	105	115	160	220	255

અહીં, $n = 6, \;\; \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{92000}{6} = 15333.33, \;\; \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{955}{6} = 159.17$

આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે, X ની કિંમતો 100ના ગુણકમાં છે અને Y ની કિંમતો 5ના ગુણકમાં છે. તેથી આપણે A = 15,300, B = 160, c_x = 100 અને c_y = 5 લઈશું.

આપણે હવે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-15300}{100} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-160}{5}$$

નોંધ : x કિંમતો 100ના ગુણકમાં હોવાથી આપણે A (= 15,300) પણ 100 ના ગુણકમાં પસંદ કરીએ છીએ. તે જ રીતે y કિંમતો 5ના ગુણકમાં હોવાથી B (= 160) પણ 5ના ગુણકમાં પસંદ કરીએ છીએ.

સરેરાશ માસિક આવક (₹) x	ઓવરટાઈમથી થતી આવક (₹) y	$u = \frac{x-15300}{100}$	$v = \frac{y-160}{5}$	uv	u^2	v^2
14,900	100	–4	–12	48	16	144
15,100	105	–2	–11	22	4	121
15,000	115	–3	–9	27	9	81
15,500	160	2	0	0	4	0
15,700	220	4	12	48	16	144
15,800	255	5	19	95	25	361
કુલ **92,000**	**955**	**2**	**–1**	**240**	**74**	**851**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(240) - (2)(-1)}{\sqrt{6(74) - (2)^2} \cdot \sqrt{6(851) - (-1)^2}}$$

$$= \frac{1440 + 2}{\sqrt{444 - 4} \cdot \sqrt{5106 - 1}}$$

$$= \frac{1442}{\sqrt{440} \cdot \sqrt{5105}}$$

$$= \frac{1442}{\sqrt{2246200}}$$

$$= \frac{1442}{1498.7328}$$

$$= 0.9621$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.96$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1ની ખૂબ નજીક છે. તેથી સરેરાશ માસિક આવક અને ઓવરટાઈમથી થતી આવક વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 11 : ગુજરાત રાજ્યના છ શહેરો માટે વસ્તીની ગીચતા (ચોરસ કિમી દીઠ) અને મૃત્યુદર (દર હજારે)ના આશરે આંકડા નીચે મુજબ છે.

શહેર	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
ગીચતા (ચોરસ કિમી દીઠ) x	200	500	400	700	600	300
મૃત્યુદર (દર હજારે) y	10	12	10	15	9	12

આ માહિતી પરથી વસ્તીની ગીચતા અને મૃત્યુદર વચ્ચે સહસંબંધાંક મેળવો.

અહીં, $n = 6,\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{2700}{6} = 450,\ \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{68}{6} = 11.33$

આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે, X ની કિંમતો 100ના ગુણકમાં છે અને Y ની કિંમતો નાની છે. તેથી આપણે $A = 500,\ B = 12,\ c_x = 100$ અને $c_y = 1$ લઈશું.

અહીં હવે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-500}{100} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-12}{1} = y - 12$$

	ગીચતા (ચો કિમી દીઠ) x	મૃત્યુદર (દર હજારે) y	$u = \frac{x-500}{100}$	$v = y - 12$	uv	u^2	v^2
	200	10	–3	–2	6	9	4
	500	12	0	0	0	0	0
	400	10	–1	–2	2	1	4
	700	15	2	3	6	4	9
	600	9	1	–3	–3	1	9
	300	12	–2	0	0	4	0
કુલ	**2700**	**68**	**–3**	**–4**	**11**	**19**	**26**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(11) - (-3)(-4)}{\sqrt{6(19) - (-3)^2} \cdot \sqrt{6(26) - (-4)^2}}$$

$$= \frac{66 - 12}{\sqrt{114 - 9} \cdot \sqrt{156 - 16}}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{140}}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{14700}}$$

$$= \frac{54}{121.2436}$$

$$= 0.4454$$

$$\therefore\ r \simeq 0.45$$

અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1ની અતિનજીક નથી. તેથી વસ્તીની ગીચતા અને મૃત્યુદર વચ્ચે સામાન્યથી ઓછો ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 12 : ટ્રકના ટાયર બનાવતી કંપનીઓના વેચાણ (કરોડ ₹માં) અને નફા (હજાર ₹માં) વચ્ચેના સંબંધના અભ્યાસ માટે મેળવેલી છેલ્લા વર્ષની માહિતી નીચે મુજબ મેળવેલી છે.

વેચાણ (કરોડ ₹) x	1.6	2.2	1.9	2.0	2.3	1.7	2.4	1.8	2.1
નફો (હજાર ₹) y	4200	5500	6000	6200	6100	4900	5900	5000	6700

આ પરથી વેચાણ અને નફા વચ્ચે સહસંબંધાંક ગણો.

અહીં, $n = 9$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{18}{9} = 2$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{50500}{9} = 5611.11$

ચલ X ની કિંમતો અપૂર્ણાંક છે અને તેમાં દશાંશ ચિહ્ન પછી એક જ અંક છે તેથી X ની કિંમતોને આપણે 10 વડે ગુણીશું (એટલે કે, $\frac{1}{10} = 0.1$ વડે ભાગીશું) કે જેથી તે કિંમતો પૂર્ણાંક થાય અને Y ની કિંમતો 100ના ગુણકમાં હોવાથી આપણે $A = 2$, $B = 5600$, $c_x = 0.1$, $c_y = 100$ લઈશું.

હવે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = 10\,(x - 2.0) = \frac{x-2.0}{0.1} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-5600}{100}$$

	વેચાણ (કરોડ ₹) x	નફો (હજાર ₹) y	$u = 10(x-2.0)$	$v = \frac{y-5600}{100}$	uv	u^2	v^2
	1.6	4200	–4	–14	56	16	196
	2.2	5500	2	–1	–2	4	1
	1.9	6000	–1	4	–4	1	16
	2.0	6200	0	6	0	0	36
	2.3	6100	3	5	15	9	25
	1.7	4900	–3	–7	21	9	49
	2.4	5900	4	3	12	16	9
	1.8	5000	–2	–6	12	4	36
	2.1	6700	1	11	11	1	121
કુલ	**18**	**50,500**	**0**	**1**	**121**	**60**	**489**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{9(121) - (0)(1)}{\sqrt{9(60) - (0)^2} \cdot \sqrt{9(489) - (1)^2}}$$

$$= \frac{1089 - 0}{\sqrt{540 - 0} \cdot \sqrt{4401 - 1}}$$

$= \dfrac{1089}{\sqrt{540} \cdot \sqrt{4400}}$

$= \dfrac{1089}{\sqrt{2376000}}$

$= \dfrac{1089}{1541.4279}$

$= 0.7065$

$\therefore \; r \simeq 0.71$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1થી સાધારણ દૂર છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે વેચાણ અને નફા વચ્ચે સામાન્ય કરતાં વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે.

પ્રવૃત્તિ

ઉપર ઉદાહરણ - 12માં આપેલી વીગત પરથી $A = 1.8$, $B = 6000$, $c_x = 0.05$ અને $c_y = 100$ લઈ ફરીથી સહસંબંધાંક r ની ગણતરી કરો અને તમે જોશો કે r ની કિંમત સરખી (= 0.71) જ મળશે.

ઉદાહરણ 13 : કોઈ એક શાળાની પરીક્ષામાં વિદ્યાર્થીઓએ આંકડાશાસ્ત્રમાં મેળવેલા ગુણ (X) અને અર્થશાસ્ત્રમાં મેળવેલાં ગુણ (Y) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે દસ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લેતાં નીચે મુજબ વીગતો મળે છે.

$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 120,\; \Sigma(x-\bar{x})^2 = 80,\; \Sigma(y-\bar{y})^2 = 500$

આ પરથી r ની કિંમત શોધો.

અહીં, $n = 10$ અને જે વીગતો આપેલી છે તે પ્રમાણે r નું નીચેનું સૂત્ર યોગ્ય છે.

$r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$

$= \dfrac{120}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{500}}$

$= \dfrac{120}{\sqrt{40000}}$

$= \dfrac{120}{200}$

$\therefore \; r = 0.6$

ઉદાહરણ 14 : નીચેની વીગતો પરથી સહસંબંધાંક r શોધો.

(1) $n = 20,\; Cov(x, y) = -50,\; s_x = 15,\; s_y = 8$

(2) $n = 10,\; \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 60,$ **X નું વિચરણ = 25, Y નું વિચરણ = 36**

(3)

વીગત	x	y
અવલોકનોની સંખ્યા	25	
મધ્યક	40	50
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	120	160
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો	100	

(4) $n = 10,\; \Sigma xy = 1500,$ **X નો મધ્યક = 12, Y નો મધ્યક = 15, X નું પ્ર.વિ. = 9, Y નું પ્ર.વિ. = 5**

(1) અહીં $n = 20,\ Cov(x,\ y) = -50,\ s_x = 15,\ s_y = 8$

આ બધી કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{Cov(x,\ y)}{s_x \cdot s_y}$$

$$= \frac{-50}{(15)\ (8)}$$

$$= \frac{-50}{120}$$

$$= -0.4167$$

$$\therefore\ r \simeq -0.42$$

(2) અહીં, $n = 10,\ \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 60$

Xનું વિચરણ $= s_x^2 = 25 \quad \therefore\ s_x = 5$

Yનું વિચરણ $= s_y^2 = 36 \quad \therefore\ s_y = 6$

જરૂરી કિંમતોને નીચેના અનુરૂપ સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{n\, s_x s_y}$$

$$= \frac{60}{10(5)\ (6)}$$

$$= \frac{60}{300}$$

$$\therefore\ r = 0.2$$

(3) અહીં, $n = 25,\ \bar{x} = 40,\ \bar{y} = 50,\ \ \Sigma(x-\bar{x})^2 = 120,\ \Sigma(y-\bar{y})^2 = 160$ અને $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 100$

આ બધી કિંમતોને નીચેના અનુકૂળ સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{120} \cdot \sqrt{160}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{19200}}$$

$$= \frac{100}{138.5641}$$

$$= 0.7217$$

$$\therefore\ r \simeq 0.72$$

(4) અહીં $n = 10,\ \Sigma xy = 1500,\ \overline{x} = 12,\ \overline{y} = 15,\ s_x = 9$ અને $s_y = 5$

આ બધી કિંમતોને નીચેના અનુકૂળ સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

$$= \frac{1500 - 10\,(12)\,(15)}{10\,(9)\,(5)}$$

$$= \frac{1500 - 1800}{450}$$

$$= \frac{-300}{450}$$

$$= -0.6667$$

$$\therefore\ r \simeq -0.67$$

ઉદાહરણ 15 : એક કંપનીનાં છ વર્ષનાં વેચાણ અને નફા વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવે છે.

X = વાર્ષિક વેચાણ (લાખ ₹ માં)

Y = વાર્ષિક નફો (દસ હજાર ₹ માં)

$$\boldsymbol{n = 6,\ \Sigma x = 58,\ \Sigma y = 40,\ \Sigma xy = 431,\ \Sigma x^2 = 606,\ \Sigma y^2 = 316}$$

આ પરથી X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

આપેલી કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)\,(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{6(431) - (58)\,(40)}{\sqrt{6(606) - (58)^2} \cdot \sqrt{6(316) - (40)^2}}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{\sqrt{3636 - 3364} \cdot \sqrt{1896 - 1600}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{272} \cdot \sqrt{296}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{80512}}$$

$$= \frac{266}{283.7464}$$

$$= 0.9375$$

$$\therefore\ r \simeq 0.94$$

કાર્લ પિયર્સનની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ

ગુણ :

(1) આ રીત દ્વારા બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનો પ્રકાર તેમજ તેમની વચ્ચેના સંબંધની ઘનિષ્ઠતા પણ જાણી શકાય છે.

(2) બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધને માપવા માટેની આ સૌથી પ્રચલિત રીત છે.

(3) તે સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા (વધુ, સામાન્ય કે ઓછી)ને એક સંખ્યામાં દર્શાવે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) આ રીત એ ધારણા પર આધારિત છે કે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ છે. તેથી જો બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ ન હોય છતાં આ રીતનો ઉપયોગ કરીને સહસંબંધાંક શોધવામાં આવે, અને તેના આધારે સંબંધ વિશેનું અર્થઘટન કરવામાં આવે તો તે અર્થઘટન ગેરમાર્ગે દોરશે.

(2) સહસંબંધની કિંમત પર અંતિમ અવલોકનો (અતિ મોટાં અથવા અતિ નાનાં અવલોકનો)ની ખૂબ જ અસર થાય છે.

(3) આ રીતે મળતા સહસંબંધાંકનું ખૂબ સાવચેતીપૂર્વક અર્થઘટન થાય એ જરૂરી છે. નહિતર બે ચલ વચ્ચેના સંબંધ વિશે ગેરસમજ થવાની શક્યતા રહે છે.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. એક સોસાયટીમાં રહેતાં 7 કુટુંબોમાંથી મેળવેલા નિદર્શમાં પિતાની ઊંચાઈ (સેમીમાં) અને તેમના પુખ્ત વયના પુત્રની ઊંચાઈ (સેમીમાં)ની નીચે આપેલી માહિતી પરથી સહસંબંધાંક ગણો.

પિતાની ઊંચાઈ (સેમી)	170	169	168	167	166	165	164
પુત્રની ઊંચાઈ (સેમી)	172	168	170	168	165	167	166

2. નાસ્તા બનાવતી એક સ્થાનિક ગૃહ ઉદ્યોગ કંપની દરેક નાસ્તા 100 ગ્રામના પેકેટમાં વેચે છે. એક નવા પ્રકારની વેફરની કિંમત નિર્ધારણ માટે તેના ભાવ અને માંગનો પ્રાથમિક અભ્યાસ કરતાં નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

વેફરનો ભાવ (₹)	24	26	32	33	35	30
માંગ (હજાર પેકેટ)	27	24	22	20	15	24

આ માહિતી પરથી વેફરનો ભાવ અને તેની માંગ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

3. એક શાળાની પરીક્ષામાં બે વિષયો નામાપદ્ધતિ અને આંકડાશાસ્ત્રમાં દસ વિદ્યાર્થીઓના નિદર્શમાંથી મેળવેલા ગુણની માહિતી પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

નામા પદ્ધતિમાં ગુણ	60	80	50	80	95	40	70	40	35	90
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ	50	75	60	85	90	40	65	30	45	70

4. એક શહેરમાં રહેતા બાળકોની ગણિત અને તર્કવિદ્યાની ક્ષમતા વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવા એક શૈક્ષણિક સંસ્થા જુદી જુદી શાળામાંથી પસંદ કરેલાં છ બાળકોને ગણિત અને તર્કવિદ્યા આધારિત વીસ કોયડા ઉકેલવા માટે આપે છે. તે બાળકો દ્વારા સાચા ઉકેલ મેળવ્યા હોય તેવા કોયડાની સંખ્યા નીચે આપેલી છે.

ગણિત આધારિત ઉકેલ મેળવ્યો હોય તે કોયડાની સંખ્યા	12	8	9	10	8	11
તર્કવિદ્યા આધારિત ઉકેલ મેળવ્યો હોય તે કોયડાની સંખ્યા	11	10	4	7	13	16

આ માહિતી પરથી બાળકોની બંને પ્રકારના કોયડા ઉકેલવાની ક્ષમતા વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

5. નીચેની માહિતી પરથી મૂડીરોકાણ (કરોડ ₹માં) અને નફો (દસ લાખ ₹માં) વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

કંપની	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
મૂડીરોકાણ (કરોડ ₹)	15	22	12	10	17	20	14
નફો (દસ લાખ ₹)	9	12	8	6	10	9	10

6. કોઈ એક શાળામાંથી પસંદ કરેલા પાંચ વિદ્યાર્થીઓના પ્રતિદિન અભ્યાસના સરેરાશ કલાકો અને ઊંઘના સરેરાશ કલાકોની માહિતી નીચે મુજબ પ્રાપ્ય છે.

અભ્યાસના કલાકો	10	5	7	5	3
ઊંઘના કલાકો	6	9	7	8	10

આ પરથી અભ્યાસના કલાકો અને ઊંઘના કલાકો વચ્ચે સહસંબંધાંક ગણો.

7. નીચે આપેલ ઉંમર (વર્ષમાં) અને લોહીના દબાણ (મિમિમાં)ની વીગતો પરથી ઉંમર અને લોહીના દબાણ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

ઉંમર (વર્ષ)	58	55	65	52	48	68	62	56
લોહીનું સિસ્ટોલિક દબાણ (મિમિ)	130	150	150	130	140	158	155	140

8. એક એન્જિનીઅર એસોસિએશન જુદી જુદી ફેક્ટરીમાં થતા ઉત્પાદન અને એકમ દીઠ ઉત્પાદન ખર્ચ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા છ ફેક્ટરીના ઉત્પાદન (હજાર એકમોમાં) અને ઉત્પાદનના એકમ દીઠ ખર્ચની માહિતી નીચે મુજબ મેળવે છે.

ઉત્પાદન (હજાર એકમો)	15	20	35	24	18	31
એકમ દીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ (₹)	95	90	75	80	87	70

આ પરથી ઉત્પાદન અને એકમદીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

9. જુદાં જુદાં છ શહેરોના લોકોની માથાદીઠ વાર્ષિક આવક (₹માં) અને ભાવના સૂચક આંકની વીગત પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

શહેર	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
માથાદીઠ વાર્ષિક આવક (₹)	32,000	29,000	40,000	36,000	30,000	39,000
ભાવનો સૂચક આંક	120	100	250	180	110	220

10. એક શહેરના કુટુંબોમાં વાહન ચલાવનારા સભ્યોની સંખ્યા અને તેમનો અઠવાડિક પેટ્રોલનો વપરાશ (લિટરમાં) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે નીચે માહિતી આપેલી છે.

કુટુંબમાં વાહન ચલાવનારા સભ્યોની સંખ્યા	3	5	2	4	3	6	1
અઠવાડિક પેટ્રોલનો વપરાશ (લિટર)	11.5	21	14.5	15.5	7	22.5	10

આ માહિતી પરથી કુટુંબદીઠ વાહન ચલાવતા સભ્યોની સંખ્યા અને પેટ્રોલના વપરાશ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

11. એક ગ્રામ્ય વિસ્તારમાં ખાતરના વપરાશ અને મકાઈની ઊપજ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

ખાતરનો વપરાશ (ક્વિન્ટલ)	1.5	2.1	0.9	1.8	1.1	1.2
હેકટરદીઠ મકાઈની ઊપજ (ક્વિન્ટલ)	60	95	50	75	45	75

આ પરથી ખાતરના વપરાશ અને મકાઈની ઊપજ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

12. એક જિલ્લામાં છેલ્લાં દસ વર્ષમાં પડેલા વરસાદ સેમીમાં (X) અને પાકની ઊપજ હેક્ટરદીઠ ટનમાં (Y) ની વીગતો પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$n = 10$, $Cov(x, y) = 30$, X નું પ્રમાણિત વિચલન $= 5$ અને Y નું વિચરણ $= 144$

13. એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓમાંથી દસ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ તેમની ઊંચાઈ સેમીમાં (X) અને વજન કિગ્રામાં (Y)ની માહિતી પરથી નીચેની વીગતો મળેલ છે.

$\bar{x} = 160$, $\bar{y} = 55$, $\Sigma xy = 90000$, $s_x = 25$, $s_y = 10$

આ પરથી ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચેના સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

14. નીચેનાં પરિણામો પરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

(1) $\Sigma(x-\bar{x})^2 = 72$, $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 32$, $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 45$

(2) $n = 6$, $\Sigma x = 16$, $\Sigma y = 51$, $\Sigma xy = 154$, $\Sigma x^2 = 52$, $\Sigma y^2 = 471$

15. નીચેની માહિતી પરથી r ની કિંમત શોધો.

વીગત	x	y
મધ્યક	60	95
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	920	1050
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો	-545	

*

2.8 સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત

આપણે બે ચલ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધવા માટે કાર્લ પિયર્સનની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે ચલ સંખ્યાત્મક હોય ત્યારે એટલે કે જ્યારે બંને ચલોને સંખ્યાત્મક રીતે માપી શકાય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ થાય છે, પરંતુ ધંધાકીય, ઔદ્યોગિક અને સામાજિક વિજ્ઞાનના સમસ્યાઓમાં કેટલીક પરિસ્થિતિ એવી હોય છે જ્યારે આપણે ગુણાત્મક ચલ (ગુણધર્મ)નો અભ્યાસ કરીએ છીએ. દા.ત., સુંદરતા, પ્રામાણિકતા, આવડત, નૈતિકતા, વકતૃત્વ, સંગીત, નૃત્યમાં કૌશલ્ય વગેરે. આ પરિસ્થિતિમાં આ લક્ષણો (ગુણાત્મક ચલ કે ગુણધર્મો)ને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપે માપી શકાતા નથી, પરંતુ તેઓને ગુણવત્તા અનુસાર ગોઠવી ક્રમ આપી શકાય છે. આ રીતે મળતાં બે લક્ષણોના ક્રમોની જોડ પરથી મેળવેલા ચાર્લ્સ સ્પિયરમૅને સૂચવેલા સહસંબંધાંકને સ્પિયરમૅનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક કહેવાય છે.

સહસંબંધનું માપ જાણવા માટે સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરીના કેટલાંક ઉદાહરણ નીચે આપેલા છે :

(1) એક જૂથમાં વ્યક્તિઓની પ્રામાણિકતા અને સમયપાલનની નિયમિતતા અનુસાર તેઓને ક્રમ આપી આ બે ગુણધર્મો વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ.

(2) એક સૌંદર્ય સ્પર્ધામાં જુદા જુદા સ્પર્ધકોને તેમના સ્પર્ધામાં દેખાવને આધારે બે નિર્ણાયકોએ આપેલા ક્રમ પરથી બંને નિર્ણાયકોના નિર્ણય વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ.

કેટલીક વખતે માહિતીમાં સંખ્યાત્મક ચલ હોય (જેમકે ઊંચાઈ, વજન) તોપણ તેમનાં અવલોકનોની કિંમત અનુસાર તેમને ક્રમ આપી ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે જ્યારે બે ચલોની કિંમતોમાં પ્રસાર વધુ હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક મેળવવાને બદલે ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવાય છે કારણ કે વધુ પ્રસાર વાળાં અવલોકનો માટે કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંક કરતાં ક્રમાંક સહસંબંધાંક વધુ સ્થિર (stable) છે.

રીત : ધારો કે બે ગુણધર્મો X અને Y નાં અવલોકનોની જોડને નીચે મુજબ ક્રમ આપેલા છે :

અવલોકનો	1	2	....	i	....	n
X ને આધારે ક્રમ	R_{x_1}	R_{x_2}	....	R_{x_i}	....	R_{x_n}
Y ને આધારે ક્રમ	R_{y_1}	R_{y_2}	....	R_{y_i}	....	R_{y_n}

ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

જ્યાં, $d_i = R_{x_i} - R_{y_i}$, $i = 1, 2, 3, ... n$ માટે સરળતા ખાતર આપણે d_i ને બદલે d, R_{x_i} ને બદલે R_x અને R_{y_i} ને બદલે R_y લખીશું.

તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા માટેનું સૂત્ર નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

જ્યાં $d = R_x - R_y = X$ અને Y ના ક્રમાંકોનો તફાવત

$\Sigma d^2 = X$ અને Y ના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો

જ્યારે અવલોકનોની n જોડ સંખ્યાત્મક ચલની હોય ત્યારે સામાન્ય રીતે એક ચલના સૌથી મોટા અવલોકનને ક્રમ 1, ત્યાર બાદ તેનાથી નાના પણ બાકીનાં અવલોકનોથી મોટા હોય તેવા અવલોકનને ક્રમ 2, એ મુજબ બધાં જ અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં આવે છે, તે જ રીતે બીજા ચલની કિંમતોને પણ ક્રમ આપવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ આ ક્રમો પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવવામાં આવે છે.

આપણે બે સંખ્યાત્મક ચલો વચ્ચેનો સંબંધ શોધવા માટે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધીએ છીએ પણ કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક વધુ ચોક્કસ ગણાય છે, કારણ કે તેમાં ક્રમ નહિ પરંતુ મૂળ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે.

અહીં નોંધવું જરૂરી છે કે, ક્રમાંક સહસંબંધાંક એ બીજું કાંઈ નહિ પણ બે ગુણધર્મો (કે સંખ્યાત્મક ચલો)ને આપેલા ક્રમો વચ્ચેનો કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક છે. તેથી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની જેમ જ ક્રમાંક સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન કરી શકાય છે.

સામાન્ય રીતે સ્પિયરમૅનની રીતે મેળવેલ ક્રમાંક સહસંબંધાંક અને કાર્લ પિયર્સનની રીતે મેળવેલ સહસંબંધાંકની કિંમત સમાન હોતી નથી, પરંતુ જ્યારે બે ચલની કિંમતો એ પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની જ કોઈ ગોઠવણી હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીત દ્વારા અને સ્પિયરમૅનની રીતે મેળવેલા સહસંબંધાંકની કિંમત સરખી થાય છે.

ઉદાહરણ 16 : એક કંપનીના બે મૅનેજરે તેમની કંપનીમાં નોકરી કરતા વ્યક્તિઓમાંથી પસંદ કરેલા સાત વ્યક્તિઓને તેમના કારભારની આવડતને આધારે નીચે મુજબ ક્રમ આપેલા છે :

વ્યક્તિ	A	B	C	D	E	F	G
મૅનેજર 1 એ આપેલ ક્રમ	6	7	5	4	3	2	1
મૅનેજર 2 એ આપેલ ક્રમ	7	6	5	2	4	1	3

આ માહિતી પરથી બંને મૅનેજરે કરેલા મૂલ્યાંકન વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં $n = 7$ અને ક્રમ આપેલા જ છે તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા આપણે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

વ્યક્તિ	મૅનેજર 1 એ આપેલ ક્રમ R_x	મૅનેજર 2 એ આપેલ ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	6	7	–1	1
B	7	6	1	1
C	5	5	0	0
D	4	2	2	4
E	3	4	–1	1
F	2	1	1	1
G	1	3	–2	4
કુલ	–	–	**0**	**12**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(12)}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{72}{336}$$

$$= 1 - 0.2143$$

$$= 0.7857$$

$$\therefore\ r \simeq 0.79$$

અહીં r ની કિંમત 1 ની નજીક છે એટલે કે તે ઘનિષ્ઠ ધન સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી કહી શકાય કે, બંને મૅનેજરે નોકરી કરતા વ્યક્તિઓને આપેલા ક્રમો વચ્ચે વધુ સામ્યતા જોવા મળે છે.

ઉદાહરણ 17 : જુદી જુદી બ્રાંડના મોબાઇલ ફોનનું વેચાણ કરતી એક વિવિધ શાખા ધરાવતી દુકાનના માલિકે મોબાઇલ ફોનના એક નિષ્ણાત વ્યક્તિને 10 જુદા-જુદા મોબાઇલ ફોનના કૅમેરા અને તેની બૅટરીની કાર્યક્ષમતા ચકાસી તેમને ક્રમ આપવાનું કાર્ય સોંપ્યું અને તે નિષ્ણાત વ્યક્તિ દ્વારા જુદી જુદી બ્રાંડના મોબાઇલને મળેલ ક્રમ નીચે મુજબ છે :

મોબાઇલ ફોન	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
કૅમેરા માટે ક્રમ	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
બૅટરી માટે ક્રમ	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

આ માહિતી પરથી મોબાઇલના કૅમેરા અને બૅટરીની કાર્યક્ષમતા વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં $n = 10$ અને ક્રમ આપેલા જ છે. તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

મોબાઇલ ફોન	કૅમેરા માટે R_x	બૅટરી માટે R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	3	6	–3	9
B	5	4	1	1
C	8	9	–1	1
D	4	8	–4	16
E	7	1	6	36
F	10	2	8	64
G	2	3	–1	1
H	1	10	–9	81
I	6	5	1	1
J	9	7	2	4
કુલ	**–**	**–**	**0**	**214**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(214)}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{1284}{990}$$

$$= 1 - 1.2970$$

$$= -0.2970$$

$$\therefore\ r \simeq -0.30$$

અહીં r ની કિંમત ઋણ અને 0ની નજીક છે તેથી તે આંશિક ઋણ સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી કહી શકાય કે નિષ્ણાત વ્યક્તિના મત મુજબ તેણે ચકાસેલા મોબાઇલ ફોનમાં કૅમેરો કાર્યક્ષમ હોય, તો તેની બૅટરી ઓછી કાર્યક્ષમ જણાય છે. જ્યારે બૅટરી કાર્યક્ષમ હોય તો કૅમેરો ઓછો કાર્યક્ષમ જણાય છે.

ઉદાહરણ 18 : એક શાળાના પ્રિન્સિપાલે શાળાના બાળકોના ગણિતના જ્ઞાન અને ઇતિહાસ વિષયની વીગતો યાદ રાખવા વચ્ચેનો સમય જાણવા પાંચ વિદ્યાર્થીઓનો એક નિદર્શ લઈ તેમની બંને વિષયોની એક કસોટી યોજી. આ પાંચ વિદ્યાર્થીઓના ગણિત અને ઇતિહાસ વિષયમાં મેળવેલા ગુણને આધારે તેઓને નીચે મુજબ ક્રમ આપવામાં આવે છે. આ માહિતી પરથી બંને વિષયોના ક્રમો વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

વિદ્યાર્થી	A	B	C	D	E
ગણિતમાં ક્રમ	2	5	1	4	3
ઈતિહાસમાં ક્રમ	4	1	5	2	3

અહીં, $n=5$ અને ક્રમ આપેલા છે જ તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા માટે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

વિદ્યાર્થી	R_x	R_y	$d=R_x-R_y$	d^2
A	2	4	–2	4
B	5	1	4	16
C	1	5	–4	16
D	4	2	2	4
E	3	3	0	0
કુલ	–	–	**0**	**40**

$$r = 1-\frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6(40)}{5(25-1)}$$

$$= 1-\frac{240}{120}$$

$$= 1-2$$

$$\therefore\ r = -1$$

આમ, પાંચ વિદ્યાર્થીઓનો ગણિત અને ઈતિહાસમાં દેખાવ તદ્દન ઊલટા ક્રમમાં હોવાથી આપણને $r=-1$ મળે છે.

ઉદાહરણ 19 : એક સંગીત-સ્પર્ધામાં પાંચ ગાયકો A, B, C, D અને E ને તેમની ગીત ગાવાની કુશળતાને આધારે બે નિર્ણાયકો મૂલવે છે. પાંચ ગાયકોને નીચે મુજબ ક્રમ આપેલા છે.

ક્રમ	1	2	3	4	5
નિર્ણાયક 1	C	A	B	E	D
નિર્ણાયક 2	B	C	D	A	E

આ પરથી બંને નિર્ણાયકોના નિર્ણયો વચ્ચેની સામ્યતા ક્રમાંક સહસંબંધાંક પરથી શોધો.

અહીં $n = 5$, પાંચ ગાયકોને મળેલા ક્રમ અનુસાર આપેલી માહિતીને ફરીથી નીચે મુજબ ગોઠવીએ.

ગાયક	A	B	C	D	E
નિર્ણાયક 1 એ આપેલ ક્રમ	2	3	1	5	4
નિર્ણાયક 2 એ આપેલ ક્રમ	4	1	2	3	5

ગાયક	R_x	R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	2	4	–2	4
B	3	1	2	4
C	1	2	–1	1
D	5	3	2	4
E	4	5	–1	1
કુલ	–	–	**0**	**14**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(14)}{5(25-1)}$$

$$= 1 - \frac{84}{120}$$

$$= 1 - 0.7$$

$$\therefore \ r = 0.3$$

અહીં r ની કિંમત ધન અને 0 ની નજીક છે તેથી તે આંશિક ધન સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી કહી શકાય કે બંને નિર્ણાયકોમાં સહમતી ઓછી છે એટલે કે તેમના અભિપ્રાય પ્રમાણમાં જુદા પડે છે.

ઉદાહરણ 20 : એક શાળાના આંકડાશાસ્ત્ર અને નામાપદ્ધતિ વિષયના શિક્ષકોએ તેમની શાળાના વિદ્યાર્થીઓમાંથી આઠ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ બંને વિષયોમાં વિદ્યાર્થીઓની આવડત વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરી.

વિદ્યાર્થી	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ x	78	36	98	25	75	82	90	62
નામાપદ્ધતિમાં ગુણ y	84	51	91	60	68	62	86	55

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓને મળતા આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ અને નામાપદ્ધતિના ગુણ વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

અહીં $n=8$ અને આપણને સંખ્યાત્મક ચલ (બંને વિષયોમાં ગુણ) આપેલા છે. તેથી સૌપ્રથમ બંને વિષયોમાં ગુણ અનુસાર ક્રમ આપવા પડશે.

આંકડાશાસ્ત્રના વિષયમાં રોલ નંબર 3 ધરાવતાં વિદ્યાર્થીના સૌથી વધુ 98 ગુણ છે તેથી તેને ક્રમ 1 આપવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ રોલ નંબર 7 ધરાવતા વિદ્યાર્થીના ગુણ 90 છે તેથી તેને ક્રમ 2 એમ એક પછી એક વિદ્યાર્થીઓને ક્રમ આપવામાં આવે છે. તે જ રીતે નામાપદ્ધતિના ગુણને આધારે પણ વિદ્યાર્થીઓને ક્રમ આપવામાં આવે છે.

હવે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

રોલ નંબર	આંકડાશાસ્ત્ર		નામા પદ્ધતિ		$d = R_x - R_y$	d^2
	ગુણ	ક્રમ R_x	ગુણ	ક્રમ R_y		
1	78	4	84	3	1	1
2	36	7	51	8	–1	1
3	98	1	91	1	0	0
4	25	8	60	6	2	4
5	75	5	68	4	1	1
6	82	3	62	5	–2	4
7	90	2	86	2	0	0
8	62	6	55	7	–1	1
કુલ	–	–	–	–	**0**	**12**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(12)}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{72}{504}$$

$$= 1 - 0.1429$$

$$= 0.8571$$

$$\therefore \ r \simeq 0.86$$

અહીં r ની કિંમત 1 ની વધુ નજીક છે તેથી કહી શકાય કે, આંકડાશાસ્ત્ર અને નામાપદ્ધતિના ગુણ પરથી મેળવેલા ક્રમો વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ છે. એટલે કે સામાન્ય રીતે કોઈ વિદ્યાર્થીના આંકડાશાસ્ત્રમાં વધુ (ઓછા) ગુણ હોય, તો તે વિદ્યાર્થીના નામાપદ્ધતિમાં પણ ગુણ વધુ (ઓછા) હોય છે. (હંમેશાં દરેક વિદ્યાર્થીની બાબતમાં આવું ન પણ હોય)

અવલોકનોમાં ગાંઠ (જ્યારે અવલોકનો સમાન હોય) :

જ્યારે ચલ X અથવા Y અથવા બંને ચલનાં અવલોકનોની અમુક કિંમતો સમાન હોય ત્યારે તેવા અવલોકનોને ક્રમ આપવા માટે સમસ્યા ઉદ્ભવે છે. જ્યારે X અથવા Y ચલનાં અવલોકનો સમાન હોય તો તેને આપણે 'ગાંઠ' (Tie) ઉદ્ભવે છે તેમ કહીશું. આવા કિસ્સામાં પુનરાવર્તન પામતા બધાં અવલોકનોને તેમને અનુરૂપ ક્રમોની સરેરાશ (મધ્યક) જેટલો ક્રમ ગાંઠમાંના દરેક અવલોકનને આપવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ આવતાં અવલોકનોને સરેરાશ ક્રમમાં ઉપયોગમાં લીધેલા છેલ્લા ક્રમ પછીનો ક્રમ આપવામાં આવે છે. આપણે એક ઉદાહરણ લઈ આ બાબત સમજીએ. ધારો કે એક ચલનાં અવલોકનો 37, 60, 42, 78, 42, 50, 66, 42, 60 છે. અહીં સૌથી મોટું અવલોકન 78 છે તેથી તેને આપણે ક્રમ 1 આપીશું. ત્યાર બાદનું અવલોકન 66 છે તેથી તેને ક્રમ 2 આપીશું. હવે ત્યાર બાદનું અવલોકન 60 છે. પણ તે બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી તેઓને અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 3 અને ક્રમ 4)ની સરેરાશ $\frac{3+4}{2} = 3.5$ એ દરેક અવલોકન (60)ને ક્રમ તરીકે આપવામાં આવે છે. હવે પછીનું અવલોકન 50 છે, તેને ક્રમ 5 આપીશું, કેમકે ક્રમ 3 અને ક્રમ 4નો અગાઉ ઉપયોગ થઈ ચૂક્યો છે. હવે પછીનું અવલોકન 42 છે અને તે ત્રણ વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી તેમના અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 6, ક્રમ 7, ક્રમ 8)ની સરેરાશ $\frac{6+7+8}{3} = 7$ એ દરેક અવલોકન (42)ને ક્રમ તરીકે આપવામાં આવે છે. હવે આખરમાં અવલોકન 37 છે. તેને ક્રમ 9 આપવામાં આવે છે, કેમકે ક્રમ 6, ક્રમ 7 અને ક્રમ 8નો અગાઉ ઉપયોગ થઈ ચૂક્યો છે. આ જ રીતે બીજા ચલની કિંમતોને પણ ક્રમ આપવામાં આવે છે.

હવે જ્યારે ગાંઠ પડે (અમુક અવલોકનો સમાન હોય) ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કરવાના સૂત્રમાં સુધારો કરવાની જરૂર પડે છે. એવો સુધારો 'CF' (Correction Factor) થી કરવાનો હોય છે.

'CF' શોધવા માટે પ્રત્યેક પુનરાવર્તન પામતાં અવલોકનના સમૂહ દીઠ $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ પદ Σd^2 માં ઉમેરવામાં આવે છે. જ્યાં, m = અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા. આવા પુનરાવર્તન પામતા પ્રત્યેક અવલોકન સમૂહ માટે મેળવેલ $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ પદોનો સરવાળો એટલે 'CF'. એટલે કે CF = $\Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$

આમ, જ્યારે ક્રમ આપવામાં ગાંઠ ઉદ્ભવે (એટલે કે અમુક અવલોકનો સમાન હોય) ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

જ્યાં, સુધારો (CF) = $\Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$

અને m = અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા.

ઉદાહરણ 21 : ઉદાહરણ 5માં આપેલી વીગત પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

આપણે અગાઉ સમજ્યા તે મુજબ બંને ચલોને ક્રમ આપીશું. અહીં Y ચલમાં અવલોકન 75 બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે. સૌથી મોટું અવલોકન 79 છે. તેને ક્રમ 1 આપી ત્યાર બાદ આવતા અવલોકન 75ને ક્રમ 2 અને ક્રમ 3ની સરેરાશ એટલે કે $\frac{2+3}{2} = 2.5$ ક્રમ તે દરેકને આપીશું.

હવે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

	વાચન (કલાક) x	X નો ક્રમ R_x	ગુણ y	Y નો ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
	25	7	65	7	0	0
	38	2	75	2.5	–0.5	0.25
	30	5	68	6	–1	1
	28	6	70	5	1	1
	34	4	72	4	0	0
	40	1	79	1	0	0
	36	3	75	2.5	0.5	0.25
કુલ	–	–	–	–	**0**	**2.5**

'CF' મેળવવાની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

પુનરાવર્તિત અવલોકન	અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
75	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
–	–	$CF = \Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right) = \mathbf{0.5}$

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6[2.5+0.5]}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(3)}{336}$$

$$= 1 - \frac{18}{336}$$

$$= 1 - 0.0536$$

$$= 0.9464$$

$$\therefore\ r \simeq 0.95$$

નોંધ : અહીં જોઈ શકાય છે કે સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીતથી મેળવેલી r ની કિંમત એ ઉદાહરણ 5માં મેળવેલા કાર્લ પિયર્સનની રીતથી મેળવેલી r ની કિંમતથી જુદી પડે છે.

ઉદાહરણ 22 : વિદ્યાર્થીઓની અર્થશાસ્ત્ર વિષયની સમજ અને તેમની નૃત્ય કલા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે આઠ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ તેમની કસોટી કરવામાં આવે છે અને તેમને મળતાં ગુણ નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

અર્થશાસ્ત્રમાં ગુણ	60	30	10	20	30	50	30	40
નૃત્ય કલામાં ગુણ	80	20	60	40	12	28	20	15

અર્થશાસ્ત્રમાં ગુણને આધારે ક્રમ આપીએ તો સૌથી વધુ ગુણ 60 છે તેથી તેનો ક્રમ 1, 50 ગુણનો ક્રમ 2, 40 ગુણનો ક્રમ 3 થશે. હવે 30 ગુણ આવે છે જે ત્રણ વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી તેઓને અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 4, ક્રમ 5, ક્રમ 6)ની સરેરાશ $\frac{4+5+6}{3} = 5$ એ દરેક ગુણ 30નો ક્રમ થશે. હવે 30 ગુણ બાદ 20 ગુણ આવે છે, તેથી તેનો ક્રમ 7 થશે અને છેલ્લે સૌથી ઓછા ગુણ 10 નો ક્રમ 8 થશે. તે જ રીતે નૃત્ય કલામાં ગુણને આધારે ક્રમ આપીએ તો સૌથી વધુ ગુણ 80 છે તેથી તેનો ક્રમ 1 થશે. 60 ગુણનો ક્રમ 2, 40 ગુણનો ક્રમ 3, 28 ગુણનો ક્રમ 4 થશે. હવે ગુણ 20 બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે તેથી તેને અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 5, ક્રમ 6)ની સરેરાશ $\frac{5+6}{2} = 5.5$ એ દરેક ગુણ 20નો ક્રમ થશે. હવે 15 ગુણ આવે છે તેથી તેનો ક્રમ 7 અને છેલ્લે સૌથી ઓછા ગુણ 12નો ક્રમ 8 થશે.

હવે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

	અર્થશાસ્ત્રમાં ગુણ x	**X નો ક્રમ R_x**	**નૃત્ય કલામાં ગુણ y**	**Y નો ક્રમ R_y**	**$d = R_x - R_y$**	**d^2**
	60	1	80	1	0	0
	30	5	20	5.5	–0.5	0.25
	10	8	60	2	6	36
	20	7	40	3	4	16
	30	5	12	8	–3	9
	50	2	28	4	–2	4
	30	5	20	5.5	–0.5	0.25
	40	3	15	7	–4	16
કુલ	–	–	–	–	**0**	**81.5**

'CF' મેળવવાની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

પુનરાવર્તિત અવલોકન	અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા (*m*)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
30	3	$\left(\frac{3^3-3}{12}\right)=2$
20	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right)=0.5$
–	–	**CF = 2.5**

$$r = 1-\frac{6\left[\Sigma d^2+CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6[81.5+2.5]}{8(64-1)}$$

$$= 1-\frac{6(84)}{504}$$

$$= 1-\frac{504}{504}$$

$$= 1-1$$

$$= 0$$

અહીં $r = 0$ મળે છે તેથી કહી શકાય કે અર્થશાસ્ત્ર અને નૃત્યકલાના ગુણના ક્રમો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે. એટલે કે આપેલા સમૂહના વિદ્યાર્થીઓના અર્થશાસ્ત્ર અને નૃત્ય કલામાં પરીક્ષા-દેખાવ (performance) સુરેખ સંબંધની દૃષ્ટિએ સ્વતંત્ર છે.

ઉદાહરણ 23 : એક ઇલેક્ટ્રિક સાધનોનું માર્કેટિંગ કરતી એજન્સી LED ફિટીંગ્સના વેચાણ અને નફા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા જુદી જુદી ઇલેક્ટ્રિક કંપનીના વેચાણ અને નફાની માહિતી નીચે મુજબ મેળવે છે. આ માહિતી પરથી વેચાણ (હજાર એકમોમાં) અને નફા (લાખ ₹માં) વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

વેચાણ (હજાર એકમો)	25	58	215	72	58	25	90	162
નફો (લાખ ₹)	65	140	500	115	65	65	220	340

અહીં $n = 8$ અને વેચાણના અવલોકન 25 અને 58 બંને બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે અને નફાનું અવલોકન 65 ત્રણ વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી આગળના ઉદાહરણમાં ચર્ચા કરી તે મુજબ અહીં વેચાણ અને નફાની કિંમતોને આધારે ક્રમ આપી આપણે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીશું.

	વેચાણ (હજાર એકમો) x	X નો ક્રમ R_x	નફો (લાખ ₹) y	Y નો ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
	25	7.5	65	7	0.5	0.25
	58	5.5	140	4	1.5	2.25
	215	1	500	1	0	0
	72	4	115	5	–1	1
	58	5.5	65	7	–1.5	2.25
	25	7.5	65	7	0.5	0.25
	90	3	220	3	0	0
	162	2	340	2	0	0
કુલ	–	–	–	–	**0**	**6**

'CF' મેળવવાની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

પુનરાવર્તિત અવલોકન	અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
25	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
58	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
65	3	$\left(\frac{3^3-3}{12}\right) = 2$
–	–	**CF = 3**

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6[6+3]}{8(64-1)}$$