Geometric Progreassion in Nature

Bacteria such as Shewanella Oneidensis Multiply by doubling their population in size after as little as 40 minutes. A geometric progression such as this, where each number is double the previous number produces a rapid increase in the population in a very short time.

9

ગુણોત્તર-શ્રેણી (Geometric Progression)

વિષયવસ્તુ :

9.1 અર્થ

9.2 *n* મું પદ મેળવવાનું સૂત્ર

9.3 શ્રેઢીનો અર્થ

9.4 ત્રણ ક્રમિક પદો

9.1 અર્થ (Meaning)

શ્રેણી એટલે કોઈ ચોક્કસ નિયમને અનુસરતી સંખ્યાઓની ગોઠવણી. શ્રેણીના અલગ-અલગ પ્રકાર હોય છે. આપણે સમાંતર શ્રેણીનો અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છીએ. જે શ્રેણીમાં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો તફાવત સરખો અને શૂન્યેતર હોય તેને સમાંતર શ્રેણી કહે છે. દા.ત., 3, 6, 9, 12, ...

હવે આપણે બીજી શ્રેણી ગુણોત્તર-શ્રેણી વિશે અભ્યાસ કરીશું.

ધારો કે આપણે 3, 6, 12, 24, ... શ્રેણી લઈએ.

આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 3 છે. જો પ્રથમ પદ 3 ને 2 વડે ગુણીએ તો આપણને $3 \times 2 = 6$ મળે છે જે શ્રેણીનું બીજું પદ છે. જો બીજા પદ 6 ને 2 વડે ગુણીએ તો આપણને $6 \times 2 = 12$ મળે છે જે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ છે. બીજા શબ્દોમાં આ શ્રેણીનાં ક્રમિક પદોથી મળતા નીચેના ગુણોત્તરો અચલ રહે છે :

$$\frac{\text{બીજું પદ}}{\text{પ્રથમ પદ}} = 2, \ \frac{\text{ત્રીજું પદ}}{\text{બીજું પદ}} = 2, \ \frac{\text{ચોથું પદ}}{\text{ત્રીજું પદ}} = 2, \text{ આ જ રીતે આગળ}$$

બીજી શ્રેણી 4, −12, 36, − 108, ... લઈએ.

આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 4 છે. જો પ્રથમ પદ 4 ને (−3) વડે ગુણીએ તો આપણને $4 \times (-3) = -12$ મળે છે, જે શ્રેણીનું બીજું પદ છે. જો બીજા પદ (−12) ને (−3) વડે ગુણીએ તો આપણને $(-12) \times (-3) = 36$ મળે છે, જે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ છે. બીજા શબ્દોમાં આ શ્રેણીના ક્રમિક પદોથી મળતા નીચેના ગુણોત્તરો અચલ રહે છે :

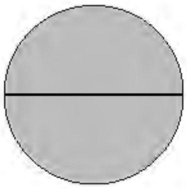
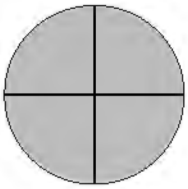
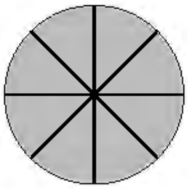
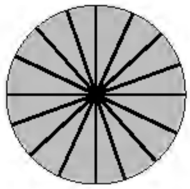
$$\frac{\text{બીજું પદ}}{\text{પ્રથમ પદ}} = -3, \quad \frac{\text{ત્રીજું પદ}}{\text{બીજું પદ}} = -3, \quad \frac{\text{ચોથું પદ}}{\text{ત્રીજું પદ}} = -3, \text{ આ જ રીતે આગળ}$$

હજુ એક શ્રેણી 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... લઈએ.

આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 2 છે. જો પ્રથમ પદ 2 ને $\frac{1}{2}$ વડે ગુણીએ તો આપણને $2 \times \frac{1}{2} = 1$ મળે છે, જે શ્રેણીનું બીજું પદ છે. જો બીજા પદ 1 ને $\frac{1}{2}$ વડે ગુણીએ તો આપણને $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ મળે છે, જે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ છે. બીજા શબ્દોમાં આ શ્રેણીનાં ક્રમિક પદોથી મળતાં નીચેના ગુણોત્તરો અચલ રહે છે :

$$\frac{\text{બીજું પદ}}{\text{પ્રથમ પદ}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\text{ત્રીજું પદ}}{\text{બીજું પદ}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\text{ચોથું પદ}}{\text{ત્રીજું પદ}} = \frac{1}{2}, \text{ આ જ રીતે આગળ}$$

ઉપર તપાસેલ ત્રણ શ્રેણીઓ પૈકીની દરેક શ્રેણીમાં જોઈ શકાય છે કે $n \geq 1$ માટે શ્રેણીનાં $(n+1)$ મા પદ અને n મા પદના ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચલ છે. આવી શ્રેણીને **ગુણોત્તર-શ્રેણી** કહેવાય.

				
વ્યાસની સંખ્યા	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$
વર્તુળના ભાગોની સંખ્યા	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$

ઉપર્યુક્ત આકૃતિઓમાં વ્યાસની સંખ્યા અનુક્રમે 1, 2, 4, 8, ... છે, જે ગુણોત્તર-શ્રેણી દર્શાવે છે.

તેમજ વર્તુળના ભાગોની સંખ્યા અનુક્રમે : 2, 4, 8, 16, ... છે, તે પણ ગુણોત્તર-શ્રેણી દર્શાવે છે.

ગુણોત્તર-શ્રેણીના કેટલાક વ્યાવહારિક ઉદાહરણો

ધારો કે એક ધનિક વ્યક્તિની સંપત્તિ આશરે 200 કરોડ રૂપિયા છે અને તે દર 5 વર્ષે બમણી થાય છે.

હાલની સંપત્તિ 200 કરોડ છે અને પ્રથમ 5 વર્ષના અંતે બમણી થાય છે તેથી પ્રથમ 5 વર્ષ બાદ તે સંપત્તિ $200 \times 2 = 400$ કરોડ રૂપિયા થશે. હવે બીજાં 5 વર્ષના અંતે સંપત્તિ ફરીથી બમણી થતાં તે $400 \times 2 = 800$ કરોડ રૂપિયા થશે. આમ તેની સંપત્તિ અનુક્રમે 200, 400, 800, ... (કરોડમાં) થશે, જે 2 ગુણોત્તરવાળી ગુણોત્તર-શ્રેણી બનાવે છે.

એક વ્યક્તિ ₹ 10,000 બેન્કમાં જમા કરાવે છે. બેન્ક તેને તેના રોકાણ પર વાર્ષિક 10 % ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ આપે છે. એટલે કે તેની જમા રાશિ દર વર્ષે 10 ટકાના દરે વધશે.

બેન્કમાં જમા કરાવેલ રકમ ₹ 10,000 છે અને બેન્ક 10 % વ્યાજ આપે છે તેથી એક વર્ષ બાદ 10,000 + 1000 (10,000 ના 10 %) = ₹ 11, 000 થશે. હવે બેન્ક ₹11,000 ઉપર 10 % વ્યાજ આપશે તેથી બીજા વર્ષના અંતે તે 11,000 + 1100 = ₹ 12,100 થશે. તે જ રીતે ત્રીજા વર્ષના અંતે 12,100 + 1210 (12,100 ના 10 %) = ₹ 13310 થશે. આમ, 10000, 11000, 12100, 13310, ... જે 1.1 ગુણોત્તર વાળી ગુણોત્તર-શ્રેણી બનાવે છે.

કોઈ એક જગ્યાએ ક્રૂડ ઑઇલનો 50 લાખ મેટ્રિક ટન જથ્થો છે અને તે દર વર્ષે 10 % ઘટે છે.

હાલનો ક્રૂડ ઑઇલનો જથ્થો 50 લાખ મેટ્રિક ટન છે. ક્રૂડ ઑઇલનો જથ્થો દર વર્ષે 10 % ઘટે છે તેથી પ્રથમ વર્ષના અંતે 5000000–500000 (5000000 ના 10 %) = 4500000 મેટ્રિક ટન થશે. બીજા વર્ષના અંતે 4500000 – 450000 (4500000 ના 10 %)= 4050000 મેટ્રિક ટન થશે. આમ, 5000000, 4500000, 4050000....જે 0.9 ગુણોત્તરવાળી ગુણોત્તર શ્રેણી બનાવે છે.

9.2 nમું પદ મેળવવાનું સૂત્ર (Formula for obtaining n^{th} term)

જો a અને r શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો ધનપૂર્ણાંક $n \geq 1$ માટે જે શ્રેણીનું n મું પદ $T_n = ar^{n-1}$ હોય તે શ્રેણીને ગુણોત્તર-શ્રેણી કહે છે. a ને શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને r ને શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર (common ratio) કહે છે.

આમ, ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ક્રમિક પદો $a, ar, ar^2 ar^3, ...$ છે અને n મા પદ $T_n = ar^{n-1}$ ને ગુણોત્તર-શ્રેણીનું સામાન્ય પદ કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 7 અને 2 હોય તો છઠ્ઠું પદ શોધો.

ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a = 7$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 2$ છે અને છઠ્ઠું પદ શોધવાનું છે. એટલે કે, $n = 6$.

a, r અને n ની કિંમતોને n મા પદ $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$T_6 = 7 \times (2)^{6-1}$$
$$= 7 \times (2)^5$$
$$= 7 \times 32$$
$$= 224$$

આમ, શ્રેણીનું છઠ્ઠું પદ 224 છે.

ઉદાહરણ 2 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર અને પાંચમું પદ અનુક્રમે 3 અને 324 હોય તો પ્રથમ પદ શોધો.

ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 3$ અને પાંચમું પદ 324 છે. અહીં $T_5 = 324$ અને પ્રથમપદ એટલે કે a શોધવાનું છે

અહીં $T_5 = 324$ છે.

$\therefore \quad ar^{5-1} = 324 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$

$\therefore \quad a\,(3)^4 = 324 \qquad (\because r = 3)$

$\therefore \quad a \times 81 = 324$

$\therefore \quad a = \frac{324}{81} = 4$

આમ, શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 4 છે.

ઉદાહરણ 3 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ અને ચોથું પદ અનુક્રમે 5 અને 40 હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a = 5$ અને ચોથું પદ 40 છે. અહીં $T_4 = 40$ અને આપણે સામાન્ય ગુણોત્તર r શોધવાનો છે.

અહીં $T_4 = 40$ છે.

$\therefore \quad ar^{4-1} = 40 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$

$\therefore \quad 5 \times r^3 = 40 \qquad (\because a = 5)$

$\therefore \quad r^3 = \frac{40}{5} = 8$

$\therefore \quad r = 2$

આમ, શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર 2 છે.

ઉદાહરણ 4 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 4 અને –2 છે. જો શ્રેણીનું n મું પદ –128 હોય તો n ની કિંમત શોધો.

આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ $a = 4$, સામાન્ય ગુણોત્તર $r = -2$ અને n મું પદ -128 એટલે કે $T_n = -128$ છે.

અહીં $T_n = -128$

$\therefore \quad ar^{n-1} = -128 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$

$\therefore \quad 4 \times (-2)^{n-1} = -128 \qquad (\because a = 4$ અને $r = -2)$

$\therefore \quad (-2)^{n-1} = \frac{-128}{4} = -32$

$\therefore \quad (-2)^{n-1} = (-2)^5$

બંને બાજુની ઘાતને સરખાવતાં,

$n - 1 = 5$

$\therefore \quad n = 6$

ઉદાહરણ 5 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ચોથું અને સાતમું પદ અનુક્રમે $\frac{3}{4}$ અને $\frac{3}{32}$ હોય તો દસમું પદ શોધો.

ધારો કે ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $= a$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $= r$ છે.

આપણને $T_4 = \frac{3}{4}$ અને $T_7 = \frac{3}{32}$ આપેલ છે.

આમ $\frac{T_7}{T_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = r^3$ અને $\frac{T_7}{T_4} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{32} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{8}$

$\therefore \quad r^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\therefore \quad r = \frac{1}{2}$

હવે $r = \frac{1}{2}$ ને $T_4 = ar^3 = \frac{3}{4}$ માં મૂકતાં,

$\therefore \quad a\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad a \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad a = \frac{3}{4} \times 8$

$\therefore \quad a = 6$

હવે શ્રેણીનું દસમું પદ શોધવાનું છે અહીં, $n = 10$.

a, r અને n ની કિંમતોને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$T_{10} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}$$

$$= 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$$

$$= 6 \times \frac{1}{512}$$

$$= \frac{3}{256}$$

આમ, શ્રેણીનું 10 મું પદ $\frac{3}{256}$ છે.

ઉદાહરણ 6 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 9, –6, 4, ... નું 5 મું પદ શોધો.

અહીં $a = 9$ અને $r = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$ છે. 5 મું પદ શોધવાનું છે એટલે કે $n = 5$

a, r અને n ની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતા

$$T_5 = 9 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{5-1}$$

$$= 9 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{4}$$

$$= 9 \times \frac{16}{81}$$

$$= \frac{16}{9}$$

આમ, શ્રેણીનું 5 મું પદ $\frac{16}{9}$ છે.

ઉદાહરણ 7 : ગુણોત્તર-શ્રેણી $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, ...નું આઠમું પદ શોધો.

અહીં $a = \frac{1}{8}$ અને $r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2$. આઠમું પદ શોધવાનું છે એટલે કે $n = 8$

a, r અને n ની કિંમતોને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$T_8 = \frac{1}{8} \times (2)^{8-1}$$

$$= \frac{1}{8} \times (2)^7$$

$$= \frac{1}{8} \times 128$$

$$= 16$$

આમ, શ્રેણીનું આઠમું પદ 16 છે.

ઉદાહરણ 8 : જો કોઈ એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું બીજું પદ 4 હોય તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર શોધો.

ધારો કે, પ્રથમ પદ = a અને સામાન્ય ગુણોત્તર = r છે.

અહીં બીજું પદ 4 છે એટલે કે $T_2 = 4$.

હવે $n = 1$, $n = 2$ અને $n = 3$ ને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં

$T_1 = a$, $T_2 = ar$ અને $T_3 = ar^2$ મળે છે.

આમ, $T_1 \times T_2 \times T_3 = a \times ar \times ar^2$

$$= a^3 \times r^3$$

$$= (ar)^3$$

$$= (4)^3 \qquad (\because T_2 = ar = 4)$$

$$= 64$$

આમ, શ્રેણીના પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 64 થાય છે.

ઉદાહરણ 9 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર અનુક્રમે 3 અને 216 છે. તો શ્રેણીનું 7 મું પદ શોધો.

શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 3 છે એટલે કે $a = 3$.

હવે $n = 1$, $n = 2$ અને $n = 3$ ને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં $T_1 = a$, $T_2 = ar$ અને $T_3 = ar^2$ મળે છે.

પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 216 આપેલ છે.

એટલે કે $T_1 \times T_2 \times T_3 = 216$ છે.

હવે, $T_1 \times T_2 \times T_3 = 216$

$\therefore \quad a \times ar \times ar^2 = 216$

$\therefore \quad a^3 \times r^3 = 216$

$\therefore \quad 3^3 \times r^3 = 216 \qquad (\because a = 3)$

$\therefore \quad 27 \times r^3 = 216$

$\therefore \quad r^3 = \frac{216}{27} = 8$

$\therefore \quad r = 2$

તેથી શ્રેણીનું સાતમું પદ $T_7 = ar^6$

$\therefore\ T_7 = 3 \times (2)^6$

$= 3 \times 64$

$= 192$

આમ, શ્રેણીનું સાતમું પદ 192 છે.

ઉદાહરણ 10 : જો સંખ્યાઓ 2, G, 50 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે તો G ની કિંમત શોધો.

અહીં $T_1 = 2$, $T_2 = G$ અને $T_3 = 50$ છે.

સામાન્ય ગુણોત્તર $= \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$

$\therefore\ \frac{G}{2} = \frac{50}{G}$

$\therefore\ G^2 = 100$

$\therefore\ G = \pm 10$

$\therefore\ G = 10$ અથવા -10

ઉદાહરણ 11 : જો સંખ્યાઓ a, b, c, d માટે $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ હોય તો a, b, c, d ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે તેમ બતાવો.

ધારો કે $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = r$, જ્યાં r એક શૂન્યેતર અચલ છે.

$\therefore\ b = ar,\ c = br,\ d = cr$

$\therefore\ c = (ar)\,r = ar^2$ અને $d = (ar^2)\,r = ar^3$

જો $T_1 = a$, $T_2 = b = ar$, $T_3 = c = ar^2$, $T_4 = d = ar^3$

લઈએ તો T_1, T_2, T_3, T_4 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે. આમ a, b, c, d ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે.

ઉદાહરણ 12 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.008, 0.016, 0.032, ...નું કેટલામું પદ 4.096 છે ?

અહીં $a = 0.008$ અને $r = \frac{0.016}{0.008} = 2$ છે.

હવે, $T_n = 4.096$

$\therefore\ ar^{n-1} = 4.096$

$\therefore\ 0.008 \times (2)^{n-1} = 4.096$

$\therefore\ 2^{n-1} = \frac{4.096}{0.008}$

$\therefore\ 2^{n-1} = 512$

$\therefore\ 2^{n-1} = 2^9$

બંને બાજુ ઘાતને સરખાવતાં,

$n - 1 = 9$

$\therefore\ n = 10$

આમ, શ્રેણીનું 10મું પદ 4.096 છે.

ઉદાહરણ 13 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનું ત્રીજું પદ તે શ્રેણીના પ્રથમ પદનો વર્ગ હોય અને ચોથું પદ 243 હોય તો શ્રેણી શોધો.

ધારો કે પ્રથમ પદ $= a$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $= r$ છે. અહીં ત્રીજું પદ, પ્રથમ પદનો વર્ગ છે. એટલે કે $T_3 = a^2$

$\therefore\ T_3 = ar^2 = a^2$

$\therefore\ r^2 = a$

ઉપરાંત ચોથું પદ 243 એટલે કે $T_4 = 243$

$\therefore\ T_4 = ar^3 = 243$

$\therefore\quad r^2 \times r^3 = 243\ (\because\ r^2 = a)$

$\therefore\quad r^5 = 243$

$\therefore\quad r^5 = 3^5$

$\therefore\quad r = 3$

હવે, $a = r^2$

$\therefore\quad a = 3^2$

$\therefore\quad a = 9$

$a = 9$ અને $r = 3$ લેતાં, 9, 27, 81, 243... શ્રેણી મળે છે.

ઉદાહરણ 14 : એક વ્યક્તિ વર્ષ 2009માં બૅન્કમાં ₹ 10,000 જમા કરાવે છે. વર્ષ 2010માં ₹ 20,000 જમા કરાવે છે અને વર્ષ 2011માં ₹ 40,000 જમા કરાવે છે. કોઈ એક વર્ષમાં જમા કરાવેલ રકમ પાછલા વર્ષમાં જમા કરાવેલ રકમ કરતાં બમણી છે. તો વર્ષ 2014માં વ્યક્તિએ કેટલી રકમ જમા કરાવી હશે ?

એક વ્યક્તિ પ્રથમ વર્ષમાં એટલે કે વર્ષ 2009માં ₹ 10,000 જમા કરાવે છે. $\therefore$ પ્રથમ પદ $(a) = 10{,}000$ છે. દર વર્ષે જમા કરેલ રકમ અગાઉના વર્ષ કરતાં બમણી છે તેથી સામાન્ય ગુણોત્તર $(r) = 2$ છે. આપણે વર્ષ 2014માં જમા કરેલ રકમ શોધવાની છે એટલે $n = 6$.

a, r અને n ને $T_n = ar^{n-1}$માં મૂકતાં,

$T_6 = 10000\ (2)^{6-1}$

$= 10{,}000\ (2)^5$

$= 10{,}000 \times 32$

$= 3{,}20{,}000$

આમ, વર્ષ 2014માં જમા કરેલ રકમ ₹ 3,20,000 છે.

ઉદાહરણ 15 : એક 50,000 લિટરની ક્ષમતાવાળી પાણીની ટાંકી પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલી છે. લિકેજના કારણે દર અઠવાડિયે પાણીનું સ્તર અગાઉ કરતાં અડધું થઈ જાય છે, તો પાંચ અઠવાડિયાં પછી પાણીનું સ્તર કેટલું હશે ? (નવું પાણી ટાંકીમાં ઉમેરાતું નથી.)

50,000 લિટરની ક્ષમતાવાળી પાણીની ટાંકી પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલ છે. $\therefore\ a = 50{,}000 = T_1$, દર અઠવાડિયે પાણીનું સ્તર અગાઉ કરતાં અડધું થઈ જાય છે. $\therefore$ સામાન્ય ગુણોત્તર $(r) = \frac{1}{2}$ થશે.

એક અઠવાડિયા પછીનું પાણીનું સ્તર $= 50{,}000 \times \frac{1}{2} = 25{,}000$ લિટર થશે. આપણે પાંચ અઠવાડિયાં પછીનું પાણીનું સ્તર શોધવાનું છે એટલે $n = 6$.

a, r અને nની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$માં મૂકતાં,

$$T_6 = 50{,}000 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$$

$$= 50{,}000 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 50{,}000 \times \frac{1}{32} = 1562.5$$

આમ, પાંચ અઠવાડિયા પછી પાણીનું સ્તર 1562.5 લિટર હશે.

ઉદાહરણ 16 : એક શહેરની વસ્તી 20 લાખ છે. જો વસ્તી દર વર્ષે 3 ટકાના દરે વધતી હોય તો 6 વર્ષ પછી તે શહેરની વસ્તી કેટલી હશે ?

શહેરની હાલની વસ્તી 2000000 છે. $\therefore\ a = 2000000 = T_1$. વસ્તી દર વર્ષે 3 ટકાના દરે વધે છે.

$\therefore\ r = 1.03$

વસ્તી 3 ટકાના દરે વધે છે તેથી

$\therefore\quad r = \frac{100+3}{100} = 1.03$

એક વર્ષ પછી શહેરની વસ્તી = 2000000 × 1.03 = 2060000 = T_2 થશે. આપણે 6 વર્ષ પછીની વસ્તી શોધવાની છે એટલે $n = 7$.

a, r અને nની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$માં મૂકતાં,

$$T_7 = 20{,}00000\ (1.03)^{7-1}$$
$$= 20{,}00000\ (1.03)^6$$
$$\therefore \quad T_7 = 2388104.5930$$

આમ, 6 વર્ષ પછી શહેરની વસ્તી આશરે 23,88,105 થશે.

ઉદાહરણ 17 : મશીનના ઘસારાનો દર વર્ષે 15 % રાખવો એવું સરકાર નક્કી કરે છે. જો મશીનની ખરીદકિંમત ₹ 50,000 હોય, તો સાત વર્ષ પછી મશીનની કિંમત કેટલી થશે ?

મશીનની ખરીદકિંમત ₹ 50,000 છે. $\therefore$ $a = 50{,}000 = T_1$. મશીનનો ઘસારો દર વર્ષે 15 % છે.

$\therefore \quad r = 0.85$

મશીનની કિંમતમાં વર્ષે 15 ટકાનો ઘટાડો છે. $\therefore$ $r = \frac{100-15}{100} = 0.85$

એક વર્ષ પછીની મશીનની કિંમત = 50,000 × 0.85

= 42,500 = T_2 થશે.

સાત વર્ષ પછીની મશીનની કિંમત શોધવાની છે એટલે $n = 8$.

a, r અને nની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$T_8 = 50{,}000\ (0.85)^{8-1}$$
$$= 50{,}000\ (0.85)^7$$
$$= 16028.8544$$
$$\approx 16028.85$$

આમ, સાત વર્ષ પછીની મશીનની કિંમત ₹ 16,028.85 થશે.

9.3 શ્રેઢીનો અર્થ (Meaning of Sequence)

જો $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ને ગુણોત્તર-શ્રેણી લઈએ તો $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ એ **ગુણોત્તર શ્રેઢી** બનશે.

દા.ત., જો 2, 6, 18, 54, ... ગુણોત્તર-શ્રેણી હોય તો તેનાથી મળતી ગુણોત્તર શ્રેઢી 2 + 6 + 18 + 54 + ... થશે.

ગુણોત્તર-શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાને સંકેત S_n વડે દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n$$

જ્યાં $T_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

આમ, $S_1 = T_1$, $S_2 = T_1 + T_2$, $S_3 = T_1 + T_2 + T_3$ વગેરે.

જો બધાં પદો a અને rના રૂપમાં દર્શાવીએ તો,

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \text{ મળશે.}$$

ગુણોત્તર-શ્રેણીના સંદર્ભમાં નીચે દર્શાવેલ સૂત્રો આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

(1) $\frac{T_{n+1}}{T_n} = r$ = સામાન્ય ગુણોત્તર, અહીં n ધન પૂર્ણાંક છે.

(2) $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ જ્યાં $n = 1, 2, 3, \ldots$

(3) $S_n = na$ જ્યાં $r = 1$

(4) $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ જ્યાં $r \neq 1$

(5) $S_n = \frac{rT_n - a}{(r-1)}$ જ્યાં $r \neq 1$

ઉદાહરણ 18 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 5, 15, 45, ... ના પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 5$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{15}{5} = 3$ છે.

પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો શોધવાનો છે. $\therefore n = 5$.

a, r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_5 = \frac{5(3^5 - 1)}{(3-1)}$$

$$= \frac{5(243-1)}{2}$$

$$= \frac{5(242)}{2}$$

$$= 605$$

આમ, પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 605 છે.

ઉદાહરણ 19 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 8, 4, 2, ... ના પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 8$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ છે. પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો શોધવાનો છે.

$\therefore \quad n = 6$.

a, r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$\therefore \qquad S_6 = \frac{8\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}$$

$$= \frac{8\left[\frac{1}{64} - 1\right]}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{8\left[-\frac{63}{64}\right]}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 8 \times \left(-\frac{63}{64}\right) \times \left(\frac{2}{-1}\right)$$

$$= \frac{63}{4}$$

આમ, પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો $\frac{63}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 20 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 3 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય તો પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 3$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 2$ છે. પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો શોધવાનો છે, એટલે કે $n = 4$.

a, r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_4 = \frac{3[2^4-1]}{(2-1)}$$

$$= \frac{3(16-1)}{1}$$

$$= 3 \times 15$$

$$= 45$$

આમ, પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો 45 છે.

ઉદાહરણ 21 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણી જેમાં સામાન્ય ગુણોત્તર 0.2 અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 0.496 છે તો પ્રથમ પદ શોધો.

અહીં સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 0.2$ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 0.496 એટલે કે $S_3 = 0.496$ છે.

r અને n ની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$\therefore \quad 0.496 = \frac{a\left[0.2^3-1\right]}{0.2-1}$$

$$\therefore \quad 0.496 = \frac{a(0.008-1)}{(-0.8)}$$

$$\therefore \quad 0.496 = \frac{a(-0.992)}{(-0.8)}$$

$$\therefore \quad a = \frac{0.496 \times (-0.8)}{(-0.992)}$$

$$\therefore \quad a = 0.4$$

આમ, પ્રથમ પદ 0.4 છે.

ઉદાહરણ 22 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 800,400,200, ...ના કેટલા પદોનો સરવાળો 1500 થશે ?

અહીં પ્રથમ પદ $a = 800$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{400}{800} = 0.5$ છે. પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 1500 છે. એટલે કે $S_n = 1500$

a અને rની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_n = \frac{800\left[(0.5)^n-1\right]}{(0.5-1)}$$

$$\therefore \quad 1500 = \frac{800\left[(0.5)^n-1\right]}{(-0.5)}$$

$$\therefore \quad (0.5)^n - 1 = \frac{1500 \times (-0.5)}{800}$$

$$\therefore \quad (0.5)^n = 1 - 0.9375$$

$$(0.5)^n = 0.0625$$

$$\therefore \quad (0.5)^n = (0.5)^4$$

બંને બાજુ ઘાતને સરખાવતાં,

$$n = 4$$

આમ, પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો 1500 થશે.

ઉદાહરણ 23 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ 27 અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 189 છે. સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ a = 27 અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 189 છે. એટલે કે $S_3 = 189$

કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$\therefore \quad S_3 = \frac{27(r^3-1)}{(r-1)}$

$\therefore \quad 189 = \frac{27\ (r-1)\ (r^2+r+1)}{(r-1)}$

$\therefore \quad 189 = 27\ (r^2 + r + 1)$

$\therefore \quad r^2 + r + 1 = 7$

$\therefore \quad r^2 + r - 6 = 0$

$\therefore \quad (r + 3)\ (r - 2) = 0$

$\therefore \quad r = -3$ અથવા $r = 2$

આમ, સામાન્ય ગુણોત્તર – 3 અથવા 2 છે.

ઉદાહરણ 24 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ 1 છે અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 1 છે. સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 1$ અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 1 છે એટલે કે $S_5 = 1$.

કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$\therefore \quad S_5 = \frac{1(r^5-1)}{(r-1)}$

$\therefore \quad 1 = \frac{(r^5-1)}{(r-1)}$

$\therefore \quad r^5 - 1 = r - 1$

$\therefore \quad r^5 = r$

$\therefore \quad r^4 = 1$

$\therefore \quad r = \pm 1$

જો a = 1 અને $r = 1$ હોય તો પ્રથમ પાંચ પદો 1, 1, 1, 1, 1 થાય, જેનો સરવાળો 5 થાય પણ આપેલ સરવાળો 1 છે. તેથી $r = 1$ શક્ય નથી.

જો $a = 1$ અને $r = -1$ હોય તો પ્રથમ પાંચ પદો 1, –1, 1, –1, 1 થાય, જેનો સરવાળો 1 થાય, તેથી $r = -1$ થશે.

આમ, સામાન્ય ગુણોત્તર – 1 છે.

ઉદાહરણ 25 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 2, 4, 8, 16......નાં પ્રથમ *n* પદોનો સરવાળો 5000 થી વધે નહીં તેવી *n* ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 2$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{4}{2} = 2$. n પદોનો સરવાળો 5000 થી વધે નહિ.

એટલે કે $S_n \le 5000$.

a અને r ને $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_n = \frac{2\ (2^n-1)}{(2-1)}$$

$$= 2\ (2^n-1)$$

હવે, $S_n \le 5000$ હોવાથી

$2\ (2^n - 1) \le 5000$

$\therefore \quad 2^n - 1 \le 2500$

$\therefore \quad 2^n \le 2501$

હવે nની વિવિધ ધન પૂર્ણાંક કિંમતો માટે 2^nની કિંમતોનું કોષ્ટક નીચે મુજબ બનાવીએ અને nની જે ધન પૂર્ણાંક કિંમત માટે $2^n \le 2501$ થાય તેવી nની મહત્તમ કિંમત લઈશું.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાશે કે $n = 10$ માટે $2^n = 1024$, $n = 11$ માટે $2^n = 2048$ છે અને $n = 12$ માટે $2^n = 4096$ જે 2501 કરતાં વધુ છે.

$n = 11$ તે nની મહત્તમ કિંમત છે કે જેના માટે $2^n \le 2501$ થાય.

$\therefore \quad n = 11$

ઉદાહરણ 26 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, 3, 3^2, 3^3, ...ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 3000 થાય તેવી nની લઘુતમ કિંમત શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 1$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{3}{1} = 3$. પ્રથમ n પદોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 3000 હોવો જોઈએ એટલે કે $S_n \ge 3000$.

a અને rને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_n = \frac{1(3^n - 1)}{(3-1)}$$

$$= \frac{3^n - 1}{2}$$

હવે, $S_n \ge 3000$ હોવાથી

$\therefore \quad \frac{3^n - 1}{2} \ge 3000$

$\therefore \quad 3^n - 1 \ge 6000$

$\therefore \quad 3^n \ge 6001$

હવે nની વિવિધ ધન પૂર્ણાંક કિંમતો માટે 3^nની કિંમતોનું કોષ્ટક નીચે મુજબ બનાવીએ અને n ની જે ધન પૂર્ણાંક કિંમત માટે $3^n \ge 6001$ થાય તેવી nની લઘુતમ કિંમત લઈશું.

n	4	5	6	7	8	9
3^n	81	243	729	2187	6561	19683

કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે $n = 8, 9,...$ માટે $3^n \ge 6001$ છે.

આમ, nની લઘુતમ કિંમત 8 છે જેને માટે $3^n \ge 6001$ હોય.

$\therefore \quad n = 8$

ઉદાહરણ 27 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $S_8 = 10S_4$ હોય તો 'r' શોધો.

અહીં, $S_8 = 10S_4$

$$\therefore \quad \frac{a(r^8-1)}{(r-1)} = 10\left[\frac{a(r^4-1)}{(r-1)}\right]$$

$$\therefore \quad r^8 - 1 = 10(r^4 - 1)$$

$$\therefore \quad (r^4 - 1)(r^4 + 1) = 10(r^4 - 1)$$

$$\therefore \quad r^4 + 1 = 10$$

$$r^4 = 9$$

$$\therefore \quad r^2 = 3$$

$$\therefore \quad r = \pm\sqrt{3}$$

ઉદાહરણ 28 : એક વ્યક્તિ તેના દીકરાને 1લી માર્ચે ₹ 5 આપે છે, 2જી માર્ચે ₹ 10 આપે છે, 3જી માર્ચે ₹ 20 આપે છે. આમ રોજ અગાઉના દિવસ કરતા બમણી રકમ આપે છે. તો 10મી માર્ચ સુધી વ્યક્તિએ તેના દીકરાને કેટલી રકમ આપી હશે ?

વ્યક્તિ 1લી માર્ચે ₹ 5 આપે છે તેથી પ્રથમ પદ $a = 5$. રોજ આપેલ રકમ અગાઉના દિવસ કરતાં બમણી રકમ આપે છે તેથી સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 2$ છે. આપણે 10મી માર્ચ સુધી આપેલ રકમ શોધવાની છે. તેથી $n = 10$.

a, r અને nની કિંમતો $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_{10} = \frac{5(2^{10}-1)}{(2-1)}$$

$$= \frac{5(1024-1)}{1}$$

$$= 5 \times 1023$$

$$= 5115$$

આમ, 10મી માર્ચ સુધી આપેલ રકમ ₹ 5115 થશે.

ઉદાહરણ 29 : એક વ્યક્તિને કુલ ₹ 2,42,000 નું દાન પાંચ મહિનામાં કરવું છે. દરેક મહિને દાનમાં આપેલ રકમ અગાઉના મહિનામાં કરેલ દાન કરતાં ત્રીજા ભાગની છે તો વ્યક્તિએ પહેલા મહિને દાનમાં આપેલ રકમ શોધો.

એક વ્યક્તિને કુલ ₹ 242000 નું દાન પાંચ મહિનામાં કરવું છે. એટલે કે $S_5 = 242000$ અને $n = 5$. દરેક મહિને દાનમાં આપેલ રકમ અગાઉના મહિનામાં કરેલ દાન કરતાં ત્રીજા ભાગની છે તેથી સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{1}{3}$. આપણે પ્રથમ મહિને આપેલ દાનની રકમ શોધવાની છે. એટલે કે, a શોધવાનો છે.

r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_5 = \frac{a\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right]}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)}$$

$\therefore \quad 242000 = \dfrac{a\left(\frac{1}{243}-1\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$\therefore \quad 242000 = \dfrac{a\left(-\frac{242}{243}\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$\therefore \quad 242000 = a \times \left(\frac{-242}{243}\right)\times\left(\frac{3}{-2}\right)$

$\therefore \quad 242000 = a \times \frac{121}{81}$

$\therefore \quad a = \frac{242000\times 81}{121}$

$\therefore \quad a = 162000$

આમ, પ્રથમ મહિને આપેલ દાનની રકમ ₹ 1,62,000 છે.

ઉદાહરણ 30 : એક વ્યક્તિ બૅન્કમાં ₹ 20,000 વર્ષે 8 ટકાના દરે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે મૂકે છે. પાંચ વર્ષ પછી વ્યક્તિને કેટલી રકમ મળશે ?

વ્યક્તિ ₹ 20,000 બૅન્કમાં મૂકે છે.

$\therefore \quad a = 20,000 = T_1$

બૅન્ક જમા કરેલ રકમ પર 8 ટકા વ્યાજ આપે છે. $\quad \therefore \; r = 1.08$

રકમ 8 ટકાના દરે વધે છે તેથી $r = \frac{100+8}{100} = 1.08$

એક વર્ષ પછી મળતી રકમ = 20,000 × 1.08 = 21,600 = T_2

આપણે પાંચ વર્ષ પછી મળતી રકમ શોધવાની છે એટલે n = 6 લઈશું.

a, r અને nની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$\begin{aligned} T_6 &= 20,000 \times (1.08)^{6-1} \\ &= 20,000 \times (1.08)^5 \\ &= 29386.5615 \\ &\approx 29386.56 \end{aligned}$$

આમ, પાંચ વર્ષ પછી મળતી રકમ ₹ 29,386.56 છે.

ઉદાહરણ 31 : ત્રણ ધન સંખ્યાઓ $k + 1$, $3k - 1$, $5k + 1$ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે. તો k શોધો.

અહીં, $k + 1$, $3k - 1$, $5k + 1$ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે.

તેથી $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$ = સામાન્ય ગુણોત્તર r થશે.

$\therefore \quad \frac{3k-1}{k+1} = \frac{5k+1}{3k-1}$

$\therefore \quad (3k - 1)^2 = (5k + 1)(k + 1)$

$\therefore \quad 9k^2 - 6k + 1 = 5k^2 + 6k + 1$

$\therefore \quad 4k^2 - 12k = 0$

$\therefore \quad 4k(k - 3) = 0$

$\therefore \quad 4k = 0$ અથવા $k - 3 = 0$

$\therefore \quad k = 0$ અથવા $k = 3$

પણ $k = 0$ માટે $(3k - 1)$ની કિંમત -1 મળશે જે ઋણ છે. તેથી $k = 0$ અસ્વીકાર્ય છે. આમ, $k = 3$ છે

ઉદાહરણ 32 : જો 15, x, 240, y ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય તો x અને yની કિંમતો શોધો.

અહીં, 15, x, 240, y ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે.

તેથી $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$ સામાન્ય ગુણોત્તર r થશે.

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$ લેતાં,

$\therefore \frac{x}{15} = \frac{240}{x}$

$\therefore x^2 = 15 \times 240$

$= 3600$

$\therefore x = \pm 60$

$\therefore x = 60$ અથવા -60

ઉપરાંત $\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$

$\therefore \frac{240}{x} = \frac{y}{240}$

$\therefore xy = 240 \times 240$

$\therefore xy = 57600$

હવે, જો $x = 60$ લઈએ તો

$60y = 57600$

$\therefore y = \frac{57600}{60}$

$\therefore y = 960$

અને

$x = -60$ લઈએ તો

$-60y = 57600$

$\therefore y = \frac{57600}{-60}$

$\therefore y = -960$

આમ, $x = 60$ અને $y = 960$ અથવા $x = -60$ અને $y = -960$.

ઉદાહરણ 33 : જો એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_n = 80$, $S_n = 157.5$ અને $r = 2$ હોય તો a અને n શોધો.

અહીં T_n અને S_nની કિંમતો આપેલ છે તેથી

$S_n = \frac{rT_n - a}{r-1}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

T_n, r અને S_nની કિંમતો સૂત્રમાં મૂકતાં,

$157.5 = \frac{2 \times 80 - a}{2-1}$

$\therefore 157.5 = 160 - a$

$\therefore a = 160 - 157.5$

$\therefore a = 2.5$

હવે $T_n = ar^{n-1}$

$\therefore 80 = 2.5 \times (2)^{n-1}$

$\therefore 2^{n-1} = 32$

$\therefore 2^{n-1} = 2^5$

બંને બાજુ ઘાત સરખાવતાં,

$n - 1 = 5$

$\therefore n = 6$

આમ, $a = 2.5$ અને $n = 6$ છે.

ઉદાહરણ 34 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $T_n = 2^{n+1}$ હોય તો S_4 મેળવો.

અહીં, $T_n = 2^{n+1}$ છે.

$\therefore \quad T_1 = 2^{1+1} = 4,\ T_2 = 2^{2+1} = 8,\ T_3 = 2^{3+1} = 16, \ldots$

અહીં પ્રથમ પદ $a = 4$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{8}{4} = 2$ થશે. પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો મેળવવાનો છે તેથી $n = 4$.

a, r અને nની કિંમતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$ માં મૂકતાં,

$$S_4 = \frac{4(2^4 - 1)}{(2 - 1)}$$

$$= \frac{4(16 - 1)}{1}$$

$$= 4 \times 15$$

$$= 60$$

આમ, $S_4 = 60$.

ઉદાહરણ 35 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1)$ હોય તો T_{n+1} મેળવો.

આપણે જાણીએ છીએ કે $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$$= \frac{2}{3}[4^{n+1} - 1] - \frac{2}{3}[4^n - 1]$$

$$= \frac{2}{3}[(4^{n+1} - 1) - (4^n - 1)]$$

$$= \frac{2}{3}[4^{n+1} - 1 - 4^n + 1]$$

$$= \frac{2}{3}[4^{n+1} - 4^n]$$

$$= \frac{2}{3} \times 4^n [4 - 1]$$

$\therefore \quad T_{n+1} = 2(4^n)$

ઉદાહરણ 36 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણી $S_n = \frac{4}{3}(3^n - 1)$ હોય તો T_3 શોધો.

આપણે જાણીએ છીએ કે $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$\therefore \quad T_3 = S_3 - S_2$

$$= \frac{4}{3}(3^3 - 1) - \frac{4}{3}(3^2 - 1)$$

$$= \frac{4}{3}[(27 - 1) - (9 - 1)]$$

$$= \frac{4}{3}[26 - 8]$$

$$= \frac{4}{3}(18)$$

$\therefore \quad T_3 = 24$

9.4 ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો (Three consecutive terms of geometric progression)

ઘણી વખત ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ક્રમિક પદોના સરવાળા અને ગુણાકાર આપ્યા હોય અને પદો શોધવાના હોય છે. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં પદ $a, ar, ar^2, ar^3, ...$ લઈએ તોપણ પદોની કિંમતો શોધી શકાય પરંતુ આ રીતે પદોની પસંદગી કરવાથી ગણતરી કેટલીક વાર સરળ બનતી નથી. શ્રેણીનાં પદોના સ્વરૂપની ધારણા એવી રીતે કરવી જોઈએ કે જેથી ગણતરી સરળ બને. nની કેટલીક કિંમતો માટે આ ધારણા નીચે દર્શાવી છે :

$n = 3$ માટે, ત્રણ ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r}, a, ar$

$n = 4$ માટે, ચાર ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$

$n = 5$ માટે, પાંચ ક્રમિક પદો : $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

નોંધ : આપણે ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં અજ્ઞાત પદો શોધવાનો અભ્યાસ માત્ર ત્રણ પદો પૂરતો જ સીમિત રાખીશું.

ઉદાહરણ 37 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 26 અને ગુણાકાર 216 છે તો તે શ્રેણીનાં ત્રણ પદો શોધો.

અહીં આપણે ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ત્રણ પદો ધારણા અનુસાર $\frac{a}{r}, a, ar$ લઈએ.

હવે ત્રણ પદોનો ગુણાકાર = 216

$\therefore \quad \frac{a}{r} \times a \times ar = 216$

$\therefore \quad a^3 = 216$

$\therefore \quad a = 6$

ત્રણ પદોનો સરવાળો = 26

$\therefore \quad \frac{a}{r} + a + ar = 26$

$\therefore \quad a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 26$

$\therefore \quad 6\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = 26 \qquad (\because a = 6)$

$\therefore \quad 3(1 + r + r^2) = 13r$

$\therefore \quad 3 + 3r + 3r^2 = 13r$

$\therefore \quad 3r^3 - 10r + 3 = 0$

$\therefore \quad (r - 3)(3r - 1) = 0$

$\therefore \quad r = 3$ અથવા $r = \frac{1}{3}$

હવે જો આપણે $a = 6$ અને $r = 3$ લઈએ તો ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{6}{3} = 2,\ 6,\ 6 \times 3 = 18$ બનશે. આમ, ત્રણ ક્રમિક પદો 2, 6, 18 થશે.

જો આપણે $a = 6$ અને $r = \frac{1}{3}$ લઈએ તો ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{6}{1/3} = 18,\ 6,\ 6 \times \frac{1}{3} = 2$ બનશે.

આમ, ત્રણ ક્રમિક પદો 18, 6, 2 થશે.

ઉદાહરણ 38 : એક ગુણોત્તર-શ્રેણીના ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 9.5 અને ગુણાકાર 27 છે તો શ્રેણીનાં ત્રણ પદો શોધો.

અહીં આપણે ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં ત્રણ પદો ધારણા અનુસાર $\frac{a}{r}$, a, ar લઈએ.

હવે ત્રણ પદોનો ગુણાકાર = 27

$\therefore \quad \frac{a}{r} \times a \times ar = 27$

$\therefore \quad a^3 = 27$

$\therefore \quad a = 3$

ત્રણ પદોનો સરવાળો = 9.5

$\therefore \quad \frac{a}{r} + a + ar = 9.5$

$\therefore \quad a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = 9.5$

$\therefore \quad 3\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = 9.5 \qquad (\because \ a = 3)$

$\therefore \quad 3 + 3r + 3r^2 = 9.5r$

$\therefore \quad 3r^2 - 6.5\,r + 3 = 0$

બંને બાજુ 2 વડે ગુણતા,

$\therefore \quad 6r^2 - 13r + 6 = 0$

$\therefore \quad (2r - 3)(3r - 2) = 0$

$\therefore \quad r = \frac{3}{2}$ અથવા $r = \frac{2}{3}$

હવે, જો આપણે $a = 3$ અને $r = \frac{3}{2}$ લઈએ તો ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 2,\ 3,\ 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ બનશે.

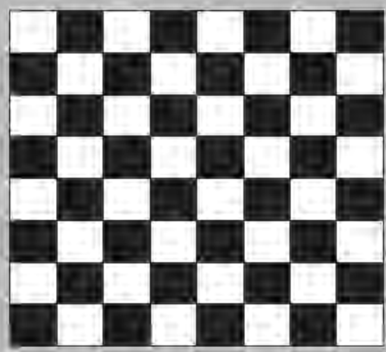
આમ, ત્રણ ક્રમિક પદો 2, 3, $\frac{9}{2}$ થશે.

જો આપણે $a = 3$ અને $r = \frac{2}{3}$ લઈએ તો ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}$, 3, $3 \times \frac{2}{3} = 2$ બનશે.

આમ, ત્રણ ક્રમિક પદો $\frac{9}{2}$, 3, 2 થશે.

પ્રવૃત્તિ

(1) ચેસ બોર્ડના એક ખાનામાં અનાજનો એક દાણો મૂકો, બીજા ખાનામાં બે દાણા, ત્રીજા ખાનામાં ચાર દાણા, ચોથા ખાનામાં આઠ દાણા અને આ જ રીતે આગળ. ચેસ બોર્ડના છેલ્લા ખાનામાં અનાજના કેટલા દાણા મૂકવામાં આવશે ?



(2)

$$1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 = 1.1111$$

ગુણોત્તર-શ્રેણીનો ઉપયોગ ચકાસો.

Hint : અહીં 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 શ્રેણી છે.

સારાંશ અને સૂત્ર

- $n \geq 1$ માટે શ્રેણીના $(n+1)$મા પદ અને nમા પદનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચલ હોય તેવી શ્રેણીને ગુણોત્તર-શ્રેણી કહેવાય.
- જો $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ ગુણોત્તર-શ્રેણી હોય તો
  $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ ગુણોત્તર શ્રેઢી છે.
- nમું પદ $T_n = ar^{n-1}$ ને ગુણોત્તર-શ્રેણીનું સામાન્ય પદ કહે છે. (જ્યાં $n \geq 1$)
- $\frac{T_{n+1}}{T_n} = r =$ સામાન્ય ગુણોત્તર, અહીં n ધન પૂર્ણાંક છે.
- $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
- જ્યારે $r = 1$ હોય ત્યારે $S_n = na$
- જ્યારે $r \neq 1$ હોય ત્યારે $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$
- જ્યારે $r \neq 1$ હોય ત્યારે $S_n = \frac{rT_n - a}{r-1}$
- ગુણોત્તર-શ્રેણીના ત્રણ ક્રમિક પદોની ધારણા : $\frac{a}{r}, a, ar$

સ્વાધ્યાય 9

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.2, 1, 5, ...નું છઠ્ઠું પદ જણાવો.

(a) 25 (b) 0.5 (c) 0.1 (d) 625

2. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 'a' અને સામાન્ય ગુણોત્તર 'b' છે, તો $(n + 1)$મું પદ જણાવો.

(a) ab^n (b) ar^n (c) ab^{n-1} (d) ar^{n-1} છે.

3. ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, ...નું પાંચમું પદ શોધો.

(a) 9 (b) $9\sqrt{3}$ (c) 27 (d) $\frac{(\sqrt{3})^5 - 1}{(\sqrt{3} - 1)}$ છે.

4. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_1 = a$ અને $T_5 = \frac{1}{a}$ જ્યાં $a > 0$ હોય તો ત્રીજું પદ મેળવો.

(a) a^2 (b) 1 (c) $\frac{1}{a^2}$ (d) a છે.

5. ગુણોત્તર-શ્રેણી $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1,... નું સાતમું પદ શોધો.

(a) 6561 (b) 243 (c) 81 (d) $\frac{1}{81}$

6. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીનું nમું પદ $3(2^{n-1})$ હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

(a) 3 (b) 2 (c) 6 (d) 1

7. ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.4, 0.04, 0.004, ...નો સામાન્ય ગુણોત્તર જણાવો.

(a) 10 (b) 0.4 (c) 4 (d) 0.1

8. જો x, 10, –25 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય, તો x ની કિંમત મેળવો.

(a) 4 (b) –25 (c) –4 (d) 2

9. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર –1 અને પ્રથમપદ –1 હોય, તો પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો શોધો.

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 6

10. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર 1 હોય અને $S_{10} = 40$ હોય, તો પ્રથમ પદ જણાવો.

(a) 0 (b) 10 (c) 4 (d) 400

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેણી ar, ar^2, ar^3, ... નું nમું પદ શું થશે ?

2. ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.1, 0.01, 0.001, ... નો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

3. ગુણોત્તર-શ્રેણી 7, 7, 7, ... માટે પ્રથમ 20 પદોનો સરવાળો શોધો.

4. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનું n મું પદ $T_n = 2^{n+1}$ હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

5. જો સંખ્યાઓ 4, 1, y ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય તો y ની કિંમત શોધો.

6. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં કોઈ પણ બે ક્રમિક પદોનો સરવાળો શૂન્ય હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શું હશે ?

7. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $S_7 = 15$ અને $S_6 = 11$ હોય તો સાતમું પદ શોધો.

8. વિધાન "જો a, b, c, d ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય તો $ad = bc$ થશે" સાચું છે કે ખોટું ?

9. ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે વિધાન "$T_1 = S_1$" સાચું છે કે ખોટું તે જણાવો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેણીની વ્યાખ્યા આપો.

2. ગુણોત્તર શ્રેઢીની વ્યાખ્યા આપો.

3. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર 1 હોય અને $S_8 = 24$ હોય તો પ્રથમ પદ શોધો.

4. ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_1 = 2$ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 1000 હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

5. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $a = 2$ અને $r = 3$ હોય તો પ્રથમ 4 પદોનો સરવાળો શોધો.

6. ગુણોત્તર-શ્રેણી 4, 12, 36, ... નું કેટલામું પદ 324 છે ?

7. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $a = \frac{4}{9}$ અને $r = \frac{-3}{2}$ હોય તો $T_3 =$ ....

8. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય તો સાતમા અને ત્રીજા પદનો ગુણોત્તર મેળવો.

9. નીચેની શ્રેણીના માગ્યા પ્રમાણેના પદો શ્રેણી સૂત્રથી મેળવો :

(1) 2, 10, 50, ... (છઠ્ઠું પદ) (2) 100, 50, 25, ... (સાતમું પદ)

(3) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}$ ... (આઠમું પદ) (4) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$ (પાંચમું પદ)

વિભાગ D

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_5 = 405$ અને $T_7 = 3645$ હોય તો T_4 શોધો.

2. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ $\frac{27}{16}$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $\frac{2}{3}$ હોય તો T_5 અને S_4 શોધો.

3. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $a = 4$ અને $T_5 = \frac{1}{4}$ હોય તો T_7 શોધો.

4. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_2 = 9$ અને $T_5 = 243$ હોય તો S_4 શોધો.

5. ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ 10 છે અને $T_4 = 0.08$ હોય તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો શોધો.

6. ગુણોત્તર-શ્રેણી માટે $T_1^2 = T_2$ અને $T_3 = 64$ હોય તો ગુણોત્તર-શ્રેણી લખો.

7. જો 5, m, 20, t ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય તો m અને t શોધો.

8. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $a = 10$, $r = 0.1$ અને $T_n = 0.01$ હોય તો n શોધો.

9. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $a = 1$, $r = 3$ અને $S_n = 121$ હોય તો n શોધો.

10. જો $S_n = \frac{2}{3}(2^n - 1)$ હોય તો T_4 શોધો.

11. જો $S_n = 4(3^n - 1)$ હોય તો T_{n+1} શોધો.

12. જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં બીજું પદ 5 હોય તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર શોધો.

13. ગુણોત્તર-શ્રેણી 2, 4, 8, 16, ...નાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 126 થશે ?

14. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_n = 324$, $S_n = 484$ અને $r = 3$ હોય તો a અને n શોધો.

15. નીચે આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેણીના માગ્યા પ્રમાણે સરવાળા શ્રેઢી સૂત્રથી શોધો :

(1) 4, 16, 64, ... (પ્રથમ 4 પદ) (3) 100, 20, 4, ... (પ્રથમ 5 પદ)

(2) 2, 3, $\frac{9}{2}$, ... (પ્રથમ 5 પદ) (4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ... (પ્રથમ 10 પદ)

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. ત્રણ ધન સંખ્યાઓ $k + 4$, $4k - 2$ અને $7k + 1$ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે, તો k શોધો.

2. ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, 3, 3^2, 3^3 ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 365થી વધે નહિ તેની nની મહત્તમ કિંમત શોધો.

3. ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, 2, 2^2, 2^3, ... ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 2000 કે તેથી વધુ હોય તેવી n ની લઘુતમ કિંમત શોધો.

4. ગુણોત્તર-શ્રેણી $y, \frac{y}{3}, \frac{y}{9}, \ldots$ (જ્યાં $y > 0$)નાં પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 121 હોય તો x શોધો.

5. ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $S_4 = 10\ S_2$ હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

6. ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પાંચમા અને ત્રીજા પદોનો સરવાળો અને તફાવત 5:3 ના પ્રમાણમાં હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

7. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 31 અને ગુણાકાર 125 છે. તે શ્રેણીનાં ત્રણ પદો શોધો.

8. એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 6 અને ગુણાકાર -64 છે. તે શ્રેણીનાં ત્રણ પદો શોધો.

9. એક બાંધકામ વ્યવસાયની કંપની ગ્રાહકોને આકર્ષવા ફ્લેટ્સની એક યોજના પ્રસ્તુત કરે છે. આ યોજનામાં ગ્રાહકે પ્રથમ હપતામાં 10,000 રૂપિયા ચૂકવવાના અને ત્યાર પછીના દરેક વાર્ષિક હપતાની રકમ તેના અગાઉના હપતાની રકમથી બમણી રકમ આપવાની થાય છે. દસ હપતા સુધીમાં ગ્રાહકે કુલ કેટલા રૂપિયા ચૂકવવા પડશે ?

10. એક બેન્કર પહેલી મિનિટમાં 128 નોટની ગણતરી કરે છે અને ત્યાર બાદ તે દર મિનિટે અગાઉની મિનિટ કરતાં અડધી નોટો ગણતો જાય છે. તો તેણે પાંચ મિનિટમાં કેટલી નોટો ગણી હશે ?

11. એક ગામની વસ્તી 5000 છે. જો વસ્તી દર વર્ષે 2 ટકાના દરે વધતી હોય તો દસ વર્ષ બાદ તે ગામની વસ્તી કેટલી હશે ?

12. એક ગાડીની કિંમતમાં દર વર્ષે 10 ટકાના દરે ઘસારો થાય છે. જો ગાડીની ખરીદકિંમત 5,00,000 રૂપિયા હોય, તો 6 વર્ષ પછી ગાડીની કેટલી કિંમત હશે ?

Aryabhatta
(476 – 550)

Aryabhatta was a famous Indian mathematician and astronomer. His notable contributions to the world of science and mathematics includes the theory that the earth rotates on its axis, explanations of the solar and lunar eclipses, solving of quadratic equations, place value system with zero, and approximation of pie (π). Aryabhatta had defined sine, cosine, and inverse sine back in his era, influencing the birth of trigonometry. His calendar calculation has been in continuous use in India, on which the present day Panchangam is based. His studies are also base for the national calendars of Iran and Afghanistan today.

The ISRO (Indian Space Research Organization) named its first satellite after the genius mathematician and astronomer.

●