



समरूपता (Similarity)

11.01 प्रस्तावना

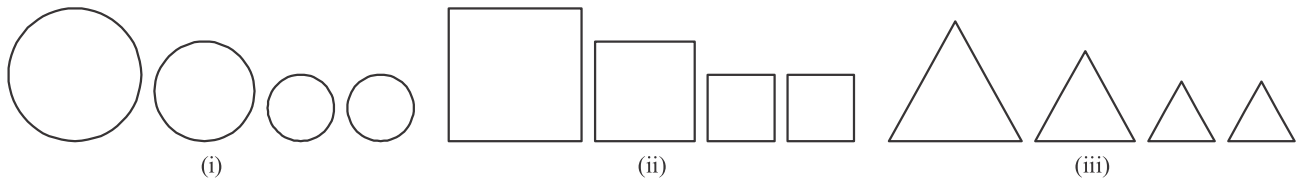
क्या आपके मन में कभी यह प्रश्न उठा है कि दूरस्थ वस्तुओं जैसे चन्द्रमा की दूरी अथवा पर्वतों जैसे गौरीशंकर शिखर (माउन्ट एवरेस्ट), गुरु शिखर (माउन्ट आबू की सबसे ऊंची चोटी) की ऊँचाई किस प्रकार ज्ञात की होगी? क्या इन्हें एक मापन वाले फीते से सीधा (प्रत्यक्ष) मापा गया है? वास्तव में इन सभी दूरियों और ऊँचाईयों को अप्रत्यक्ष मापन की अवधारणा का प्रयोग करते हुए ज्ञात किया है। यह अप्रत्यक्ष अवधारणा आकृतियों की समरूपता सिद्धान्त पर आधारित है। इस अध्याय में हम समरूपता विशेषतः समरूप त्रिभुज पर विस्तृत अध्ययन करेंगे।



11.02 समरूप आकृतियाँ

याद कीजिए कक्षा 9 में आप समान आकार एवं समान माप की आकृतियों, (सर्वांगसम आकृतियों) पर चर्चा कर चुके हैं। जिसके अन्तर्गत आपने देखा होगा कि समान (एक ही) त्रिज्या वाले सभी वृत्त सर्वांगसम होते हैं, समान लम्बाई की भुजा वाले सभी वर्ग सर्वांगसम होते हैं। इसी प्रकार समान लम्बाई की भुजा वाले सभी समबाहु त्रिभुज भी सर्वांगसम होते हैं।

आइए अब निम्न आकृतियों पर विचार करते हैं।

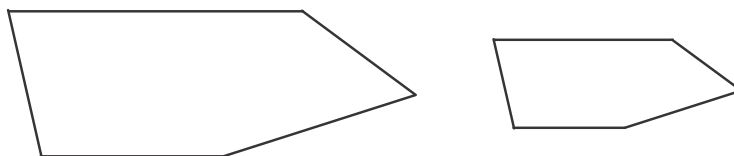


आकृति 11.01

आकृति 11.1 (i) में से कोई दो या अधिक वृत्त ले कर देखिए क्या ये सर्वांगसम हैं? चूंकि इनमें से सभी की त्रिज्या समान नहीं है इसलिए ये परस्पर सर्वांगसम नहीं हैं। ध्यान दीजिए इनमें कुछ सर्वांगसम हैं और कुछ सर्वांगसम नहीं हैं। परन्तु सभी के आकार (बनावट) समान है। अतः ये सभी वे आकृतियाँ हैं जिन्हें समरूप कहते हैं। दो समरूप आकृतियों के आकार समान होते हैं परन्तु इनके माप समान होना आवश्यक नहीं है। अतः सभी वृत्त समरूप होते हैं। इसी प्रकार आकृति 11.1 (ii), (iii) में स्थित सभी वर्गों एवं सभी समबाहु त्रिभुजों के बारे में भी सभी वृत्तों की तरह यही कहेंगे कि सभी वर्ग समरूप हैं तथा सभी समबाहु त्रिभुज भी समरूप हैं।

उपर्युक्त चिंतन के पश्चात् हम ये कह सकते हैं कि सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं। परन्तु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

अब पुनः उपर्युक्त आकृति 11.01 (i), (ii), (iii) को देखकर यह बतायें कि क्या एक वृत्त और एक वर्ग परस्पर समरूप हैं अथवा एक वर्ग व एक समबाहु त्रिभुज परस्पर समरूप हैं? निश्चित ही आपका उत्तर नहीं में होगा क्योंकि इनके आकार समान नहीं हैं। आकृति 11.02 में दर्शाये गये दो पंचभुजों के बारे में आप क्या कहेंगे? क्या ये परस्पर समरूप हैं? यद्यपि ये दो आकृतियाँ समरूप जैसी प्रतीत हो रही हैं परन्तु हमें इनके समरूप होने या नहीं होने पर आशंका है।



आकृति 11.02

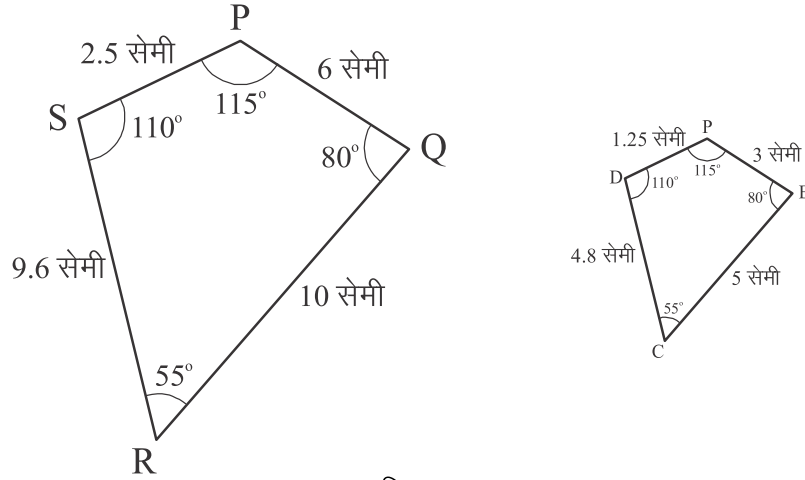
अब हम निम्न आकृतियों में अंकित आकृतियों के बारे में विचार करते हैं। चित्र क्रमांक 11.03 देखिये।



चित्र 11.03

तीन चित्रों में हमारे देश के महान गणितज्ञ श्री निवास रामानुजन (22 दिसम्बर 1887–18 अप्रैल 1920) की भिन्न मापों में आकृतियाँ बनी हुई है। क्यों ये आकृतियाँ परस्पर समरूप हैं? निःसन्देह ये समरूप आकृतियाँ हैं। क्या आप बता सकते हैं इन आकृतियों का अवलोकन करने के बाद आप को इन्हे समरूप में आशंका क्यों नहीं हुई? इसलिए आइये आकृतियों की समरूपता के लिए कोई परिभाषा ज्ञात करें जिससे यह सुनिश्चित कर सकें कि दो दी हुई आकृतियाँ समरूप हैं या नहीं।

आपने कभी अपने दस्तावेजों जैसे अंक तालिका, जन्म प्रमाण पत्र आदि की छाया प्रतियाँ (फोटो कॉपी) अवश्य बनवाई होंगी। इसी प्रकार फोटो ग्राफर से अपनी स्टेम्प साइज, पासपोर्ट साइज एवं पोस्टकार्ड साइज फोटो भी अवश्य बनवाई होगी। एक ही समय खींची गई आपकी सभी साइज की फोटो परस्पर समरूप होती हैं। एक सफेद कागज पर एक आकृति बनाकर फोटो कापी की मशीन द्वारा आवर्धित (बड़ी) करवाई अब आपके पास दो आकृतियाँ हैं। इन आकृतियों की संगत भुजाओं एवं संगत कोणों को क्रमशः स्केल एवं प्रोटेक्टर से माप कर आकृतियों को नामांकित कीजिए। देखिए आकृति 11.04



आकृति 11.04

अब आप दोनों आकृतियों की संगत भुजाओं एवं संगत कोणों की तुलना कीजिए। आप पाएंगे बड़े आकृति की संगत भुजाएँ छोटे आकृति की संगत भुजाओं से 2 : 1 में आवर्धित (बड़ी) हो गई है। इसी प्रकार छोटे आकृति की प्रत्येक संगत भुजा बड़े आकृति की संगत भुजा से 1 : 2 में छोटी हो गई। इसी तरह प्रत्येक संगत कोण परस्पर बराबर है यही दो आकृतियों विशेष कर दो बहुभुजों में समरूपता के लिए निष्कर्ष मान सकते हैं। अर्थात् हम कह सकते हैं कि भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप तभी होंगे हैं जब (i) इनके सभी संगत कोण बराबर हो तथा (ii) इनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में हो।

आकृति 11.04 में दर्शाए दोनों चतुर्भुज क्रमशः ABCD एवं PQRS हो तो हम देख सकते हैं कि शीर्ष A, शीर्ष P के संगत है, शीर्ष B, शीर्ष Q के संगत है, शीर्ष C, शीर्ष R के संगत है तथा शीर्ष D, शीर्ष S के संगत हैं। सांकेतिक रूप से इन संगतताओं को $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q, C \leftrightarrow R$ और $D \leftrightarrow S$ से निरूपित किया जाता है। इस प्रकार

(i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ और $\angle D = \angle S$ है।

(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

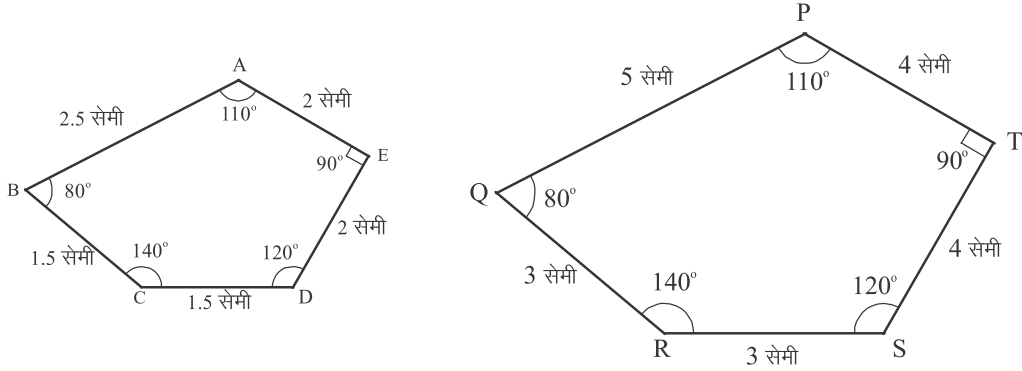
अर्थात् चतुर्भुज ABCD और चतुर्भुज PQRS परस्पर समरूप है।

उपर्युक्त निष्कर्ष के आधार पर आकृति 11.5 में बने दो पंचभुजों के लिए—

(i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R, \angle D = \angle S$ एवं $\angle E = \angle T$
[144]

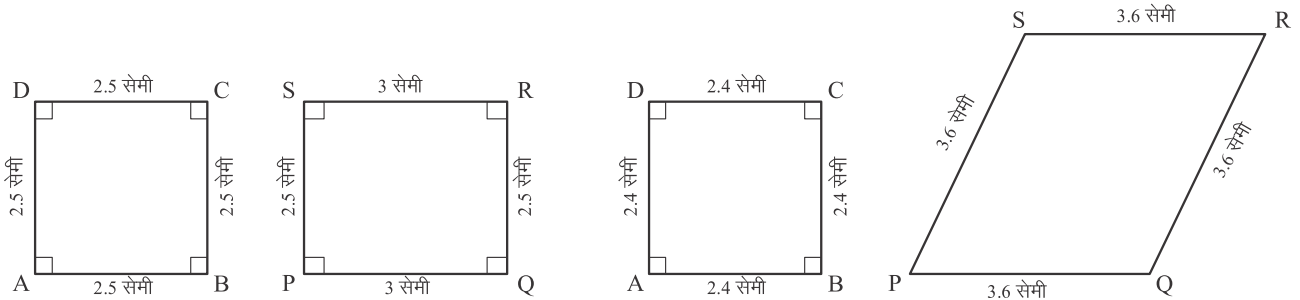
(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DE}{ST} = \frac{EA}{TP} = \frac{1}{2}$

अतः पंचभुज ABCDE और पंचभुज PQRST समरूप हैं।



आकृति 11.05

आकृति 11.06 (i) के अन्तर्गत एक वर्ग एवं एक आयत में संगत कोण तो बराबर है, परन्तु इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती नहीं है। अतः दोनों समरूप नहीं हैं।



आकृति 11.06

इसी प्रकार आकृति 11.06 (ii) में एक वर्ग और एक समचतुर्भुज है, में संगत भुजाएँ समानुपाती है परन्तु संगत कोण समान नहीं हैं अतः दोनों चतुर्भुज समरूप नहीं हैं।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दो बहुभुजों की समरूपता के लिए (i) संगत कोणों का बराबर होना (ii) संगत भुजाओं का समानुपाती होना में से किसी एक प्रतिबन्ध का सन्तुष्ट होना ही पर्याप्त नहीं हैं वरन् दोनों का संतुष्ट होना आवश्यक है।

प्रश्नमाला 11.1

- रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:
 - सभी वृत्त होते हैं।
 - सभी वर्ग होते हैं।
 - सभी त्रिभुज समरूप होते हैं।
 - भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि
 -
 -
- निम्न कथन में सत्य व असत्य बताइए।
 - दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं।
 - दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं।
 - दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएं समानुपाती हो।
 - दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण बराबर हो।
 - दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हो।
- समरूप आकृतियों के कोई दो उदाहरण आकृति बनाकर दीजिए।

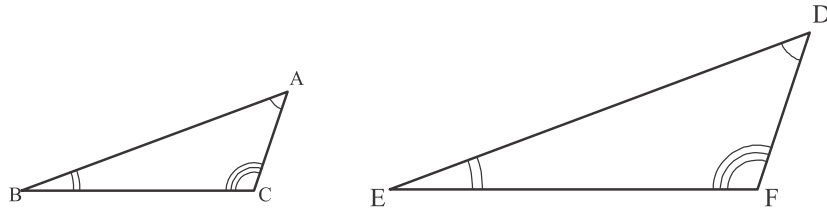
11.03 त्रिभुजों की समरूपता एवं समान कोणिक त्रिभुज

इस अध्याय में अब तक हमने दो बहुभुजों के समरूप होने के लिए दो प्रतिबन्धों की अनिवार्यता को समझा। चूँकि त्रिभुज भी बहुभुज की श्रेणी में ही आता है अतः दो त्रिभुज परस्पर समरूप होंगे यदि

- (i) दोनों के सभी संगत कोण बराबर हो
 - (ii) दोनों की संगत भुजाओं का अनुपात बराबर हो
- आकृति 11.7 में स्थित $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ समरूप होंगे यदि

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$



आकृति 11.07

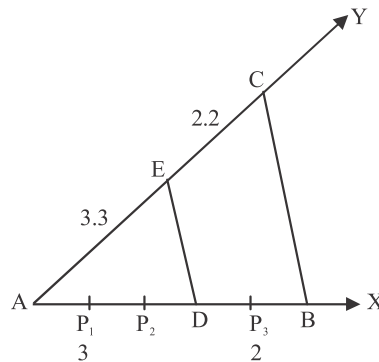
समानकोणिक त्रिभुज

यदि दो त्रिभुजों में उनके संगत कोण बराबर हो तो वे दोनों त्रिभुज समानकोणिक त्रिभुज कहलाते हैं।

आधारभूत समानुपातिकता सम्बन्धित परिणाम –

अब हम निम्न प्रयोग के माध्यम से त्रिभुज की भुजाओं में नीहित अनुपातिक सम्बन्धों को समझने का प्रयत्न करते हैं।

- (a) कोई एक कोण $\angle XAY$ खींचिए। AX पर बराबर लम्बाई लेकर P_1, P_2, D, P_3 तथा B बिन्दु लगा दीजिए। इस प्रकार हमें $AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ इकाई प्राप्त होंगे (यदि यहां प्रत्येक बिन्दु 1 – 1 सेमी दूरी पर लगाएँ तो आगे मापन में सुविधा रहेगी)
- (b) AY पर कोई बिन्दु C लेकर B को C से मिला दीजिए। अब D से रेखा DE, BC के समान्तर खींचिए जो AY को E पर काटती हैं। इस तरह एक $\triangle ABC$ बन गया है।



आकृति 11.08

आकृति 11.08 के अनुसार

$$AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3 \text{ इकाई (3 सेमी यहाँ सभी अन्तराल 1-1 सेमी है)}$$

$$DB = DP_3 + P_3B = 2 \text{ इकाई (2 सेमी)}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$$

... (1)

अब AE एवं AC को मापिए (यहाँ मापने पर AE = 3.3 सेमी व EC = 2.2 सेमी हैं)

$$\text{अतः } \frac{AE}{EC} = \frac{3.3}{2.2} = \frac{3}{2} \quad \dots (2)$$

(1) व (2) की तुलना की जाए तो हम देखते हैं।

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

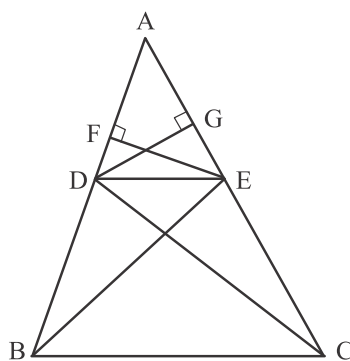
अर्थात् यदि $\triangle ABC$ में इसकी भुजाएँ AB व AC पर क्रमशः D व E ऐसे दो बिन्दु ले कि $DE \parallel BC$ हो तो $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

प्राप्त होता है तथा इसे सर्वप्रथम यूनान के प्रसिद्ध गणितज्ञ थेल्स ने प्राप्त किया इसलिए इसे थेल्स प्रमेय भी कहते हैं। यह परिणाम आधार भूत अनुपातिकता प्रमेय के नाम से जाना जाता है।

प्रमेय 11.1 (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय/थेल्स प्रमेय)

किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई एक रेखा त्रिभुज की शेष दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करे तो यह दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

दिया हुआ है: $\triangle ABC$ एक त्रिभुज है जिसमें $DE \parallel BC$ है। DE, AB व AC को क्रमशः D व E पर काटती है।



आकृति 11.09

सिद्ध करना: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना: BE व CD को मिलाया $EF \perp BA$ और $DG \perp CA$ खींचा

उपपत्ति: चूंकि $EF \perp BA$ अतः EF, $\triangle ADE$ तथा $\triangle ABE$ की ऊँचाई है।

$$\therefore \triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} AD \times EF$$

$$\text{और } \triangle DBE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई} = \frac{1}{2} DB \times EF$$

$$\therefore \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DBE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EF}{\frac{1}{2} DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \quad \dots (1)$$

इसी प्रकार
$$\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DG}{\frac{1}{2} EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \quad \dots (2)$$

किन्तु ΔDBE एवं ΔDEC दोनों समान आधार DE एवं $DE \parallel BC$ के मध्य बने हैं
 अतः ΔDBE का क्षेत्रफल $= \Delta DEC$ का क्षेत्रफल $\dots (3)$
 (1), (2) और (3) से

$$\frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEC \text{ का क्षेत्रफल}}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{इति सिद्धम्}$$

इस आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की सहायता से निम्न परिणाम भी ज्ञात किए जा सकते हैं। आगे उपयोग के लिए इनका भी स्मरण में रहना आवश्यक है।

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

प्रमेय 11.2 (प्रमेय 11.1 का विलोम)

यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करे, तो यह तीसरी भुजा के समान्तर होती है।

दिया हुआ है: एक रेखा ℓ त्रिभुज ABC की भुजा AB व AC को क्रमशः D व E पर इस प्रकार काटती है कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

हो

सिद्ध करना है: $\ell \parallel BC$ अर्थात् $DE \parallel BC$

उपपत्ति: मान लें कि DE, BC के समान्तर नहीं है, तब दूसरी रेखा BC के समान्तर है माना कि $DF \parallel BC$ है।

$\therefore DF \parallel BC$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad (\text{आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा}) \quad \dots (1)$$

किन्तु $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (दिया हुआ) $\dots (2)$

अतः $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC}$ ((1) व (2) से)

दोनों ओर 1 जोड़ने पर

$$\frac{AF}{FC} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$$

या $\frac{AF + FC}{FC} = \frac{AE + EC}{EC}$

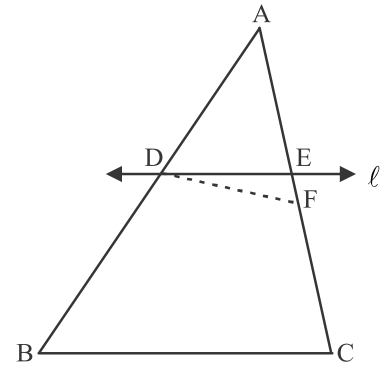
या $\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC}$

या $\frac{1}{FC} = \frac{1}{EC}$

या $FC = EC$ यह परिणाम तभी आ सकता है जब F और E एक दूसरे को सम्पाती करे और DF, DE पर स्थित हो।

अर्थात् $DE \parallel BC$

इति सिद्धम्



आकृति 11.10

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ है तथा $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ है। यदि $AC = 5.6$ इकाई हो तो AE का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ दिया हुआ है।

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा})$$

$$\text{या } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{(AC - AE)}$$

$$\text{या } \frac{3}{5} = \frac{AE}{5.6 - AE}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{3}{5} \text{ एवं } AC = 5.6 \text{ इकाई}$$

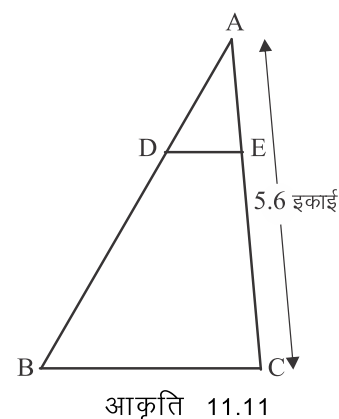
$$\text{या } 3(5.6 - AE) = 5AE$$

$$\text{या } 16.8 - 3AE = 5AE$$

$$\text{या } 5AE + 3AE = 16.8$$

$$\text{या } 8AE = 16.8$$

$$\text{या } AE = \frac{16.8}{8} = 2.1 \text{ इकाई}$$



उदाहरण-2. दिए गए आकृति में $DE \parallel BC$ है यदि $AD = x$, $DB = x - 2$, $AE = x + 2$ और $EC = x - 1$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ अतः

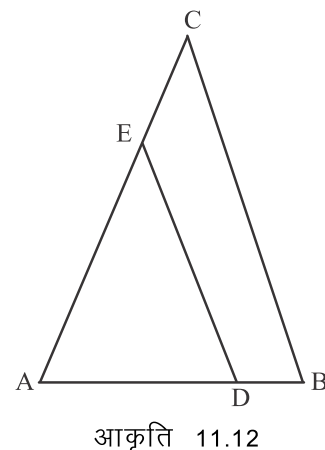
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा})$$

$$\text{या } \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\text{या } x(x-1) = (x+2)(x-2)$$

$$\text{या } x^2 - x = x^2 - 4$$

$$\text{या } x = 4$$



उदाहरण-3. समलम्ब चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel DC$ है। AD व BC पर क्रमशः E और F इस प्रकार स्थित है कि $EF \parallel AB$ है।

$$\text{सिद्ध कीजिए } \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

हल: A व C को मिलाइए इस प्रकार AC, EF के बिन्दु G से गुजरता है।

$$\therefore AB \parallel DC \text{ और } EF \parallel AB \text{ (दिया हुआ है)}$$

$$\therefore EF \parallel DC \text{ (एक ही रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं)}$$

$$\triangle ADC \text{ में } EG \parallel DC \text{ (यहाँ } EF \parallel DC \text{ और EG, EF का ही भाग है)}$$

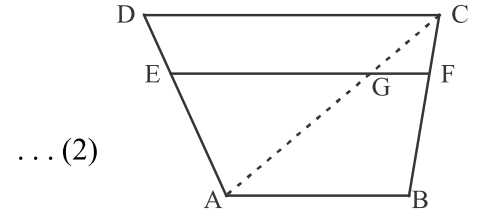
$$\text{अतः } \frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC} \quad (\text{आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा})$$

$$\text{या } \frac{AG}{GC} = \frac{AE}{ED} \quad \dots (1)$$

इसी प्रकार ΔCAB में $\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

या $\frac{AG}{CG} = \frac{BF}{CF}$

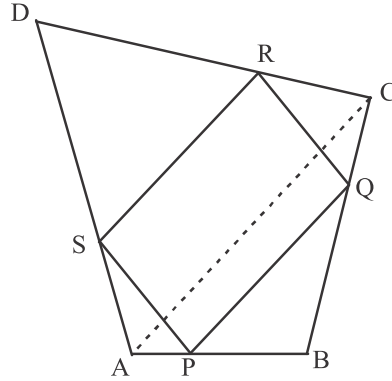
अतः (1) और (2) से $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ इति सिद्धम्



आकृति 11.13

उदाहरण-4. ABCD एक चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD और DA पर क्रमशः P, Q, R एवं S बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि ये चतुर्भुज के शीर्ष A व C के सापेक्ष इन्हें सम त्रिभाजित करते हैं, तो सिद्ध कीजिए PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल: PQRS के समान्तर चतुर्भुज सिद्ध करने के लिए हमें $PQ \parallel SR$ एवं $QR \parallel PS$ सिद्ध करना होगा।



आकृति 11.14

दिया हुआ है: P, Q, R और S बिन्दु क्रमशः AB, BC, CD और DA पर इस प्रकार स्थित हैं कि

$$BP = 2 PA, BQ = 2 QC, DR = 2 RC \text{ और } DS = 2 SA$$

रचना: A को C से मिलाया –

$$\Delta ADC \text{ में } \frac{DS}{SA} = \frac{2SA}{SA} = 2$$

$$\text{एवं } \frac{DR}{RC} = \frac{2RC}{RC} = 2 \text{ (दिया हुआ है से)}$$

$$\Rightarrow \frac{DS}{SA} = \frac{DR}{RC} \Rightarrow SR \parallel AC \quad (\text{आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा}) \quad \dots (1)$$

$$\Delta ABC \text{ में } \frac{BP}{PA} = \frac{2PA}{PA} = 2$$

$$\text{और } \frac{BQ}{QC} = \frac{2QC}{QC} = 2 \text{ (दिया हुआ है से)}$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow PQ \parallel AC \quad (\text{आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय की विलोम प्रमेय द्वारा}) \quad \dots (2)$$

(1) व (2) से $SR \parallel AC$ तथा $PQ \parallel AC \Rightarrow SR \parallel PQ$

इसी प्रकार BD को मिलाकर हम उपर्युक्तानुसार $QR \parallel PS$ सिद्ध कर सकते हैं।

अर्थात् PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

उदाहरण-5. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है तो सिद्ध

कीजिए कि ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

हल: दिया हुआ है: चतुर्भुज ABCD में आकृति 11.15 के अनुसार

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

सिद्ध करना है: ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, इसके लिए हमें $AB \parallel CD$ सिद्ध करना होगा।

रचना: O से OE $\parallel$ AB रेखा खींची

उपपत्ति: $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (दिया हुआ है)

या $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$... (1)

$\triangle ABC$ में OE $\parallel$ AB

$\therefore \frac{CO}{OA} = \frac{CE}{EB}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा)

या $\frac{OA}{CO} = \frac{EB}{CE}$... (2)

(1) व (2) से $\frac{BO}{OD} = \frac{EB}{CE}$

या $\frac{BO}{OD} = \frac{BE}{EC}$

$\Rightarrow$ OE $\parallel$ CD ($\triangle BCD$ में आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से)... (3)

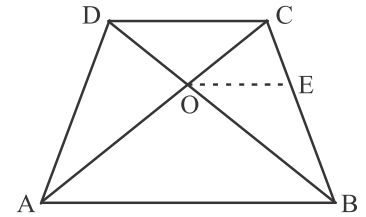
$\therefore$ OE $\parallel$ AB (रचना से) ... (4)

(3) व (4) से

AB $\parallel$ CD

अर्थात् ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

इति सिद्धम्



आकृति 11.15

प्रश्नमाला 11.2

1. $\triangle ABC$ की भुजाएं AB व AC पर क्रमशः D व E बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि DE $\parallel$ BC हो तो

(i) यदि AD = 6 सेमी, DB = 9 सेमी और AE = 8 सेमी हो तो AC का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{13}$ और AC = 20.4 सेमी हो तो EC का मान ज्ञात कीजिए।

(iii) $\frac{AD}{DB} = \frac{7}{4}$ और AE = 6.3 सेमी हो तो AC का मान ज्ञात कीजिए।

(iv) यदि AD = 4x - 3, AE = 8x - 7, BD = 3x - 1 और CE = 5x - 3 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

2. $\triangle ABC$ की भुजाएँ AB एवं AC पर क्रमशः D व E दो बिन्दु स्थित हैं, निम्न प्रश्नों में दिये गये मानों के माध्यम से DE $\parallel$ BC होने नहीं होने जाकारी दीजिए।

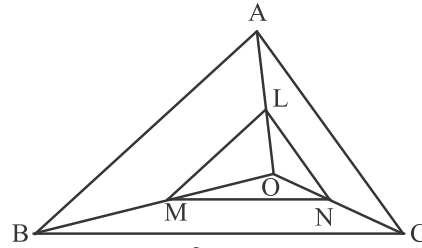
(i) AB = 12 सेमी, AD = 8 सेमी, AE = 12 सेमी और AC = 18 सेमी

(ii) AB = 5.6 सेमी, AD = 1.4 सेमी, AC = 9.0 सेमी तथा AE = 1.8 सेमी

(iii) AD = 10.5 सेमी, BD = 4.5 सेमी, AC = 4.8 सेमी तथा AE = 2.8 सेमी

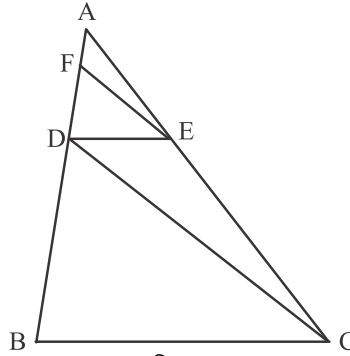
(iv) AD = 5.7 सेमी, BD = 9.5 सेमी, AE = 3.3 सेमी तथा EC = 5.5 सेमी

3. दिए गए आकृति 11.16 में OA, OB और OC पर क्रमशः L, M एवं N बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि LM $\parallel$ AB तथा MN $\parallel$ BC है तो दर्शाइए LN $\parallel$ AC है।



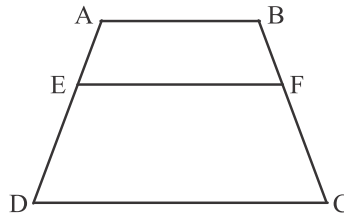
आकृति 11.16

4. $\triangle ABC$ में AB व AC भुजाओं पर क्रमशः D और E बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि BD = CE है यदि $\angle B = \angle C$ हो तो दर्शाइए DE $\parallel$ BC
5. आकृति 11.17 में DE $\parallel$ BC और CD $\parallel$ EF हो तो सिद्ध कीजिए $AD^2 = AB \times AF$



आकृति 11.17

6. आकृति 11.18 में यदि EF $\parallel$ DC $\parallel$ AB हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$



आकृति 11.18

7. ABCD पर समान्तर चतुर्भुज है, जिसकी भुजा BC पर कोई बिन्दु P स्थित है। यदि DP एवं AB को आगे बढ़ाएँ तो वे L पर मिलते हैं। तो सिद्ध कीजिए।

$$(i) \frac{DP}{PL} = \frac{DC}{BL}$$

$$(ii) \frac{DL}{DP} = \frac{AL}{DC}$$

8. $\triangle ABC$ की भुजा AB पर D और E दो ऐसे बिन्दु स्थित हैं कि AD = BE हो। यदि DP $\parallel$ BC तथा EQ $\parallel$ AC हो तो सिद्ध कीजिए PQ $\parallel$ AB

9. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी AB $\parallel$ DC है तथा इसके विकर्ण O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

10. यदि D और E क्रमशः AB और AC, त्रिभुज ABC की भुजाओं पर स्थित ऐसे बिन्दु हैं कि BD = CE हो तो सिद्ध कीजिए $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



11.04 त्रिभुज के आन्तरिक और बाह्य कोणों के समद्विभाजक

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेयों में आपने त्रिभुज की भुजाओं को एक रेखा द्वारा प्रतिच्छेद करने पर प्राप्त परिणामों को देखा और समझा। अब यदि Δ के कोणों को कोई भुजा विभाजित करती है तो विभाजन के बाद किस प्रकार के परिणाम मिलते हैं, तो आइए निम्न प्रयोग हमको क्या परिणाम देता है? समझते हैं।

प्रमेय-11.3 यदि कोई एक रेखा किसी त्रिभुज के एक आन्तरिक कोण का समद्विभाजन करे तो वह समद्विभाजक रेखा उस कोण की सम्मुख भुजा को त्रिभुज की शेष भुजाओं की लम्बाइयों के अनुपात में विभाजित करती है।

दिया हुआ है: ΔABC में AD , $\angle A$ का समद्विभाजक है।

अतः $\angle 1 = \angle 2$

सिद्ध करना है: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

रचना: रेखा CE इस प्रकार खींची गई है कि $DA \parallel CE$ हो तो BA को आगे बढ़ाने पर E पर मिलती है।

उपपत्ति: $CE \parallel DA$ और AC और BE तिर्यक रेखाएं हैं।

अतः $\angle 2 = \angle 3$ (एकान्तर कोण) ... (1)

एवं $\angle 1 = \angle 4$ (संगत कोण) ... (2)

परन्तु $\angle 1 = \angle 2$ (दिया हुआ)

(1) व (2) से $\angle 3 = \angle 4$

अतः ΔACE में

$AE = AC$... (3)

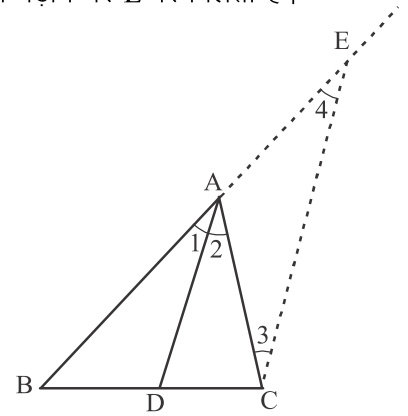
ΔBCE में $DA \parallel CA$ तो आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

या $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$ ((3) से)

अर्थात् $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

इति सिद्धम्



आकृति 11.19

प्रमेय-11.4 (प्रमेय 11.3 की विलोम)

यदि एक रेखा किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से इस प्रकार खींची जाए कि वह उसके सम्मुख भुजा को शेष दोनों भुजाओं के अनुपात में विभाजित करे तो वह रेखा शीर्ष पर बने कोण का समद्विभाजन करती है।

दिया हुआ है: ΔABC की भुजा BC पर D एक ऐसा बिन्दु है जिससे

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ हो।}$$

सिद्ध करना है: AD , $\angle A$ की समद्विभाजक है

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

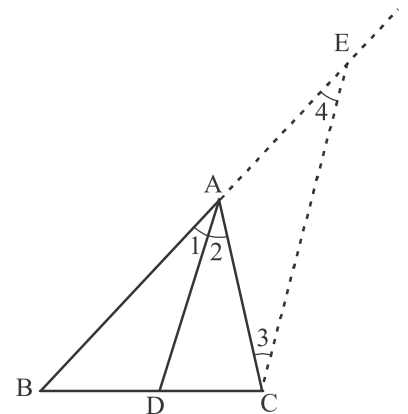
रचना: BA को E तक इतना बढ़ाया कि $AE = AC$ हो जाए, E व C को मिलाया

उपपत्ति: ΔACE में

$AE = AC$ (रचना से)

अतः $\angle 3 = \angle 4$... (1)

अब चूंकि $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (दिया हुआ)



आकृति 11.20

अतः $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ ($\because AE = AC$ रचना से)

इस प्रकार $\triangle BCE$ में यदि $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ हो तो आधारभूत समानुपातिक विलोम प्रमेय से

$DA \parallel CE$ अतः $\angle 1 = \angle 4$ (संगत कोण) एवं $\angle 2 = \angle 3$ (एकान्तर कोण)

परन्तु $\angle 3 = \angle 4$ ((1) से) अतः $\angle 1 = \angle 2$ अर्थात् AD , $\angle A$ का समद्विभाजक है

इति सिद्धम्

प्रमेय-11.5 त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाले बहिष्कोण का समद्विभाजक कोण की सम्मुख भुजा बाह्य विभाजन त्रिभुज की शेष दोनों भुजाओं के अनुपात में करता है।

दिया हुआ है: AD , $\triangle ABC$ के शीर्ष A पर बने बहिष्कोण $\angle FAC$ की समद्विभाजक रेखा है।

अर्थात् $\angle 1 = \angle 2$

सिद्ध करना है: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

रचना: $CE \parallel DA$ खींची जो AB को E पर काटती है।

उपपत्ति: $CE \parallel DA$ है एवं AC तथा BF तिर्यक रेखाएँ हैं। अतः

$\angle 1 = \angle 3$ (एकान्तर कोण) ... (1)

एवं $\angle 2 = \angle 4$ (संगत कोण) ... (2)

चूँकि $\angle 1 = \angle 2$ (दिया हुआ)

अतः $\angle 3 = \angle 4$

चूँकि $\angle 3 = \angle 4$ है तो $\triangle AEC$ में

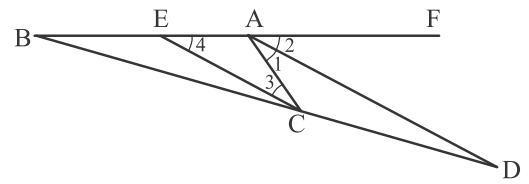
$AE = AC$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ) ... (3)

अब $\triangle BAD$ में $EC \parallel AD$

तो $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{EA}$ (आधारभूत समानुपातिकता के विशिष्ट गुण)

या $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{AC}$ ((3) से)

या $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ इति सिद्धम्



आकृति 11.21

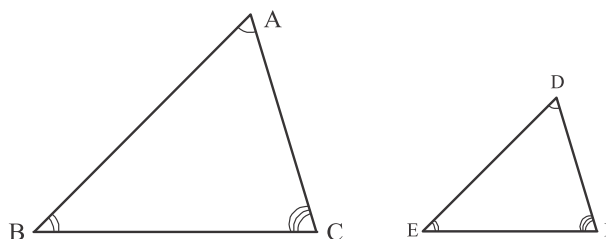
11.05 त्रिभुज की समरूपता

पिछले अनुच्छेद 11.3 में हमने पढ़ा है कि दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हो तथा (ii) संगत भुजाएँ समानुपाती हों

आकृति बनाकर समझे तो यदि $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ में (देखिए आकृति 11.22)

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ हो तथा

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ हो तो $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ परस्पर समरूप होते हैं



आकृति 11.22

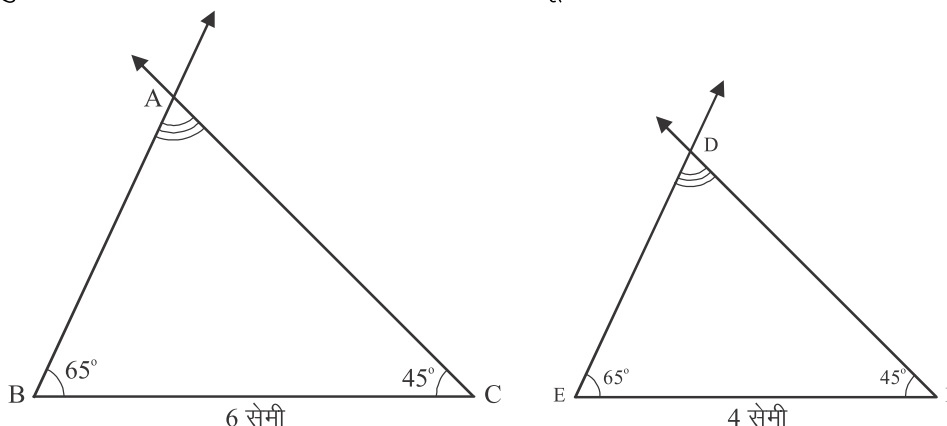


आकृतियों में आप देख सकते हैं A, D के संगत, B, E के संगत तथा C, F के संगत है। संकेत में हम इन दोनों त्रिभुजों को समरूप बताने के लिए $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ तरीके से लिखते हैं और "त्रिभुज ABC समरूप है $\triangle DEF$ के" पढ़ते हैं। याद कीजिए आपने कक्षा IX में सर्वांगसम के लिए संकेत " $\cong$ " का प्रयोग किया था इस प्रकार समरूप के लिए संकेत " $\sim$ " का प्रयोग होता है।

आपको याद होगा सर्वांगसम त्रिभुजों को सांकेतिक रूप से लिखते समय संगत शीर्षों का क्रम सही प्रकार से लिखे जाते हैं। इसी प्रकार त्रिभुजों की समरूपता को भी सांकेतिक लिखने के लिए उनके शीर्ष की संगतताओं को सही क्रम में लिखा जाना चाहिए। जैसा आकृति 11.25 में दोनों त्रिभुजों में समरूपता के लिए $\triangle ABC \sim \triangle EFD$ अथवा $\triangle ABC \sim \triangle FED$ नहीं लिख सकते हैं। इन्हें $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ या $\triangle BAC \sim \triangle EDF$ या $\triangle BCA \sim \triangle FED$ लिख सकते हैं।

पिछली कक्षा में आपने त्रिभुजों की सर्वांगसमता बताने के लिए इनके संगत अंगों के आधार पर अनेक कसौटियों पर विस्तार से अध्ययन किया है। इसी प्रकार यहाँ भी समरूपता के लिए कुछ ऐसी कसौटियाँ प्राप्त करने का प्रयत्न करते हैं जिनमें त्रिभुजों संगत भागों के सभी छः युग्मों के स्थान पर कम से कम युग्मों के बीच सम्बन्ध स्थापित कर इन्हें समरूप बता सकें। आइए इस कड़ी में सर्वप्रथम निम्न प्रयोग के माध्यम से क्या परिणाम आता है, देखते हैं।

सबसे पहले दो असमान माप क्रमशः 6 सेमी और 4 सेमी के रेखाखण्ड BC एवं EF की रचना करते हैं। इसके बाद हम रेखाखण्ड BC एवं EF के बिन्दु B और E पर क्रमशः $65^\circ - 65^\circ$ तथा बिन्दु C व F पर क्रमशः $45^\circ - 45^\circ$ के कोण रचित रेखाखण्ड BC व EF को क्रमशः आधार रेखा मानते हुए बनाते हैं। इस प्रकार हमें दो त्रिभुज क्रमशः $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ प्राप्त होते हैं (देखिए आकृति 11.23 में) क्या आप इन त्रिभुजों में शेष तीसरे कोण का मान ज्ञात कर सकते हैं? चूंकि $\triangle$ के तीनों कोणों का योग 180° होता है।



आकृति 11.23

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ \text{ इसी प्रकार}$$

$$\angle D = 180^\circ - (\angle E + \angle F) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ \text{ उपरोक्त आकृति के द्वारा हमें ज्ञात हैं}$$

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ में तीनों संगत कोण परस्पर समान है। अर्थात् दोनों त्रिभुज समान कोणिक है। अब इनकी भुजाओं को स्केल की सहायता से मापकर संगत भुजाओं के मध्य अनुपात ज्ञात करते हैं।

$$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{4} = 1.5,$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

$$\text{तथा } \frac{AC}{DF} = \frac{5.85}{3.9} = 1.5$$

(यहाँ $AB = 3.5$ सेमी, $DE = 3$ सेमी, $AC = 5.85$ सेमी एवं $DF = 3.9$ सेमी मापने पर प्राप्त होता है।)

$$\text{अर्थात् } \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ प्राप्त होता है। आप समान संगत कोण वाले अनेक त्रिभुजों के युग्म बनाकर इस प्रयोग}$$

को दोहराएंगे तो प्रत्येक बार वही परिणाम प्राप्त करेंगे। इस प्रयोग से हमें ज्ञात होता है "दो समान कोणिक त्रिभुजों की संगत भुजाओं

का अनुपात सदैव समान आता है।" अब चूंकि समरूप त्रिभुजों की परिभाषा अनुसार दोनों त्रिभुजों के संगत कोण समान होने एवं संगत भुजाओं में समान अनुपात होने के कारण $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ होंगे।

प्रमेय-11.6 (AAA समरूपता नियम) दो समानकोणिक त्रिभुज, परस्पर समरूप होते हैं।

दिया हुआ है: दो $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ इस प्रकार के हैं कि इनके संगत कोण बराबर हैं।

अर्थात् $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$

सिद्ध करना है: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

रचना: $\triangle ABC$ की भुजा AB एवं भुजा AC के बराबर माप लेकर क्रमशः DP एवं DQ, $\triangle DEF$ की भुजाएं DE व DF में से काटिए और PQ को मिलाइए।

उपपत्ति: $AB = DP$ एवं $AC = DQ$ (रचना से)

$\angle A = \angle D$ (दिया हुआ)

अतः $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$ (भुजा कोण भुजा प्रमेय से)

इसलिए $\angle B = \angle DPQ$ एवं $\angle C = \angle DQP$

परन्तु $\angle B = \angle E$ एवं $\angle C = \angle F$ (दिया हुआ)

अतः $\angle DPQ = \angle E$ एवं $\angle DQP = \angle F$ (चूंकि ये संगत कोण हैं)

अतः $PQ \parallel EF$

इसलिए $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (आधारभूत समानुपातिका प्रमेय से)

या $\frac{PE}{DP} = \frac{QF}{DQ}$

या $\frac{PE}{DP} + 1 = \frac{QF}{DQ} + 1$

या $\frac{PE + DP}{DP} = \frac{QF + DQ}{DQ}$

या $\frac{DE}{DP} = \frac{DF}{DQ}$

या $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$

या $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

इस पद्धति से $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ भी ज्ञात किया जा सकता है।

इस प्रकार $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

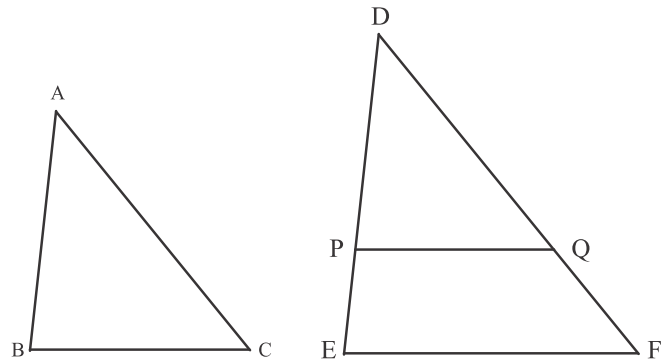
तो इस प्रकार $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ में दो त्रिभुजों की समरूपता के गुण विद्यमान हैं।

अतः $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

इति सिद्धम्

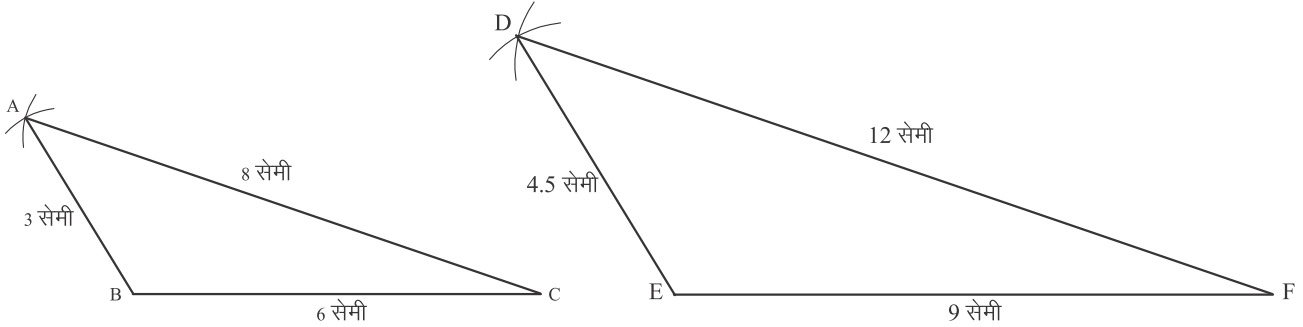
यदि एक त्रिभुज के दो कोण किसी अन्य त्रिभुज के दो कोणों के क्रमशः समान हों तो त्रिभुज कोण योग गुणधर्म से दोनों के तीसरे कोण भी बराबर होंगे। अतः यहाँ (AAA समरूपता गुणधर्म) के स्थान पर (AA समरूपता गुणधर्म) से भी व्यक्त कर सकते हैं।

क्या सम्भव हैं यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती तो दोनों त्रिभुजों के संगत कोण भी बराबर होंगे? तो आइए निम्न प्रयोग के माध्यम से जानकारी लेते हैं।



आकृति 11.24

प्रयोग: $\triangle ABC$ में $AB = 3$ सेमी, $BC = 6$ सेमी तथा $CA = 8$ सेमी इसी प्रकार DEF में $DE = 4.5$ सेमी, $EF = 9$ सेमी तथा $FD = 12$ सेमी लेकर त्रिभुजों की रचना करके प्रत्येक कोण प्रोटेक्टर की मदद से नाप कर दोनों त्रिभुजों के संगत कोणों की तुलना करेंगे।



आकृति 11.25

यहाँ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad \left(\frac{2}{3} \text{ प्रत्येक संगत भुजाओं का अनुपात है}\right)$

मापन करने के पश्चात् $\angle A = \angle D = 40^\circ$, $\angle B = \angle E = 120^\circ$, $\angle C = \angle F = 20^\circ$ प्राप्त हो रहे हैं अर्थात् संगत भुजाओं का अनुपात समान हो तो संगत कोण स्वतः समान होंगे। इस प्रकार $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ के। इसी प्रकार आप अनेक बार त्रिभुजों के युग्मों की रचना करके (जिनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान रखते हुए) प्रत्येक बार त्रिभुजों के संगत कोण बराबर प्राप्त कर सकते हैं।

आइए अब हम समरूपता के इस परिणाम को निम्न प्रमेय के माध्यम से सिद्ध करते हैं।

प्रमेय-11.7 (SSS समरूपता नियम) यदि दो त्रिभुजों में संगत भुजाओं का अनुपात बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज परस्पर समरूप होते हैं।

दिया हुआ है: $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ में $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ है

सिद्ध करना है: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

रचना: $\triangle DEF$ में $DP = AB$ और $DQ = AC$ काटिए तथा P और Q को मिलाइए।

उपपत्ति: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (दिया हुआ)

$$\Rightarrow \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} \quad (\text{रचना से})$$

$$\Rightarrow PQ \parallel EF \quad (\text{आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम से})$$

$$\Rightarrow \angle DPQ = \angle E \text{ तथा } \angle DQP = \angle F \quad (\text{संगत कोण})$$

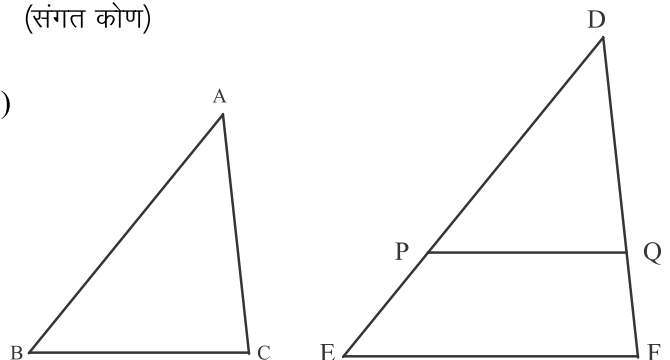
$\therefore$ $\triangle DPQ$ समरूपता गुण धर्म से

$$\triangle DPQ \sim \triangle DEF \quad \dots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{DP}{DE} = \frac{PQ}{EF} \quad (\text{समरूपता गुणधर्म से})$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{PQ}{EF} \quad (\because AB = DP \text{ रचना से})$$

परन्तु $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (दिया हुआ)



आकृति 11.26

अतः $\frac{PQ}{EF} = \frac{BC}{EF}$

$\Rightarrow$ $PQ = BC$ इस प्रकार $\triangle ABC$ और $\triangle DPQ$ में
 $AB = DP$, $BC = PQ$, और $AC = DQ$

अतः SSS सर्वांगसम नियम से

$$\triangle ABC \cong \triangle DPQ$$

... (2)

(1) व (2) से $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$ और $\triangle DPQ \sim \triangle DEF$ (दो सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते हैं)

अतः $\triangle ABC \sim \triangle DPQ$ और $\triangle DPQ \sim \triangle DEF$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

इति सिद्धम्

प्रमेय-11.8 (SAS समरूपता नियम) यदि दो त्रिभुजों में कोई संगत दो भुजाएं परस्पर समानुपाती हो तथा उनके मध्य के कोण बराबर हो तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

दिया हुआ है: $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ में $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ एवं $\angle A = \angle D$ है।

सिद्ध करना: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

रचना: $\triangle DEF$ में $AB = DP$, $AC = DQ$ क्रमशः DE एवं DF में से काटिए तथा P व Q को मिलाइए।

उपपत्ति: $\triangle ABC$ एवं $\triangle DPQ$ में

$AB = DP$, $\angle A = \angle D$ तथा $AC = DQ$ (रचना द्वारा)

अतः सर्वांगसमता के SAS नियम से

$$\triangle ABC \cong \triangle DPQ$$

... (1)

अब $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (दिया हुआ है)

$$\Rightarrow \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} \quad (\text{रचना से } AB = DP \text{ एवं } AC = DQ)$$

$$\Rightarrow PQ \parallel EF \quad (\text{थेल्स प्रमेय के विलोम द्वारा})$$

$$\Rightarrow \angle DPQ = \angle E \text{ एवं } \angle DQP = \angle F \quad (\text{संगत कोण})$$

इस प्रकार AA समरूपता नियम से

$$\triangle DPQ \sim \triangle DEF$$

... (2)

(1) व (2) से $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$ तथा $\triangle DPQ \sim \triangle DEF$

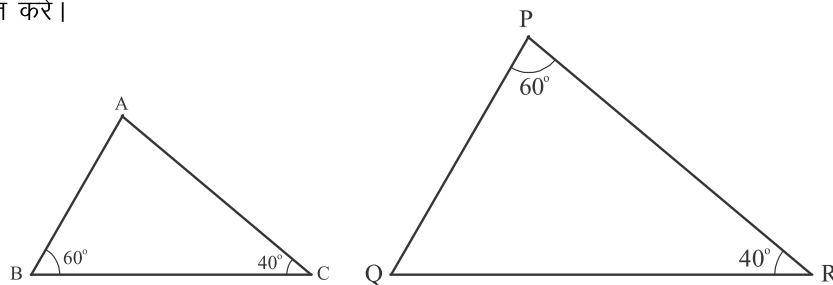
$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DPQ$ तथा $\triangle DPQ \sim \triangle DEF$ (सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते हैं)

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

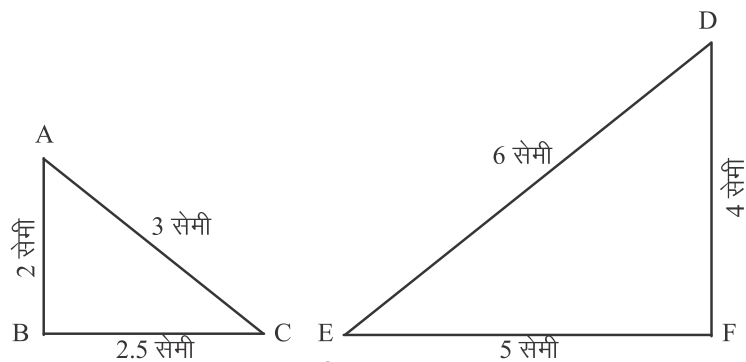
इति सिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

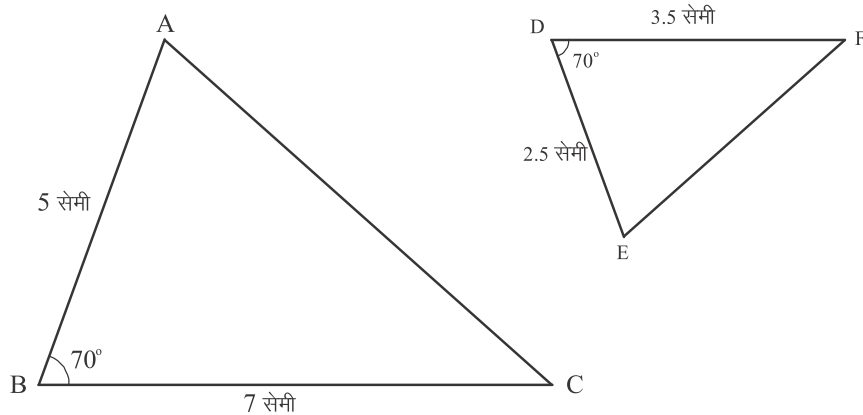
उदाहरण-1. आकृति में दर्शाए गए त्रिभुजों के युग्मों में कौन-कौन से युग्म समरूप है। समरूपता के नियम लिखते हुए सांकेतिक रूप से लिखकर व्यक्त करें।



आकृति 11.28 (i)



आकृति 11.28 (ii)



आकृति 11.28 (iii)

- हल: (i) $\triangle BCA \sim \triangle PQR$
 चूंकि $\angle B = \angle P = 60^\circ$, $\angle C = \angle R = 40^\circ$
 अतः $\angle A = 180 - (60 + 40) = \angle Q = 80^\circ$
 अतः AAA समरूपता प्रमेय द्वारा $\triangle BCA \sim \triangle PRQ$ होगा
 (ii) $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ में

$$\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED} = \frac{1}{2}$$

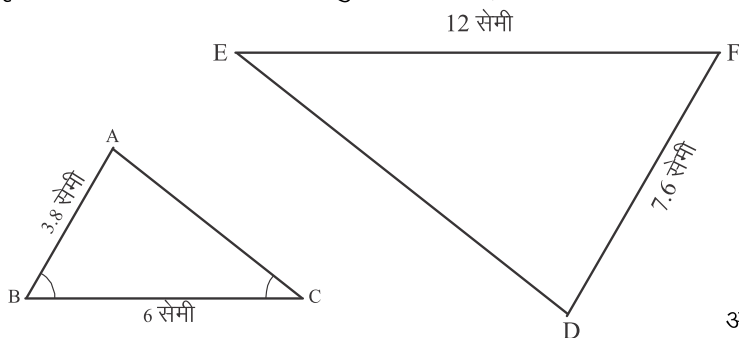
अतः SSS समरूपता प्रमेय से $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

- (iii) $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ में

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF} = 2 \text{ एवं } \angle ABC = 70^\circ = \angle EDF$$

अतः SAS समरूपता प्रमेय से $\triangle ABC \sim \triangle EDF$

उदाहरण-2. दिए गए आकृति में $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ को तुलनाकर $\angle D, \angle E$ एवं $\angle F$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.29

हल: $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ में $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED} = \frac{1}{2}$

अतः SSS समरूपता प्रमेय से

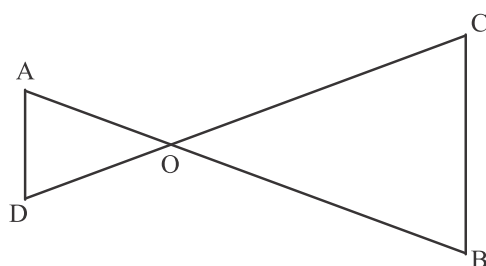
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle D, \angle B = \angle F \text{ एवं } \angle C = \angle E$$

$$\Rightarrow \angle F = 60^\circ, \angle E = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle D = 180 - (60 + 40) = 80^\circ$$

उदाहरण-3. आकृति में यदि $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ है तो दर्शाइए $\angle A = \angle C$ व $\angle B = \angle D$



आकृति 11.30

हल: $\triangle AOD$ व $\triangle BOC$ में $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ दिया हुआ है

$$\text{अतः } \frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB} \quad \dots (1)$$

$$\text{तथा } \angle AOD = \angle COB \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण}) \quad \dots (2)$$

$$(1) \text{ व } (2) \text{ से } \triangle AOD \sim \triangle COB$$

$$\text{इसलिए } \angle A = \angle C \text{ एवं } \angle D = \angle B \quad (\text{समरूप त्रिभुजों के संगत कोण}) \quad \text{इति सिद्धम्}$$

उदाहरण-4. आकृति में QA तथा PB, AB पर लम्ब है यदि $AB = 16$ सेमी, $OQ = 5\sqrt{3}$ सेमी और $OP = 3\sqrt{13}$ सेमी है तो AO एवं BO के मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\triangle AOQ$ एवं $\triangle BOP$ में $\angle OAQ = \angle OBP$ (प्रत्येक 90°)

$$\angle AOQ = \angle BOP \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण})$$

अतः AA समरूपता प्रमेय द्वारा

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP} \quad \dots (1)$$

$$\text{परन्तु } AB = AO + BO = 16 \text{ सेमी}$$

$$\text{माना कि } AO = x \text{ तो } BO = 16 - x.$$

$$\text{अतः } \frac{x}{16-x} = \frac{OQ}{OP} \quad ((1) \text{ से})$$

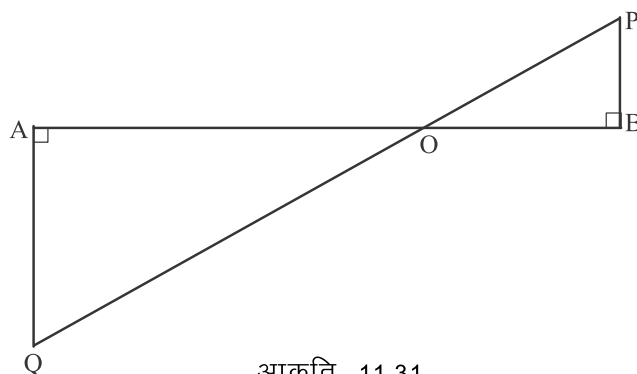
$$\text{या } \frac{x}{16-x} = \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{13}}$$

$$\text{या } 3x = 80 - 5x$$

$$\text{या } 8x = 80$$

$$\text{या } x = 10 \text{ सेमी} \Rightarrow AO = 10 \text{ सेमी}$$

$$\text{एवं } BO = 16 - 10 = 6 \text{ सेमी}$$



आकृति 11.31

उदाहरण-5. आकृति में $\angle ADE = \angle B$ और $AD = 3.8$ सेमी, $AE = 3.6$ सेमी, $BE = 2.1$ सेमी और $BC = 4.2$ सेमी तो DE का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\triangle ADE$ एवं $\triangle ABC$ में

$$\angle ADE = \angle B \text{ (दिया हुआ)} \quad \angle A = \angle A \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

अतः AA समरूपता प्रमेय से $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

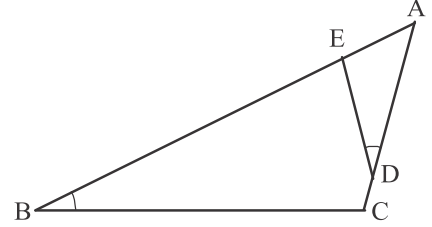
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\text{या} \quad \frac{AD}{AE + EB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{3.8}{3.6 + 2.1} = \frac{DE}{4.2}$$

$$\text{या} \quad DE = \frac{3.8 \times 4.2}{5.7} = \frac{15.96}{5.7}$$

$$\text{या} \quad DE = 2.8 \text{ सेमी}$$



आकृति 11.32

उदाहरण-6. आकृति में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसकी $AB \parallel DC$ है। यदि $\triangle AED \sim \triangle BEC$ हो तो सिद्ध कीजिए $AD = BC$ है।

हल: $\triangle EDC$ एवं $\triangle EBA$ में

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ एवं } \angle 3 = \angle 4$$

तथा $\angle DEC = \angle AEB$

अतः AAA समरूपता प्रमेय द्वारा

$$\triangle EDC \sim \triangle EBA$$

$$\text{अतः} \quad \frac{ED}{EB} = \frac{EC}{EA}$$

$$\text{या} \quad \frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA}$$

$$\text{चूँकि} \quad \triangle AED \sim \triangle BEC$$

$$\text{अतः} \quad \frac{AE}{BE} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{BC}$$

$$(1) \text{ व } (2) \text{ से} \quad \frac{EB}{EA} = \frac{AE}{BE}$$

$$\text{या} \quad (BE)^2 = (AE)^2$$

$$\text{या} \quad BE = AE$$

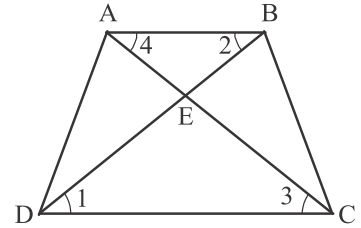
$$(2) \text{ में } BE = AE \text{ रखने पर} \quad \frac{AE}{AE} = \frac{AD}{BC}$$

$$\text{या} \quad \frac{AD}{BC} = 1$$

$$\text{या} \quad AD = BC$$

(एकान्तर कोण)

(शीर्षाभिमुख कोण)



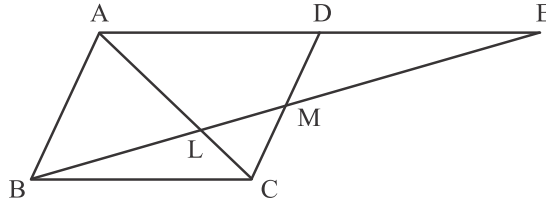
आकृति 11.33

... (1)

... (2)

इति सिद्धम्

उदाहरण-7. समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजा CD के मध्य बिन्दु M को B से मिलाने वाली रेखा AC को L पर काटती है। यदि AD व BM को आगे बढ़ावें तो वह E पर मिलती है तो सिद्ध कीजिए। $EL = 2 BL$



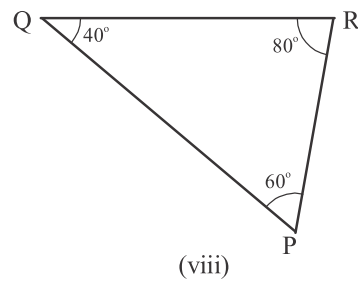
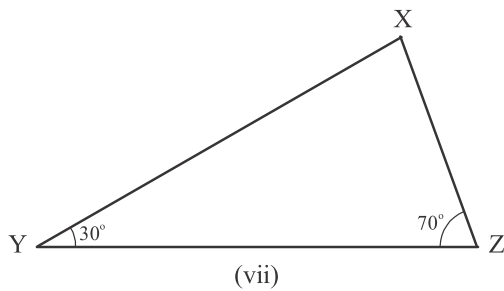
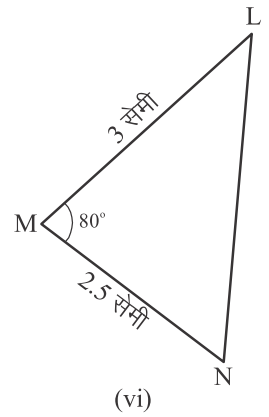
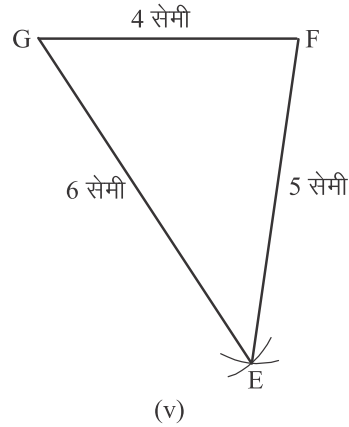
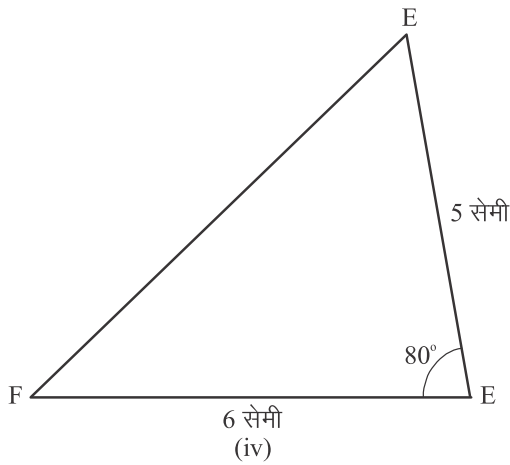
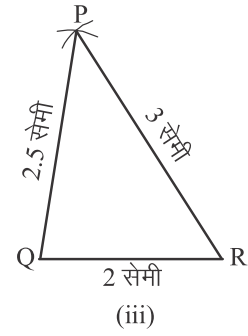
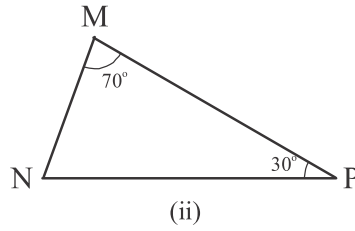
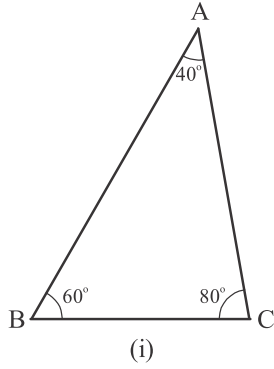
आकृति 11.34

हल: $\triangle BMC$ व $\triangle EMD$ में
 $MC = MD$ (M, CD का मध्य बिन्दु है)
 $\angle CMB = \angle DME$ (शीर्षाभिमुख कोण)
 $\angle MCB = \angle MDE$ (एकान्तर कोण)
 अतः ASA सर्वांगसम नियम द्वारा
 $\triangle BMC \cong \triangle EMD$
 अतः $BC = ED$ परन्तु $AD = BC$ (ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है)
 और $AE = AD + DE$
 या $AE = BC + BC$
 या $AE = 2BC$... (1)
 $\triangle AEL$ व $\triangle CBL$ में
 $\angle ALE = \angle CLB$ (शीर्षाभिमुख कोण)
 $\angle EAL = \angle BCL$ (एकान्तर कोण)
 अतः AA समरूपता प्रमेय द्वारा
 $\triangle AEL \sim \triangle CBL$
 $\Rightarrow \frac{EL}{BL} = \frac{AE}{CB}$
 $\Rightarrow \frac{EL}{BL} = \frac{2BC}{BC}$ (समीकरण (1) से)
 $\Rightarrow \frac{EL}{BL} = 2$
 $\Rightarrow EL = 2 BL$ इति सिद्धम्

प्रश्नमाला 11.3

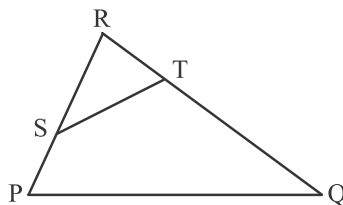
1. दो त्रिभुज ABC और PQR में $\frac{AB}{PQ}$ और $\frac{BC}{QR}$ दोनों त्रिभुजों में से दो कोणों के नाम बताइए जो बराबर होना चाहिए, ताकि ये दोनों $\triangle$ समरूप हो सकें। अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।
2. त्रिभुजों ABC एवं DEF में, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle F$ हो तो क्या $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
3. यदि त्रिभुज $ABC \sim \triangle FDE$ हो तो क्या $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ बताया जा सकता है? उत्तर को कारण सहित लिखिए।
4. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण के क्रमशः समानुपाती एवं बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? कारण सहित उत्तर लिखिए।

5. समान कोणिक त्रिभुजों से क्या तात्पर्य है? इनमें परस्पर क्या सम्बन्ध हो सकता है?
6. निम्न दिए गए त्रिभुजों की आकृतियों में से समरूप त्रिभुज युग्मों का चयन कीजिए। और उन्हें समरूप होने की सांकेतिक भाषा में लिखिए।



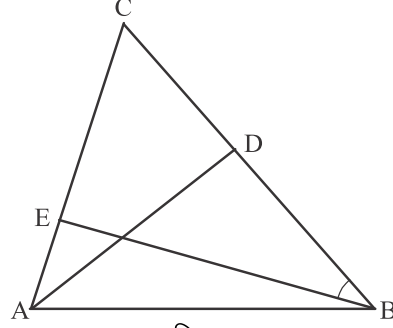
आकृति 11.35

7. आकृति में $\triangle PRQ \sim \triangle TRS$ हो तो बताइए इस समरूप त्रिभुज युग्म में कौन-कौन से कोण परस्पर समान होने चाहिए?



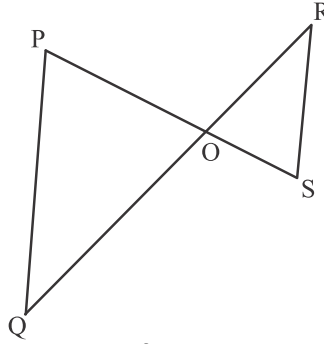
आकृति 11.36

8. आपको आकृति में स्थित उन दो त्रिभुजों का चयन करना है जो परस्पर समरूप हैं। यदि $\angle CBE = \angle CAD$ है।



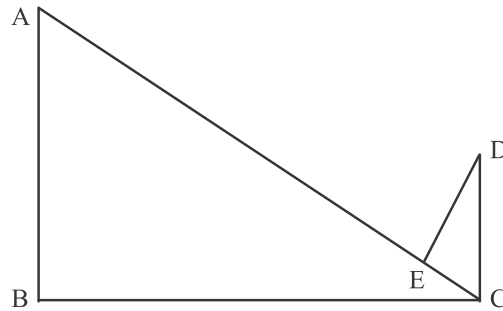
आकृति 11.37

9. आकृति में PQ और RS समान्तर हैं तो सिद्ध कीजिए $\Delta POQ \sim \Delta SOR$



आकृति 11.38

10. 90 सेमी. की लम्बाई वाली लड़की बल्ब लगे खम्बे के आधार से परे 1.2 मीटर/सैकण्ड की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6 मीटर की ऊँचाई पर हो तो 4 सैकण्ड के बाद उस लड़की की छाया कितने मीटर होगी?
11. 12 मीटर लम्बाई वाले उर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लम्बाई 8 मीटर है, उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 56 मीटर हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
12. किसी ΔABC के शीर्ष A से उसकी सम्मुख भुजा BC पर लम्ब डालने पर $AD^2 = BD \times DC$ प्राप्त होता है तो, सिद्ध कीजिए ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।
13. सिद्ध कीजिए किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को क्रमशः मिलाने पर बनने वाले चारों त्रिभुज अपने मूल त्रिभुज के समरूप होते हैं।
14. आकृति दर्शाए अनुसार यदि $AB \perp BC, DC \perp BC$ और $DE \perp AC$ हो तो सिद्ध कीजिए। $\Delta CED \sim \Delta ABC$



आकृति 11.39

15. ΔABC की भुजा BC के मध्य बिन्दु D है। यदि AD का समद्विभाजन करती हुई एक रेखा B से इस प्रकार खींची जाए कि वह भुजा AD को E पर काटते हुए AC को X पर काटे तो सिद्ध कीजिए $\frac{EX}{BE} = \frac{1}{3}$ है।

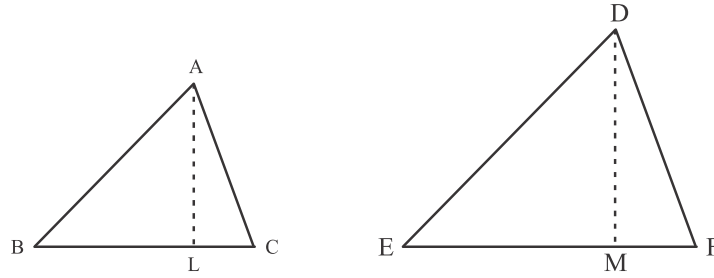
11.5.2 दो समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल

इस अनुच्छेद में हम दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपातों के बारे में अध्ययन करेंगे।

प्रमेय—11.08 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।

दिया हुआ है: $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ में $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है

सिद्ध करना: $\frac{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$



आकृति 11.40

रचना: $AL \perp BC$ एवं $DM \perp EF$ खींचा

उपपत्ति: $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \text{ और } \angle C = \angle F \quad \dots (1)$

एवं $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

$\triangle ALB$ व $\triangle DME$ में

$\angle ALB = \angle DME$ (प्रत्येक कोण 90°)

$\angle B = \angle E$ (1 के द्वारा)

अतः $\triangle ALB \sim \triangle DME$ (A-A समरूपता प्रमेय द्वारा)

$\Rightarrow \frac{AL}{DM} = \frac{AB}{DE} \quad \dots (3)$

(2) व (3) से $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AL}{DM} \quad \dots (4)$

अब $\frac{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AL}{\frac{1}{2} EF \times DM}$ (त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई)

$$= \frac{BC}{EF} \times \frac{AL}{DM}$$

$$= \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} \quad ((4) \text{ से})$$

$$= \frac{BC^2}{EF^2}$$

परन्तु $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

इति सिद्धम्

इस प्रमेय के माध्यम से हम अन्य परिणाम भी प्राप्त कर सकते हैं जिन्हें निम्न उपप्रमेयों के रूप में लिखा जा सकता है।
उपप्रमेय-11.2 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात किसी एक शीर्ष से डाले गए संगत लम्ब के वर्गों के अनुपातों के बराबर होता है।

उपप्रमेय-11.3 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत माध्यिकाओं के वर्गों के अनुपातों के बराबर होता है।
उपप्रमेय-11.4 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत कोणों के समद्विभाजकों के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

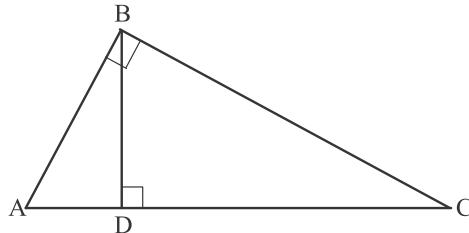


11.5.3 समरूपता की अवधारणा से बोधायन प्रमेय का सत्यापन

पिछली कक्षाओं में आपने बोधायन प्रमेय के बारे में अध्ययन किया है। इस पर आधारित अनेक प्रश्न हल किये हैं तथा उपपत्ति कक्षा IX में आपने देखी। यहां हम इस प्रमेय को त्रिभुजों की समरूपता की अवधारणा का प्रयोग करके सिद्ध करेंगे।

प्रमेय-11.9 समकोण त्रिभुज में, कर्ण पर बना कोण शेष भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

दिया हुआ है: ABCD एक समकोण त्रिभुज है। जिसका कोण $B 90^\circ$ है।



आकृति 11.41

सिद्ध करना: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना: B से AC पर लम्ब BD डाला।

उपपत्ति: ΔADB एवं ΔABC में

$$\angle ADB = \angle ABC \quad (\text{प्रत्येक } 90^\circ \text{ दिया हुआ एवं रचना से})$$

$$\angle A = \angle A \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

अतः AA समरूपता प्रमेय से

$$\Delta ADB \sim \Delta ABC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय})$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC \times AD \quad \dots(1)$$

ΔBDC एवं ΔABC में

$$\angle CDB = \angle ABC \quad (\text{प्रत्येक कोण } 90^\circ \text{ दिया हुआ एवं रचना से})$$

$$\angle C = \angle C \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

अतः A – A समरूपता प्रमेय से

$$\Delta CDB \sim \Delta CBA$$

$$\frac{CD}{CB} = \frac{BC}{AC} \quad (\text{आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय})$$

या $\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$
 $\Rightarrow BC^2 = AC \times DC$ (2)

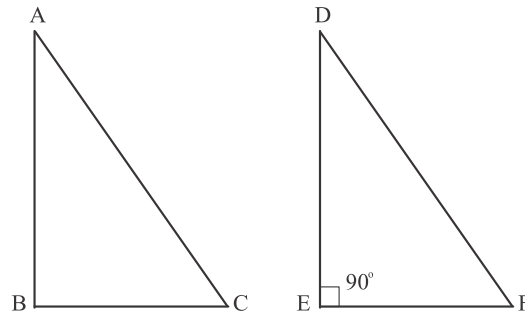
(1) व (2) को जोड़ने पर

$AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times DC$
 $\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC (AD + DC)$
 $\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC \times AC$
 $\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

इति सिद्धम्

आइए अब हम इस प्रमेय की विलोम भी समरूपता अवधारणा का ही प्रयोग करके पुनः सिद्ध करते हैं।

प्रमेय-11.10 (बोधायन प्रमेय का विलोम) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं पर बने वर्गों का योग उसकी तीसरी भुजा पर बने वर्ग के बराबर हो तो, वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।



आकृति 11.42

दिया हुआ है: ΔABC में $AC^2 = AB^2 + BC^2$

सिद्ध करना: ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

रचना: एक समकोण त्रिभुज DEF की रचना इस प्रकार करे कि $DE = AB$, $EF = BC$ एवं $\angle E = 90^\circ$ हो।

उपपत्ति: $DF^2 = DE^2 + EF^2$ (बो धायन प्रमेय से)

$\Rightarrow DF^2 = AB^2 + BC^2$ (रचना से)

परन्तु $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (दिया हुआ)

अतः $AC^2 = DF^2$

या $AC = DF$ (1)

ΔABC एवं ΔDEF में

$AB = DE$, $BC = EF$ (रचना से)

एवं $AC = DF$ [1] से

अतः SSS सर्वांगसमता प्रमेय से

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

$\Rightarrow \angle B = \angle D = 90^\circ$

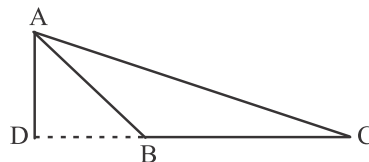
$\Rightarrow \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

इति सिद्धम्

11.5.3 बोधायन प्रमेय पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

प्रमेय-11.11 एक अधिक कोण त्रिभुज ABC जिसका $\angle B$ अधिक कोण हो और $AD \perp BC$ है तो

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$



आकृति 11.43

दूसरे शब्दों में अधिक कोण त्रिभुज में अधिक कोण के सम्मुख भुजा का वर्ग शेष दोनों भुजाओं के वर्गों एवं एक भुजा व दूसरी भुजा से का पहली भुजा पर पक्ष के गुणनफल के दुगने के योग के बराबर होता है।

दिया हुआ है: ABC एक अधिक कोण त्रिभुज हैं, जिसमें $\angle B$ अधिक कोण है।

सिद्ध करना: $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times DB$

उपपत्ति: $\triangle ADB$ में $\angle D = 90^\circ$ है। (दिया हुआ है)

अतः $AB^2 = AD^2 + DB^2$ (1)

अब $\triangle ADC$ में
 $AC^2 = AD^2 + DC^2$

या $AC^2 = AD^2 + (DB + BC)^2$

या $AC^2 = AD^2 + DB^2 + BC^2 + 2DB \times BC$

या $AC^2 = [AD^2 + DB^2] + BC^2 + 2DB \times BC$

या $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times DB$ [1] से

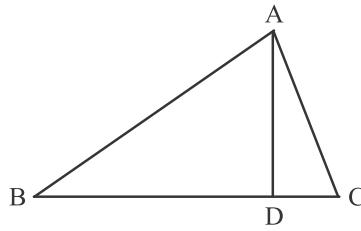
इति सिद्धम्

यदि यहाँ अधिक कोण त्रिभुज के स्थान पर न्यून कोण त्रिभुज होता तो परिणाम निम्नानुसार प्राप्त होता है।

प्रमेय-11.12 ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है, और $AD \perp BC$ तो

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$

(न्यून कोण त्रिभुज में किसी एक भुजा का वर्ग शेष दोनों भुजाओं के वर्गों के योग में से एक भुजा व दूसरी भुजा से पहली भुजा पर प्रक्षेपण के गुणनफल के दुगने में से घटाने पर प्राप्त मान के बराबर होता है।)



आकृति 11.44

दिया हुआ है: ABC एक त्रिभुज हैं जिसमें $AD \perp BC$ है।

सिद्ध करना: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$

उपपत्ति: $AB^2 = AD^2 + BD^2$ (1)

($\triangle ABD$ एक समकोण त्रिभुज है)

इसी प्रकार $AC^2 = AD^2 + DC^2$

($\triangle ADC$ समकोण त्रिभुज है)

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + (BC - BD)^2$ (आकृति से $DC = BC - BD$)

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD$

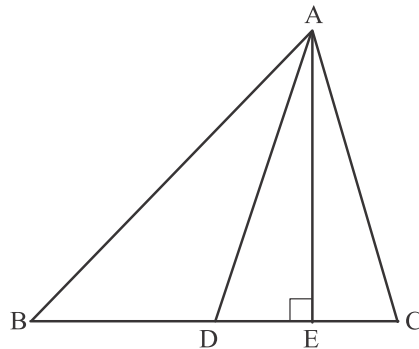
$\Rightarrow AC^2 = (AD^2 + BD^2) + BC^2 - 2BC \times BD$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$ [1] से

अर्थात् $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$

इति सिद्धम्

उपप्रमेय- त्रिभुज दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली माध्यिका के वर्ग एवं तीसरी भुजा के आधे के वर्ग के योग के दुगने के बराबर होता है।



आकृति 11.45

दिया हुआ है: ABC एक त्रिभुज है जिसमें AD उसकी एक माधिका है।

सिद्ध करना: $AB^2 + AC^2 = 2 \left[AD^2 + \left(\frac{BC}{2} \right)^2 \right]$

या $AB^2 + AC^2 = 2[AD^2 + BD^2]$

रचना: $AE \perp BC$ की रचना कीजिए।

उपपत्ति— $\angle AED = 90^\circ$, $\triangle ADE$ में हम देखते हैं।

$$\angle ADE < 90^\circ \Rightarrow \angle ADB > 90^\circ$$

इस प्रकार $\triangle ADB$ एक अधिक कोण त्रिभुज एवं $\triangle ADC$ न्यून कोण त्रिभुज होंगे।

$\therefore$ अधिक कोण $\triangle ABD$ में BD को आगे बढ़ाने पर और $AE \perp BD$ अतः प्रमेय-11.11 से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \times DE \quad \dots (1)$$

$\triangle ACD$ एक न्यून कोण त्रिभुज है और $AE \perp CD$ तो प्रमेय-11.12 से

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \times DE$$

या $AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \times DE \quad [\because CD = BD] \quad \dots (2)$

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \times DE + AD^2 + BD^2 - 2BD \times DE$$

या $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

या $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2 \left(\frac{BC}{2} \right)^2$

या $AB^2 + AC^2 = 2 \left[AD^2 + \left(\frac{BC}{2} \right)^2 \right]$

अर्थात् $AB^2 + AC^2 = 2 \left[AD^2 + \left(\frac{BC}{2} \right)^2 \right]$ अथवा $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ इति सिद्धम्

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. 10 मीटर लम्बी एक सीढ़ी को एक दीवार पर टिकाने से वह भूमि से 8 मीटर ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: आकृति के अनुसार $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसका $\angle B = 90^\circ$ है

अतः बौधायन प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

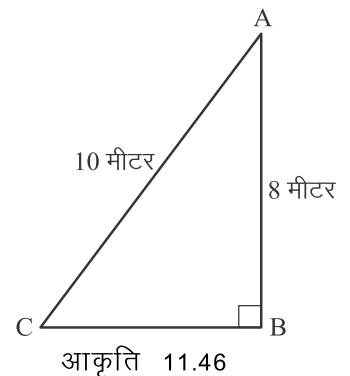
या $BC^2 = AC^2 - AB^2$

या $BC^2 = 10^2 - 8^2$

या $BC^2 = 100 - 64$

या $BC^2 = 36$

या $BC = \sqrt{36} = 6$ मीटर



उदाहरण-2. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 किमी/घ. की चाल से उड़ता है उसी समय एक अन्य

हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 किमी/घ. की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद दोनों हवाई जहाजों के मध्य की दूरी कितनी होगी।

हल: प्रथम हवाईजहाज की उत्तर दिशा में $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद हवाई अड्डे से दूरी = चाल $\times$ समय $= 1000 \times \frac{3}{2} = 1500$ किमी

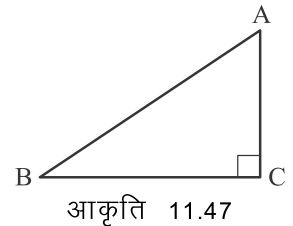
दूसरे हवाईजहाज की पश्चिम दिशा में $1\frac{1}{2}$ घंटे बाद हवाई अड्डे से दूरी = चाल $\times$ समय $= 1200 \times \frac{3}{2} = 1800$ किमी

आकृतिनुसार $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (बोधायन प्रमेय)

$$AB^2 = 1500^2 + 1800^2$$

$$= 2250000 + 3240000$$

$$= 5490000 = 30\sqrt{61} \text{ किमी}$$



उदाहरण-3. यदि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है जिनमें $AB = 2.2$ सेमी. और $DE = 3.3$ सेमी. हो तो $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं। दो त्रिभुज समरूप हो तो उनकी संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात उनके क्षेत्रफलों के बराबर होता है।

$$\text{अतः} \quad \frac{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(2.2)^2}{3.3^2} = \left(\frac{22}{33}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

उदाहरण-4. दो समरूप त्रिभुज ABC और PQR की संगत भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल क्रमशः 36 वर्ग सेमी एवं 49 वर्ग सेमी है।

हल: हम जानते हैं कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपातों के बराबर होता है।

$$\text{अतः} \quad \frac{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2} = \frac{36}{49}$$

$$\text{या} \quad \frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$$

उदाहरण-5. यदि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ हो $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= 16$ सेमी² एवं $\triangle PQR$ का क्षेत्रफल 9 सेमी² तथा $AB = 2.1$ सेमी हो तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल:} \quad \therefore \quad \frac{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16}{9} = \frac{(2.1)^2}{PQ^2}$$

दोनों ओर वर्ग मूल लेने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3} = \frac{2.1}{PQ}$$

$$\Rightarrow \quad PQ = \frac{2.1 \times 3}{4} = \frac{6.3}{4} = 1.575 \text{ सेमी.}$$

उदाहरण-6. आकृति में $\triangle ABC$ में एक रेखा ℓ जो BC के समान्तर है, AB और AC को क्रमशः D व E पर काटती हुई इस प्रकार निकलती हैं कि $AD : DB = 1 : 2$ हो जाता है, तो इस प्रकार बने समलम्ब चतुर्भुजBDEC एवं $\triangle ADE$ क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: चूंकि $\ell \parallel BC$

अतः $\angle ADE = \angle B$ एवं $\angle AED = \angle C$ (संगत कोण)

अतः $\triangle ADE$ व $\triangle ABC$ में

$$\begin{aligned} \text{एवं} \quad & \angle ADE = \angle B \\ & \angle AED = \angle C \\ \Rightarrow & \triangle ADE \sim \triangle ABC \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AD^2}{AB^2}$$

$$\text{परन्तु} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AD + DB} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = \frac{AD}{AB}$$

$$(1) \text{ व } (2) \text{ से} \quad \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$$

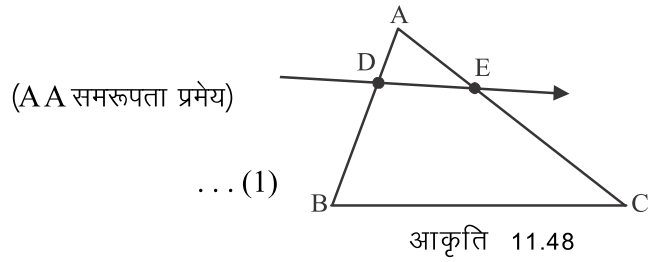
$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल} = 9 \times \triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल} \quad \dots (3)$$

किन्तु समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल = $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल - $\triangle ADE$ का क्षेत्रफल

$$\Rightarrow \text{समीकरण (3) से समलम्ब चतुर्भुज BDEC का क्षेत्रफल} \\ = 9 \times \triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल} - \triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$\Rightarrow \text{समलम्ब BDEC का क्षेत्रफल} = 8 \times \triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$\text{या} \quad \frac{\text{समलम्ब BDEC का क्षेत्रफल}}{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{8}{1}$$



उदाहरण-7. आकृति 11.49 के अनुसार एक त्रिभुज ABC की भुजा AC के समान्तर रेखाखण्ड PQ उसकी भुजा AB और AC को इस प्रकार विभाजित करती है कि $\frac{BP}{BA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ हो तो सिद्ध कीजिए रेखा खण्ड PQ, $\triangle ABC$ को समान क्षेत्रफल में विभाजित करती है।

हल: दिया हुआ है: $\therefore PQ \parallel AC$ दिया हुआ है।

$$\text{अतः} \quad \angle A = \angle BPQ \text{ (संगत कोण)}$$

$$\text{एवं} \quad \angle C = \angle BQP \text{ (संगत कोण)} \text{ एवं } \frac{BP}{BA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{अतः} \quad \triangle BAC \sim \triangle BPQ \text{ (AA समरूपता प्रमेय से)}$$

सिद्ध करना है: $\triangle BPQ$ का क्षेत्रफल = समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल

$$\text{या} \quad \text{समलम्ब PACQ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \triangle BAC \text{ का क्षेत्रफल} = \triangle BPQ \text{ का क्षेत्रफल (दिया हुआ है)}$$

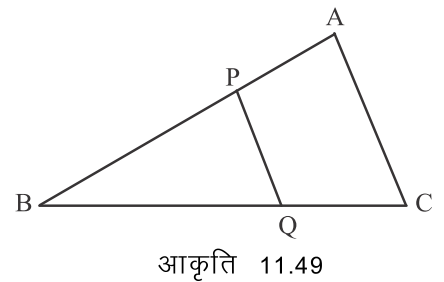
अर्थात् $2\triangle BPQ$ का क्षेत्रफल = $\triangle BAC$ का क्षेत्रफल भी सिद्ध करेंगे तो प्रश्न हल हो जाएगा।

उपपत्ति: चूंकि $\triangle BAC \sim \triangle BPQ$ या $\triangle BPQ \sim \triangle BAC$

$$\text{अतः} \quad \frac{\triangle BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BP^2}{BA^2}$$

$$\text{या} \quad \frac{\triangle BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{1^2}{\sqrt{2}^2}$$

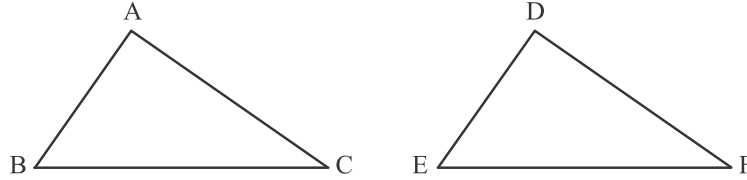
$$\text{या} \quad \frac{\triangle BPQ \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle BAC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{1}{2}$$



या $2\Delta BPQ$ का क्षेत्रफल $= \Delta BAC$ का क्षेत्रफल

इति सिद्धम्

उदाहरण-8. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगमस होते हैं।



आकृति 11.50

हल: दिया हुआ है: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ एवं ΔABC का क्षेत्रफल $= \Delta DEF$ का क्षेत्रफल

सिद्ध करना: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उपपत्ति: $\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\therefore \Delta ABC$ एवं ΔDEF समानकोणिक त्रिभुज है।

एवं
$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

या $1 = \frac{BC^2}{EF^2}$ (दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान है दिया हुआ है)

या $BC^2 = EF^2$ या $BC = EF$

... (1)

$\Rightarrow \Delta ABC$ व ΔDEF में

$\angle B = \angle E$ (समानकोणिक त्रिभुज से)

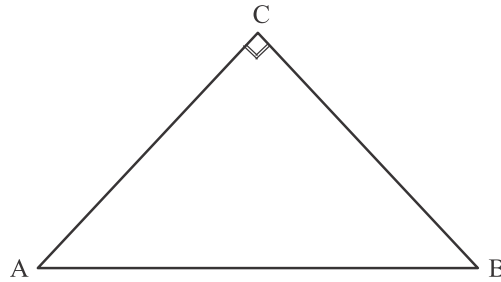
$BC = EF$ ((1) से)

$\angle C = \angle F$ (समान कोणिक त्रिभुज से)

अतः A S A सर्वांगमस प्रमेय से

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उदाहरण-9. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए $AB^2 = 2AC^2$ है।



आकृति 11.51

हल: ABC एक समकोण त्रिभुज है। जिसमें

$\angle C = 90^\circ, AC = BC$

(दिया हुआ)

... (1)

समकोण त्रिभुज में बोधायन प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

या $AB^2 = AC^2 + AC^2$

[1] से

या $AB^2 = 2AC^2$

इति सिद्धम्

उदाहरण-10. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है, तो सिद्ध

कीजिए। $9AD^2 = 7AB^2$ है।

हल: $\therefore \triangle ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है। और A से BC पर AE लम्ब डाला है

अतः किसी भी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उसका समद्विभाजन करता है।

अतः $BE = EC = \frac{1}{2}BC$ [रचना से]

तथा $BD = \frac{1}{3}BC$ [दिया हुआ है]

एवं $AB = BC = CA$ [दिया हुआ है]

समकोण $\triangle ABE$ में $AB^2 = AE^2 + BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - BE^2$

या $AE^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$ $\left[\because BE = \frac{1}{2}BC\right]$

या $AE^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4}$

या $AE^2 = \frac{4AB^2 - BC^2}{4}$

समकोण $\triangle ADE$ में

$AD^2 = AE^2 + DE^2$

या $AE^2 = AD^2 - DE^2$

या $AE^2 = AD^2 - (BE - BD)^2$

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC\right)^2$ $[\because BE = \frac{1}{2}BC \text{ एवं } BD = \frac{1}{3}BC]$

या $AE^2 = AD^2 - \left(\frac{BC}{6}\right)^2$

या $AE^2 = \frac{36AD^2 - BC^2}{36}$ (2)

(1) व (2) से $\frac{4AB^2 - BC^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

या $\frac{4AB^2 - AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$ $[\because AB = BC = CA]$

या $\frac{3AB^2}{4} = \frac{36AD^2 - AB^2}{36}$

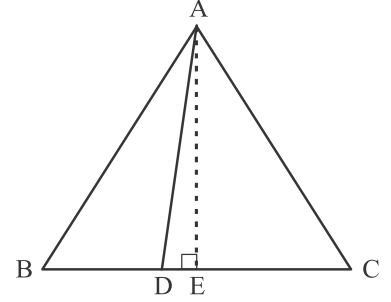
या $27AB^2 = 36AD^2 - AB^2$

या $28AB^2 = 36AD^2$

या $7AB^2 = 9AD^2$

अर्थात् $9AD^2 = 7AB^2$

इति सिद्धम्

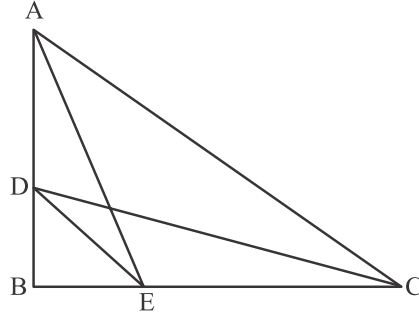


आकृति 11.52

... (1)

.....(2)

उदाहरण-11. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण $\angle B = 90^\circ$ है। माना कि D और E क्रमशः AB एवं BC पर दो बिन्दु स्थित हैं। सिद्ध कीजिए $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$



आकृति 11.53

हल: $\triangle ABE$ समकोण त्रिभुज है तथा $\angle B = 90^\circ$

$$\therefore AE^2 = AB^2 + BE^2 \quad \dots (1)$$

पुनः $\triangle DBC$ समकोण त्रिभुज है और $\angle B = 90^\circ$

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 \quad \dots (2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$AE^2 + CD^2 = (AB^2 + BC^2) + (BE^2 + BD^2) \quad \dots (3)$$

इसी प्रकार समकोण $\triangle ABC$ एवं समकोण $\triangle DBE$ में

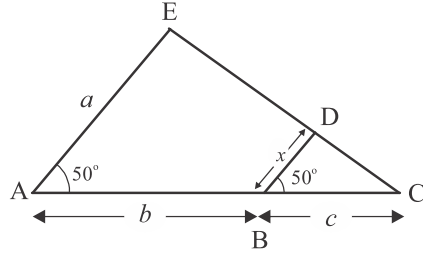
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ एवं } DE^2 = BE^2 + BD^2 \quad \dots (4)$$

(3) व (4) से

$$AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2 \quad \text{इति सिद्धम्}$$

प्रश्नमाला 11.4

- निम्न के उत्तर सत्य एवं असत्य में देना है। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए (यदि सम्भव हो)
 - दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात 4 : 9 है तो इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 9 है।
 - दो त्रिभुजों क्रमशः ABC व DEF में यदि $\frac{\Delta ABC \text{ के क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ के क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{9}{4}$ है तो $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ होगा।
 - दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी भुजाओं के वर्गों के समानुपाती होता है।
 - $\triangle ABC$ एवं $\triangle AXY$ समरूप हो और उनके क्षेत्रफलों का मान समान हो तो XY, एवं BC सम्पाती भुजाएँ हो सकती है।
- यदि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 वर्ग सेमी. और 121 वर्ग सेमी. हैं यदि EF = 15.4 सेमी हो तो BC ज्ञात कीजिए।
- एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC एवं DBC बने हैं। यदि AD व BC परस्पर O पर प्रतिच्छेद करे तो सिद्ध कीजिए $\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AO}{DO}$
- निम्न प्रश्नों के हल ज्ञात कीजिए।
 - $\triangle ABC$ में DE $\parallel$ BC एवं AD : DB = 2 : 3 हो तो $\triangle ADE$ एवं $\triangle ABC$ के क्षेत्रफलों के अनुपात ज्ञात कीजिए।
 - रेखा खण्ड AB के बिन्दु A व B पर PB और QA लम्ब है। यदि P व Q, AB के दोनों ओर स्थित हो और P व Q को मिलाने पर वह AB को O पर प्रतिच्छेद करे तथा PO = 5 सेमी, QO = 7 सेमी, $\triangle POB$ का क्षेत्रफल 150 सेमी² हो तो $\triangle QOA$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
 - आकृति में x का मान a, b एवं c के पदों में ज्ञात कीजिए।

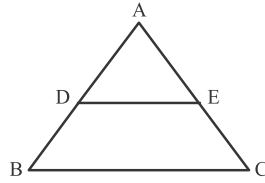


आकृति 11.54

5. $\triangle ABC$ में $\angle B = 90^\circ$ हो एवं BD कर्ण AC पर लम्ब हो तो सिद्ध कीजिए। $\triangle ADB \sim \triangle BDC$
6. सिद्ध कीजिए कि वर्ग की एक भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

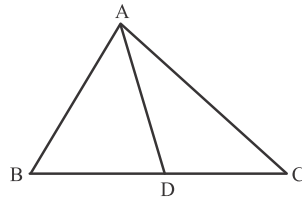
विविध प्रश्नमाला-11

1. आकृति में $DE \parallel BC$ हो, $AD = 4$ सेमी. $DB = 6$ सेमी एवं $AE = 5$ सेमी हो, तो EC का मान होगा—



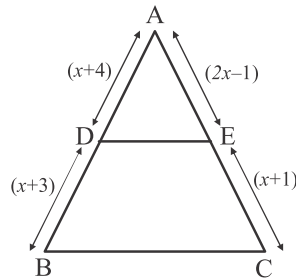
आकृति 11.55

- (क) 6.5 सेमी (ख) 7.0 सेमी (ग) 7.5 सेमी (घ) 8.0 सेमी
2. आकृति में AD , कोण A का समद्विभाजक है, $AB = 6$ सेमी. $BD = 8$ सेमी. $DC = 6$ सेमी हो, तो AC का मान होगा—



आकृति 11.56

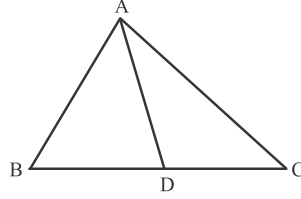
- (क) 4.0 सेमी (ख) 4.5 सेमी (ग) 5 सेमी (घ) 5.5 सेमी
3. आकृति में, यदि $DE \parallel BC$ हो, तो x का मान होगा—



आकृति 11.57

- (क) $\sqrt{5}$ (ख) $\sqrt{6}$ (ग) $\sqrt{3}$ (घ) $\sqrt{7}$

4. आकृति 11.58 में, यदि $AB = 3.4$ सेमी, $BD = 4$ सेमी, $BC = 10$ सेमी हो, तो AC का मान होगा—



आकृति 11.58

- (क) 5.1 सेमी (ख) 3.4 सेमी (ग) 6 सेमी (घ) 5.3 सेमी
5. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल क्रमशः 25 सेमी² एवं 36 सेमी² हैं, यदि छोटे त्रिभुज की माध्यिका 10 सेमी हो, तो बड़े त्रिभुज की संगत माध्यिका होगी—
(क) 12 सेमी (ख) 15 सेमी (ग) 10 सेमी (घ) 18 सेमी
6. एक समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \parallel CD$ है एवं इसके विकर्ण O बिन्दु पर मिलते हैं। यदि $AB = 6$ सेमी एवं $DC = 3$ सेमी हो, तो $\triangle AOB$ के क्षेत्रफल एवं $\triangle COD$ के क्षेत्रफल का अनुपात होगा—
(क) $4 : 1$ (ख) $1 : 2$ (ग) $2 : 1$ (घ) $1 : 4$
7. यदि $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ में $\angle A = 50^\circ, \angle B = 70^\circ, \angle C = 60^\circ, \angle D = 60^\circ, \angle E = 70^\circ$ एवं $\angle F = 50^\circ$ हो तो निम्नलिखित में सही है
(क) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (ख) $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ (ग) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (घ) $\triangle ABC \sim \triangle FED$
8. यदि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ हो, एवं $AB = 10$ सेमी, $DE = 8$ सेमी हो, तो $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $\triangle DEF$ का क्षेत्रफल होगा—
(क) $25 : 16$ (ख) $16 : 25$ (ग) $4 : 5$ (घ) $5 : 4$
9. $\triangle ABC$ की भुजाओं AB एवं AC पर बिन्दु D और E इस प्रकार हैं कि $DE \parallel BC$ है एवं $AD = 8$ सेमी, $AB = 12$ सेमी तथा $AE = 12$ सेमी हो, तो CE का माप होगा—
(क) 6 सेमी (ख) 18 सेमी (ग) 9 सेमी (घ) 15 सेमी
10. एक 12 सेमी लम्बी उर्ध्वाधर छड़ की जमीन पर छाया की लम्बाई 8 सेमी. लम्बी है। यदि इसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 40 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई होगी—
(क) 60 मीटर (ख) 60 सेमी (ग) 40 सेमी (घ) 80 सेमी
11. $\triangle ABC$ में यदि D , BC पर कोई बिन्दु इस प्रकार है कि $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ हो, एवं $\angle B = 70^\circ, \angle C = 50^\circ$ हो, तो $\angle BAD$ ज्ञात कीजिए।
12. यदि $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ हो, एवं $AD = 6$ सेमी, $DB = 9$ सेमी, और $AE = 8$ सेमी हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।
13. यदि $\triangle ABC$ में $\angle A$ का समद्विभाजक AD हो एवं $AB = 8$ सेमी, $BD = 5$ सेमी एवं $DC = 4$ सेमी हो, तो AC को ज्ञात कीजिए।
14. यदि दो समरूप त्रिभुजों की ऊँचाईयों का अनुपात $4:9$ हो, तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. समरूप आकृतियाँ आकार में समान एवं माप में समान हो यह आवश्यक नहीं है।
2. दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण समान हो।
3. दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती एवं संगत कोण समान हो।
4. थेल्स प्रमेय (आधारभूत आनुपातिक प्रमेय) यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को काटते हुए कोई रेखा खींची जाए तो वह त्रिभुज की अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।
5. यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती हो, तो यह रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।
6. दो सरल रेखीय आकृतियाँ समान कोणिक होती हैं यदि इनके संगत कोण समान हो एवं इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं एवं ये समरूप होते हैं।
7. कोण कोण समरूपता: यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण समान हो, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।
8. कोण कोण समरूपता: यदि एक त्रिभुज के दो कोण, दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों के समान हो, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।
9. भुजा कोण भुजा समरूपता: यदि किसी त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के किसी कोण के बराबर हो एवं उन कोणों को अन्तर्विष्ट करने वाली भुजाएँ समानुपाती हो, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।
10. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।
11. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत ऊँचाइयों के वर्गों के अनुपात के समान होता है।
12. अधिक कोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ अधिक कोण हो और $AD \perp BC$ हो तो $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 BC \times BD$ होता है।
13. $\triangle ABC$ न्यून कोण त्रिभुज हो और $AD \perp BC$ हो तो $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$ होता है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 11.1

- (i) समरूप (ii) समरूप (iii) समबाहू (iv) (a) उनके संगत कोण समान हो (b) संगत भुजाओं का अनुपात समान हो।
- (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (क्योंकि केवल संगत भुजाओं का समानुपाती होना पर्याप्त नहीं है। (iv) सत्य (v) असत्य

प्रश्नमाला 11.2

- (i) 20 सेमी. (ii) 15.6 सेमी. (iii) 9.9 सेमी. (iv) $x = 1, \frac{-1}{2}$
- (i) समान्तर है (ii) समान्तर नहीं है (iii) समान्तर नहीं है (iv) समान्तर है।

प्रश्नमाला 11.3

- यदि $\angle A = \angle P$ व $\angle C = \angle R$ हो तो $\angle B$ व $\angle Q$ स्वतः समान हो जाएंगे तो दो त्रिभुज समान कोणिक हो जावेंगे।
- $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ नहीं है। क्योंकि दिए गए कोणों के क्रम के अनुसार $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ होने चाहिए।
- $\triangle ABC \sim \triangle FDE$ के लिए प्रश्न में दिया गया अनुपात नहीं लिखा जा सकता वास्तव में शीर्षों के क्रम में $\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EF}$ लिया जाना चाहिए।
- यह कथन सत्य नहीं है क्योंकि दोनों त्रिभुजों में दो भुजाएं और उनके अन्तर्गत कोण समान होने पर ही दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।
- दो समानकोणिक त्रिभुजों में संगत कोण बराबर होते हैं। यदि संगत कोण बराबर हो तो दोनों $\triangle$ समरूप होते हैं।
- (i) व (viii) $\triangle ABC \sim \triangle QRP$, (ii) व (vii) $\triangle MPN \sim \triangle ZYX$, (iii) व (v) $\triangle PQR \sim \triangle EFG$, (iv) व (vi) $\triangle EDF \sim \triangle NML$
- $\angle P = \angle RTS, \angle Q = \angle RST$
- $\triangle ADC \sim \triangle BEC$
- 1.6 मी.
- 84 मी.

प्रश्नमाला 11.4

- (i) असत्य भुजाओं के वर्गों के अनुपात अर्थात् 16 : 81 होगा
(ii) असत्य चूंकि संगत भुजाओं का अनुपात $\frac{3}{2}$ है जबकि सर्वांगसमता के लिए यह अनुपात 1 : 1 होता है।
(iii) असत्य क्योंकि क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।
(iv) सत्य
- 11.2 सेमी.
- (i) 4 : 25 (ii) 294 सेमी² (iii) $x = \frac{ac}{b+c}$

विविधप्रश्नमाला-11

- (ग) 2. (ख) 3. (घ) 4. (क) 5. (क) 6. (क) 7. (घ)
- (क) 9. (क) 10. (क) 11. 30° 12. 20 सेमी 13. 6.4 सेमी 14. 16:81