6 बैजिक राशियों के गुणनखंड

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने $ax + ay$ और $a^2 - b^2$ इस स्वरुप वाली बैजिक राशियों के गुणनखंड का अध्ययन किया है ।

उदाहरण (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$

आओ जानें

वर्ग त्रिपद के गुणनखंड (Factors of a quadratic trinomial)

$ax^2 + bx + c$ स्वरुप वाले बैजिक राशि को वर्ग त्रिपद कहते हैं ।

हम यह जानते है कि $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore x^2 + (a + b)x + ab$ के $(x + a)$ तथा $(x + b)$ गुणनखंड हैं ।

$x^2 + 5x + 6$ के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए इसकी तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$ से करने पर, $a + b = 5$ और $ab = 6$ अत: 6 के ऐसे गुणखंड ज्ञात करो जिनका योग 5 हो तथा त्रिपदी $x^2 + (a + b)x + ab$ इस रुप में लिखकर उसके गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2$ ..... $x^2 + (a + b)x + ab$

$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2} \times 3$ ..... $(3 + 2)$ को x से गुणा कर प्राप्त गुणनफल के चार पदों के दो समूह बनाकर गुणनखंड प्राप्त कीजिए

$= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2)$

दिए गए वर्ग त्रिपदी के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित उदाहरणों का अध्ययन कीजिए ।

उदा. (1) $2x^2 - 9x + 9$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

हल : वर्ग पद का गुणांक तथा स्थिर पद का गुणा करने पर गुणनफल $2 \times 9 = 18$ है ।

अब 18 के ऐसे गुणनखंड ज्ञात करेंगे जिनका योगफल मध्य पद के गुणांक के बराबर अर्थात -9 होगा ।

$18 = (-6) \times (-3)$ और $(-6) + (-3) = -9$

$-9x$ इस पद को $-6x - 3x$ ऐसे लिखेंगे

$(x - 3)$ सामान्य पद ज्ञात करेंगे ।

+18

−6 −3

$2x^2 - 9x + 9$

$= \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9}$

$= 2x(x - 3) - 3(x - 3)$

$= (x - 3)(2x - 3)$

$\therefore 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$

उदा. (2) $2x^2 + 5x - 18$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

हल : $2x^2 + 5x - 18$

-36 → $+9$, -4

$= 2x^2 + 9x - 4x - 18$

$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$

$= (2x + 9)(x - 2)$

उदा. (3) $x^2 - 10x + 21$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

हल : $x^2 - 10x + 21$

$+21$ → -7, -3

$= x^2 - 7x - 3x + 21$

$= x(x - 7) - 3(x - 7)$

$= (x - 7)(x - 3)$

उदा. (4) $2y^2 - 4y - 30$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

हल : $2y^2 - 4y - 30$

$= 2(y^2 - 2y - 15)$ ..... सभी पदों में से सामान्य गुणनखंड 2 प्राप्त करेंगे ।

$= 2(y^2 - 5y + 3y - 15)$ .....

-15 → -5, $+3$

$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$

$= 2(y - 5)(y + 3)$

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

(1) $x^2 + 9x + 18$ (2) $x^2 - 10x + 9$ (3) $y^2 + 24y + 144$

(4) $5y^2 + 5y - 10$ (5) $p^2 - 2p - 35$ (6) $p^2 - 7p - 44$

(7) $m^2 - 23m + 120$ (8) $m^2 - 25m + 100$ (9) $3x^2 + 14x + 15$

(10) $2x^2 + x - 45$ (11) $20x^2 - 26x + 8$ (12) $44x^2 - x - 3$

आओ जानें

$a^3 + b^3$ के गुणनखंड (Factors of $a^3 + b^3$)

हम जानते है कि, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

दाहिने पक्ष में $3ab$ सामान्य लेकर विस्तार सूत्र की रचना निम्नलिखित प्रकार से कर सकते हैं ।

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

अब, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$..... पक्ष बदलने पर

$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$

$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore$ $\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$

दो घनों के योग के गुणनखंडों का उपरोक्त सूत्रों का उपयोग कर दिए गए उदाहरण हल करेंगे ।

उदा. (1) $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$= (x + 3y)\,[x^2 - x(3y) + (3y)^2]$

$= (x + 3y)\,[x^2 - 3xy + 9y^2]$

उदा. (2) $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q)\,[(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$= (2p + 5q)\,(4p^2 - 10pq + 25q^2)$

उदा. (3) $m^3 + \frac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right]$

$= \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$

उदा. (4) $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$

$= 2\,[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)\,(25p^2 - 30pq + 36q^2)$

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. गुणनखंड ज्ञात कीजिए : (1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$

(5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \frac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$

आओ जानें

$a^3 - b^3$ के गुणनखंड (Factors of $a^3 - b^3$)

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

अब, $a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b) = (a - b)^3$

$\therefore \quad a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$

$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab\,(a - b)]$

$= (a - b)\,[(a - b)^2 + 3ab]$

$= (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$

$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

$\therefore \quad \boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$

दो घनों के अंतर का गुणनखंड ज्ञात करने के सूत्र का उपयोग कर दिए गए उदाहरण हल कीजिए ।

उदा. (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

उदा. (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (3) $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$

$= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

उदा. (5) सरल रुप दीजिए : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

हल : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

उदा. (6) सरल रुप दीजिए : $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

हल : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ इस सूत्र के आधार पर

$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$= [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2]$

$= [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2]$

$= 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$

मैंने यह समझा

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

प्रश्नसंग्रह 6.3

1. गुणनखंड ज्ञात कीजिए (1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

2. सरल रुप दीजिए (1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

परिमेय बैजिक व्यंजक (Rational algebraic expressions)

A और B दो बैजिक व्यंजक हों तो $\frac{A}{B}$ इस व्यंजक को परिमेय बैजिक व्यंजक कहते हैं । परिमेय बैजिक व्यंजक को सरल रुप देते समय गणितीय संक्रियाएँ जोड़, घटाना, गुणा, भाग आदि परिमेय संख्याओं पर संक्रियाओं की तरह होती है । बैजिक राशियों का भाग करते समय हर या भाजक शून्य नहीं हो सकता, इसे ध्यान में रखें ।

उदा. (1) सरल रुप दीजिए $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$

हल : $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$

$=\frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)}\times\frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$

$=\frac{1}{a-2}$

उदा. (2) $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$

हल : $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$

$=\frac{(7x+4)(x+2)}{(7x+4)(7x-4)}\times\frac{2(7x-4)}{(x+2)}$

$=2$

उदा. (3) सरल रुप दीजिए $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}$

हल : $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}=\frac{(x+3y)(x-3y)}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}=\frac{x+3y}{x^2+3xy+9y^2}$

प्रश्नसंग्रह 6.4

1. सरल रुप दीजिए ।

(1) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}\times\frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}$ (2) $\frac{a^2+10a+21}{a^2+6a-7}\times\frac{a^2-1}{a+3}$ (3) $\frac{8x^3-27y^3}{4x^2-9y^2}$

(4) $\frac{x^2-5x-24}{(x+3)(x+8)}\times\frac{x^2-64}{(x-8)^2}$ (5) $\frac{3x^2-x-2}{x^2-7x+12}\div\frac{3x^2-7x-6}{x^2-4}$ (6) $\frac{4x^2-11x+6}{16x^2-9}$

(7) $\frac{a^3-27}{5a^2-16a+3}\div\frac{a^2+3a+9}{25a^2-1}$ (8) $\frac{1-2x+x^2}{1-x^3}\times\frac{1+x+x^2}{1+x}$

उत्तर सूची

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. (1) $(x + 6)(x + 3)$ (2) $(x - 9)(x - 1)$ (3) $(y + 12)(y + 12)$

(4) $5(y + 2)(y - 1)$ (5) $(p - 7)(p + 5)$ (6) $(p + 4)(p - 11)$

(7) $(m - 15)(m - 8)$ (8) $(m - 20)(m - 5)$ (9) $(x + 3)(3x + 5)$

(10) $(x + 5)(2x - 9)$ (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$ (12) $(11x - 3)(4x + 1)$

प्रश्नसंग्रह 6.2

1. (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$

(3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$ (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$

(5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ (6) $\left(y+\frac{1}{2y}\right)\left(y^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}\right)$

(7) $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a^2-2+\frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1+\frac{q}{5}\right)\left(1-\frac{q}{5}+\frac{q^2}{25}\right)$

प्रश्नसंग्रह 6.3

1. (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + y^2)$ (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$

(3) $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$ (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$

(5) $\left(2p-\frac{3}{p}\right)\left(4p^2+6+\frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$

(7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$ (8) $16\left(a-\frac{2}{b}\right)\left(a^2+\frac{2a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)$

2. (1) $6x^2y + 2y^3$ (2) $270a^2b + 250b^3$ (3) $3a^2b + 3ab^2$

(4) $-3p^2 - 3p - 1$ (5) $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$

प्रश्नसंग्रह 6.4

1. (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a + 1$ (3) $\frac{4x^2+6xy+9y^2}{2x+3y}$

(4) 1 (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$

(6) $\frac{x-2}{4x+3}$ (7) $5a + 1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$

CP11VK