5 توسیعی ضابطے

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم درج ذیل توسیعی ضابطوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, (ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

مذکورہ بالا ضابطوں کا استعمال کرکے درج ذیل خالی چوکونوں میں مناسب رکن لکھیے۔

(i) $(x + 2y)^2 = x^2 + \square + 4y^2$

(ii) $(2x - 5y)^2 = \square - 20xy + \square$

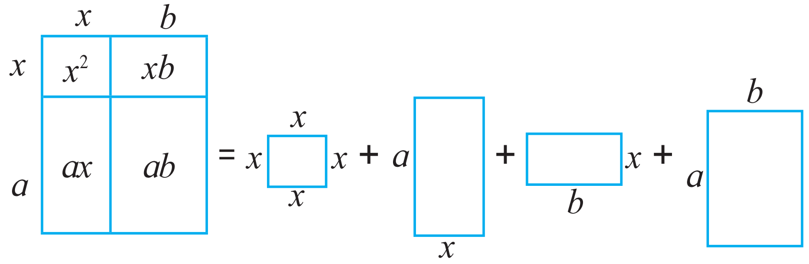
(iii) $(101)^2 = (100 + 1)^2 = \square + \square + 1^2 = \square$

(iv) $(98)^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - \square + \square = \square$

(v) $(5m + 3n)(5m - 3n) = \square - \square = \square - \square$

آیئے سمجھ لیں

عملی کام : مستطیل اور مربع کے رقبوں کی مدد سے $(x + a)(x + b)$ کی توسیع کیجیے۔



$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(I) $(x + a)(x + b)$ کی توسیع : [Expansion of $(x + a)(x + b)$]

$(x + a)$ اور $(x + b)$ یہ ایک مساوی متغیر کی دو رکنیاں ہیں۔ ان دو رکنیوں کا ضرب کریں گے۔

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$$

$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\therefore \quad \boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$$

مثال (1) $(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + (2\times 3) = x^2 + 5x + 6$

مثال (2) $(y+4)(y-3) = y^2 + (4-3)y + (4)\times(-3) = y^2 + y - 12$

مثال (3) $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 + [(3b)+(-3b)]2a + [3b\times(-3b)]$

$= 4a^2 + 0\times 2a - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

مثال (4) $\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) = m^2 + \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)m + \frac{3}{2}\times\frac{1}{2} = m^2 + 2m + \frac{3}{4}$

مثال (5) $(x-3)(x-7) = x^2 + (-3-7)x + (-3)(-7) = x^2 - 10x + 21$

مشقی سیٹ 5.1

1. توسیع کیجیے :

(1) $(a+2)(a-1)$ (2) $(m-4)(m+6)$ (3) $(p+8)(p-3)$

(4) $(13+x)(13-x)$ (5) $(3x+4y)(3x+5y)$ (6) $(9x-5t)(9x+3t)$

(7) $\left(m+\frac{2}{3}\right)\left(m-\frac{7}{3}\right)$ (8) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$ (9) $\left(\frac{1}{y}+4\right)\left(\frac{1}{y}-9\right)$

آیئے سمجھ لیں

(II) $(a+b)^3$ کی توسیع [Expansion of $(a+b)^3$] :

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(a+b)^2$

$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\therefore$ $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

اس توسیعی ضابطے کا استعمال کرکے حل کردہ کچھ مثالوں کا مطالعہ کریں گے۔

مثال 1 : $(x+3)^3$

ہم جانتے ہیں کہ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

یہاں $a = x$ اور $b = 3$ ہے۔

$$\therefore\ (x+3)^3 = (x)^3 + 3\times x^2\times 3 + 3\times x\times(3)^2 + (3)^3$$
$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

مثال (2)
$$(3x+4y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3$$
$$= 27x^3 + 3\times 9x^2\times 4y + 3\times 3x\times 16y^2 + 64y^3$$
$$= 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$$

مثال (3)
$$\left(\frac{2m}{n}+\frac{n}{2m}\right)^3 = \left(\frac{2m}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{2m}{n}\right)^2\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \left(\frac{n}{2m}\right)^3$$
$$= \frac{8m^3}{n^3} + 3\left(\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n^2}{4m^2}\right) + \frac{n^3}{8m^3}$$
$$= \frac{8m^3}{n^3} + \frac{6m}{n} + \frac{3n}{2m} + \frac{n^3}{8m^3}$$

مثال (4)
$$(41)^3 = (40+1)^3 = (40)^3 + 3\times(40)^2\times 1 + 3\times 40\times(1)^2 + (1)^3$$
$$= 64000 + 4800 + 120 + 1 \quad = 68921$$

مشقی سیٹ 5.2

1. توسیع کیجیے۔

(1) $(k+4)^3$ (2) $(7x+8y)^3$ (3) $(7+m)^3$ (4) $(52)^3$

(5) $(101)^3$ (6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ (7) $\left(2m+\frac{1}{5}\right)^3$ (8) $\left(\frac{5x}{y}+\frac{y}{5x}\right)^3$

عملی کام : a اور b مناسب لمبائی کے کناروں (ضلع) والا ہر ایک کا ایک مکعب بنائیے۔ لمبائی اور چوڑائی دونوں a اور اونچائی b والے 3 مستطیلی منشور (مکعب نما)، اسی طرح لمبائی اور چوڑائی دونوں b اور اونچائی a والے 3 مستطیلی منشور بنائیے۔ ان اجسام کو مناسب ترتیب دے کر $(a+b)$ ضلعے والا ایک مکعب تیار کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

(III) $(a-b)^3$ کی توسیع [Expansion of $(a-b)^3$] :

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)(a-b)^2$$
$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\therefore \quad \boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

مثال 1 : توسیع کیجیے $(x - 2)^3$

ہم جانتے ہیں کہ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

یہاں $a = x$ اور $b = 2$ لے کر

$$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

مثال 2 : $(4p - 5q)^3$ کی توسیع کیجیے۔

$$(4p - 5q)^3 = (4p)^3 - 3(4p)^2(5q) + 3(4p)(5q)^2 - (5q)^3$$

$$(4p - 5q)^3 = 64p^3 - 240p^2q + 300pq^2 - 125q^3$$

مثال 3 : توسیعی ضابطے کا استعمال کر کے 99 کا مکعب معلوم کیجیے۔

$$(99)^3 = (100 - 1)^3$$

$$(99)^3 = (100)^3 - 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - 1^3$$

$$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 9{,}70{,}299$$

مثال 4 : آسان کیجیے۔

(i) $(p + q)^3 + (p - q)^3$

$$= p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$$

$$= 2p^3 + 6pq^2$$

(ii) $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$$= [(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3]$$

$$- [(2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3]$$

$$= (8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) - (8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)$$

$$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$$

$$= 72x^2y + 54y^3$$

یہ میری سمجھ میں آ گیا

(i) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

(ii) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

مشقی سیٹ 5.3

.1 توسیع کیجیے۔

(1) $(2m-5)^3$ (2) $(4-p)^3$ (3) $(7x-9y)^3$ (4) $(58)^3$

(5) $(198)^3$ (6) $\left(2p-\dfrac{1}{2p}\right)^3$ (7) $\left(1-\dfrac{1}{a}\right)^3$ (8) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)^3$

.2 مختصر کیجیے۔

(1) $(2a+b)^3-(2a-b)^3$ (2) $(3r-2k)^3+(3r+2k)^3$

(3) $(4a-3)^3-(4a+3)^3$ (4) $(5x-7y)^3+(5x+7y)^3$

آیئے سمجھ لیں

(IV) $(a+b+c)^2$ کی توسیع [Expansion of $(a+b+c)^2$] :

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)\times(a+b+c)$$
$$= a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)$$
$$= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$\therefore \boxed{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}$$

ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 1 : $(p+q+3)^2$ کی توسیع کیجیے۔

$$= p^2+q^2+(3)^2+2\times p\times q+2\times q\times 3+2\times p\times 3$$
$$= p^2+q^2+9+2pq+6q+6p \quad = p^2+q^2+2pq+6q+6p+9$$

مثال 2 : مربعی توسیع کے مرحلوں کے چوکونوں میں مناسب رکن لکھیے۔

$$(2p+3m+4n)^2$$
$$= (2p)^2+(3m)^2+\square+2\times 2p\times 3m+2\times\square\times 4n+2\times 2p\times\square$$
$$= \square+9m^2+\square+12pm+\square+\square$$

مثال 3 : مختصر کیجیے۔

$$(l+2m+n)^2+(l-2m+n)^2$$
$$= l^2+4m^2+n^2+4lm+4mn+2ln+l^2+4m^2+n^2-4lm-4mn+2ln$$
$$= 2l^2+8m^2+2n^2+4ln$$

مشقی سیٹ 5.4

.1 توسیع کیجیے۔

(1) $(2p + q + 5)^2$ (2) $(m + 2n + 3r)^2$

(3) $(3x + 4y - 5p)^2$ (4) $(7m - 3n - 4k)^2$

.2 مختصر کیجیے۔

(1) $(x - 2y + 3)^2 + (x + 2y - 3)^2$

(2) $(3k - 4r - 2m)^2 - (3k + 4r - 2m)^2$ (3) $(7a - 6b + 5c)^2 + (7a + 6b - 5c)^2$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 5.1 (1) $a^2 + a - 2$ (2) $m^2 + 2m - 24$ (3) $p^2 + 5p - 24$

(4) $169 - x^2$ (5) $9x^2 + 27xy + 20y^2$ (6) $81x^2 - 18xt - 15t^2$

(7) $m^2 - \frac{5}{3}m - \frac{14}{9}$ (6) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (9) $\frac{1}{y^2} - \frac{5}{y} - 36$

مشقی سیٹ 5.2 (1) $k^3 + 12k^2 + 48k + 64$ (2) $343x^3 + 1176x^2y + 1344xy^2 + 512y^3$

(2) $343 + 147m + 21m^2 + m^3$ (4) 140608 (5) 1030301

(6) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ (7) $8m^3 + \frac{12m^2}{5} + \frac{6m}{25} + \frac{1}{125}$

(8) $\frac{125x^3}{y^3} + \frac{15x}{y} + \frac{3y}{5x} + \frac{y^3}{125x^3}$

مشقی سیٹ 5.3 1. (1) $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$ (2) $64 - 48p + 12p^2 - p^3$

(3) $343x^3 - 1323x^2y + 1701xy^2 - 729y^3$ (4) 1,95,112

(5) 77,62,392 (6) $8p^3 - 6p + \frac{3}{2p} - \frac{1}{8p^3}$

(7) $1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^3}$ (8) $\frac{x^3}{27} - x + \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$

2. (1) $24a^2b + 2b^3$ (2) $54r^3 + 72rk^2$

(3) $-288a^2 - 54$ (4) $250x^3 + 1470xy^2$

مشقی سیٹ 5.4 1. (1) $4p^2 + q^2 + 25 + 4pq + 10q + 20p$

(2) $m^2 + 4n^2 + 9r^2 + 4mn + 12nr + 6mr$

(3) $9x^2 + 16y^2 + 25p^2 + 24xy - 40py - 30px$

(4) $49m^2 + 9n^2 + 16k^2 - 42mn + 24nk - 56km$

2. (1) $2x^2 + 8y^2 + 18 - 24y$ (2) $32rm - 48kr$

(3) $98a^2 + 72b^2 + 50c^2 - 120bc$

❑❑❑

DEL05B