حصّہ 2

10 کثیر رکنیوں کی تقسیم

آ یئے ذرا یاد کریں

گذشتہ سال الجبری عبارتوں کی جمع، تفریق اور ضرب کے اعمال کا ہم نے مطالعہ کیا ہے۔

درج ذیل مثالوں میں خالی چوکون مکمل کیجیے۔

(1) $2a + 3a = \square$

(2) $7b - 4b = \square$

(3) $3p \times p^2 = \square$

(4) $5m^2 \times 3m^2 = \square$

(5) $(2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \square$

(6) $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \square$

آ یئے سمجھ لیں

کثیر رکنیوں کا تعارف (Introduction to polynomials)

یک متغیری الجبری عبارتوں کے ہر رکن کے متغیر کی قوت نما مکمل عدد ہو تو، وہ عبارت ایک متغیری کثیر رکنی ہوتی ہے۔

مثلاً $x^2 + 2x + 3$ ، $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ یہ ایک متغیری کثیر رکنی ہیں۔

کثیر رکنیاں، مخصوص الجبری عبارت ہوتی ہیں، اس لیے کثیر رکنیوں کی جمع، تفریق اور ضرب جیسے اعمال الجبری عبارت کے مطابق کیے جاتے ہیں۔

مثال (1) $(3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2)$

$= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2)$

$= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3$

$= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3$

مثال (2) $(4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8)$

$= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8$

$= -3x^2 + 11x - 13$

کثیر رکنیوں کا درجہ (Degree of polynomials)

درج ذیل مثالوں کی کثیر رکنیوں کے متغیروں کا سب سے بڑا قوت نما چوکون میں لکھیے۔

مثال (1) کثیر رکنی $3x^2 + 4x$ کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\boxed{2}$ ہے۔

مثال (2) کثیر رکنی $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$ کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما $\square$ ہے۔

دی ہوئی کثیر رکنی کے متغیر کا سب سے بڑا قوت نما، اس کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے۔

یہ میری سمجھ میں آگیا

- یک متغیری الجبری عبارت کے ہر رکن کے متغیر کا قوت نما مکمل عدد ہو تو وہ عبارت کثیر رکنی ہوتی ہے۔
- کثیر رکنی میں متغیر کا سب سے بڑا قوت نما اس کثیر رکنی کا درجہ ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

یک رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنا (To Divide a Mononomial by Mononomial) :

مثال (1) تقسیم کیجیے۔ $15p^3 \div 3p$

حل : تقسیم، ضرب کا معکوس عمل ہوتا ہے۔

اس لیے تقسیم $15p^3 \div 3p$ کے لیے $3p$ یک رکنی کو کس یک رکنی سے ضرب کرنے پر $15p^3$ آئے گا۔

اس بات پر غور کرنا ہوگا۔

$$\begin{array}{r} 5p^2 \\ 3p\overline{)\,15p^3} \\ -\,15p^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$3p \times 5p^2 = 15p^3$, $\therefore\ 15p^3 \div 3p = 5p^2$

اس مثال کی ترتیب بازو میں دکھائے ہوئے کے مطابق کرسکتے ہیں۔

مثال (2) تقسیم کیجیے اور خالی چوکون میں مناسب ارکان لکھیے۔

(i) $(-36x^4) \div (-9x)$

$$\begin{array}{r} \square \\ -9x\overline{)\,-36x^4} \\ -\,\square \\ \hline \square \end{array}$$

(ii) $(5m^2) \div (-m)$

$$\begin{array}{r} \square \\ -m\overline{)\,5m^2} \\ -\,\square \\ \hline \square \end{array}$$

(iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r} \square \\ 2y^3\overline{)\,-20y^5} \\ -\,\square \\ \hline \square \end{array}$$

کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنا (To divide a polynomial by a mononomial) :

درج ذیل مثال کا مطالعہ کیجیے اور کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ سمجھ لیں۔

مثال (1) $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

حل :

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ 2x\overline{)\,6x^3 + 8x^2} \\ -\,6x^3 \qquad \\ \hline 0 + 8x^2 \\ -\quad\ \ -\ 8x^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

وضاحت

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$ خارج قسمت $= 3x^2 + 4x$

باقی $= 0$

مثال (2) $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

حل :

$$\begin{array}{r|l} & 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\ 5y^2 & 15y^4 + 10y^3 - 3y^2 \\ - & 15y^4 \\ \hline & 0 + 10y^3 - 3y^2 \\ - & 10y^3 \\ \hline & 0 - 3y^2 \\ - & \mp 3y^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

وضاحت –

(i) $5y^2 \times \boxed{3y^2} = 15y^4$

(ii) $5y^2 \times \boxed{2y} = 10y^3$

(iii) $5y^2 \times \boxed{\frac{-3}{5}} = -3y^2$

$\therefore$ خارج قسمت $= 3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$ ، باقی $= 0$

مثال (3) $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

حل :

$$\begin{array}{r|l} & 4p - 2 \\ 3p^2 & 12p^3 - 6p^2 + 4p \\ - & 12p^3 \\ \hline & 0 - 6p^2 + 4p \\ - & \mp 6p^2 \\ \hline & 0 + 4p \end{array}$$

وضاحت –

(i) $3p^2 \times \boxed{4p} = 12p^3$

(ii) $3p^2 \times \boxed{-2} = -6p^2$

$\therefore$ خارج قسمت $= 4p - 2$, باقی $= 4p$

مثال (4) $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

حل :

$$\begin{array}{r|l} & 5x^2 - 3x + 4 \\ x^2 & 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ - & 5x^4 \\ \hline & 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ - & \mp 3x^3 \\ \hline & 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\ - & - 4x^2 \\ \hline & 0 + 2x - 6 \end{array}$$

وضاحت –

(i) $x^2 \times \boxed{5x^2} = 5x^4$

(ii) $x^2 \times \boxed{-3x} = -3x^3$

(iii) $x^2 \times \boxed{4} = 4x^2$

$\therefore$ خارج قسمت $= 5x^2 - 3x + 4$, باقی $= 2x - 6$

کثیر رکنیوں کی تقسیم کرتے وقت جب باقی صفر آتا ہو، یا باقی رکن کا درجہ، مقسوم الیہ کثیر رکنی کے درجے سے چھوٹا ہو تب تقسیم کا عمل ختم ہو جاتا ہے۔

اوپر کی مثال (3) میں باقی $4p$ کا درجہ مقسوم الیہ $3p^2$ کے درجے سے چھوٹا ہے۔ اسی طرح مثال (4) میں باقی $2x - 6$ کا درجہ مقسوم الیہ x^2 کے درجے سے چھوٹا ہے۔ اسے دھیان میں رکھیے۔

مشقی سیٹ 10.1

1. تقسیم کیجیے : خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

(1) $21m^2 \div 7m$

(2) $40a^3 \div (-10a)$

(3) $(-48p^4) \div (-9p^2)$

(4) $40m^5 \div 30m^3$

(5) $(5x^3 - 3x^2) \div x^2$

(6) $(8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$

(7) $(2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$

(8) $(21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$

(9) $(6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$

(10) $(25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$

آیئے سمجھ لیں

کثیر رکنی کو دو رکنی سے تقسیم کرنا (To Divide a Polynomial by a Binomial) :

کثیر رکنیوں کو دو رکنی سے تقسیم کرنے کا طریقہ، کثیر رکنیوں کو یک رکنی سے تقسیم کرنے کے طریقے کے جیسا ہی ہوتا ہے۔

مثال (1) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

حل :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2 \\
x + 2 & x^2 + 4x + 4 \\
 & \underline{\overset{-}{x^2} \overset{-}{+} 2x} \\
 & 0 + 2x + 4 \\
 & \underline{\overset{-}{+} 2x \overset{-}{+} 4} \\
 & 0
\end{array}
$$

وضاحت :

(i) پہلے مقسوم اور مقسوم الیہ کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھیے۔

مقسوم الیہ کے پہلے رکن کو x سے ضرب کرنے پر مقسوم کا پہلا رکن حاصل ہوتا ہے۔

∴ مقسوم الیہ کو x سے ضرب کریں۔

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

∴ خارج قسمت $= x + 2$

باقی $= 0$

مثال (2) $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

حل : یہاں مقسوم کثیر رکنی کا درجہ 4 ہے۔اس کے متغیروں کے قوت نما اترتی ترتیب میں نہیں ہیں۔اسی طرح قوت نما 3 کا رکن بھی نہیں ہے۔اسے $0y^3$ مان کر اور مقسوم کثیر رکنی کو قوت نما کی اترتی ترتیب میں لکھ کر تقسیم کریں۔

$$\begin{array}{r|l}
 & y^3 - 4y^2 + 6y \\
y + 4 & y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{\underset{-}{}y^4 \underset{-}{+} 4y^3} \\
 & 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{\underset{+}{-} 4y^3 \underset{+}{-} 16y^2} \\
 & 0 + 6y^2 + 24y \\
 & \underline{\underset{-}{}6y^2 \underset{-}{+} 24y} \\
 & 0
\end{array}$$

وضاحت

(i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$ خارج قسمت $= y^3 - 4y^2 + 6y$ ، باقی $= 0$

مثال (3) $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

حل :

$$\begin{array}{r|l}
 & 6x^2 + 5x + 9 \\
x^2 - 1 & 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{\underset{-}{}6x^4 \qquad \underset{+}{-} 6x^2} \\
 & 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{\underset{-}{+} 5x^3 \qquad \underset{+}{-} 5x} \\
 & 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 & \underline{\underset{-}{}9x^2 \qquad \underset{+}{-} 9} \\
 & 0 + 10x + 0
\end{array}$$

وضاحت

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$ خارج قسمت $= 6x^2 + 5x + 9$ ، باقی $= 10x$

یہ میری سمجھ میں آ گیا

- کثیر رکنی کو تقسیم کرتے وقت جب باقی صفر بچتا ہے یا باقی کا درجہ، مقسوم الیہ کثیر رکنی کے درجے سے چھوٹا ہوتا ہے تب تقسیم کا عمل مکمل ہو جاتا ہے۔
- مقسوم کثیر رکنی کے ارکان قوت نما کی اترتی ترتیب میں نہیں ہوں تو کثیر رکنی کو قوت نما کی اُترتی ترتیب میں لکھیے۔ اگر کسی قوت نما کا رکن نہیں ہوتو اس کا ضریب 0 مان کر قوت نما کی اترتی ترتیب مکمل کیجیے۔

مشقی سیٹ 10.2

.1 تقسیم کیجیے۔ خارج قسمت اور باقی لکھیے۔

(1) $(y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$ (2) $(p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$

(3) $(3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$ (4) $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$

(5) $(3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$

(6★) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$

(7★) $(4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 10.1

1. $3m$, 0 2. $-4a^2$, 0 3. $\frac{-16}{3}p^2$, 0 4. $\frac{4}{3}m^2$, 0

5. $5x - 3$, 0 6. $4p - 2$, 0 7. $y + 2$, 3 8. $3x$, $-14x^2 + 7x$

9. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, 0 10. $5m - 3$, $10m + 8$

مشقی سیٹ 10.2

1. $y + 6$, 0 2. $p + 4$, -17 3. $4x^2 + 18x + 75$, 300

4. $m^2 + m + 1$, 10 5. $x^2 + x - 5$, $x - 2$

6. $a - 1$, $a^2 + a - 1$ 7. $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}$, $\frac{-13}{16}$

❑❑❑

DFX5DG