আমরা 60 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারে রাস্তার মানচিত্রটি আঁকার চেষ্টা করছি।

4 এই 60 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের চারধার রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে মোট কতটা দৈর্ঘ্যের রঙিন কাগজ লাগবে হিসাব করে লিখি।

রঙিন কাগজ লাগবে = 4×60 সেমি. দৈর্ঘ্যের = 240 সেমি. দৈর্ঘ্যের।

যদি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারে একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 50 সেমি. হতো, তবে ওই আর্টপেপারের চারধার রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে রঙিন কাগজ লাগবে ☐ সেমি. দৈর্ঘ্যের। [নিজে লিখি]

আমি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = x সেমি. ও ওই আর্টপেপারের পরিসীমা = y সেমি. ধরে, ছকটি পূরণ করি এবং x ও y কী সম্পর্কে আছে দেখি।

বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য (x) [সেমি.]	60	50	100	120
আর্টপেপারের পরিসীমা (y) [সেমি.]	240	200	400	নিজে লিখি

এক্ষেত্রেও দেখছি বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের বাহুর দৈর্ঘ্য x এবং পরিসীমা y দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি এমন হয় যে,সর্বদা $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$ (অশূন্য ধ্রুবক)

অর্থাৎ x ও y সরলভেদে আছে।

$\therefore x\propto y$ এবং এখানে ভেদ ধ্রুবকের মান $\frac{1}{4}$

5 একইরকম পেনের সংখ্যা (x) এবং পেনের মোট দাম (y) সরলভেদে আছে কিনা বুঝে লিখি।[নিজে করি]

6 আমি এইরকম দুই চলরাশি সংক্রান্ত 4 টি উদাহরণ লিখি যেখানে চলরাশিগুলি পরস্পর সরলভেদে আছে। [নিজে করি]

দুটি চল A ও B সম্পর্কিত মানগুলি পেয়েছি:

A	90	30	12	15	156
B	60	20	8	10	104

প্রয়োগ : 1. A ও B-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি ও ভেদ ধ্রুবকের মান লিখি।

দেখছি A-এর মান বাড়লে বা কমলে B-এর মান বাড়ছে বা কমছে,

আবার, $\frac{A}{B}=\frac{90}{60}=\frac{30}{20}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}=\frac{156}{104}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore A=\frac{3}{2}B$

$\therefore A\propto B$ এবং এখানে ভেদ ধ্রুবকের মান $\frac{3}{2}$

যেহেতু ভেদধ্রুবকের মান ধনাত্মক তাই A-চলের মান বাড়লে বা কমলে B-চলের অনুরূপ মান বাড়বে বা কমবে।

দুটি চলরাশি P ও Q সম্পর্কিত মানগুলি পেয়েছি,

P	35	49	56	14
Q	15	21	24	6

7 P ও Q-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 2. দোলকের [Pendulum-এর] দোলনকাল উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত সরলভেদে থাকে। যদি 1 মিটার দৈর্ঘ্যের কোনো দোলকের 1 সেকেন্ডে একবার পূর্ণ দোলন হয়, তবে যে দোলকের 2.5 সেকেন্ডে একবার পূর্ণ দোলন হয়, তার দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে দেখি।

ধরি, t = একবার পূর্ণ দোলনের সময় এবং ℓ = দোলকের দৈর্ঘ্য।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $t \propto \sqrt{\ell}$

$\therefore t = k\sqrt{\ell}$ [k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

$\therefore t = 1$ সেকেন্ড হলে $\ell = 1$ মিটার

সুতরাং, $1 = k\sqrt{1}$ $\therefore k = 1$ $\therefore$ ভেদধ্রুবকের মান 1

সুতরাং, পেলাম $t = \sqrt{\ell}$

$\therefore t = 2.5$ সেকেন্ড হলে, $\sqrt{\ell} = 2.5$

$\ell = 6.25$

$\therefore$ যে দোলকের 2.5 সেকেন্ডে একবার পূর্ণদোলন হয় তার দৈর্ঘ্য 6.25 মিটার।

প্রয়োগ : 3. y, x -এর বর্গের সঙ্গে সরলভেদে আছে এবং $y = 9$ যখন $x = 9$; y-কে x দ্বারা প্রকাশ করি এবং $y = 4$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

y, x -এর বর্গের সঙ্গে সরলভেদে আছে,

সুতরাং, $y \propto x^2$ $\therefore y = kx^2$ [যেখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

আবার, $y = 9$ যখন $x = 9$

সুতরাং, $9 = k(9)^2$ $\therefore k = \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9}$

সুতরাং, পেলাম $y = \frac{1}{9}x^2$ ———— (I)

(I)-এ $y = 4$ বসিয়ে পাই, $4 = \frac{1}{9}x^2$

বা, $x^2 = 36$ $\therefore x = \pm 6$

$\therefore y = 4$ হলে $x = \pm 6$

প্রয়োগ : 4. y, x-এর বর্গমূলের সঙ্গে সরলভেদে আছে এবং $y=9$ যখন $x=4$; ভেদ ধ্রুবকের মান লিখি এবং y-কে x দ্বারা প্রকাশ করি। $y=8$ হলে, x-এর মান কত হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

আমি ও রাহুল যখন গ্রামের রাস্তার মানচিত্র তৈরি করতে ব্যস্ত, আমার দিদিমা একটি স্টিলের টিফিন বাক্সে অনেকগুলি নারকেলের নাড়ু আমাদের জন্যে পাঠিয়ে দিলেন।

(8) গুনে দেখছি টিফিন বাক্সে 24 টি নারকেলের নাড়ু আছে। দুজনে না ভেঙে সমান ভাগে ভাগ করে নেব। প্রত্যেকে কতগুলি পাব দেখি।

আমরা প্রত্যেকে $24 \div 2$ টি = 12 টি নাড়ু পাব।

কিন্তু শিবানীও আমাদের সঙ্গে এই কাজে যোগ দিল। তাই আমরা এখন 3 জনে 24 টি নাড়ু সমান ভাগে ভাগ করে নেব। এখন প্রত্যেকে পাব ☐ টি নাড়ু।

কিন্তু আরও 3 জন বন্ধুর ক্লাবঘরে আসার কথা ছিল। ওরা যদি আসে আমরা মোট 6 জন হব। তাই 6 জনে 24 টি নাড়ু সমান ভাগে ভাগ করে নিলে প্রত্যেকে পাব ☐ টি নাড়ু।

9 আমাদের দিদিমার পাঠানো 24 টি নারকেলের নাড়ু বিভিন্ন সংখ্যক বন্ধুদের মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করে খেলে প্রত্যেকে কতগুলি পাব নীচের ছকে লিখি।

বন্ধুদের সংখ্যা (x)	2	3	6	4
প্রত্যেকের পাওয়া নারকেলের নাড়ুর সংখ্যা (y)	12	8	4	☐

∴ দেখছি মোট নারকেল নাড়ুর সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকলে বন্ধুদের সংখ্যা বাড়লে বা কমলে প্রত্যেকের পাওয়া নারকেল নাড়ুর সংখ্যা যথাক্রমে কমবে বা বাড়বে। দেখছি $2\times12 = 3\times8 = 6\times4 = 4\times6 = x\times y$.

অর্থাৎ $x\times y$-এর মানের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না। ধরি, $x\times y = k$ [যেখানে k অশূন্য ধ্রুবক]।

10 যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে , $xy = k$ (অশূন্য ধ্রুবক) হয়, তখন ওই দুটি চলরাশি কী সম্পর্কে আছে বলা হবে?

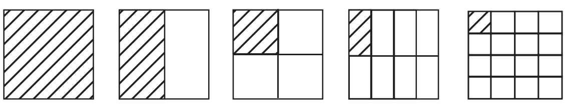
যদি দুটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত চলরাশি x ও y এমন হয় যে সর্বদা , $xy= k$ (অশূন্য ধ্রুবক) হয়, তখন বলা হয় যে x ও y **ব্যস্ত ভেদে (Inverse variation)** আছে এবং লেখা হয় $x \propto \frac{1}{y}$ এবং অশূন্য ধ্রুবকটিকে বলা হয় **ভেদধ্রুবক (Variation Constant)**।

যখন $xy = k$ (অশূন্য ধ্রুবক), এবং $k > 0$, তখন একটির মান বৃদ্ধি পেলে অপরটির অনুরূপ মান হ্রাস পায় এবং একটির মান হ্রাস পেলে অপরটির অনুরূপ মান বৃদ্ধি পায়।

যদি $xy = k$ (অশূন্য ধ্রুবক), এবং $k < 0$, হয় তখন x ও y চলরাশি দুটির পরিবর্তন কীরকম হবে নিজে লিখি।

নাড়ুর সংখ্যা ও বন্ধুদের সংখ্যা যথাক্রমে x ও y চলরাশি দুটি **ব্যস্ত** ভেদে আছে, অর্থাৎ $x \propto \frac{1}{y}$

11 আমার বন্ধু শাবিনা 50 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকার অনেকগুলি আর্টপেপার ভাঁজ করে কতকগুলি সমান ভাগে ভাগ করল। বাকি বন্ধুরা ওই আর্টপেপারের বিভিন্ন অংশে আঁকবে এবং ক্লাবঘরের বোর্ডে আটকে রাখবে। আমি শাবিনার ভাঁজ করা আর্টপেপারগুলি দেখি এবং বিভিন্ন অংশের ক্ষেত্রফল নীচের ছকে লেখার চেষ্টা করি।



বর্গক্ষেত্রাকার আর্টপেপারের অংশ (x)	1	2	4	8	16
প্রতিটি ভাঁজ করা অংশের ক্ষেত্রফল (y) [বর্গ সেমি.]	2500	1250	625	312.5	নিজে লিখি

দেখছি একই মাপের বর্গক্ষেত্রাকার কাগজের সমান অংশ সংখ্যা (x) বৃদ্ধির সঙ্গে প্রতিটি অংশের ক্ষেত্রফল (y) হ্রাস পাচ্ছে।

$$\therefore \quad 1\times2500 = 2\times1250$$
$$= 4\times625= 8 \times 312.5= 16\times156.25 = x \times y$$

অর্থাৎ $x \times y$ এর মানের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না।

$\therefore x \propto \frac{1}{y}$ এবং এখানে ভেদ ধ্রুবকের মান 2500.

প্রয়োগ : 5. আমি 36 টি বোতাম আয়তাকারে সাজাই এবং প্রতিক্ষেত্রে দৈর্ঘ্যে ও প্রস্থে থাকা বোতামের সংখ্যা ব্যস্ত ভেদে আছে কিনা বুঝে লিখি। [নিজে লিখি]

প্রয়োগ : 6. দুই চলরাশি সংক্রান্ত 2 টি উদাহরণ লিখি যেখানে চলরাশিগুলি পরস্পর ব্যস্তভেদে আছে। **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 7. x ও y দুটি চলের সম্পর্কিত মানগুলি পেয়েছি :

x	5	25	10	4	8
y	10	2	5	12.5	6.25

x ও y-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি ও ভেদ ধ্রুবকের মান নির্ণয় করি।

দেখছি, $xy = 5\times10 = 25\times2 = 10\times5 = 4\times12.5 = 8\times6.25$

$\therefore xy =$ ধ্রুবক

$\therefore x \propto \frac{1}{y}$ এবং ভেদ ধ্রুবকের মান 50.

প্রয়োগ : 8. দুটি চল x ও y সম্পর্কিত মানগুলি হলো :

x	3	2	6
y	18	27	9

x ও y-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 9. আমাদের কারখানায় 63 দিনে নির্দিষ্ট পরিমাণ লোহার যন্ত্রপাতি তৈরির জন্য 42টি মেশিন দরকার। কিন্তু ওই একই পরিমাণ লোহার যন্ত্রপাতি 54 দিনে তৈরির জন্য কতগুলি মেশিন দরকার ভেদ সম্পর্ক গঠন করে হিসাব করি।

ধরি, দিন সংখ্যা = D এবং মেশিনের সংখ্যা = M

যেহেতু কাজের পরিমাণ নিদিষ্ট রেখে, মেশিনের সংখ্যা বৃদ্ধি (হ্রাস) পেলে দিন সংখ্যা একই অনুপাতে হ্রাস (বৃদ্ধি) পায়। সুতরাং D ও M ব্যস্তভেদে আছে।

সুতরাং, $D \propto \frac{1}{M}$ $\therefore D = \frac{k}{M}$ [k = অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

D = 63 হলে, M = 42

সুতরাং, $63 = \frac{k}{42}$

বা, $k = 63\times42$

$\therefore D = \frac{63\times42}{M}$ ———— (I)

$\therefore$ (I) নং সমীকরণে D = 54 বসিয়ে পাই

$$54 = \frac{63\times42}{M}$$

বা, $M = \frac{63\times42}{54}$ $\therefore M = 49$

$\therefore$ একই পরিমাণ লোহার যন্ত্রপাতি 54 দিনে তৈরি করতে 49 টি মেশিন দরকার।

প্রয়োগ : 10. সমীরবাবু বাড়ি থেকে 60 কিমি./ঘণ্টা বেগে গাড়ি চালিয়ে 2 ঘণ্টায় স্টেশনে পৌঁছান। তিনি যদি 80 কিমি./ঘণ্টা বেগে গাড়ি চালাতেন, তবে বাড়ি থেকে কত সময়ে স্টেশনে পৌঁছাতেন। ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

[**উত্তর সংকেত :** নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করতে গতিবেগ ও প্রয়োজনীয় সময় ব্যস্ত ভেদে আছে।]

প্রয়োগ : 11. যদি $x \propto y$ হয়, তবে কি $y \propto x$ হবে? যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

প্রমাণ : $x \propto y \quad \therefore x = ky$ [k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

সুতরাং, $y = \frac{1}{k}x = mx$, যেখানে $m = \frac{1}{k}$ একটি অশূন্য ভেদ ধ্রুবক। যেহেতু k অশূন্য ধ্রুবক। $\therefore y \propto x$

$\therefore$ পেলাম $x \propto y$ হলে, $y \propto x$ হবে।

প্রয়োগ : 12. যদি $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $x \propto z$ হবে।

প্রমাণ : $x \propto y \quad \therefore x = ky$ এবং $y \propto z$ সুতরাং, $y = k'z$

এখানে k ও k' দুটি অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

আবার, $x = ky = k(k'z) = kk'z = mz$ [যেখানে, $m = kk'$ = অশূন্য ধ্রুবক] $\therefore x \propto z$

প্রয়োগ : 13. $x \propto y$ হলে, প্রমাণ করি যে $x+y \propto x-y$ হবে।

প্রমাণ : $x \propto y$ সুতরাং, $x = ky$, যেখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

$$\therefore \frac{x+y}{x-y} = \frac{ky+y}{ky-y} = \frac{y(k+1)}{y(k-1)} = \frac{k+1}{k-1} = n$$ [যেখানে, n = অশূন্য ধ্রুবক]

$\therefore x+y = n(x-y) \quad \therefore x+y \propto x-y$

প্রয়োগ : 14. $x \propto y$ হলে, প্রমাণ করি যে $x^n \propto y^n$ হবে।

প্রমাণ : $x \propto y$ সুতরাং, $x = ky$, যেখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

$x^n = k^n y^n = k_1 y^n$ [$k_1 = k^n$ = অশূন্য ধ্রুবক] $\therefore x^n \propto y^n$

প্রয়োগ : 15. $x+y \propto x-y$ হলে, প্রমাণ করি যে $x \propto y$ হবে।

প্রমাণ : $x+y \propto x-y$

$\therefore x+y = k(x-y)$ [যেখানে, k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

$\frac{x+y}{x-y} = \frac{k}{1}$

বা, $\frac{2x}{2y} = \frac{k+1}{k-1}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে]

বা, $\frac{x}{y} = k_1$ [যেখানে, $k_1 = \frac{k+1}{k-1}$ = অশূন্য ধ্রুবক]

বা, $x = k_1 y \quad \therefore x \propto y$

প্রয়োগ : 16. $A^2+B^2 \propto A^2-B^2$ হলে, প্রমাণ করি যে, $A \propto B$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 17. $x \propto y$ এবং $u \propto z$ হলে, প্রমাণ করি যে $xu \propto yz$ এবং $\frac{x}{u} \propto \frac{y}{z}$

প্রমাণ : $x \propto y$ সুতরাং, $x = k_1 y$

$u \propto z$ সুতরাং, $u = k_2 z$ [যেখানে, k_1 এবং k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

$\therefore xu = k_1 y \cdot k_2 z = k_1 k_2 yz = myz$ [যেখানে $m = k_1 k_2$ = অশূন্য ধ্রুবক]

$\therefore xu \propto yz$

$$\frac{x}{u} = \frac{k_1 y}{k_2 z} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{y}{z} = n\frac{y}{z}$$ [যেখানে $n = \frac{k_1}{k_2}$ = অশূন্য ধ্রুবক]

$\therefore \frac{x}{u} \propto \frac{y}{z}$

আমাদের বন্ধু অর্ক কিছু ত্রিভুজাকারক্ষেত্র কাগজ কেটে তৈরি করল।

এই ত্রিভুজাকারক্ষেত্রগুলির ভূমি ও উচ্চতার দৈর্ঘ্য মাপি ও তাদের ক্ষেত্রফল হিসাব করে নীচের ছকে লিখি।

ত্রিভুজের ভূমি (x) [সেমি.]	8	14	13	22
ত্রিভুজের উচ্চতা (y) [সেমি.]	10	7	15	12
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (A) [বর্গ সেমি.]	$\frac{1}{2}\times8\times10$	$\frac{1}{2}\times14\times7$	$\frac{1}{2}\times13\times15$	$\frac{1}{2}\times22\times12$

পেলাম, $\frac{A}{x\times y} = \frac{\frac{1}{2}\times8\times10}{8\times10} = \frac{\frac{1}{2}\times14\times7}{14\times7} = \frac{\frac{1}{2}\times13\times15}{13\times15} = \frac{\frac{1}{2}\times22\times12}{22\times12} = \frac{1}{2}$

$\therefore A \propto x\times y$

(12) এখানে দেখছি, একটি চলরাশি A দুটি চলরাশি x ও y-এর গুণফলের সঙ্গে সরলভেদে আছে। এই রকম ভেদকে কী বলা হবে?

যদি একটি চলরাশি অন্য একাধিক চলরাশির গুণফলের সঙ্গে সরলভেদে থাকে, তবে প্রথম চলরাশি অপর চলরাশিগুলির সঙ্গে **যৌগিক ভেদে (Joint Variation)** আছে বলা হয়।

(13) **যৌগিক ভেদের উপপাদ্য** (কেবল বিবৃতি)

x, y, z তিনটি চল এরূপ যে $x \propto y$ যখন z ধ্রুবক এবং $x \propto z$ যখন y ধ্রুবক, তাহলে $x \propto yz$ হবে, যখন y এবং z উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

বুঝেছি, এখানে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (A), ত্রিভুজের ভূমি (x) ও উচ্চতা (y)-এর সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে।

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে বয়েল ও চার্লসের সূত্রের সমন্বয় থেকে পেয়েছি,

$PV = RT$, R একটি অশূন্য ধ্রুবক।

$\therefore V = R\frac{T}{P}$

(14) এখানে V কি T ও $\frac{1}{P}$-এর সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে?

$V = R\cdot\frac{T}{P}$ [R ধ্রুবক]-এই সম্পর্ক থেকে বলতে পারি V, T এবং $\frac{1}{P}$-এর সঙ্গে **যৌগিক ভেদে** আছে।

কোনো একটি কাজের ক্ষেত্রে মোট উপার্জন, কাজে নিযুক্ত লোকসংখ্যা ও তাদের কাজের দিনের সংখ্যার সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে কিনা নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 18. যদি 5 জন কৃষক 12 দিনে 10 বিঘা জমির পাট কাটতে পারেন, তবে কতজন কৃষক 18 বিঘা জমির পাট 9 দিনে কাটতে পারবেন তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

ধরি, কৃষকের সংখ্যা = A

দিনের সংখ্যা = B

এবং জমির পরিমাণ = C

যেহেতু কৃষকের সংখ্যা জমির পরিমাণের সঙ্গে সরলভেদে থাকে যখন দিনের সংখ্যা স্থির থাকে।

$\therefore A \propto C$, যখন B ধ্রুবক

আবার, যেহেতু জমির পরিমাণ স্থির থাকলে কৃষকের সংখ্যা দিনের সংখ্যার সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে থাকে।

$\therefore A \propto \frac{1}{B}$, যখন C ধ্রুবক।

$\therefore$ যৌগিক ভেদের উপপাদ্য অনুসারে, $A \propto \frac{C}{B}$, যখন B ও C উভয়েই পরিবর্তনশীল

অর্থাৎ, $A = K\frac{C}{B}$ [যেখানে, K অশূন্য ভেদ ধ্রুবক] ———— (I)

প্রদত্ত, A = 5, B = 12 এবং C = 10

(I) নং থেকে পাই, $5 = K\frac{10}{12}$

বা, $K = \frac{5\times12}{10}$ $\therefore K = 6$

এবার (I) নং-এ K-এর মান বসিয়ে পাই, $A = 6\frac{C}{B}$ ———— (II)

B=9 ও C=18 হলে, (II) নং থেকে পাই, $A = \frac{6\times18}{9} = 12$

$\therefore$ নির্ণেয় কৃষকের সংখ্যা 12 জন।

প্রয়োগ : 19. যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 বিঘা জমি চাষ করতে পারেন, তবে 30 বিঘা জমি চাষ করতে 25 জন লোকের কতদিন সময় লাগবে ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 20. x, y-এর সঙ্গে সরলভেদে (যখন z ধ্রুবক) এবং z-এর সঙ্গে ব্যস্তভেদে (যখন y ধ্রুবক) এমনভাবে আছে যে y=4, z=5 হলে x=3 হয়। যখন y=16, z=25 তখন x-এর মান নির্ণয় করি।

$x \propto y$, যখন z ধ্রুবক

$x \propto \frac{1}{z}$, যখন y ধ্রুবক

$\therefore x \propto \frac{y}{z}$, যখন y এবং z উভয়েই পরিবর্তনশীল।

সুতরাং, $x = k\cdot\frac{y}{z}$ [যেখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রুবক] ———— (I)

প্রদত্ত, x=3, y=4 এবং z=5

সুতরাং, (I) নং থেকে পাই, $3 = k\frac{4}{5}$ $\therefore k = \frac{15}{4}$

এবার (I) নং-এ k-এর মান বসিয়ে পাই, $x = \frac{15y}{4z}$ ———— (II)

যখন y=16, z=25 তখন (II) নং থেকে পাবো,

$x = \frac{15\times16}{4\times25}$ $\therefore x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

প্রয়োগ : 21. যদি $\frac{x}{y} \propto x+y$ এবং $\frac{y}{x} \propto x-y$ হয়, তবে দেখাই যে $x^2-y^2 =$ ধ্রুবক।

$\frac{x}{y} \propto x+y$ $\therefore \frac{x}{y} = k_1(x+y)$ [যেখানে k_1 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

আবার, $\frac{y}{x} \propto x-y$ $\therefore \frac{y}{x} = k_2(x-y)$ [যেখানে k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

সুতরাং, $\frac{x}{y}\times\frac{y}{x} = k_1(x+y)\times k_2(x-y)$

বা, $1 = k_1k_2(x^2-y^2)$

বা, $(x^2-y^2) = \frac{1}{k_1k_2}$

$\therefore x^2-y^2 =$ ধ্রুবক ($\because k_1$ এবং k_2 ধ্রুবক, $\therefore \frac{1}{k_1k_2}$ ধ্রুবক) [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 22. $x^2 \propto yz$, $y^2 \propto zx$ এবং $z^2 \propto xy$ হলে, দেখাই যে ভেদ ধ্রুবক তিনটির গুণফল = 1

$x^2 \propto yz \quad \therefore x^2 = k_1 yz$

আবার, $y^2 \propto zx \quad \therefore y^2 = k_2 zx$

আবার, $z^2 \propto xy \quad \therefore z^2 = k_3 xy$

যেখানে k_1, k_2 ও k_3 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

সুতরাং, $x^2 \times y^2 \times z^2 = k_1 yz \times k_2 zx \times k_3 xy$

বা, $x^2y^2z^2 = k_1k_2k_3 \cdot x^2y^2z^2$

$\therefore k_1k_2k_3 = 1$ [প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 23. $a \propto b$ এবং $b \propto c$ হলে, প্রমাণ করি যে $a^3+b^3+c^3 \propto 3abc$

$a \propto b \quad \therefore a = k_1 b$ [যেখানে k_1 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

আবার, $b \propto c \quad \therefore b = k_2 c$ [যেখানে k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

সুতরাং, $a = k_1 b = k_1k_2 c$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc} = \frac{(k_1k_2c)^3+(k_2c)^3+c^3}{3(k_1k_2c)\times(k_2c)\times c} = \frac{c^3(k_1^3k_2^3+k_2^3+1)}{3k_1k_2^2c^3} = \frac{k_1^3k_2^3+k_2^3+1}{3k_1k_2^2} = \text{অশূন্য ধ্রুবক}$$

[$\because k_1$ এবং k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক]

$\therefore a^3+b^3+c^3 \propto 3abc$

প্রয়োগ : 24. $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হলে, প্রমাণ করি যে $x^2+y^2+z^2 \propto xy+yz+zx$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 25. কোনো গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের ঘনের সঙ্গে সরলভেদে আছে। যদি 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের তিনটি নিরেট গোলককে গলিয়ে একটি নতুন নিরেট গোলক তৈরি করা হয় এবং গলানোর ফলে যদি আয়তনের কোনো পরিবর্তন না হয়, তবে নতুন গোলকটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

মনে করি, r সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোনো গোলকের আয়তন v ঘন সেমি.

সুতরাং, $v \propto r^3$

$\therefore v = kr^3$ [এখানে k অশূন্য ভেদ ধ্রবক]

$\therefore$ 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন = $k \times 3^3$ ঘন সেমি.= 27k ঘন সেমি.

4 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন = $k \times 4^3$ ঘন সেমি.= 64k ঘন সেমি.

5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন = $k \times 5^3$ ঘন সেমি.= 125k ঘন সেমি.

প্রশ্নানুসারে, নতুন গোলকের আয়তন (27k+64k+125k)ঘন সেমি.=216k ঘন সেমি.

যদি নতুন গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য R সেমি. হয়, তবে $kR^3 = 216k$

বা, $R^3 = 216$

বা, $R^3 = 6^3 \quad \therefore R = 6$

$\therefore$ নতুন গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.

$\therefore$ নতুন গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 6×2 সেমি. = 12 সেমি.

প্রয়োগ : 26. একটি হস্টেলের ব্যয় আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক ওই হস্টেলবাসী লোকসংখ্যার সঙ্গে সরলভেদে আছে। লোকসংখ্যা 120 হলে ব্যয় 2000 টাকা হয় এবং লোকসংখ্যা 100 হলে ব্যয় 1700 টাকা হয়। ব্যয় 1880 টাকা হলে লোকসংখ্যা কত হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, ব্যয় ও লোকসংখ্যা যথাক্রমে x টাকা এবং y জন।

ধরি, $x=k_1+B$, যেখানে হস্টেলের ব্যয়ের ধ্রুবক অংশ k_1 এবং অপর অংশ $B \propto y$

$\therefore B=k_2y$, যেখানে k_2 অশূন্য ভেদ ধ্রুবক।

শর্তানুসারে, $x = k_1+k_2y$

$y=120$ হলে $x=2000$ (প্রদত্ত) $\quad \therefore 2000 = k_1+120k_2$ ———— (I)

আবার, $y=100$ হলে $x=1700$ (প্রদত্ত) $\quad \therefore 1700 = k_1+100k_2$ ———— (II)

(বিয়োগ করে পাই) $\quad 300 = 20k_2$

বা, $k_2 = \frac{300}{20} \quad \therefore k_2 = 15$

সুতরাং, (II) থেকে পাই, $1700 = k_1+100\times15$

বা, $k_1 = 1700-1500$

$\therefore k_1 = 200$

সুতরাং, $x = 200+15y$ ———— (III)

$\therefore$ যখন $x = 1880$ তখন (III) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$1880 = 200+15y$

বা, $15y = 1880-200$

বা, $15y = 1680$

বা, $y = \frac{1680}{15} \quad \therefore y = 112$

$\therefore$ হস্টেলের ব্যয় 1880 টাকা হলে লোকসংখ্যা হবে 112

প্রয়োগ : 27. গোলকের আয়তন গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের ত্রিঘাতের সঙ্গে সরলভেদে আছে। একটি নিরেট সিসার গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি.। এই গোলকটি গলিয়ে 3.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের কতগুলি গোলক তৈরি করা যাবে তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি। (ধরি গলানোর আগে ও পরে আয়তন একই থাকে) [নিজে করি]

কষে দেখি 13

1. দুটি A ও B-এর সম্পর্কিত মানগুলি

A	25	30	45	250
B	10	12	18	100

A ও B-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক থাকলে তা নির্ণয় করি ও ভেদ ধ্রুবকের মান লিখি।

2. x ও y দুটি চল এবং তাদের সম্পর্কিত মানগুলি

x	18	8	12	6
y	3	$\frac{27}{4}$	$\frac{9}{2}$	9

x ও y-এর মধ্যে কোনো ভেদ সম্পর্ক আছে কিনা বুঝে লিখি।

3. (i) বিপিনকাকুর ট্যাক্সি 25 মিনিটে 14 কিমি. পথ অতিক্রম করে। একই গতিবেগে ট্যাক্সি চালিয়ে 5 ঘণ্টায় তিনি কতটা পথ যাবেন তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি।

   (ii) আমাদের স্কুলের প্রথম শ্রেণির 24 জন শিশুর মধ্যে একবাক্স সন্দেশ সমান ভাগে ভাগ করে দিলাম এবং প্রত্যেকে 5 টি করে গোটা সন্দেশ পেল। যদি শিশুর সংখ্যা 4 জন কম হত, তবে প্রত্যেকে কতগুলি গোটা সন্দেশ পেত তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি।

   (iii) একটি পুকুর কাটতে 50 জন গ্রামবাসীর 18 দিন সময় লেগেছে। পুকুরটি 15 দিনে কাটতে হলে অতিরিক্ত কতজন লোককে কাজ করতে হবে তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে হিসাব করি।

4. (i) y, x-এর বর্গমূলের সঙ্গে সরলভেদে আছে এবং $y=9$ যখন $x=9$; x-এর মান নির্ণয় করি যখন $y=6$.

   (ii) x, y-এর সঙ্গে সরলভেদে এবং z-এর সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে আছে। $y=4$, $z=5$ হলে $x=3$ হয়। আবার $y=16$, $z=30$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (iii) x, y-এর সঙ্গে সরলভেদে এবং z-এর সঙ্গে ব্যস্তভেদে আছে। $y=5$ ও $z=9$ হলে $x=\frac{1}{6}$ হয়। x, y ও z-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি এবং $y=6$ ও $z=\frac{1}{5}$ হলে, x-এর মান হিসাব করে লিখি।

5. (i) $x\propto y$ হলে, দেখাই যে, $x+y\propto x-y$

   (ii) $A\propto\frac{1}{C}$, $C\propto\frac{1}{B}$ হলে, দেখাই যে, $A\propto B$

   (iii) যদি $a\propto b$, $b\propto\frac{1}{c}$ এবং $c\propto d$ হয়, তবে a ও d-এর মধ্যে ভেদ সম্পর্ক লিখি।

   (iv) $x\propto y$, $y\propto z$ এবং $z\propto x$ হলে, ভেদ ধ্রুবক তিনটির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

6. $x+y\propto x-y$ হলে, দেখাই যে,

   (i) $x^2+y^2\propto xy$

   (ii) $x^3+y^3\propto x^3-y^3$

   (iii) $ax+by\propto px+qy$ [যেখানে a, b, p, q অশূন্য ধ্রুবক]

7. (i) $a^2+b^2\propto ab$ হলে, প্রমাণ করি যে, $a+b\propto a-b$

   (ii) $x^3+y^3\propto x^3-y^3$ হলে, প্রমাণ করি যে, $x+y\propto x-y$

8. 15 জন কৃষক 5 দিনে 18 বিঘা জমি চাষ করতে পারেন। ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে 10 জন কৃষক 12 বিঘা জমি কতদিনে চাষ করতে পারবেন তা নির্ণয় করি।

9. গোলকের আয়তন গোলকের ব্যাসার্ধের ত্রিঘাতের সঙ্গে সরলভেদে আছে। $1\frac{1}{2}$,2 এবং $2\frac{1}{2}$ মিটার দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট তিনটি নিরেট গোলককে গলিয়ে একটি নিরেট গোলক বানানো হলো। নতুন গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি। (ধরি, গলানোর আগে ও পরে আয়তন একই থাকে)

10. y দুটি চলের সমষ্টির সমান, যার একটি x চলের সঙ্গে সরলভেদে এবং অন্যটি x চলের সঙ্গে ব্যস্তভেদে আছে। $x=1$ হলে $y=-1$ এবং $x=3$ হলে $y=5$; x ও y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

11. $a\propto b$, $b\propto c$ হলে দেখাই যে, $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\propto abc(a^3+b^3+c^3)$

12. x ডেসিমিটার গভীর একটি কূপ খনন করার জন্য মোট ব্যয়ের এক অংশ x-এর সঙ্গে সরলভেদে এবং অপর অংশ x^2-এর সঙ্গে সরলভেদে পরিবর্তিত হয়। যদি 100 ডেসিমিটার এবং 200 ডেসিমিটার কূপ খনন করার জন্য যথাক্রমে 5000 টাকা এবং 12000 টাকা ব্যয় হয়, তবে 250 ডেসিমিটার গভীর কূপ খননের জন্য কত ব্যয় হবে হিসাব করে লিখি।

13. চোঙের আয়তন, ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বর্গের এবং উচ্চতার সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে। দুটি চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 2:3 এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত 5:4 হলে, ওদের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করি।

14. পাঁচলা গ্রামের কৃষি সমবায় সমিতি একটি ট্রাক্টর ক্রয় করেছে। আগে সমিতির 2400 বিঘা জমি 25 টি লাঙল দিয়ে চাষ করতে 36 দিন সময় লাগত। এখন অর্ধেক জমি কেবল ট্রাক্টরটি দিয়ে 30 দিনে চাষ করা যায়। একটি ট্রাক্টর কয়টি লাঙলের সমান চাষ করে তা ভেদতত্ত্ব প্রয়োগ করে নির্ণয় করি।

15. গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের ত্রিঘাতের সঙ্গে সরলভেদে পরিবর্তিত হয় এবং গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল তার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বর্গের সঙ্গে সরলভেদে পরিবর্তিত হয়।
প্রমাণ করি যে, গোলকের আয়তনের বর্গ তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের ঘনের সঙ্গে সরলভেদে থাকবে।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) $x \propto \frac{1}{y}$ হলে, (a) $x=\frac{1}{y}$ (b) $y=\frac{1}{x}$ (c) $xy=1$ (d) $xy=$ অশূন্য ধ্রুবক

(ii) যদি $x \propto y$ হয়, তখন (a) $x^2 \propto y^3$ (b) $x^3 \propto y^2$ (c) $x \propto y^3$ (d) $x^2 \propto y^2$

(iii) $x \propto y$ এবং $y=8$ যখন $x=2$; $y=16$ হলে, x-এর মান (a) 2 (b) 4 (b) 6 (d) 8

(iv) $x \propto y^2$ এবং $y=4$ যখন $x=8$; $x=32$ হলে, y-এর ধনাত্মক মান (a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

(v) যদি $y-z \propto \frac{1}{x}$, $z-x \propto \frac{1}{y}$ এবং $x-y \propto \frac{1}{z}$ হয়, তাহলে তিনটি ভেদ ধ্রুবকের সমষ্টি
(a) 0 (b) 1 (c) –1 (d) 2

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $y \propto \frac{1}{x}$ হলে, $\frac{y}{x}=$ অশূন্য ধ্রুবক

(ii) $x \propto z$ এবং $y \propto z$ হলে, $xy \propto z$

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $x \propto \frac{1}{y}$ এবং $y \propto \frac{1}{z}$ হলে, $x \propto$ ______

(ii) $x \propto y$ হলে, $x^n \propto$ ______

(iii) $x \propto y$ এবং $x \propto z$ হলে, $(y+z) \propto$ ______

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) $x \propto y^2$ এবং $y=2a$ যখন $x=a$; x ও y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

(ii) $x \propto y$, $y \propto z$ এবং $z \propto x$ হলে, অশূন্য ভেদ ধ্রুবক তিনটির গুণফল নির্ণয় করি।

(iii) $x \propto \frac{1}{y}$ এবং $y \propto \frac{1}{z}$ হলে, x, z-এর সঙ্গে সরলভেদে না ব্যস্তভেদে আছে তা নির্ণয় করি।

(iv) $x \propto yz$ এবং $y \propto zx$ হলে, দেখাই যে, z একটি অশূন্য ধ্রুবক।

(v) যদি $b \propto a^3$ হয় এবং a-এর বৃদ্ধি হয় 2:3 অনুপাতে, তাহলে b-এর বৃদ্ধি কী অনুপাতে হয় তা নির্ণয় করি।

14 অংশীদারি কারবার
PARTNERSHIP BUSINESS

আমার দিদি আমাদের বাড়ির একতলার একটি ঘরে খাতা তৈরি করে বিক্রি করার ব্যাবসা করতে চায়। দিদির আরও দুই বন্ধু তীর্থ ও তনবির দিদির সঙ্গে এই ব্যবসায় যোগ দিতে চায়। তাই আমার দিদি, তীর্থ ও তনবির যথাক্রমে 10000 টাকা, 12000 টাকা ও 11000 টাকা দিয়ে এই খাতা বিক্রির ব্যবসা শুরু করল।

(1) এইভাবে একসঙ্গে একাধিক জন টাকা দিয়ে ব্যাবসা করাকে কী বলা হয়?

দুই বা ততোধিক ব্যক্তি একত্রে মিলিত হয়ে যেসব সংগঠন গড়ে তুলে ব্যাবসা-বাণিজ্য করেন 'অংশীদারি কারবার' (Partnership business) তাদের মধ্যে অন্যতম। অংশীদারি কারবারে অংশীদারদের প্রত্যেকের দেয় অর্থই হচ্ছে অংশীদারগণের নিজস্ব মূলধন (Capital)।

একবছর শেষে দিদিদের ব্যবসায় 9900 টাকা লাভ হলো। কিন্তু এই লভ্যাংশ কীভাবে তারা ভাগ করে নেবে?

(2) অংশীদারি কারবার সাধারণত কয়েকটি নীতির উপর গড়ে ওঠে এবং অংশীদারগণ নিজেদের মধ্যে আলোচনার ভিত্তিতে সেগুলি নির্ধারণ করেন। সেগুলি হলো —

(i) **মূলধন (Capital) :** মূলধনের মোট পরিমাণ অংশীদারগণ সমানভাবে ভাগ করে সংগ্রহ করেন অথবা সর্বসম্মত আনুপাতিক হারে মূলধন সংগ্রহ করেন।

(ii) **লভ্যাংশ বন্টন (Distribution of profit) :** অংশীদারদের সর্বসম্মত সিদ্ধান্তের ভিত্তিতে লাভ

(a) সমান ভাগে ভাগ করে নিতে পারেন।

(b) মূলধনের পরিমাণের অনুপাতে ভাগ করে নিতে পারেন।

(c) সর্বসম্মত অন্য কোনো চুক্তি অনুযায়ী ভাগ করে নিতে পারেন।

যদি অংশীদারি চুক্তিতে লাভ বন্টনের কোনো সুনির্দিষ্ট নীতি বলা না থাকে, তবে ধরে নিতে হবে যে, লাভ অংশীদারদের মূলধনের অনুপাতে বণ্টিত হবে।

(iii) **ব্যাবসা পরিচালনার সাম্মানিক ভাতা :** ব্যাবসা পরিচালনার ক্ষেত্রে অংশীদারদের প্রত্যেকে বা কেউ কেউ যদি সময় ও শ্রম দিয়ে থাকেন তবে তার জন্য তাদের কী হারে সাম্মানিক ভাতা দেওয়া হবে তা চুক্তির সময়েই নির্ধারিত থাকে। এই ভাতা প্রদানের পর লভ্যাংশ বণ্টন করা হয়।

প্রয়োগ :1. আমার দিদি ও তার দুই বন্ধু মিলে যে অংশীদারি কারবার শুরু করেছে এবং বছরের শেষে লাভের টাকা কে কত পাবে তার জন্য প্রথমে অংশীদারদের মূলধনের অনুপাত নির্ণয় করতে হবে।

∴ লভ্যাংশ বণ্টনের অনুপাত হবে,

দিদির টাকা : তীর্থর টাকা : তনবিরের টাকা = 10000 : 11000 : 12000 = 10 : 11 : 12

∴ লাভের 9900 টাকার মধ্যে দিদি পাবে = $\frac{10}{10+11+12} \times 9900$ টাকা = ☐ টাকা

লাভের 9900 টাকার মধ্যে তীর্থ পাবে = $\frac{11}{33} \times 9900 = 3300$ টাকা

লাভের 9900 টাকার মধ্যে তনবীর পাবে = $\frac{12}{33} \times 9900$ টাকা= 3600 টাকা

প্রয়োগ : 2. সুলেখা, জয়নাল ও শিবু যথাক্রমে 5000 টাকা, 4500 টাকা ও 7000 টাকা দিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করল। যদি বৎসরান্তে 11550 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তবে লাভের টাকা কে কত পাবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 3. আমাদের গ্রামের মিতাদিদি, সাহানাবিবি ও অমলকাকু যথাক্রমে 15000 টাকা, 10000 টাকা এবং 17500 টাকা মূলধন নিয়ে 'জ্যাম-জেলির' ব্যাবসা শুরু করেন। কিন্তু বছরের শেষে 4250 টাকা লোকসান হলো। কাকে কত টাকা লোকসানের পরিমাণ দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

অংশীদারি কারবারে মিতাদিদি, সাহানাবিবি ও অমলকাকুর মূলধনের অনুপাত = 15000 : 10000 : 17500
= 6 : 4 : 7

প্রত্যেক অংশীদার তাদের মূলধনের অনুপাতে লোকসানের অংশ দেবেন।

∴ 4250 টাকা লোকসানের মধ্যে মিতাদিদি দেবেন = $\left(\frac{6}{6+4+7} \times 4250\right)$ টাকা = ☐ টাকা

4250 টাকা লোকসানের মধ্যে সাহানাবিবি দেবেন = $\left(\frac{4}{17} \times 4250\right)$ টাকা = ☐ টাকা

4250 টাকা লোকসানের মধ্যে অমলকাকু দেবেন = ☐ টাকা **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

প্রয়োগ : 4. মারিয়া ও সায়ন যথাক্রমে 25000 টাকা ও 35000 টাকা মূলধন নিয়ে অংশীদারি কারবার নিম্নলিখিত শর্তে শুরু করে।

(i) মোট লাভের $\frac{1}{3}$ অংশ প্রথমে সমান ভাগে ভাগ করে নেবে।

(ii) পরে বাকি লাভ মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবে।

বছরের শেষে মোট 36000 টাকা লাভ হলে, কে কত টাকা লভ্যাংশ পাবে নির্ণয় করি।

(i) মোট লাভের $\frac{1}{3}$ অংশ প্রথমে সমান ভাগে ভাগ করে নেবে।

অর্থাৎ $(36000 \times \frac{1}{3})$ টাকা = ☐ টাকা মরিয়া ও সায়ন দুজনে সমান দু-ভাগে ভাগ করে নেবে।

(ii) অবশিষ্ট (36000 – 12000) টাকা = 24000 টাকা তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবে।

মরিয়া ও সায়নের মূলধনের অনুপাত = 25000 : 35000 = 5 : 7

∴ লাভের 24000 টাকার মধ্যে মারিয়া পাবে = $(\frac{5}{5+7} \times 24000)$ টাকা = ☐ টাকা

লাভের 24000 টাকার মধ্যে সায়ন পাবে = $(\frac{7}{5+7} \times 24000)$ টাকা = ☐ টাকা

∴ মারিয়া মোট পাবে = (12000 ÷ 2 + 10000) টাকা = ☐ টাকা

সায়ন মোট পাবে = (12000 ÷ 2 + 14000) টাকা = ☐ টাকা

∴ চুক্তি অনুযায়ী 36000 টাকা লাভের মারিয়া পাবে 16000 টাকা এবং সায়ন পাবে 20000 টাকা।

প্রয়োগ : 5. তিনজন অবসরপ্রাপ্ত ব্যক্তি 19500 টাকা, 27300 টাকা ও 15600 টাকা মূলধন নিয়ে একটি লেদ কারখানা স্থাপন করার এক বছর পর দেখলেন 43200 টাকা লাভ হয়েছে। ওই লাভের $\frac{2}{3}$ অংশ তারা সমানভাগে এবং বাকি অংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নিলে কে কত টাকা পাবেন নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 6. অভ্র, তনবির, অমৃতা ও তথাগত চার বন্ধু মিলে যথাক্রমে 15000 টাকা, 21000 টাকা, 30000 টাকা ও 45000 টাকা মূলধন নিয়োগ করে নিম্নলিখিত শর্তে একটি অংশীদারি কারবার শুরু করেন।

(i) অভ্র ও তনবির প্রত্যেকে ছয়মাস করে ব্যাবসা পরিচালনা করবেন এবং তার জন্য মোট লাভের 0.25 অংশ দুজনে সমান ভাগে ভাগ করে পাবেন।

(ii) বাকি লাভ চারজনে মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবেন।
বছরের শেষে 27232 টাকা লাভ হলে তা থেকে কে কত টাকা পাবেন হিসাব করে লিখি।

(i) 27232 টাকার 0.25 অংশ = $\square$ টাকা অভ্র ও তনবির সমান দুই ভাগে ভাগ করে নেবেন।

(ii) (27232 – 6808) টাকা = $\square$ টাকা মূলধনের অনুপাতে চার বন্ধু ভাগ করে নেবে।

অভ্র, তনবির, অমৃতা ও তথাগত-র মূলধনের অনুপাত = 15000 : 21000 : 30000 : 45000
= 5 : 7 : 10 : 15

∴ লাভের বাকি 20424 টাকা তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবেন।

অভ্র পাবেন = $\frac{5}{5+7+10+15} \times 20424$ টাকা = $\square$ টাকা

একইভাবে 20424 টাকার মধ্যে তনবির, অমৃতা ও তথাগত কত টাকা করে পাবেন নিজে হিসাব করে লিখি।

∴ অভ্র মোট পাবেন = $(6808 \div 2 + \frac{5}{37} \times 20424)$ টাকা = $\square$ টাকা

তনবীর মোট পাবেন = $(6808 \div 2 + \frac{7}{37} \times 20424)$ টাকা = $\square$ টাকা

অমৃতা পাবেন 5520 টাকা ও তথাগত পাবেন 8280 টাকা।

প্রয়োগ : 7. জয়াকাকিমা 10000 টাকা মূলধন দিয়ে একটি ছোটো হাতে তৈরি জিনিস বিক্রির ব্যাবসা শুরু করলেন। 6 মাস পরে সুলেখাদিদি 14000 টাকা মূলধন দিয়ে জয়া কাকিমার ব্যবসায় যোগ দিলেন। এক বছরে 5100 টাকা লাভ হলো। হিসাব করে দেখি কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন?

কিন্তু এক্ষেত্রে দেখছি দুজনের মূলধন সমান সময়ের জন্য ব্যবসায় নিয়োজিত হয়নি। সুতরাং এক্ষেত্রে তাদের মূলধনের অনুপাত কীভাবে নির্ণয় করব?

(3) এই ধরনের অংশীদারি কারবারকে মিশ্র অংশীদারি কারবার বলা হয়।
অংশীদারি কারবার দুই প্রকার — (1) সরল, (2) মিশ্র

সরল (Simple) : অংশীদারগণের নিজ মূলধন যদি সমান সময় ধরে ব্যবসায়ে নিয়োজিত থাকে তবে তাকে সরল অংশীদারি কারবার বলা হয়।

মিশ্র (Compound) : অংশীদারগণের নিজস্ব মূলধন যদি বিভিন্ন সময় ধরে ব্যবসায়ে নিয়োজিত থাকে তবে তাকে মিশ্র অংশীদারি কারবার বলা হয়।

এক্ষেত্রে প্রথমে প্রত্যেক অংশীদারের সমতুল্য মূলধন (সময়ের সাপেক্ষে) নির্ণয় করে নিতে হবে।
কিন্তু মিশ্র অংশীদারি কারবারে সময়ের সাপেক্ষে সমতুল্য মূলধন কীভাবে পাব দেখি।

প্রথমে জয়াকাকিমা ও সুলেখাদিদির ব্যবসায়ে নিয়োজিত মূলধনের সময়কে সমান করে নিতে হবে।
ধরি, জয়াকাকিমা 1 মাসে 10000 টাকার জিনিস বিক্রি করে x টাকা লাভ করেন
তিনি 2 মাসে 10000 টাকার জিনিস বিক্রি করে 2x টাকা লাভ করেন
∴ তিনি 12 মাসে 10000 টাকার জিনিস বিক্রি করে 12x টাকা লাভ করেন।
জয়া কাকিমা যদি ওই 12x টাকা লাভ 1 মাসে করতে চান তবে তাকে মূলধন দিতে হবে12 × 10000 টাকা
= 120000 টাকা
আবার, সুলেখা দিদি একইভাবে তার 14000 টাকা মূলধন 6 মাস খাটিয়ে যে লাভ পাবেন তা 1 মাসে পেতে হলে 6 × 14000 টাকা = 84000 টাকা দিতে হবে।

এইভাবে দুইক্ষেত্রেই সময়কে সমান করে অর্থাৎ 1 মাসে এনে সময়ের সাপেক্ষে জয়াকাকিমা ও সুলেখাদিদির সমতুল্য মূলধন পেলাম।

> **4** মিশ্র অংশীদারি কারবারে সকল অংশীদারের নিয়োজিত মূলধনের সময়কে সমান করা হয়। অর্থাৎ 1 মাসে নিয়ে গিয়ে সময়ের সাপেক্ষে অংশীদারগণের সমতুল্য মূলধন নির্ণয় করা হয়। তাই সেক্ষেত্রে প্রত্যেক অংশীদারের নিজস্ব মূলধন ও সময়ের সাংখ্যমানের গুণফলের অনুপাতে অংশীদারদের মধ্যে লাভ বণ্টন করা হয়।

∴ জয়াকাকিমা ও সুলেখাদিদির মূলধনের অনুপাত = 120000 : 84000 = 10 : 7

লভ্যাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে। অর্থাৎ, 10 : 7 অনুপাতে ভাগ হবে।

∴ লাভের 5100 টাকার মধ্যে জয়াকাকিমা পাবেন = $\left(\frac{10}{10+7} \times 5100\right)$ টাকা = ☐ টাকা

লাভের 5100 টাকার মধ্যে সুলেখাদিদি পাবেন = $\left(\frac{7}{10+7} \times 5100\right)$ টাকা = ☐ টাকা

প্রয়োগ : 8 মনীষা 3750 টাকা দিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করেন। 6 মাস পরে রজত 15000 টাকা নিয়ে ওই ব্যবসায় যোগ দেন। বৎসরান্তে যদি 6900 টাকা ক্ষতি হয়ে থাকে, তবে ক্ষতির টাকা কে, কত দেবেন হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 9. আমাদের গ্রামের আমিনাবিবি, রমেনবাবু ও ঈশিতাকাকিমা গত বছর 1 জানুয়ারি যথাক্রমে 50000 টাকা, 60000 টাকা ও 70000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি অংশীদারি কারবার শুরু করেছিলেন। 1 এপ্রিল রমেনবাবু আরও 10000 টাকা মূলধন নিয়োগ করেন, কিন্তু 1 জুন ঈশিতাকাকিমা 10000 টাকা মূলধন উঠিয়ে নেন। 31 ডিসেম্বর পর্যন্ত মোট 39240 টাকা লাভ হলে মূলধনের অনুপাতে কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন হিসাব করে লিখি।

আমিনাবিবির 50000 টাকা 12 মাস খাটিয়ে যে পরিমাণ লাভ হয়েছে, সেই পরিমাণ লাভ একমাসে পেতে হলে তাঁর মূলধন হবে (50000 × 12) টাকা অর্থাৎ 600000 টাকা।

অনুরূপভাবে, রমেনবাবুর মূলধন 60000 টাকা 3 মাস ও (60000 + 10000) টাকা অর্থাৎ 70000 টাকা 9 মাস খেটেছে।

সুতরাং, 1 মাস হিসাবে তাঁর মূলধন {(60000 × 3) + (70000 × 9)} টাকা= 810000 টাকা

আবার, ঈশিতাকাকিমার মূলধন 70000 টাকা 5 মাস ও (70000−10000) টাকা = 60000 টাকা 7 মাস খেটেছে।

সুতরাং, 1 মাস হিসাবে তাঁর মূলধন হবে = {(70000 × 5) + (60000 × 7)} টাকা = 770000 টাকা

এই হিসাবে আমিনাবিবি, রমেনবাবু ও ঈশিতাকাকিমার মূলধনের অনুপাত হবে

= 600000 : 810000 : 770000 = 60 : 81 : 77

∴ আমিনাবিবি, রমেনবাবু ও ঈশিতাকাকিমার মূলধনের হিসাবে তাদের আনুপাতিক ভাগহার হবে যথাক্রমে $\frac{60}{218}$, $\frac{81}{218}$ ও $\frac{77}{218}$

লভ্যাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে।

∴ 39240 টাকার মধ্যে আমিনাবিবি পাবেন = $\left(\frac{60}{218} \times 39240\right)$ টাকা = 10800 টাকা

39240 টাকার মধ্যে রমেনবাবু পাবেন = ☐ টাকা **[নিজে লিখি]**

39240 টাকার মধ্যে ঈশিতাকাকিমা পাবেন = ☐ টাকা **[নিজে লিখি]**

প্রয়োগ : 10. নিবেদিতা ও উমা যথাক্রমে 3000 টাকা ও 5000 টাকা দিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করল। 6 মাস পরে নিবেদিতা ব্যবসায়ে আরও 4000 টাকা দিল, কিন্তু 6 মাস পরে উমা 1000 টাকা তুলে নিল। এক বছরে 6175 টাকা লাভ হলে লাভের টাকা কে কত পাবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 11. সাব্বা, দীপক ও পৃথা যথাক্রমে 6000 টাকা, 8000 টাকা ও 9000 টাকা মূলধন নিয়ে একত্রে একটি ব্যাবসা আরম্ভ করল। কয়েকমাস পরে সাব্বা আরও 3000 টাকা লগ্নি করল। বছরের শেষে মোট 3000 টাকা লাভ হলো এবং পৃথা 1080 টাকা লভ্যাংশ পেল। সাব্বা 3000 টাকা কখন লগ্নি করেছিল নির্ণয় করি।

ধরি, সাব্বা x মাস পরে আরও 3000 টাকা লগ্নি করেছিল

∴ সাব্বা 6000 টাকা x মাস এবং (6000 + 3000) টাকা = 9000 টাকা

বাকি (12 – x) মাস ব্যবসায় নিয়োজিত করেছিল

বছরের শেষে যে লাভ পাওয়া যায় সেই লাভ 1 মাসে পেতে হলে

সাব্বার প্রয়োজন হতো $\{6000 \times x + 9000 \times (12 - x)\}$ টাকা

$= (108000 - 3000x)$ টাকা

আবার দীপক ও পৃথা যথাক্রমে 8000 টাকা ও 9000 টাকা 12 মাস ব্যবসায় নিয়োজিত করেছে।

∴ বছরের শেষে যে লাভ পাওয়া যায় সেই লাভ 1 মাসে পেতে হলে দীপকের প্রয়োজন (8000×12) টাকা এবং পৃথার প্রয়োজন (9000×12) টাকা।

∴ সাব্বা, দীপক ও পৃথার মূলধনের অনুপাত

$= (108000 - 3000x) : 8000 \times 12 : 9000 \times 12$

$= (108 - 3x) : 96 : 108$

$= (36 - x) : 32 : 36$

লভ্যাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে।

∴ পৃথার লাভের পরিমাণ $= 3000 \times \frac{36}{36 - x + 32 + 36}$ টাকা $= \frac{3000 \times 36}{104 - x}$ টাকা

শর্তানুসারে,

$$\frac{3000 \times 36}{104 - x} = 1080$$

বা, $104 - x = \frac{3000 \times 36}{1080} = 100 \quad \therefore x = 4$

∴ সাব্বা 3000 টাকা 4 মাস পরে ব্যবসায় লগ্নি করেছিল।

কষে দেখি 14

1. আমি ও আমার বন্ধু মালা দুজনে যথাক্রমে 15000 টাকা ও 25000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করলাম। এক বছরে 16,800 টাকা লাভ হলো। হিসাব করে দেখি আমরা কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাব?

2. প্রিয়ম, সুপ্রিয়া ও বুলু যথাক্রমে 15000 টাকা , 10000 টাকা এবং 25000 টাকা দিয়ে একটি ছোটো মুদির দোকান খুলল। কিন্তু বৎসরান্তে 3000 টাকা লোকসান হলো। কাকে কত টাকা লোকসানের পরিমাণ দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

3. শোভা ও মাসুদ দুজনে মিলে 2,50,000 টাকার একটি গাড়ি কিনে 2,62,500 টাকায় বিক্রি করলেন। গাড়িটি কেনার সময়ে শোভা মাসুদের $1\frac{1}{2}$ গুণ টাকা দিয়ে থাকলে, কে কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন তা হিসাব করে লিখি।

4. তিনবন্ধু যথাক্রমে 5000 টাকা, 6000 টাকা ও 7000 টাকা দিয়ে একটি অংশীদারি ব্যাবসা শুরু করার এক বছর পর দেখলেন 1800 টাকা লোকসান হয়েছে। মূলধন ঠিক রাখার জন্য প্রত্যেকে লোকসানের পরিমাণ দিয়ে দেবেন বলে সিদ্ধান্ত করেন। তাদের কাকে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

5. দীপু, রাবেয়া ও মেঘা যথাক্রমে 6500 টাকা, 5200 টাকা ও 9,100 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ছোটো ব্যাবসা শুরু করল ও ঠিক একবছর পরে 14,400 টাকা লাভ হলো। ওই লাভের $\frac{2}{3}$ অংশ তারা সমানভাবে এবং বাকি অংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নিলে কে কত টাকা লভ্যাংশ পাবে নির্ণয় করি।

6 তিনবন্ধু যথাক্রমে 8000 টাকা, 10000 টাকা ও 12000 টাকা সংগ্রহ করে এবং ব্যাংক থেকে কিছু টাকা ধার নিয়ে একটি ব্যাবসা শুরু করেন। বছরের শেষে তারা দেখলেন 13400 টাকা লাভ হয়েছে। সেই লাভ থেকে ব্যাংকের বছরের কিস্তি 5000 টাকা শোধ দেওয়ার পর বাকি টাকা তারা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নিলেন। লভ্যাংশ থেকে কে কত টাকা পাবেন হিসাব করে লিখি।

7. দুই বছরের মধ্যে টাকা ফেরত দিলে কোনো সুদ দিতে হবে না এই শর্তে তিন বন্ধু একটি সমবায় ব্যাংক থেকে যথাক্রমে 6000 টাকা, 8000 টাকা, ও 5000 টাকা ধার নিয়ে যৌথভাবে চারটি সাইকেল রিকশা ক্রয় করেন। দুই বছর পর হিসাব করে দেখা যায় সমস্ত খরচ-খরচা বাদ দিয়ে মোট 30400 টাকা আয় হয়েছে। তারা সেই আয় মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেওয়ার পর প্রত্যেকে নিজ নিজ ঋণের টাকা ব্যাংকে ফিরিয়ে দেন। এখন কার হাতে কত টাকা থাকবে এবং তাদের হাতে থাকা টাকার অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।

8. তিন বন্ধু যথাক্রমে 1,20,000 টাকা, 1,50,000 টাকা ও 1,10,000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি বাস ক্রয় করেন। প্রথমজন ড্রাইভার ও বাকি দুজন কন্ডাক্টরের কাজ করেন। তারা ঠিক করেন যে মোট আয়ের $\frac{2}{5}$ অংশ কাজের জন্য 3:2:2 অনুপাতে ভাগ করবেন এবং বাকি টাকা মূলধনের অনুপাতে ভাগ করে নেবেন। কোনো একমাসে যদি 29260 টাকা আয় হয়, তবে কে, কত টাকা পাবেন নির্ণয় করি।

9. বছরের প্রথমে প্রদীপবাবু ও আমিনাবিবি যথাক্রমে 24000 টাকা ও 30000 টাকা নিয়ে ব্যাবসা শুরু করেন। পাঁচ মাস পর প্রদীপবাবু আরও 4000 টাকা মূলধন দেন। বছরের শেষে 27716 টাকা লাভ হলে, কে, কত টাকা লভ্যাংশ পাবেন হিসাব করে লিখি।

10. নিয়ামতচাচা ও করবীদিদি যথাক্রমে 30,000 টাকা ও 50,000 টাকা মূলধন দিয়ে যৌথভাবে একটি ব্যাবসা আরম্ভ করলেন। 6 মাস পরে নিয়ামতচাচা আরও 40,000 টাকা লগ্নি করলেন, কিন্তু করবীদিদি ব্যক্তিগত প্রয়োজনে 10,000 টাকা তুলে নিলেন। বছরের শেষে যদি 19,000 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তাহলে কে, কত টাকা লাভ পাবেন হিসাব করে দেখি।

11. বছরের শুরুতে শ্রীকান্ত ও সৈফুদ্দিন 2,40,000 টাকা ও 3,00,000 টাকা দিয়ে একটি মিনিবাস ক্রয় করে চালাতে থাকেন। চার মাস পর তাদের বন্ধু পিটার 81,000 টাকা নিয়ে তাদের সঙ্গে যোগ দিলে শ্রীকান্ত ও সৈফুদ্দিন তাদের মূলধনের অনুপাতে সেই টাকা তুলে নেন। বছরের শেষে 39150 টাকা লাভ হলে, লভ্যাংশ থেকে কে, কত টাকা পাবেন হিসাব করে লিখি।

12. বছরের প্রথমে অরুণ ও অজয় যথাক্রমে 24,000 টাকা ও 30,000 টাকা দিয়ে যৌথভাবে ব্যাবসা শুরু করেন। কিন্তু কয়েক মাস পরে অরুণ আরও 12,000 টাকা ওই ব্যবসায়ে মূলধন দেন। বছরের শেষে ওই ব্যবসায়ে 14,030 টাকা লাভ হলো এবং অরুণ 7,130 টাকা লভ্যাংশ পেলেন। অরুণ কত মাস পরে ব্যবসায়ে টাকা দিয়েছিলেন নির্ণয় করি।

13. কুমারটুলির তিনজন মৃৎশিল্পী একটি সমবায় ব্যাংক থেকে যৌথভাবে 100000 টাকা ধার করে মৃৎশিল্পের একটি কারখানা স্থাপন করেন। তারা এই চুক্তি করেন যে প্রতি বছর ব্যাংকের কিস্তি 28100 টাকা দেওয়ার পর বাকি লাভের অর্ধেক কাজের দিনের অনুপাতে এবং বাকি অর্ধেক সমান ভাগে ভাগ করে নেবেন। গত বছর তারা যথাক্রমে 300 দিন, 275 দিন ও 350 দিন কাজ করেছেন এবং মোট লাভ হয়েছে 139100 টাকা। কে, কত টাকা পেয়েছিলেন হিসাব করে লিখি।

14. দুই বন্ধু যথাক্রমে 40000 টাকা ও 50000 টাকা দিয়ে একটি যৌথ ব্যবসা শুরু করেন। তাদের মধ্যে একটি চুক্তি হয় যে, লাভের 50% নিজেদের মধ্যে সমান ভাগে এবং লাভের অবশিষ্টাংশ মূলধনের অনুপাতে ভাগ হবে। প্রথম বন্ধুর লভ্যাংশের পরিমাণ যদি দ্বিতীয় বন্ধুর লভ্যাংশ অপেক্ষা 800 টাকা কম হয়, তবে প্রথম বন্ধুর লভ্যাংশের পরিমাণ হিসাব করে লিখি।

15. পূজা, উত্তম ও মেহের যথাক্রমে 5000 টাকা, 7000 টাকা ও 10000 টাকা মূলধন নিয়ে অংশীদারি কারবার এই শর্তে শুরু করে যে (i) কারবার চালানোর মাসিক খরচ 125 টাকা, (ii) হিসাবপত্র রাখার জন্য পূজা ও উত্তম প্রত্যেকে মাসিক 200 টাকা পাবে। বছরের শেষে 6960 টাকা লাভ হলে, তা থেকে কে, কত টাকা পাবে হিসাব করে লিখি।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) কোন যৌথ ব্যবসায়ে তিন বন্ধুর মূলধন যথাক্রমে 200 টাকা, 150 টাকা ও 250 টাকা। একই সময় পরে তাদের লভ্যাংশের অনুপাত হবে

(a) 5:3:4 (b) 4:3:5 (c) 3:5:4 (d) 5:4:3

(ii) শুভেন্দু ও নৌসাদ যথাক্রমে 1500 এবং 1000 টাকা দিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে। এক বছর পরে ব্যবসায় 75 টাকা ক্ষতি হলে, শুভেন্দুর ক্ষতি হয়

(a) 45 টাকা (b) 30 টাকা (c) 25 টাকা (d) 40 টাকা

(iii) ফতিমা, শ্রেয়া এবং স্মিতা তিনজনে মোট 6000 টাকা দিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে। এক বছর পরে ফতিমা, শ্রেয়া এবং স্মিতা যথাক্রমে লভ্যাংশের 50 টাকা, 100 টাকা এবং 150 টাকা পায়। স্মিতা ওই ব্যবসায় নিয়োজিত করে

(a) 1000 টাকা (b) 2000 টাকা (c) 3000 টাকা (d) 4000 টাকা

(iv) অমল এবং বিমল একটি ব্যাবসা শুরু করে। অমল 500 টাকা 9 মাসের জন্য এবং বিমল কিছু টাকা 6 মাসের জন্য ব্যবসায় নিয়োজিত করে। ব্যবসায় মোট লাভ হয় 69 টাকা এবং বিমল লাভের 46 টাকা পায়। ব্যবসায় বিমলের মূলধন

(a) 1500 টাকা (b) 3000 টাকা (c) 4500 টাকা (d) 6000 টাকা

(v) পল্লবী 500 টাকা 9 মাসের জন্য এবং রাজিয়া 600 টাকা 5 মাসের জন্য একটি ব্যবসায় নিয়োজিত করে। লভ্যাংশ তাদের মধ্যে বণ্টিত হবে যে অনুপাতে তা হলো

(a) 3:2 (b) 5:6 (c) 6:5 (d) 9:5

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) অংশীদারি ব্যবসায় কমপক্ষে লোকের দরকার 3 জন।

(ii) একটি ব্যবসায় রাজু ও আসিফের মূলধনের অনুপাত 5 : 4 এবং রাজু মোট লাভের 80 টাকা পেলে আসিফ পায় 100 টাকা।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) অংশীদারি কারবার ______________ ধরনের।

(ii) অন্য কোনো শর্ত ছাড়া অংশীদারি ব্যবসায় অংশীদারগণ সমান সময়ের জন্য মূলধন নিয়োজিত করলে তাকে ______________ অংশীদারি কারবার বলে।

(iii) অন্য কোনো শর্ত ছাড়া অংশীদারি ব্যবসায় অংশীদারগণ ভিন্ন ভিন্ন সময়ের জন্য মূলধন নিয়োজিত করলে তাকে ______________ অংশীদারি কারবার বলে।

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি অংশীদারি ব্যবসায় সমীর, ইদ্রিশ এবং অ্যান্টনির মূলধনের অনুপাত $\frac{1}{6} : \frac{1}{5} : \frac{1}{4}$; বছরের শেষে ব্যবসায় মোট লাভ 3700 টাকা হলে, অ্যান্টনির লাভ কত হবে হিসাব করি।

(ii) একটি অংশীদারি ব্যবসায় পৃথা ও রাবেয়ার মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং রাবেয়া ও জেসমিনের মূলধনের অনুপাত 4 : 5 হলে, পৃথা, রাবেয়া ও জেসমিনের মূলধনের অনুপাত কত তা হিসাব করি।

(iii) দুজনের একটি অংশীদারী ব্যবসায় মোট লাভ হয় 1500 টাকা। রাজীবের মূলধন 6000 টাকা এবং লাভ 900 টাকা হলে, আফতাবের মূলধন কত তা হিসাব করি।

(iv) একটি অংশীদারি ব্যবসায় তিনজনের মূলধনের অনুপাত 3 : 8 : 5 এবং প্রথম ব্যক্তির লাভ তৃতীয় ব্যক্তির লাভের থেকে 60 টাকা কম হলে, ব্যবসায় মোট কত লাভ হয়েছিল হিসাব করি।

(v) জয়ন্ত, অজিত এবং কুণাল মোট 15000 টাকা দিয়ে একটি অংশীদারি ব্যাবসা শুরু করে। বছরের শেষে জয়ন্ত, অজিত এবং কুণালের যথাক্রমে লাভ হয় 800 টাকা, 1000 টাকা এবং 1200 টাকা। জয়ন্ত কত টাকা ব্যবসায় নিয়োজিত করে হিসাব করি।

15 বৃত্তের স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্য
THEOREMS RELATED TO TANGENT OF A CIRCLE

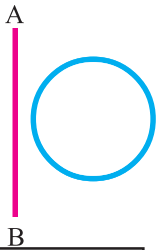
গত রবিবার আমরা বাড়ির ভাইবোনেরা সকলে মিলে গ্রামের মেলায় গিয়েছিলাম। মেলায় অনেক চিনামাটির মূর্তি, চুড়ি, আচার, জিলিপি, বাঁশি, বাঁশকাঠি ও বেতের খেলনা ও নানান ধরনের হাতের কাজের শৌখিন জিনিস কিনেছি।

আমার ভাই পাশের ছবির মতো একটি বাঁশকাঠির খেলনা কিনেছে যেটির বৃত্তাকার চাকাটি হাওয়ায় ঘুরতে থাকে।

আমার কাছে একটি বৃত্তাকার রিং আছে। আমি ঠিক করেছি একইরকম একটি খেলনা তৈরির চেষ্টা করব।

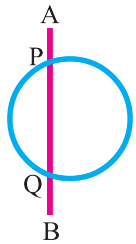
আমি বাঁশের কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-এর কাছে বিভিন্ন স্থানে বসিয়ে নীচের তিনটি অবস্থা পেলাম —

(i)



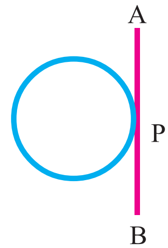
AB কাঠি ও বৃত্তাকার রিং-এর কোনো সাধারণ বিন্দু নেই

(ii)



AB কাঠি ও বৃত্তাকার রিং-এর P ও Q দুটি সাধারণ বিন্দু আছে

(iii)



AB কাঠি ও বৃত্তাকার রিং-এর একটি মাত্র সাধারণ বিন্দু P

বুঝেছি, (i) নং ক্ষেত্রে AB কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-কে ছেদ করেনি। আবার

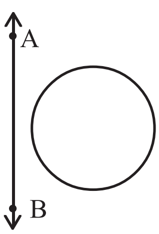
(ii) নং ক্ষেত্রে AB কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-কে ছেদ করেছে।

1 কিন্তু (iii) নং ক্ষেত্রে AB কাঠিটি ও বৃত্তাকার রিং কীভাবে আছে?

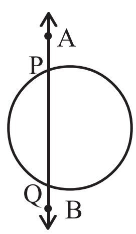
AB কাঠিটি বৃত্তাকার রিং-কে P বিন্দুতে স্পর্শ করে আছে।

আমার বন্ধু সুমেধা তার খাতায় আমার মতো একইরকমভাবে একটি সরলরেখা ও একটি বৃত্ত পরস্পর কী কী অবস্থানে থাকতে পারে আঁকল।

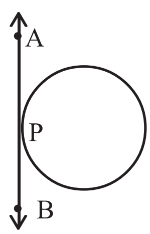
(i)



(ii)



(iii)



দেখছি, (i) নং চিত্রে AB সরলরেখা বৃত্তকে ছেদ করেনি।

আবার, (ii) নং চিত্রে AB সরলরেখা বৃত্তকে ☐ ও ☐ বিন্দুতে ছেদ করেছে।

2 কিন্তু, (ii)ও (iii) নং চিত্রে AB সরলরেখাকে বৃত্তের কী বলা হয়?

(ii) নং চিত্রে AB সরলরেখা বৃত্তের ছেদক (Secant) এবং PQ, AB ছেদকের অনুরূপ জ্যা [Corresponding chord]

দেখছি, (iii) নং চিত্রে AB সরলরেখা ও বৃত্তের সাধারণ বিন্দু ☐।

∴ AB সরলরেখা বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

3 কিন্তু (iii) নং চিত্রে AB সরলরেখাকে বৃত্তের কী বলা হয়?

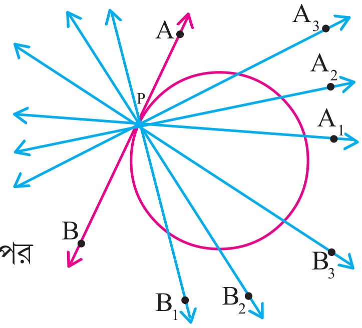
(iii) নং চিত্রে AB সরলরেখা P বিন্দুতে বৃত্তের **স্পর্শক** (tangent), P বিন্দু **স্পর্শবিন্দু** [Point of contact]

বুঝেছি, বৃত্তের ছেদকের অনুরূপ জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিত হলে, ছেদকটি বৃত্তের একটি স্পর্শক হবে।

আমি হাতেকলমে যাচাই করি

একটি শক্ত তারের বৃত্তাকার রিং-এর যে-কোনো একটি P বিন্দুতে একটি সোজা সরলরৈখিক (straight) তার PA_1-আটকে P বিন্দুকে কেন্দ্র করে ক্রমশ দু-দিকে ঘোরালাম।

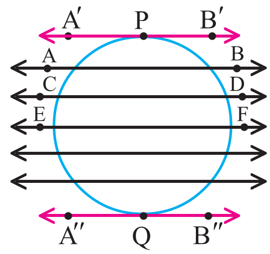
দেখছি, PA_1, PA_2, PA_3 ... বা PB_3, PB_2, PB_1 ... অবস্থানের ছেদকটি ঘুরতে ঘুরতে যখন ছেদকের অনুরূপ জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিত হলো, তখন বৃত্তের ছেদকটি একটি ☐ হলো।



রজত তার খাতায় একটি বৃত্ত ও তার একটি ছেদক AB সরলরেখা এঁকেছে।

4 আমি ওই বৃত্তে AB ছেদকের সমান্তরাল স্পর্শক আঁকার চেষ্টা করি।

খাতায় একটি বৃত্ত এঁকে স্কেলের সাহায্যে স্কেলের দু-প্রান্তে দুটি সরলরেখা AB ও CD আঁকলাম। CD ছেদক AB ছেদকের সমান্তরাল। বৃত্তের AB ছেদকের সমান্তরাল একাধিক ছেদক স্কেলের সাহায্যে এঁকে A'B' ও A"B" দুটি ছেদক পেলাম যারা যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক এবং AB ছেদকের সমান্তরাল ওই বৃত্তে দুটির বেশি স্পর্শক পেলাম না। **[নিজে এঁকে যাচাই করি]**



আমরা গোলাকার রিং ও কাঠির সাহায্যে আগের খেলনার মতো অন্যরকম একটি খেলনা তৈরি করলাম। এছাড়া অনেক সাদা পিচবোর্ডের বৃত্তাকার চাকতিও তৈরি করেছি যেগুলি দিয়ে অন্যরকম খেলনা তৈরি করব।

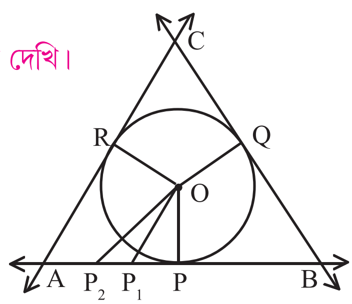
রীতম তার রঙিন কাগজে একটি বৃত্তাকার চাকতি আটকে দিল যার কেন্দ্র O।

হাতেকলমে

আমি হাতেকলমে এই বৃত্তের যে-কোনো বিন্দুতে স্পর্শক আঁকি ও কী পাই দেখি।

(i) বৃত্তের উপরে যে-কোনো তিনটি বিন্দু P, Q ও R নিলাম।

(ii) কাগজ ভাঁজ করে পাশের ছবির মতো বৃত্তের P, Q ও R বিন্দুতে তিনটি স্পর্শক যথাক্রমে AB, BC ও CA অঙ্কন করলাম যারা A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করল।



(iii) OP, OQ ও OR ব্যাসার্ধ পেলাম।

(iv) AB-এর উপরে P বিন্দু ব্যতীত অন্য যে-কোনো বিন্দু P_1, P_2 নিলাম।

ΔOP_1P ও ΔOP_2P থেকে দেখছি, $OP_1 > OP$ এবং $OP_2 > OP$.

∴ দেখছি, AB স্পর্শকের উপর যে-কোনো বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাংশের মধ্যে OP ক্ষুদ্রতম

∴ $OP \perp AB$

হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

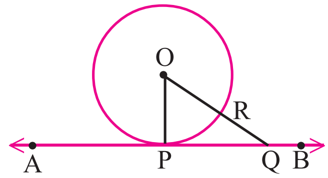
উপপাদ্য :40. বৃত্তের কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও ওই স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে AB স্পর্শক এবং OP, P বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করতে হবে : OP ও AB স্পর্শক পরস্পর লম্ব। অর্থাৎ, $OP \perp AB$

অঙ্কন : AB স্পর্শকের উপর অপর যে-কোনো একটি বিন্দু Q নিলাম। O, Q বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : স্পর্শক AB -এর উপর স্পর্শবিন্দু P ছাড়া অন্য যে-কোনো বিন্দু বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।
সুতরাং, OQ বৃত্তটিকে একটি বিন্দুতে ছেদ করবে।
মনে করি, ছেদবিন্দু R.
$\therefore OR < OQ$ [$\because$ R বিন্দু O, Q-এর মধ্যবর্তী]
আবার, $OR = OP$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore OP < OQ$



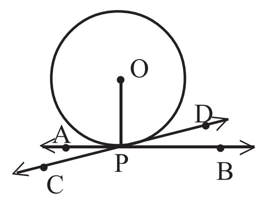
$\because$ Q বিন্দু A B স্পর্শকের উপর যে-কোনো বিন্দু, সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে AB স্পর্শক পর্যন্ত যত সরলরেখাংশ অঙ্কন করা যায় OP তাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম। আবার ক্ষুদ্রতম দূরত্ব লম্ব দূরত্ব।
সুতরাং, $OP \perp AB$ (প্রমাণিত)

যুক্তি দিয়ে উপপাদ্য : 40-এর বিপরীত বিবৃতি প্রমাণ করি।

প্রয়োগ : 1. কোনো বৃত্তের যে-কোনো ব্যাসার্ধের প্রান্তবিন্দু দিয়ে ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত লম্ব সরলরেখা ওই বৃত্তের ওই প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শক হবে।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে OP ব্যাসার্ধ এবং P বিন্দুতে OP ব্যাসার্ধের উপর AB সরলরেখা লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে : সরলরেখা AB, P বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক।

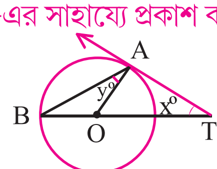


প্রমাণ : ধরি, AB সরলরেখা P বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শক নয়। O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে একটি স্পর্শক CD অঙ্কন করি।
যেহেতু, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে CD স্পর্শক এবং OP, P বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,
সুতরাং OP, CD সরলরেখার উপর লম্ব। $\therefore \angle OPD = 90^0$
আবার, $\angle OPB = 90^0$ (প্রদত্ত) [$\because$ OP, AB সরলরেখার উপর লম্ব]
$\therefore \angle OPD = \angle OPB$ অর্থাৎ CD সরলরেখা ও AB সরলরেখা পরস্পর সমাপতিত হবে।
$\therefore$ AB সরলরেখা O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক।

প্রয়োগ : 2. প্রমাণ করি যে বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
[**সংকেত :** যেহেতু ওই বিন্দুতে ওই বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর একটিমাত্র লম্ব সরলরেখাই অঙ্কন করা যায়।]

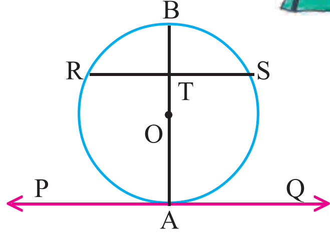
প্রয়োগ : 3. প্রমাণ করি যে, স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব বৃত্তের কেন্দ্রগামী।
[**সংকেত :** একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটিমাত্র লম্ব সরলরেখাই অঙ্কন করা যায়।]

প্রয়োগ : 4. পাশের চিত্রে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে A বিন্দুতে AT একটি স্পর্শক। x কে y-এর সাহায্যে প্রকাশ করি।



O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AT স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।
$\therefore \angle OAT = 90^o$; আবার, $\angle ATO = x^o$
সুতরাং, ΔAOT-এর, $\angle AOT = 90^o - x^o$ _______ (i)
আবার, ΔAOB-এর, $\angle OAB = \angle OBA = y^o$ [$\because$ OA ও OB একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $\therefore OA = OB$]
ΔAOB-তে, বহিঃস্থ $\angle AOT = \angle OAB + \angle OBA = 2y^o$ _______ (ii)
$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পেলাম, $2y^o = 90^o - x^o$ বা, $x^o = 90^o - 2y^o$ $\therefore x = 90 - 2y$

প্রয়োগ : 5. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার একটি ব্যাস AB এবং A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক PAQ; PAQ-এর সমান্তরাল জ্যা RS; যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে AB, RS-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।



প্রমাণ : ধরি, AB, RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করেছে। O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে PAQ স্পর্শক এবং AB ব্যাস। সুতরাং, $AB \perp PQ$

আবার, $PQ \parallel RS$ [প্রদত্ত]

$\therefore AB \perp RS$ অর্থাৎ, $OT \perp RS$

$\therefore$ T, RS-এর মধ্যবিন্দু [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বৃত্তের জ্যা-এর উপর লম্ব জ্যা-টিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ AB, RS-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

প্রয়োগ : 6. প্রমাণ করি যে-কোনো বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুটিতে অঙ্কিত স্পর্শকদুটি পরস্পর সমান্তরাল। (নিজে করি)

কষে দেখি 15.1

1. মাসুম O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যার AB একটি জ্যা। B বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করেছি যা বর্ধিত AO-কে T বিন্দুতে ছেদ করল। $\angle BAT = 21^0$ হলে, $\angle BTA$-এর মান হিসাব করে লিখি।
2. কোনো বৃত্তের XY একটি ব্যাস। বৃত্তটির উপর অবস্থিত A বিন্দুতে PAQ বৃত্তের স্পর্শক। X বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব PAQ-কে Z বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, XA, $\angle YXZ$-এর সমদ্বিখণ্ডক।
3. একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যার PR একটি ব্যাস। P বিন্দুতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করলাম এবং এই স্পর্শকের উপরে S এমন একটি বিন্দু নিলাম যাতে PR = PS হয়। RS, বৃত্তকে T বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, ST = RT = PT.
4. একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন করি যার দুটি ব্যাসার্ধ OA ও OB পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, AB = OT এবং তারা পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
5. দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির AB ও AC জ্যা দুটি অপর বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করলে, প্রমাণ করি যে , $PQ = \frac{1}{2}BC$.
6. O কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের উপর অবস্থিত A বিন্দুতে স্পর্শকের উপর X যে-কোনো একটি বিন্দু। X বিন্দু থেকে অঙ্কিত একটি ছেদক বৃত্তকে Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে। YZ-এর মধ্যবিন্দু P হলে, প্রমাণ করি যে, XAPO বা XAOP একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।
7. O কেন্দ্রীয় কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। ওই ব্যাসের উপর O বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। বর্ধিত QP বৃত্তকে R বিন্দুতে ছেদ করে। R বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বর্ধিত OP-কে S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, SP=SR.
8. রুমেলা O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যার QR একটি জ্যা। Q ও R বিন্দুতে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। QM বৃত্তের একটি ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে, $\angle QPR = 2\angle RQM$.
9. কোনো বৃত্তের AC ও BD দুটি জ্যা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে এবং C ও D বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $\angle P + \angle Q = 2\angle BOC$.

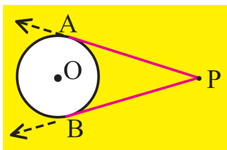
আজ আমরা ঠিক করেছি হাতেকলমে কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে স্পর্শক আঁকার চেষ্টা করব এবং কোন কোন ক্ষেত্রে কতগুলি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব জানব।

হাতেকলমে

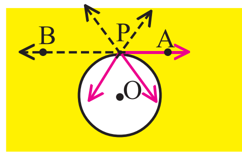
(i) তিনটি রঙিন শক্ত পিচবোর্ড নিলাম।

(ii) তিনটি সাদা কাগজে একই মাপের O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম এবং এই রঙিন পিচবোর্ডে আটকে দিলাম।

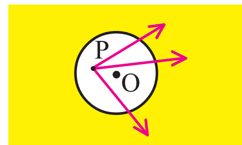
(iii) তিনটি বোর্ডে তিনটি আলপিন নীচের ছবির মতো যথাক্রমে বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বাহিরে, বৃত্তের উপর ও বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ভিতরে P বিন্দুতে আটকে দিলাম এবং আলপিনে সুতোর একপ্রান্ত আটকে অন্য প্রান্ত নীচের ছবির মতো বিভিন্ন দিকে ঘুরিয়ে সুতোর সাহায্যে বৃত্তের স্পর্শক টানার চেষ্টা করলাম।



(i)



(ii)



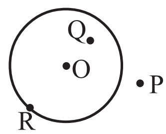
(iii)

দেখছি, (i) নং ক্ষেত্রে অর্থাৎ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বাহিরের যে-কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে ☐ টি স্পর্শক অঙ্কন করতে পারব।

(ii) নং ক্ষেত্রে অর্থাৎ বৃত্তের উপরের যে-কোনো বিন্দুতে ওই বৃত্তে ☐ টি স্পর্শক অঙ্কন করতে পারব। এবং

(iii) নং ক্ষেত্রে অর্থাৎ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ভেতরের যে-কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তের কোনো স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব নয়।

পাশের ছবির O কেন্দ্রীয় বৃত্তটির একটি বহিঃস্থ বিন্দু P এবং একটি অন্তঃস্থ বিন্দু Q এবং ওই বৃত্তে অবস্থিত একটি বিন্দু R.



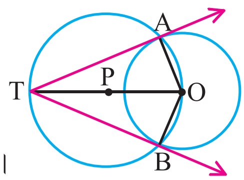
হাতে কলমে যাচাই করে দেখি, P, Q ও R বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে কয়টি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব।

∴ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে 2টি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

প্রয়োগ : 7. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের T যে-কোনো একটি বহিঃস্থ বিন্দু।



প্রমাণ করতে হবে : T বিন্দু থেকে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

অঙ্কন : T, O যুক্ত করলাম। T O -কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম।
যেহেতু T বিন্দুটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু এবং O অন্তঃস্থ বিন্দু।
সুতরাং, TO-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্তটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করবে।
ধরি, ছেদবিন্দু দুটি A এবং B; T, A; T, B; O, A; O, B যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : $\angle OAT$ এবং $\angle OBT$ প্রত্যেকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

∴ $\angle OAT = \angle OBT = 1$ সমকোণ

অর্থাৎ, $OA \perp AT$ এবং $OB \perp BT$

TA ও TB যথাক্রমে ব্যাসার্ধ OA এবং OB-এর উপর A ও B বিন্দুতে লম্ব।

∴ TA ও TB, O কেন্দ্রীয় বৃত্তে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে দুটি স্পর্শক।

পেলাম, বহিঃস্থ বিন্দু থেকে একটি বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। [প্রমাণিত]

বুঝেছি, বৃত্তের ☐ [অন্তঃস্থ/বহিঃস্থ] কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে কোনো স্পর্শক অঙ্কন করা যায় না। [নিজে লিখি]

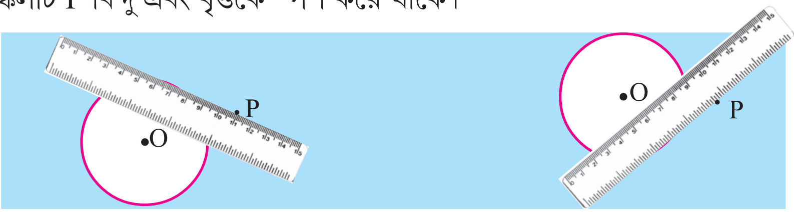
প্রয়োগ : 8. আমি একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে দুটি স্পর্শক PA ও PB অঙ্কন করেছি যারা বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, $\angle APB + \angle AOB = 180^0$ [নিজে করি]

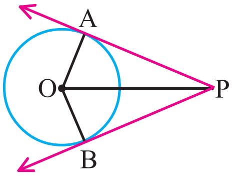
হাতেকলমে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করেছি যে, বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। কিন্তু এই দুটি স্পর্শকের মধ্যে কীরকম সম্পর্ক থাকবে হাতেকলমে পরীক্ষা করে দেখি।

হাতেকলমে

(1) একটি কাগজে যে-কোনো O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকলাম এবং বৃত্তের বহিঃস্থ যে-কোনো বিন্দু P নিলাম।

(2) এবার একটি স্কেল কাগজের উপর এমনভাবে নীচের ছবির মতো বৃত্তের কেন্দ্রের দু-দিকে রাখলাম যাতে স্কেলটি P বিন্দু এবং বৃত্তকে স্পর্শ করে থাকে।





(3) কাগজটি দু-দিকে ভাঁজ করে P বিন্দু থেকে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শবিন্দু A ও B পেলাম এবং A, P; B, P; O, P; O, A ও O, B যোগ করলাম ও দুটি স্পর্শক AP ও BP পেলাম।

(4) OP বরাবর কাগজটি দু-ভাঁজ করে দেখছি, AP ও BP পরস্পর মিলে গেছে এবং OA ও OB পরস্পর মিলে গেছে।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, AP = BP এবং $\angle AOP = \angle BOP$।

হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করলে তাদের স্পর্শবিন্দু দুটির সঙ্গে বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ দুটির দৈর্ঘ্য সমান হয় এবং তারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[নিজে অপর একটি বৃত্ত এঁকে একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করি]

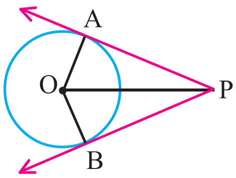
কিন্তু বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে স্পর্শবিন্দু A পর্যন্ত দৈর্ঘ্যকে কী বলা হয়?

বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে স্পর্শবিন্দু A পর্যন্ত দৈর্ঘ্যকে P বিন্দু থেকে PA **স্পর্শকের দৈর্ঘ্য** বলা হয়।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :41. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে যে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায় তাদের স্পর্শবিন্দু দুটির সঙ্গে বহিঃস্থ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ দুটির দৈর্ঘ্য সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক যাদের স্পর্শবিন্দু যথাক্রমে A ও B, O,A; O, B ; O, P যুক্ত করায় PA ও PB সরলরেখাংশ দুটি কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle POA$ ও $\angle POB$ দুটি কোণ উৎপন্ন করেছে।



প্রমাণ করতে হবে :(i) PA = PB (ii) $\angle POA = \angle POB$

প্রমাণ : PA ও PB স্পর্শক এবং OA ও OB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ OA ⊥ PA এবং OB ⊥ PB

POA ও POB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে, $\angle OAP = \angle OBP$ (প্রত্যেকে 1 সমকোণ)

অতিভুজ OP সাধারণ বাহু এবং OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

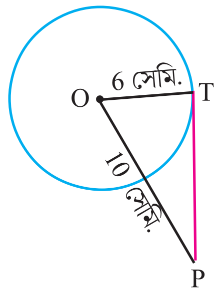
$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$ [সর্বসমতার R-H-S শর্তানুসারে]

$\therefore$ PA = PB (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু) .... [(i) প্রমাণিত]

এবং $\angle POA = \angle POB$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ) .... [(ii) প্রমাণিত]

এই উপপাদ্যটি থেকে আরও পেলাম $\angle APO = \angle BPO$ (সর্বসম ত্রিভুজ PAO ও PBO-এর অনুরূপ কোণ)। সুতরাং OP, $\angle APB$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রয়োগ : 9. আমি একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকেছি যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। কেন্দ্র O থেকে 10 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দু থেকে PT স্পর্শক আঁকলাম। হিসাব করে PT স্পর্শকের দৈর্ঘ্য লিখি।



O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OT ব্যাসার্ধ এবং PT স্পর্শক। $\therefore OT \perp PT$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ POT-তে, $PT^2 = PO^2 - OT^2$

[পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম]

বা, $PT^2 = \{(10)^2 - (6)^2\}$ বর্গ সেমি.

$= (100 - 36)$ বর্গ সেমি.

$= 64$ বর্গ সেমি.

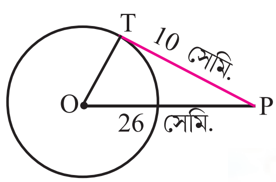
$\therefore PT = \sqrt{64}$ সেমি.

$= 8$ সেমি.

$\therefore$ পেলাম PT স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 8 সেমি.।

প্রয়োগ : 10. আমি যদি এমন একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি যার কেন্দ্র থেকে 26 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হবে, তবে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে লিখি।

$PT = 10$ সেমি., $PO = 26$ সেমি.



$\therefore$ সমকোণী ΔPOT থেকে পাই,

$PO^2 = PT^2 + OT^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

$\therefore (26\text{সেমি.})^2 = (10\text{সেমি.})^2 + OT^2$

বা, $OT^2 = (26\text{সেমি.})^2 - (10\text{সেমি.})^2 = \square$

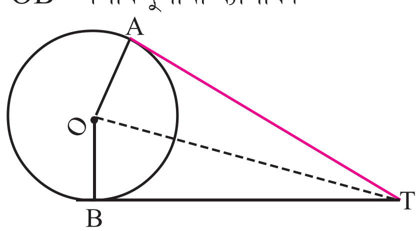
$\therefore OT = \square$ সেমি. **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 11. পাশের চিত্রের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ OA ও OB-এর মধ্যবর্তী কোণ 130°; A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় T বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle ATB$ এবং $\angle ATO$-এর মান হিসাব করে লিখি।

A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ T বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক AT ও BT এবং OA ও OB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

$\therefore OA \perp AT$ এবং



$\therefore \angle ATB + \angle AOB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ)$

$= 180^\circ$

$\therefore \angle ATB = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

আবার, যেহেতু OT, $\angle ATB$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সুতরাং $\angle ATO = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

নিজে করি 15.1

(1) 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 13 সেমি. দূরবর্তী কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

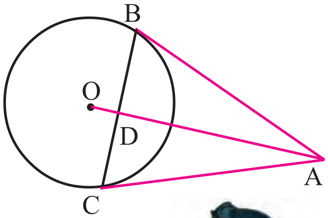
(2) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 13 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু P থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

(3) যদি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় PA ও PB; $\angle AOB = 120^\circ$ হলে, $\angle APB$ এবং $\angle APO$-এর মান হিসাব করে লিখি।

প্রয়োগ : 12. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে বৃত্তে দুটি স্পর্শক টানি যারা বৃত্তকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে। প্রমাণ করি যে, AO, BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে বৃত্তে দুটি স্পর্শক AB ও AC টানা হয়েছে যারা বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। A, O যুক্ত করি। AO, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : AO, BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।



প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও AC স্পর্শক। সুতরাং, AB = AC
এবং AO, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক। অর্থাৎ, $\angle BAD = \angle CAD$
ΔABD ও ΔACD-তে, AB = AC
$\angle BAD = \angle CAD$ এবং AD সাধারণ বাহু
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (S-A-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে)
সুতরাং, BD = CD (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু)
এবং $\angle BDA = \angle CDA$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ)
আবার, $\angle BDA + \angle CDA = 180^\circ$ বা, $2\angle BDA = 180^\circ$ ($\because \angle BDA = \angle CDA$)
$\therefore \angle BDA = 90^\circ$ সুতরাং $AD \perp BC$ $\therefore$ AD, BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক। **(প্রমাণিত)**

নিজে করি 15.2

(1) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক দুটির অন্তর্ভূত কোণকে ওই বিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(2) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক দুটির অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী হবে।

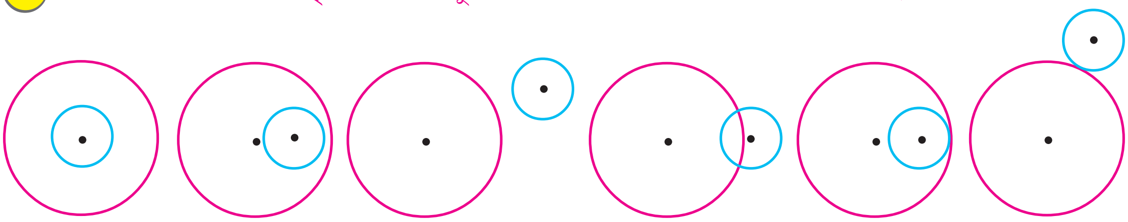
(3) প্রমাণ করি যে, বৃত্তের উপরিস্থিত দুটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি যদি পরস্পরকে ছেদ করে, তাহলে ছেদবিন্দু থেকে স্পর্শবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হবে।

আজ আমরা ঠিক করেছি আমাদের নিজস্ব পরিবেশের বৃত্তাকার ছবি আঁকব। নীলাদ্রি খুব ভালো ছবি আঁকে। সে স্কুলের ব্ল্যাকবোর্ডে একটি বৃত্তাকার মাঠের ছবি আঁকল।

কিন্তু আমাদের পাড়ার বৃত্তাকার মাঠের চারধারে সমান চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তাসমেত বৃত্তাকার মাঠটির ছবি আঁকি।

দেখছি, দুটি বৃত্ত পেলাম যাদের কেন্দ্র একই অর্থাৎ দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত পেলাম। এদিকে রাবেয়া দুটি বৃত্তকার তারের রিং নানাভাবে বসিয়ে নতুন কিছু তৈরির চেষ্টা করছে।

5 আমি রাবেয়ার বসানো বৃত্তাকার রিং-গুলির অবস্থান দেখি ও কী কী ভাবে আছে দেখি।



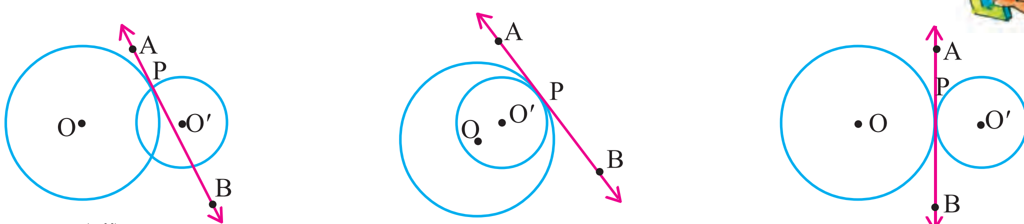
(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

দেখছি, (i) নং ছবির বৃত্তদ্বয় ______, কিন্তু (ii) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় এককেন্দ্রীয় নয়। আবার, (iii) নং ছবির বৃত্তদ্বয় পরস্পরছেদী না হলেও (iv) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় দুটি বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে।

6 স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শক আঁকলে কী ধরনের স্পর্শক পাব ছবি এঁকে দেখি।

কিন্তু দেখছি, (v) ও (vi) নং চিত্রে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করেছে।

7 দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করেছে তা বুঝব কীভাবে?



(vii) (viii) (ix)

একই সমতলে O কেন্দ্রীয় এবং O′ কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্তের যদি একটি ছেদবিন্দু P হয় এবং P বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের স্পর্শকটি যদি O′ কেন্দ্রীয় বৃত্তকেও ঐ বিন্দুতে স্পর্শ করে তবে বলা হবে বৃত্তদুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। চিত্র (vii)-এ বৃত্তদুটি পরস্পরকে স্পর্শ করেনি। চিত্র (viii) ও চিত্র (ix)-এ বৃত্তদুটি পরস্পরকে স্পর্শ করেছে।

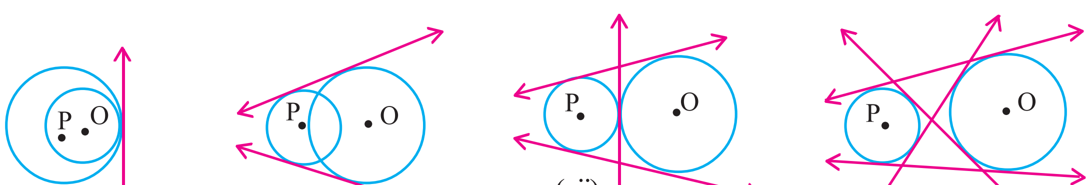
(viii) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে **অন্তঃস্থভাবে** বা **অন্তঃস্পর্শ (Internally Touch)** করেছে।

AB হলো বৃত্তদ্বয়ের **সাধারণ স্পর্শক**।

আবার (ix) নং ছবিতে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে **বহিঃস্থভাবে বা বহিঃস্পর্শ (Externally Touch)** করেছে। AB হলো বৃত্তদ্বয়ের ______ **[নিজে লিখি]**

বুঝেছি, একটি সরলরেখা যদি দুটি বৃত্তের প্রত্যেকটিকেই স্পর্শ করে, তাহলে ওই সরলরেখাটিকে বৃত্তদুটির **সাধারণ স্পর্শক (Common Tangent)** বলা হয়।

8 আমি খাতায় নানাভাবে দুটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক আঁকি ও কী পাই দেখি।



(x) (xi) (xii) (xiii)

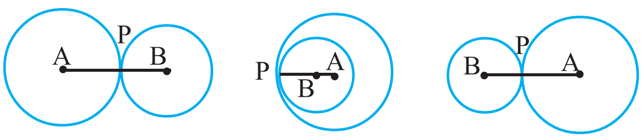
দেখছি দুটি বৃত্তের বিভিন্ন অবস্থানে কখনো 1টি, কখনো 2টি, কখনো 3টি, আবার কখনো 4টি সাধারণ স্পর্শক এঁকেছি।

9 কিন্তু কখনো দেখছি সাধারণ স্পর্শকের একই পাশে বৃত্তদুটি আছে, আবার কখনো সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত পাশে বৃত্তদুটি আছে। এই ধরনের স্পর্শককে কী বলা হয়?

সাধারণ স্পর্শকের একই পাশে বৃত্তদুটি অবস্থিত হলে স্পর্শকটিকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** এবং সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত পাশে বৃত্তদুটি অবস্থিত হলে স্পর্শকটিকে **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** বলা হয়।

বুঝেছি, (x) ও (xi) ছবির স্পর্শকগুলি সরল সাধারণ স্পর্শক, কিন্তু (xii)-এ দুটি সরল সাধারণ স্পর্শক ও 1টি ☐ সাধারণ স্পর্শক আছে। আবার (xiii) নং ছবিতে ☐ টি সরল সাধারণ স্পর্শক ও ☐ টি তির্যক সাধারণ স্পর্শক আছে। **[নিজে ছবি দেখে লিখি]**

10 কিন্তু দুটি বৃত্ত যদি পরস্পরকে স্পর্শ করে তবে স্পর্শবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় কী অবস্থানে থাকবে ছবি এঁকে যাচাই করি।



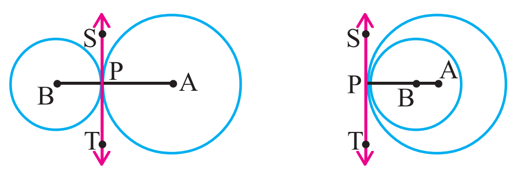
ছবি থেকে দেখছি, বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু একই সরলরেখায় আছে।

আমি যে-কোনো দুটি বৃত্ত আঁকলাম যারা পরস্পরকে স্পর্শ করেছে এবং দেখছি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ। **[নিজে করি]**

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :42. যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে, তাহলে স্পর্শবিন্দুটি কেন্দ্র দুটির সংযোজক সরলরেখাংশের উপর অবস্থিত হবে।

প্রদত্ত : A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে : A, P ও B সমরেখ।

অঙ্কন : A, P ও B, P যোগ করলাম।

প্রমাণ : A কেন্দ্রীয় ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তদুটি পরস্পরকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

$\therefore$ P বিন্দুতে বৃত্তদুটির একটি সাধারণ স্পর্শক আছে।

ধরি, ST হলো সাধারণ স্পর্শক যা দুটি বৃত্তকেই P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

$\because$ A কেন্দ্রীয় বৃত্তের ST স্পর্শক এবং AP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

$\therefore AP \perp ST$

আবার, যেহেতু B কেন্দ্রীয় বৃত্তের ST স্পর্শক এবং BP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ,

$\therefore BP \perp ST$

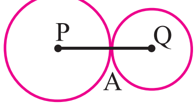
$\therefore$ AP ও BP একই P বিন্দুতে ST সরলরেখার উপর লম্ব।

$\therefore$ AP ও BP একই সরলরেখায় অবস্থিত অর্থাৎ A, P ও B সমরেখ। **(প্রমাণিত)**

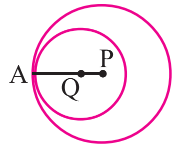
আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, দুটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করলে একটির কেন্দ্র ও স্পর্শবিন্দুগামী সরলরেখা অপর বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যাবে। **[নিজে করি]**

যদি দুটি বৃত্ত বহিঃস্পর্শ করে, তবে কেন্দ্রদুটির দূরত্ব ব্যাসার্ধ দুটির দৈর্ঘ্যের ☐ [সমষ্টির / অন্তরের] সমান হবে।

পাশের চিত্রে, PQ = PA + AQ

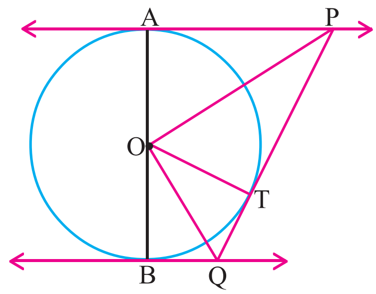


আবার, যদি দুটি বৃত্ত অন্তঃস্পর্শ করে, তবে কেন্দ্রদুটির দূরত্ব ব্যাসার্ধ দুটির দৈর্ঘ্যের অন্তরফলের সমান হবে। পাশের চিত্রে, PQ = ☐ – ☐ **[নিজে লিখি]**



প্রয়োগ : 13. আমি O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যার AB একটি ব্যাস। AB ব্যাসের A ও B বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করেছি যা বৃত্তটির অপর একটি বিন্দু T-তে অঙ্কিত স্পর্শককে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি, $\angle POQ = 90^\circ$

প্রদত্ত : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। A ও B বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা হয়েছে। বৃত্তের অপর একটি বিন্দু T-তে অঙ্কিত স্পর্শক A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে : $\angle POQ = 90^\circ$

অঙ্কন : O, P; O, Q এবং O, T যুক্ত করি।

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তে A ও T বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ PO, $\angle APT$-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক [নিজে প্রমাণ করি]

$\therefore \angle TPO = \frac{1}{2}\angle APT$ ______ (i)

অনুরূপে, T ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদুটি Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore \angle TQO = \frac{1}{2}\angle BQT$ ______ (ii)

আবার, AP || BQ এবং PQ ভেদক।

$\therefore \angle APT + \angle BQT = 180^\circ$

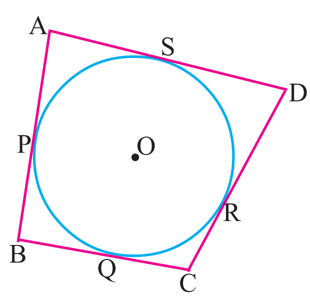
$\therefore \angle TPO + \angle TQO = \frac{1}{2}\angle APT + \frac{1}{2}\angle BQT$ [(i) ও (ii) থেকে পেলাম]

$= \frac{1}{2}(\angle APT + \angle BQT) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

$\therefore$ ΔPOQ-এর অপর কোণটি অর্থাৎ $\angle POQ = 90^\circ$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 14. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD হলে প্রমাণ করি যে, AB + CD = BC + DA

প্রদত্ত : ABCD চতুর্ভুজটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তে পরিলিখিত।
ধরি, AB, BC, CD ও DA বৃত্তটিকে যথাক্রমে P, Q, R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে : AB + CD = BC + DA

প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে AS ও AP দুটি স্পর্শক

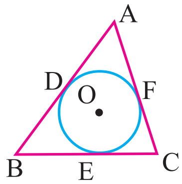
$\therefore$ AS = AP

অনুরূপে, BP = BQ, CQ = CR এবং DR = DS

AB + CD = AP + BP + CR + DR

= AS + BQ + CQ + DS = (AS + DS) + (BQ + CQ) = AD + BC **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 15. পাশের ছবিতে ΔABC-এর অন্তর্বৃত্ত AB, BC ও CA বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AD + BE + CF = AF + CE + BD$ $= \Delta ABC$ -এর পরিসীমার অর্ধেক। [নিজে করি]



প্রয়োগ : 16. P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে,

(i) A বিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ স্পর্শক RS সরলরেখাংশকে T বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(ii) $\angle RAS = 1$ সমকোণ

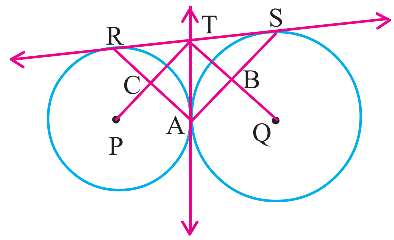
(iii) যদি PT ও QT, AR ও AS-কে যথাক্রমে C ও B বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে ABTC একটি আয়তাকার চিত্র হবে।

প্রদত্ত : P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক P ও Q কেন্দ্রীয় বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করে। A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করে। PT, AR-কে C বিন্দুতে এবং QT, AS-কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : (i) AT, RS-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে

(ii) $\angle RAS = 1$ সমকোণ

(iii) ABTC একটি আয়তাকার চিত্র।



প্রমাণ : A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক RS-কে T বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ T বিন্দু থেকে P-কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি স্পর্শক TR ও TA

$\therefore TR = TA$

অনুরূপে, $TS = TA$ $\therefore TR = TS$

$\therefore$ AT, RS-কে T বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। [(i) প্রমাণিত]

আবার ΔATR-এর $TR = TA$ $\therefore \angle TAR = \angle TRA$

অনুরূপভাবে, $\angle TAS = \angle TSA$

$\therefore \angle RAS = \angle TAR + \angle TAS = 90^\circ$

[$\because \angle TRA + \angle TAR + \angle TAS + \angle TSA = 180^\circ$

$\therefore 2(\angle TAR + \angle TAS) = 180^\circ$; সুতরাং, $\angle TAR + \angle TAS = 90^\circ$] [(ii) নং প্রমাণিত]

আবার, PT, $\angle RTA$-এর সমদ্বিখণ্ডক এবং QT, $\angle ATS$-এর সমদ্বিখণ্ডক

$\therefore PT \perp TQ$ অর্থাৎ, $\angle PTQ = 1$ সমকোণ। অনুরূপে, $QT \perp SA$

$PT \perp RA$ এবং $QT \perp SA$,

$\therefore \angle ACT = \angle ABT = 1$ সমকোণ

ABTC চতুর্ভুজের, $\angle ACT = \angle ABT = 90^\circ$

এবং $\angle CAB = 90^\circ$ $\therefore \angle CTB = 90^\circ$

[কারণ ΔTRC ও ΔTAC -এর মধ্যে, $TR = TA$, $\angle RTC = \angle ATC$ এবং TC উহাদের সাধারণ বাহু $\therefore \Delta TRC \cong \Delta TAC$ (S-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে) সুতরাং, $\angle TCR = \angle TCA$ $\therefore PT \perp RA$]

$\therefore$ ABTC একটি সামান্তরিক ($\because$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ সমান)

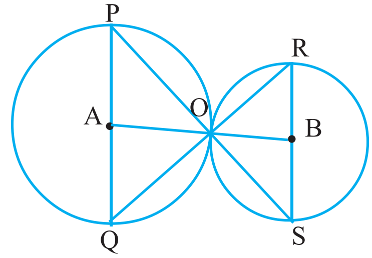
আবার, ABTC সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ।

$\therefore$ ABTC একটি আয়তাকার চিত্র, [(iii) প্রমাণিত]

প্রয়োগ : 17. সুমিতা দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। যদি PQ ও RS দুটি বৃত্তের ব্যাস হয় যারা পরস্পর সমান্তরাল, তবে প্রমাণ করি যে, P, O এবং S বিন্দু তিনটি সমরেখ।

প্রদত্ত : দুটি বৃত্ত পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। বৃত্ত দুটির ব্যাস PQ ও RS সমান্তরাল।

প্রমাণ করতে হবে : P, O, S বিন্দু তিনটি সমরেখ।



অঙ্কন : ধরি বৃত্ত দুটির কেন্দ্র A ও B ; O, A;O, B; O, P; O,Q; O, R; O, S যুক্তি করি।

প্রমাণ : বৃত্তদুটির কেন্দ্র A ও B.

O বিন্দুতে বৃত্তদুটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে।

$\therefore$ A, O ও B একই সরলরেখায় অবস্থিত।

ΔAOP-এর $AP = AO$, $\therefore \angle APO = \angle AOP$

আবার $\angle PAO + \angle APO + \angle AOP = 180^\circ$

$\therefore 2\angle AOP = 180^\circ - \angle PAO$

অনুরূপভাবে, ΔBOR থেকে পাই $2\angle ROB = 180^\circ - \angle RBO$

$\therefore 2\angle AOP + 2\angle ROB = 360^\circ - (\angle PAO + \angle RBO)$

$= 360^\circ - 180^\circ$ [$\because$ PQ || RS এবং AB ভেদক]

$= 180^\circ$

$\therefore \angle AOP + \angle ROB = 90^\circ$

$\therefore \angle POR = 180^\circ - (\angle AOP + \angle ROB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\angle POR + \angle ROS = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ($\because \angle ROS$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, সুতরাং $\angle ROS = 90^\circ$)

$\therefore \angle POS = 180^\circ$

$\therefore$ P, O এবং S বিন্দু তিনটি সমরেখ। **[প্রমাণিত]**

কষে দেখি 15.2

1. 16 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 17 সেমি. দূরত্বে অবস্থিত বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
2. একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত P ও Q বিন্দু দুটিতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি A বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle PAQ = 60^\circ$ হলে $\angle APQ$-এর মান নির্ণয় করি।
3. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক AP ও AQ বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করে। PR একটি ব্যাস হলে, প্রমাণ করি যে, OA || RQ
4. প্রমাণ করি যে, একটি বৃত্তের পরিলিখিত কোনো চতুর্ভুজের যে-কোনো দুটি বিপরীত বাহুর দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ সম্মুখ কোণ দুটি পরস্পর সম্পূরক।
5. প্রমাণ করি যে, বৃত্তের পরিলিখিত সামান্তরিক মাত্রই রম্বস।
6. A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর O একটি বিন্দু এবং OD ও OE যথাক্রমে A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্তকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। $\angle COD = 56^\circ$, $\angle COE = 40^\circ$, $\angle ACD = x^\circ$ এবং $\angle BCE = y^\circ$ হলে প্রমাণ করি যে $OD = OC = OE$ এবং $x - y = 8$

7. A ও B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি নির্দিষ্ট বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করেছে। অপর একটি বৃত্ত, বৃহত্তর বৃত্তটিকে X বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে Y বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। O যদি ওই বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ করি যে, AO + BO ধ্রুবক হবে।
8. A ও B কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। O বিন্দু দিয়ে একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা বৃত্ত দুটিকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, AP || BQ.
9. তিনটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। প্রমাণ করি যে, ওই বৃত্ত তিনটির কেন্দ্রগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।
10. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু A থেকে অঙ্কিত AB ও AC দুটি স্পর্শক বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে। উপচাপ BC-এর উপর অবস্থিত X বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AB ও AC -কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, ΔADE-এর পরিসীমা = 2 AB.

11. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ A বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক বৃত্তকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। OB = 5 সেমি., AO = 13 সেমি. হলে, AB-এর দৈর্ঘ্য
(a) 12 সেমি. (b) 13 সেমি. (c) 6.5 সেমি. (d) 6 সেমি.

(ii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। AB বৃত্ত দুটির একটি সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুটিকে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করে। $\angle ACB$-এর পরিমাপ
(a) 60° (b) 45° (c) 30° (d) 90°

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি.। O বিন্দু থেকে 13 সেমি. দূরত্বে P একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে বৃত্তের দুটি স্পর্শকের দৈর্ঘ্য PQ এবং PR; PQOR চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল
(a) 60 বর্গ সেমি. (b) 30 বর্গ সেমি. (c) 120 বর্গ সেমি. (d) 150 বর্গ সেমি.

(iv) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. ও 3 সেমি.। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। বৃত্তদুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব
(a) 2 সেমি. (b) 2.5 সেমি. (c) 1.5 সেমি. (d) 8 সেমি.

(v) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি. ও 2 সেমি.। বৃত্ত দুটি পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করে। বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব
(a) 5.5 সেমি. (b) 1 সেমি. (c) 1.5 সেমি. (d) কোনোটিই নয়

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

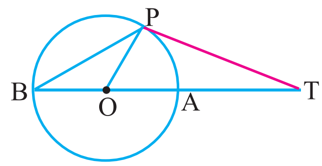
(i) একটি বৃত্তের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু P ; বৃত্তে অঙ্কিত কোনো স্পর্শক P বিন্দুগামী নয়।
(ii) একটি বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল দুইয়ের অধিক স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

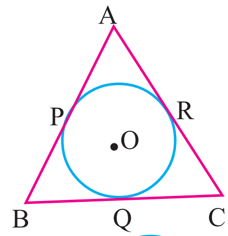
(i) একটি সরলরেখা বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করলে সরলরেখাটিকে বৃত্তের ________ বলে।
(ii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ বা স্পর্শ না করলে বৃত্তদুটির সর্বাধিক সংখ্যায় ________ টি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
(iii) দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। A বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক হলো ________ সাধারণ স্পর্শক (সরল / তির্যক)।

12. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

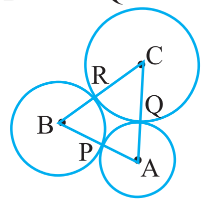
(i) পাশের চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র O এবং BOA বৃত্তের ব্যাস। বৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বর্ধিত BA-কে T বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle PBO = 30^o$ হলে, $\angle PTA$-এর মান নির্ণয় করি।



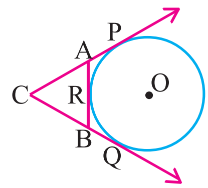
(ii) পাশের চিত্রে ABC ত্রিভুজটি একটি বৃত্তে পরিলিখিত এবং বৃত্তকে P, Q, R বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি AP = 4 সেমি., BP = 6 সেমি., AC = 12 সেমি. এবং BC = x সেমি. হয়। তাহলে x-এর মান নির্ণয় করি।



(iii) পাশের চিত্রে A, B, C কেন্দ্রবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। যদি AB = 5 সেমি., BC = 7 সেমি. এবং CA = 6 সেমি. হয়, তাহলে A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



(iv) পাশের চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে বহিঃস্থ বিন্দু C থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক বৃত্তকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তের অপর একটি বিন্দু R-তে অঙ্কিত স্পর্শক CP ও CQ-কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি, CP = 11 সেমি. এবং BC = 7 সেমি. হয়, তাহলে BR-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

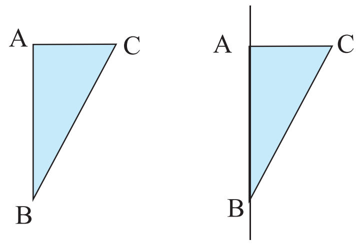


(v) দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 8 সেমি. ও 3 সেমি. এবং তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 13 সেমি.। বৃত্ত দুটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

16 লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু
RIGHT CIRCULAR CONE

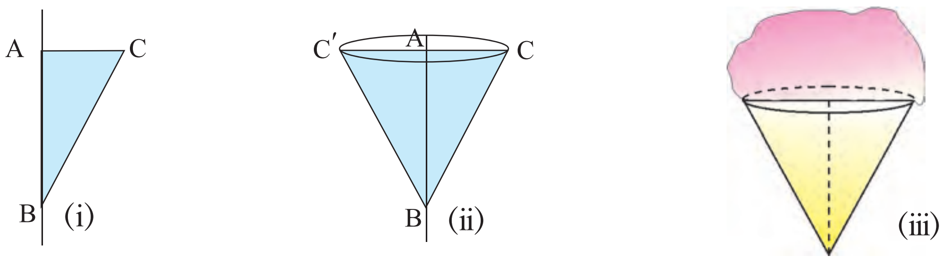
গত মাসে আমরা অর্ধবৃত্তাকার পিচবোর্ডে একটি সরু কাঠি আটকে অনেকগুলি হাতপাখা তৈরি করেছি।
আবার দেখেছি এই হাতপাখাগুলি তার কাঠিটিকে অক্ষ করে জোরে ঘোরালে গোলক আকারের ঘনবস্তু পাই।

1 কিন্তু একইভাবে কোনো সমকোণী ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডকে ত্রিভুজটির লম্ব বা ভূমির দিকে কাঠির সঙ্গে আটকে কাঠির সাপেক্ষে ঘোরালে কী পাব দেখি।



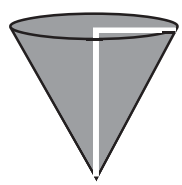
আমার বন্ধু আসলাম একটি রঙিন আয়তক্ষেত্রাকার পিচবোর্ড থেকে পাশের চিত্রের মতো একটি সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC কেটে নিল, যার $\angle A$ সমকোণ।
আমি এই ABC সমকোণী ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহু AB -এর সঙ্গে খুব সরু কাঠি আটকে পাশের চিত্রের মতো পেলাম।

2 এবার AB কাঠিটিকে অক্ষ করে অক্ষের চারপাশে ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডটি খুব জোরে ঘুরিয়ে কী পাই দেখি।



ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুকে অক্ষ করে অক্ষের চারপাশে ঘোরানোর ফলে দেখছি আইসক্রিমের কোনের মতো আকারের একটি ঘনবস্তুর আকার তৈরি হয়েছে।

3 এইরকম আকারের ঘনবস্তুকে কী বলা হয়?
এইরকম আকারের ঘনবস্তুকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু বলা হয়।

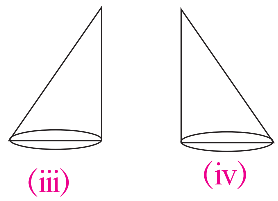


4 ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুর সাপেক্ষে ঘোরানোয় AC বাহু দ্বারা একটি বৃত্ত গঠিত হয়েছে একে কী বলা হয়?
(ii) নং চিত্রের AC বাহু দ্বারা গঠিত বৃত্তকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমি বলা হয়। শঙ্কুর বৃত্তাকার ভূমির ব্যাসার্ধ AC এবং বৃত্তাকার ভূমির কেন্দ্র A

5 কিন্তু (ii) নং চিত্রের B বিন্দুকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর কী বলা হয়?

(ii) নং চিত্রের B বিন্দু লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু [apex]। আবার বৃত্তাকার ভূমির উপর লম্ব AB-কে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা [Height] এবং BC-কে তির্যক উচ্চতা [Slant height] বলা হয়।
একটি মুখবন্ধ শঙ্কুর ☐ টি তল। একটি সমতল এবং অন্যটি ☐ [বক্রতল/সমতল] **[নিজে লিখি]**

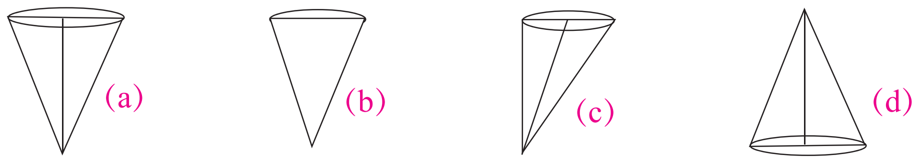
6 আমি আমার বাড়ির ব্যবহার করা 4টি ঘনবস্তু লিখি যাদের আকার লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির মতো।
আমার বোন কাগজ দিয়ে পাশের ছবির মতো দুটি শঙ্কু তৈরি করল।



7 (iii) ও (iv) নং ছবির শঙ্কুগুলি কি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু?

(iii) ও (iv) নং চিত্রের শঙ্কুগুলি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু নয়। কারণ শঙ্কুগুলির শীর্ষবিন্দু ও তাদের বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখাংশ তাদের ভূমির উপর লম্বভাবে অবস্থিত নহে।

8 নীচের শঙ্কুর চিত্রগুলি দেখি এবং এদের মধ্যে কোনগুলি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু বুঝে লিখি :



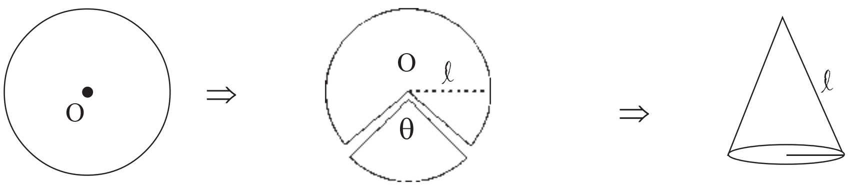
তবে এখানে 'শঙ্কু' বলতে আমরা 'লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকেই বুঝব'।

আমি একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরির চেষ্টা করি। কিন্তু কতটা পরিমাণ কাগজ লাগবে কীভাবে পাব?

লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মাধ্যমে পাব।

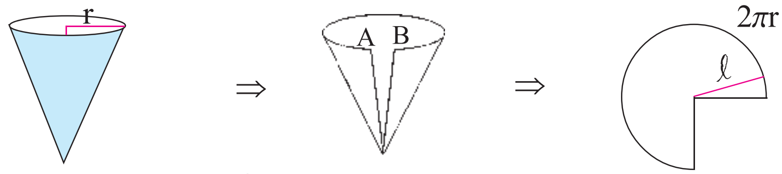
হাতেকলমে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করি ও তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

1. একটি কাঠের বোর্ডে একটি সাদা আর্টপেপার আটকে দিলাম।
2. এবার ওই আর্টপেপারে 'ℓ' একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম।
3. ওই বৃত্তাকার ক্ষেত্র থেকে যে-কোনো একটি বৃত্তকলা কেটে নিলাম।
4. এবার ওই কেটে নেওয়া বৃত্তকলার দুই প্রান্তের ব্যাসার্ধ দুটি আঠা দিয়ে আটকে লম্ব বৃত্তাকার ফাঁপা শঙ্কু পেলাম।



হাতেকলমে ওই শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

(1) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু নিয়ে নীচের ছবির মতো তির্যক উচ্চতা বরাবর কেটে খুলে দিলাম।
ধরি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা = ℓ এবং ব্যাসার্ধ = r



∴ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু খুলে একটি বৃত্তকলা পেলাম।
শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা = বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = ℓ
শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r

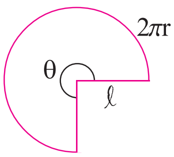
∴ শঙ্কুর ভূমির পরিধি = $2\pi r$ = বৃত্তকলার দৈর্ঘ্য

∴ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল

= বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \frac{\text{বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} \times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{2\pi r}{2\pi\ell} \times \pi\ell^2 = \pi r\ell$



[বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360} \times \pi\ell^2$, যেখানে বৃত্তকলা বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কেন্দ্রে θ° কোণ উৎপন্ন করে।

আবার, বৃত্তাকার ক্ষেত্রে চাপের দৈর্ঘ্য ও চাপ দ্বারা বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সমানুপাতী, $\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{2\pi r}{2\pi\ell}$

∴ হাতেকলমে পেলাম, **লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r\ell$**
[যেখানে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r এবং শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা = ℓ]

মুখ খোলা লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করতে $\pi r\ell$ বর্গ একক কাগজ লাগবে,যেখানে r = ☐ এবং ℓ = ☐ **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 1. আমি যে মুখখোলা লম্ব বৃত্তকার শঙ্কু তৈরি করেছি তার ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 12 সেমি. হলে, ওই শঙ্কু তৈরি করতে কী পরিমাণ কাগজ লেগেছে হিসাব করে লিখি।

শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{14}{2}$ সেমি. = 7 সেমি.

∴ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল বা বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times 7 \times 12$ বর্গ সেমি. = 264 বর্গ সেমি.

প্রয়োগ :2. যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ 1.5 মিটার এবং তির্যক উচ্চতা 2 মিটার তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ :3. কোনো শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল $78\frac{4}{7}$ বর্গ সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 13সেমি. হলে,শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

শর্তানুসারে, $\frac{22}{7} r^2 = 78\frac{4}{7}$ $\quad \therefore r =$ ☐

∴ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = ☐ বর্গ সেমি. [নিজে করি]

প্রয়োগ : 4. কোনো শঙ্কুর ভূমির পরিধি $\frac{660}{7}$ সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি. হলে, শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

(9) কিন্তু যদি একটি মুখবন্ধ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করি তবে কতটা পরিমাণ আর্টপেপার লাগবে হিসাব করি।

ধরি, লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r এবং তির্যক উচ্চতা = ℓ

$\therefore$ আর্টপেপার লাগবে = শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল + ভূমির বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল

$$= \pi r\ell + \pi r^2$$

$$= \pi r(\ell + r)$$

লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r(r+\ell)$

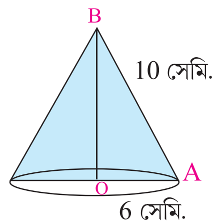
প্রয়োগ : 5. যে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 1.5 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 2.5 সেমি., তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\frac{22}{7} \times 1.5\,(1.5 + 2.5)$ বর্গ সেমি.

$= \frac{22}{7} \times \frac{15}{10} \times 4$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ : 6. যে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 20 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি., তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 7. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করেছি যার ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 10 সেমি.। ওই শঙ্কুটির উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি।



লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{12}{2}$ সেমি. = 6 সেমি.

চিত্রে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ OA, তির্যক উচ্চতা AB এবং উচ্চতা OB

OA = 6 সেমি., AB = 10 সেমি. শঙ্কুর উচ্চতা = OB

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ OAB-তে, $AB^2 = OB^2 + OA^2$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম)

বা, $OB^2 = AB^2 - OA^2$

বা, $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2}$ [$\because$ উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$= \sqrt{(\text{তির্যক উচ্চতা})^2 - (\text{ব্যাসার্ধ})^2}$

$= \sqrt{(10)^2 - 6^2}$ সেমি.

$= \sqrt{64}$ সেমি.

= 8 সেমি.

$\therefore$ শঙ্কুর উচ্চতা 8 সেমি.

$\therefore$ শঙ্কুর উচ্চতা = $\sqrt{(\text{তির্যক উচ্চতা})^2 - (\text{ব্যাসার্ধ})^2}$

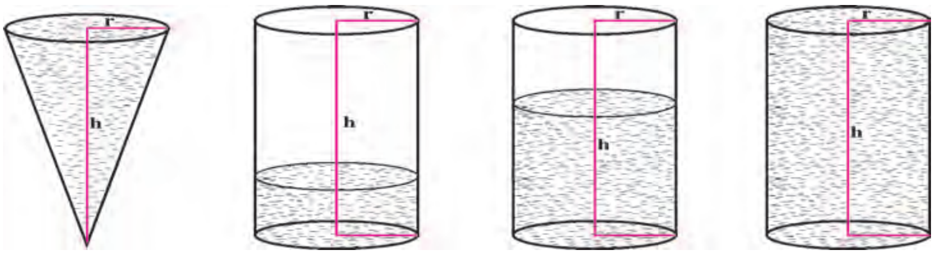
প্রয়োগ : 8. যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর পরিধি $\frac{660}{7}$ সেমি. এবং উচ্চতা 20 সেমি., তার তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

আমি আমাদের স্কুলের বিজ্ঞানের ল্যাবরেটরিতে একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির কাচের ফ্লাস্ক দেখেছি। ওই ফ্লাস্কে জল ভরা থাকে। কিন্তু ওই লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কে কতটা পরিমাণ জল ধরবে কীভাবে পাব দেখি। হাতেকলমে পরিমাপের চেষ্টা করি।

হাতেকলমে

(1) একই দৈর্ঘ্যের ভূমির ব্যাস ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ ও একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির খালি পাত্র নিলাম।

(2) এবার শঙ্কু আকৃতির পাত্রটি সম্পূর্ণভাবে জলপূর্ণ করে চোঙাকৃতি পাত্রে ঢাললাম।



প্রথমবারে $\frac{1}{3}$ অংশ ভর্তি　　দ্বিতীয়বারে $\frac{2}{3}$ অংশ ভর্তি　　তৃতীয়বারে সম্পূর্ণ ভর্তি

দেখছি, শঙ্কু আকৃতির পাত্রটি **তিনবার** জলপূর্ণ করে জল ঢাললে চোঙাকৃতি পাত্রটি সম্পূর্ণভাবে জলপূর্ণ হয়।

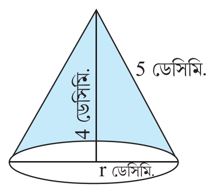
সুতরাং চোঙের আয়তন = 3 × শঙ্কুর আয়তন

$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}$ × চোঙের আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ [যেখানে r = ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং h = ফ্লাস্কের উচ্চতা]

$\therefore$ স্কুলের ল্যাবরেটরির লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কে জল আছে = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

প্রয়োগ : 9. স্কুলের বিজ্ঞানের ল্যাবরেটরির শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কের উচ্চতা 4 ডেসিমি. এবং তির্যক উচ্চতা 5 ডেসিমি. হলে, ওই ফ্লাস্কে কী পরিমাণ জল ধরবে হিসাব করে লিখি।



ধরি, শঙ্কু আকৃতির ফ্লাস্কের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r ডেসিমি.

সুতরাং $(5)^2 = r^2 + (4)^2$

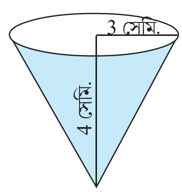
বা, $r^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \therefore r = \pm 3$

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore r \neq -3$　$\therefore r = 3$

$\therefore$ ওই ফ্লাস্কে জল ধরবে = $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 4$ ঘন ডেসিমি.= ☐ ঘন ডেসিমি. [নিজে করি]

প্রয়োগ : 10. যদি কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির পরিধি 2.2 মিটার এবং উচ্চতা 45 ডেসিমি. হয়, তবে ওই লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 11. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 4সেমি. ও 3সেমি.। সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির দীর্ঘ বাহুটিকে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করলে যে ঘনবস্তু তৈরি হয়, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন হিসাব করে লিখি।



উত্তর সংকেত : যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি হবে তার উচ্চতা 4 সেমি. এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3 সেমি.।

প্রয়োগ : 12. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 7 সেমি. এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 147.84 বর্গ সেমি.। শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

ধরি, শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r সেমি.

$\therefore$শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\frac{22}{7}$ r (r+7) বর্গ সেমি.

শর্তানুসারে, $\frac{22}{7}$ r (r+7) = 147.84

বা, $r(r+7) = \frac{14784}{100} \times \frac{7}{22} = \frac{1176}{25}$

বা, $25r^2 + 175r - 1176 = 0$

বা, $25r^2 + 280r - 105r - 1176 = 0$

বা, $5r(5r+56) - 21(5r+56) = 0$

বা, $(5r+56)(5r-21) = 0$

হয়, $5r - 21 = 0$ বা, $5r = 21$ বা, $r = \frac{21}{5}$

$\therefore r = 4.2$

অথবা, $5r + 56 = 0$ বা, $5r = -56$

$\therefore r = \frac{-56}{5}$

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore r \neq \frac{-56}{5}$

সুতরাং $r = 4.2$

$\therefore$ শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 4.2 সেমি.।

প্রয়োগ :13. যদি দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত 1 : 3 এবং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 1 হয়, তবে হিসাব করে দেখাই যে শঙ্কুদ্বয়ের আয়তনের অনুপাত 3 : 1 হবে।

ধরি, প্রথম শঙ্কুর উচ্চতা x একক এবং দ্বিতীয় শঙ্কুর উচ্চতা 3x একক, যেখানে $x>0$;

আবার, প্রথম শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3y একক এবং দ্বিতীয় শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য y একক, যেখানে $y>0$

সুতরাং, $\frac{\text{প্রথম শঙ্কুর আয়তন}}{\text{দ্বিতীয় শঙ্কুর আয়তন}} = \frac{\frac{1}{3}\times\pi\times(3y)^2\times x}{\frac{1}{3}\times\pi\times(y)^2\times 3x} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$ $\therefore$শঙ্কু দুটির আয়তনের অনুপাত 3 : 1

প্রয়োগ :14. যদি দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত 2 : 3 এবং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5 হয়, তবে শঙ্কুদ্বয়ের আয়তনের অনুপাত হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ :15. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবুর ভূমিতলের ক্ষেত্রফল 13.86 বর্গ মিটার। তাঁবুটি তৈরি করতে 5775 টাকা মূল্যের একটি ত্রিপল লাগে এবং এক বর্গমিটার ত্রিপলের মূল্য 150 টাকা হলে, তাঁবুটির উচ্চতা নির্ণয় করি। তাঁবুটিতে কত লিটার বায়ু আছে হিসাব করে লিখি।

ধরি, তাঁবুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r মিটার, উচ্চতা h মিটার এবং তির্যক উচ্চতা ℓ মিটার।

ভূমিতলের ক্ষেত্রফল = 13.86 বর্গ মিটার।

শর্তানুসারে, $\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$ $\therefore r = \square$ [নিজে হিসাব করি] $\therefore$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2.1 মিটার।

প্রতি বর্গ মিটার 150 টাকা হিসাবে 5775 টাকায় ত্রিপলের পরিমাণ= $\frac{5775}{250}$ বর্গ মিটার = 23.1 বর্গ মিটার

$\therefore$ পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r\ell$ বর্গ মিটার = 23.1 বর্গ মিটার

বা, $\frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times \ell = 23.1$ $\therefore \ell = \frac{7}{2}$ [নিজে হিসাব করি]

$\therefore$ তির্যক উচ্চতা = $\frac{7}{2}$ মিটার = 3.5 মিটার

$\therefore h = +\sqrt{\ell^2 - r^2}$ [$\because$ উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$= \sqrt{(3.5)^2 - (2.1)^2}$ মি.= $\sqrt{(3.5+2.1)\times(3.5-2.1)}$ মি. = $\square$ [নিজে লিখি] $\therefore$ উচ্চতা = 2.8 মিটার

$\therefore$ তাঁবুটিতে বায়ু ধরে = $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8$ ঘন মি.= $\square$ ঘন মি. = 12936 ঘন ডেসিমি.
= 12936 লিটার

কষে দেখি 16

1. আমি একটি মুখবন্ধ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করেছি যার ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 15 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 24 সেমি.। ওই শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
2. শঙ্কুর আয়তন নির্ণয় করি যখন, (i) ভূমির ক্ষেত্রফল 1.54 বর্গ মিটার এবং উচ্চতা 2.4 মিটার,
   (ii) ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 মিটার এবং তির্যক উচ্চতা 17.5 মিটার।
3. আমিনা একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করেছে যার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 15 সেমি. ও 20 সেমি.। 15 সেমি. দীর্ঘ বাহুটিকে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করলে যে ঘনবস্তু তৈরি হয়, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় করি।
4. কোনো শঙ্কুর উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা যথাক্রমে 6 সেমি. ও 10 সেমি. হলে, শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করি।
5. কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন (100π) ঘন সেমি. এবং উচ্চতা 12 সেমি. হলে, শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
6. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবু তৈরি করতে 77 বর্গ মিটার ত্রিপল লেগেছে। তাঁবুটির তির্যক উচ্চতা যদি 7 মিটার হয়, তবে তাঁবুটির ভূমিতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
7. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাস 21 মিটার এবং উচ্চতা 14 মিটার। প্রতি বর্গ মিটার 1.50 টাকা হিসাবে পার্শ্বতল রং করতে কত টাকা খরচ পড়বে হিসাব করি।
8. নিরেট শঙ্কু আকৃতির একটি কাঠের খেলনার ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি.। খেলনাটির বক্রতলে প্রতি বর্গ সেমি. 2.10 টাকা হিসাবে পালিশ করতে 429 টাকা খরচ পড়ে। খেলনাটির উচ্চতা কত হিসাব করি। খেলনাটি তৈরি করতে কত ঘন সেমি. কাঠ লেগেছে নির্ণয় করি।
9. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি লোহার পাতের বয়া তৈরি করতে $75\frac{3}{7}$ বর্গ মিটার লোহার পাত লেগেছে। বয়াটির তির্যক উচ্চতা যদি 5 মিটার হয়, তবে বয়াটিতে কত বায়ু আছে এবং বয়াটির উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি।

   ওই বয়াটির চারপাশ রং করতে প্রতি বর্গ মিটার 2.80 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে নির্ণয় করি। [লোহার পাতের বেধ হিসাবের মধ্যে ধরতে হবে না]
10. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবুতে 11জন লোক থাকতে পারে। প্রত্যেক লোকের জন্য ভূমিতে 4 বর্গ মিটার জায়গা লাগে এবং 20 ঘন মিটার বাতাসের প্রয়োজন। ঠিক এই 11 জন লোকের জন্য নির্মিত তাঁবুর উচ্চতা নির্ণয় করি।
11. শোলা দিয়ে তৈরি একটি শঙ্কু আকৃতির মাথার টোপরের ভূমির বাইরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 সেমি.। টোপরটির উপরিভাগ রাংতা দিয়ে মুড়তে প্রতি বর্গ সেমি. 10 পয়সা হিসাবে 57.75 টাকা খরচ পড়ে। টোপরটির উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি।
12. গমের একটি স্তূপ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকারে আছে, যার ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 9 মিটার এবং উচ্চতা 3.5 মিটার। মোট গমের আয়তন নির্ণয় করি। গমের ওই স্তূপ ঢাকতে কমপক্ষে কত বর্গ মিটার প্লাসটিকের চাদর প্রয়োজন হবে হিসাব করে দেখি। [ধরি, $\pi = 3.14$, $\sqrt{130} = 11.4$]
13. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

    (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

    (i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 15 সেমি. এবং ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 16 সেমি. হলে, শঙ্কুটির পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল

    (a) 60π বর্গ সেমি. (b) 68π বর্গ সেমি. (c) 120π বর্গ সেমি. (d) 130π বর্গ সেমি.

(ii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত 1:4 এবং তাদের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 4:5 হলে, তাদের উচ্চতার অনুপাত

(a) 1:5 (b) 5:4 (c) 25:16 (d) 25:64

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য একই রেখে উচ্চতা দ্বিগুণ করলে,শঙ্কুটির আয়তন বৃদ্ধি পায়

(a) 100% (b) 200% (c) 300% (d) 400%

(iv) একটি শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা প্রত্যেকটি দ্বিগুণ হলে, শঙ্কুটির আয়তন হয় পূর্বের শঙ্কুর আয়তনের

(a) 3গুণ (b) 4 গুণ (c) 6 গুণ (d) 8 গুণ

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{r}{2}$ একক এবং তির্যক উচ্চতা 2ℓ একক হলে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

(a) $2\pi r(\ell+r)$ বর্গ একক (b) $\pi r(\ell+\frac{r}{4})$ বর্গ একক (c) $\pi r(\ell+r)$ বর্গ একক (d) $2\pi r\ell$ বর্গ একক

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অর্ধেক এবং উচ্চতা দ্বিগুণ করা হলে শঙ্কুটির আয়তন একই থাকে।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা, ব্যাসার্ধ এবং তির্যক উচ্চতা সর্বদা একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি:

(i) ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজ। AB বাহুকে অক্ষ করে ত্রিভুজটির একবার পূর্ণ আবর্তনের জন্য যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু উৎপন্ন হয় তার ব্যাসার্ধ ______।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন V ঘন একক এবং ভূমিতলের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক হলে, উচ্চতা ______।

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান এবং তাদের উচ্চতা সমান। তাদের আয়তনের অনুপাত ______।

14. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 সেমি. এবং আয়তন 100π ঘন সেমি.। শঙ্কুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল ভূমিতলের ক্ষেত্রফলের $\sqrt{5}$ গুণ। শঙ্কুটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি।

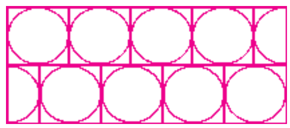
(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন V ঘন একক, ভূমিতলের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক এবং উচ্চতা H একক হলে, $\frac{AH}{V}$-এর মান কত তা লিখি।

(iv) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন এবং পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান। শঙ্কুটির উচ্চতা এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে h একক এবং r একক হলে, $\frac{1}{h^2}+\frac{1}{r^2}$ -এর মান কত তা লিখি।

(v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3:4 এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত 2:3; চোঙ এবং শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

17 সম্পাদ্য : বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন
Construction of Tangent to a Circle

এবছরের গ্রীষ্মের ছুটিতে আমাদের গ্রামের ক্লাবঘর মেরামত করা হবে। পাড়ার সকল বাড়ি থেকে চাঁদা তোলা হয়েছে। প্রত্যেক পরিবার তাদের সাধ্যমতো চাঁদা দিয়েছে। ক্লাবঘরের সামনের বারান্দায় লোহার গ্রিল লাগানো হবে। তাই আমরা পাড়ার ছোটোরা সকলে মিলে গ্রিলের নকশা পছন্দ করব। লোহার দোকানে গিয়ে আমাদের গ্রিলের যে নকশাটি পছন্দ হলো, সেটি হলো—



বাড়ি ফিরে গিয়ে মায়া গ্রিলের নকশাটি তার খাতায় আঁকার চেষ্টা করল।

দেখছি, আমাদের পছন্দের গ্রিলের নকশায় অনেকগুলি বৃত্ত ও সরলরেখাংশ আছে। কিন্তু নকশায় বৃত্ত ও সরলরেখাংশগুলি কীভাবে আছে?

নকশায় বৃত্তগুলিকে কিছু সরলরেখাংশ স্পর্শ করে আছে। অর্থাৎ, কিছু সরলরেখাংশ বৃত্তের **স্পর্শক** হয়ে আছে।

একটি বৃত্তে কতগুলি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব? এঁকে দেখি।

বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে ☐ [1টি/2টি] স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। কিন্তু বৃত্তের বাহিরের কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে ☐ [1টি / 2টি] স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

সম্পাদ্য : আমি 2.5সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো একটি বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।

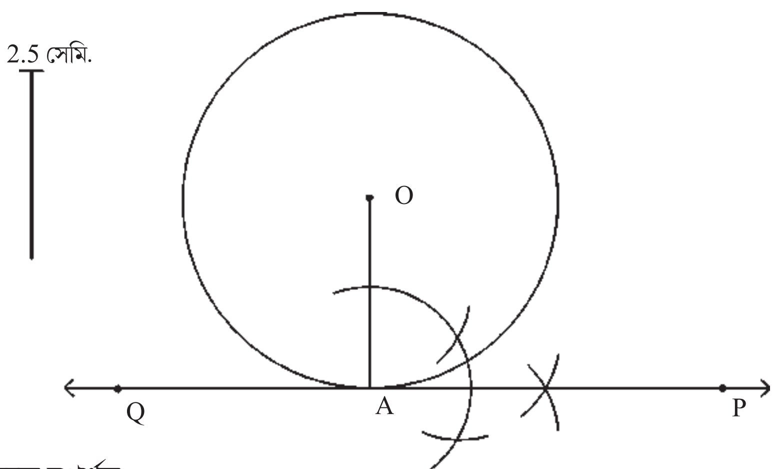
2.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যার উপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দু A; A বিন্দুতে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) O, A যুক্ত করলাম।

(ii) A বিন্দুতে OA-এর উপর পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে PQ লম্ব অঙ্কন করলাম।

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ}$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক।

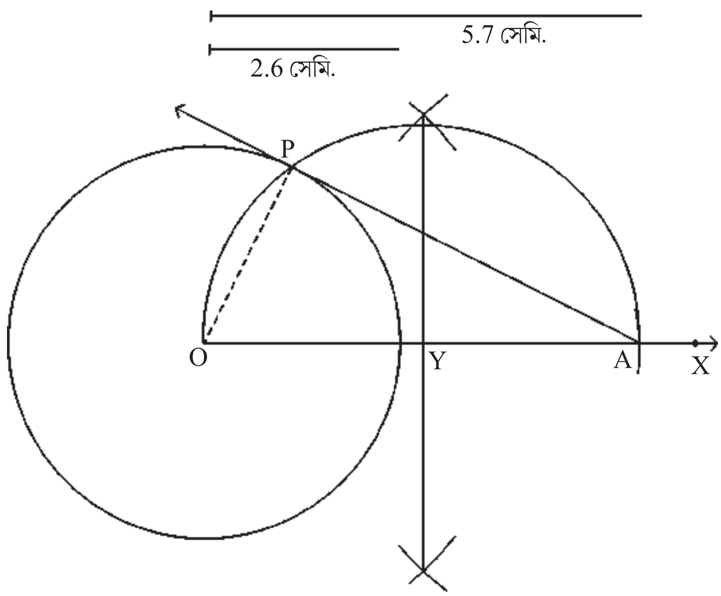


প্রমাণ : O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ OA বৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং $\overleftrightarrow{PQ} \perp OA$,

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ}$, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক

[$\because$ বৃত্তের কোনো ব্যাসার্ধ যে বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে সেই বিন্দুতে ওই ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত লম্ব, ওই বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক]

সম্পাদ্য : 2.6সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 5.7সেমি. দূরে ওই বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তটিতে একটি স্পর্শক অঙ্কন করি।



অঙ্কন প্রণালী :

(i) O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 2.6সেমি.। যে-কোনো একটি রশ্মি OX থেকে 5.7সেমি. দৈর্ঘ্যের সমান করে OA সরলরেখাংশ কেটে নিই।

(ii) O, A যুক্ত করলাম।

(iii) OA সরলরেখাংশকে Y বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করলাম।

(iv) Y বিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং YO দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলাম যা O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করল।

(v) A, P যোগ করে বর্ধিত করলাম।

∴ AP হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে ওই বৃত্তের একটি স্পর্শক।

প্রমাণ : O, P যোগ করি।

$\angle OPA$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। সুতরাং $\angle OPA = 90^o$; O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OP ব্যাসার্ধ এবং $OP \perp PA$. সুতরাং $\overrightarrow{AP}$, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি স্পর্শক।

বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে বহিঃস্থ বিন্দু A- এর দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ হলে OA- এর মধ্যবিন্দু Y বিন্দুটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর অবস্থিত হয়।

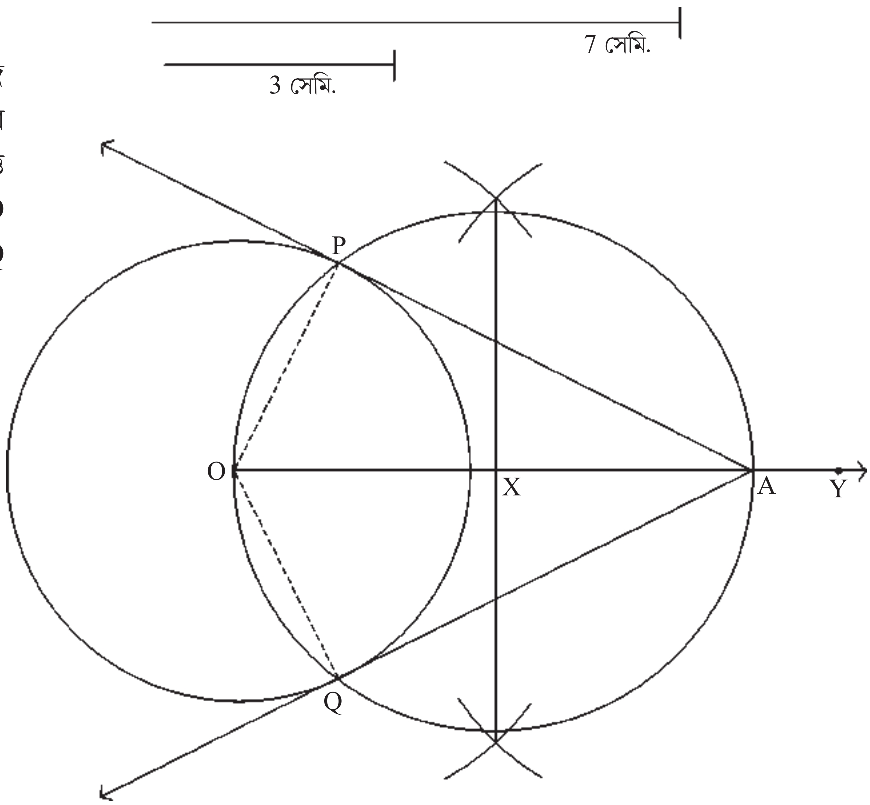
আমি হাতেকলমে ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করেছি যে, যে-কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব। নিজে অঙ্কনের চেষ্টা করি।

সম্পাদ্য : 3সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 7সেমি. দূরে বৃত্তটির বহিঃস্থ বিন্দু থেকে ওই বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :

(i) O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত এঁকেছি যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3সেমি. এবং কেন্দ্র O থেকে 7 সেমি. দূরে OY রশ্মি থেকে OA সরলরেখাংশ কেটে নিই।

(ii) OA সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করলাম। ধরি, OA সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু X.



(iii) X বিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং XO দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলাম যা O কেন্দ্রীয় বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল।

(iv) A, P ও A, Q যোগ করে বর্ধিত করলাম।

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক।

প্রমাণ :

O, P যোগ করলাম। $\angle OPA$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle OPA = 90^{\circ}$

যেহেতু O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OP ব্যাসার্ধ এবং $OP \perp AP$, সুতরাং $\overrightarrow{AP}$ হলো O কেন্দ্রীয় বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে ওই বৃত্তে অঙ্কিত একটি স্পর্শক।

অনুরূপে, $\overrightarrow{AQ}$, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের অপর একটি স্পর্শক।

সম্পাদ্য : আমি 2.5সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 10সেমি. দূরে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে ওই বৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করি এবং স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য মেপে লিখি। [নিজে করি]

কষে দেখি 17

1. 3.2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। ওই বৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।
2. 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট AB একটি সরলরেখাংশ অঙ্কন করে A বিন্দুকে কেন্দ্র করে AB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি এবং B বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।
3. 2.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। ওই বৃত্তের বাইরে এমন একটি বিন্দু নিই, কেন্দ্র থেকে যার দূরত্ব 6.5 সেমি.। ওই বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করি এবং স্কেলের সাহায্যে ওই স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।
4. 2.8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 7.5 সেমি. দূরে একটি বিন্দু নিই। ওই বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তের দুটি স্পর্শক অঙ্কন করি।
5. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের PQ একটি জ্যা। P ও Q বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি।
6. 8 সেমি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরলরেখাংশ XY অঙ্কন করে XY-কে ব্যাস করে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। X ও Y বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি এবং এই স্পর্শক দুটির মধ্যে কী সম্পর্ক লিখি।
7. যে-কোনো একটি বৃত্ত অঙ্কন করে তার দুটি ব্যাস অঙ্কন করি যারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। ব্যাস দুটির চারটি প্রান্তবিন্দুতে বৃত্তের চারটি স্পর্শক অঙ্কন করি এবং এরফলে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হলো তা কী ধরনের চতুর্ভুজ বুঝে লিখি।
8. 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করে ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। ওই পরিবৃত্তের A, B ও C বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি।
9. 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করে ওই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। A বিন্দুতে ওই বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি এবং স্পর্শকের উপর P এমন একটি বিন্দু নিই যাতে AP = 5সেমি. হয়। P বিন্দু থেকে বৃত্তের অপর স্পর্শকটি অঙ্কন করি এবং এই স্পর্শকটি বৃত্তকে কোন বিন্দুতে স্পর্শ করেছে তা লক্ষ করে লিখি।
10. AB একটি সরলরেখাংশের উপর O একটি বিন্দু এবং O বিন্দুতে AB-এর উপর PQ একটি লম্ব অঙ্কন করি। A এবং B বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে AO এবং BO দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্ত অঙ্কন করি এবং এই বৃত্তদুটির সাপেক্ষে PQ-কে কী বলা হয় লিখি। P বিন্দু থেকে বৃত্ত দুটির অপর স্পর্শক দুটি অঙ্কন করি।
11. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর P একটি বিন্দু। P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করি এবং ওই স্পর্শক থেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান করে PQ অংশ কেটে নিই। Q বিন্দু থেকে বৃত্তের অপর স্পর্শক QR অঙ্কন করি এবং চাঁদার সাহায্যে $\angle$PQR পরিমাপ করে তার মান লিখি।

18 সদৃশতা
SIMILARITY

আমি এবছরে আমাদের জেলার হয়ে হকি খেলার সুযোগ পেয়েছি। তাই কিছু ফর্ম পূরণ করতে হবে এবং সেখানে আমার ছবি দরকার। আমি ও ভাই পাড়ার মিঠুদির সঙ্গে আমার এখনকার একটি ছবি নিয়ে পাড়ার প্রশান্তকাকুর Digital Store-এ গেলাম।

বললাম এই ছবি থেকে 3টি ছবি করে দিন।

কী সাইজের ছবি দরকার? স্ট্যাম্প সাইজ, পাসপোর্ট সাইজ না পোস্টকার্ড সাইজ?

সেটা কী রকম? একটু বুঝিয়ে বলুন।

স্ট্যাম্প সাইজ

পাসপোর্ট সাইজ

পোস্টকার্ড সাইজ

দেখছি, ছবিগুলি একই আকৃতির (Shape) কিন্তু বিভিন্ন আকারের (Size)।

1 এই ছবিগুলি কী সম্পর্কে আছে?

এই ছবিগুলি পরস্পর **সদৃশ (Similar)**।

2 আমার 5 বছর আগের অন্য একটি পাসপোর্ট সাইজ ছবি ও এখনকার পাসপোর্ট সাইজ ছবিদুটি কি পরস্পর সদৃশ হবে?

পাশের ছবিদুটি দেখি।

ছবিদুটি পরস্পর **সদৃশ নয়**। কারণ ছবিদুটির আকার (Size) এক হলেও আকৃতি (Shape) আলাদা।

3 কিন্তু দুটি সর্বসম চিত্র কি সদৃশ হবে?

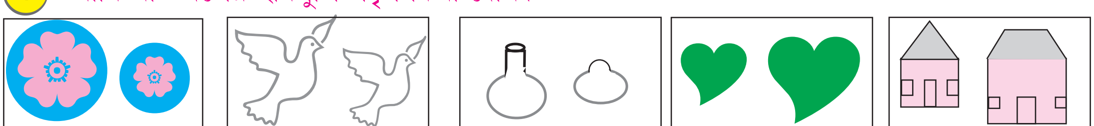
যেহেতু দুটি সর্বসম চিত্রে আকৃতি (Shape) ও আকার (Size) সমান, তাই দুটি সর্বসম চিত্র সর্বদা ____ **[সদৃশ / সদৃশ নয়]**।**[নিজে লিখি]**

অর্থাৎ যদি একাধিক চিত্রের আকার আলাদা হলেও আকৃতি এক হয়, তবে চিত্রগুলি পরস্পর সদৃশ হবে। তাই সর্বসম চিত্র সর্বদা সদৃশ হবে কিন্তু সদৃশ চিত্র সর্বসম নাও হতে পারে।

আমি বাড়ি ফিরে জানলাম পাসপোর্ট সাইজের ছবি দরকার এবং সেইমতো দোকানে বলে দিলাম।

আমার ভাই বাড়ি ফিরে অনেকগুলি ছবি আঁকল এবং একইরকম ছবিগুলি আলাদা দলে ভাগ করে রাখল।

4 আমি প্রতি দলের ছবিগুলি সদৃশ কিনা দেখি।

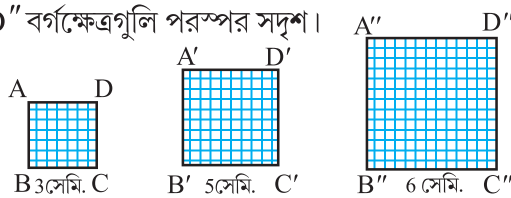


(i) (ii) (iii) (iv) (v)

দেখছি, (i), (ii) ও (iv) নং দলের ছবিগুলি পরস্পর ____। কিন্তু (iii) ও (v) নং দলের ছবিগুলি পরস্পর সদৃশ নয়।

5 আমি একাধিক বিভিন্ন আকারের বর্গক্ষেত্র আঁকি ও বর্গক্ষেত্রগুলি সদৃশ কিনা দেখি।

দেখছি, ABCD, $A'B'C'D'$ ও $A''B''C''D''$ বর্গক্ষেত্রগুলি পরস্পর সদৃশ।



আবার দেখছি, $\angle A = \angle A' = \angle A''$

$\angle B = \angle B' = \angle B''$

$\angle C = \angle C' = \angle C''$

$\angle D = \angle D' = \angle D''$

এবং $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = \frac{3}{5}$

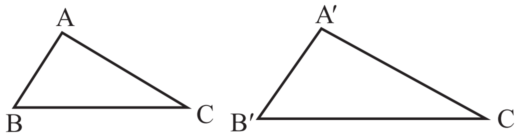
$\frac{AB}{A''B''} = \frac{BC}{B''C''} = \frac{CD}{C''D''} = \frac{DA}{D''A''} = \frac{3}{6}$

6 আমি দুটি ত্রিভুজ ABC ও $A'B'C'$ আঁকি যাদের

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$

ত্রিভুজ দুটির বাহু মেপে দেখছি,

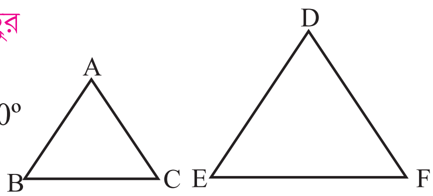
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$ **[নিজে এঁকে যাচাই করি]**



7 আমি দুটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকি যার একটির প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সেমি. ও অপর একটির প্রত্যেকটির বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি.।

দেখছি, $\angle A = \angle D = 60^o$, $\angle B = \angle E = 60^o$, $\angle C = \angle F = 60^o$

এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{3}{5}$; সুতরাং ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।



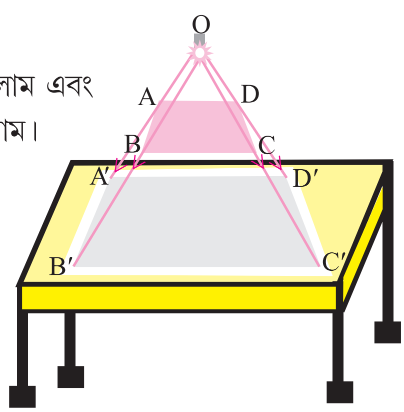
8 কিন্তু ত্রিভুজ দুটি কি সর্বসম হবে?

দেখছি ত্রিভুজ দুটি সর্বসম নয়।

অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে সর্বদা সদৃশ। কিন্তু সদৃশ হলে সর্বসম নয়।

আরও দেখছি একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বদা সর্বসম নাও হতে পারে। অর্থাৎ কোণ-কোণ-কোণ (A-A-A) দ্বারা দুটি ত্রিভুজ সর্বদা সর্বসম নাও হতে পারে।

আমি দুটি বহুভুজাকার চিত্র কখন সদৃশ হবে হাতেকলমে যাচাই করি।



(1) ঘরের সিলিং-এর কাছের O বিন্দুতে একটি বাল্‌ব আটকে দিলাম এবং তার ঠিক নীচে একটি টেবিল রেখে তাতে সাদা আর্টপেপার রাখলাম।

(2) এবার যে-কোনো একটি বহুভুজাকার পিচ্‌বোর্ড (ধরি) (ABCD) চতুর্ভুজটি টেবিলের সমান্তরালে বাল্‌বের নীচে রাখলাম।

(3) এবার বাল্‌বের আলো জ্বাললে ABCD চতুর্ভুজের ছায়া $A'B'C'D'$ টেবিলের আর্টপেপারে পড়ল এবং পেন্‌সিলের সাহায্যে যোগ করে $A'B'C'D'$ চতুর্ভুজ পেলাম যা ABCD চতুর্ভুজের সদৃশ। এটা সম্ভব হলো কারণ আলো সরলরেখায় চলে।

OA রশ্মির উপর A', OB রশ্মির উপর B', OC রশ্মির উপর C', OD রশ্মির উপর D' বিন্দু আছে।

ABCD ও A′B′C′D′ চতুর্ভুজের কোণগুলি ও বাহুগুলি মেপে দেখছি,

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$, এবং $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$

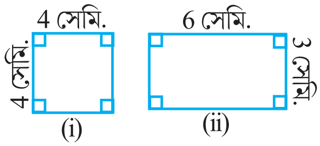
[নিজে একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করি]

∴ হাতেকলমে পেলাম, একই সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুটি বহুভুজ সদৃশ হবে যদি,

(i) তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হয় এবং

(ii) অনুরূপ বাহুগুলি সমান অনুপাতে থাকে।

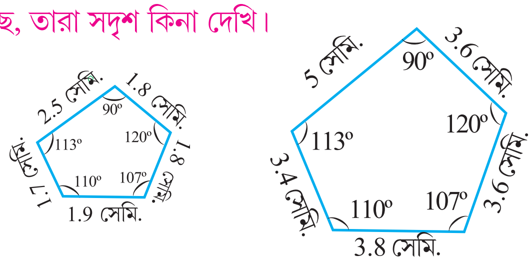
সহেলী দুটি চতুর্ভুজ এঁকেছে, তারা সদৃশ কিনা দেখি



দেখছি, সহেলির আঁকা (i) নং ও (ii) নং চতুর্ভুজদ্বয় সদৃশ নয়। কারণ চতুর্ভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলেও অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান নয়।

একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি রম্বস কি সর্বদা সদৃশ হবে? এঁকে যুক্তি দিয়ে লিখি। [নিজে করি]

পলাশ দুটি বহুভুজ এঁকেছে, তারা সদৃশ কিনা দেখি।



দেখছি,পলাশের আঁকা বহুভুজদ্বয় সদৃশ। কারণ নিজে বুঝে লিখি।

কষে দেখি 18.1

1. ☐-এ সঠিক উত্তর লিখি:

(i) সকল বর্গক্ষেত্র ☐ [সর্বসম / সদৃশ]

(ii) সকল বৃত্ত ☐ [সর্বসম / সদৃশ]

(iii) সকল ☐ [সমবাহু / সমদ্বিবাহু] ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।

(iv) দুটি চতুর্ভুজ সদৃশ হবে যদি তাদের অনুরূপ কোণগুলি ☐ [সমান / সমানুপাতী] হয় এবং অনুরূপ বাহুগুলি ☐ [অসমান / সমানুপাতী] হয়।

2. নীচের বাক্যগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) যে-কোনো দুটি সর্বসম চিত্র সদৃশ।

(ii) যে-কোনো দুটি সদৃশ চিত্র সর্বদা সর্বসম।

(iii) যে-কোনো দুটি সদৃশ বহুভুজাকার চিত্রের অনুরূপ কোণগুলি সমান।

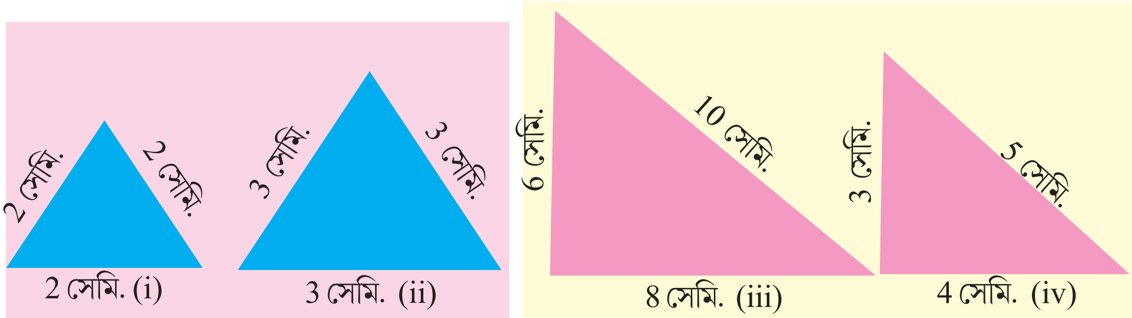
(iv) যে-কোনো দুটি সদৃশ বহুভুজাকার চিত্রের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতিক।

(v) বর্গক্ষেত্র ও রম্বস সর্বদা সদৃশ।

3. একজোড়া সদৃশ চিত্রের উদাহরণ লিখি।

4. একজোড়া চিত্র অঙ্কন করি যারা সদৃশ নয়।

আমার বন্ধু শাকিল নানান রঙের ও নানান ধরনের ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করেছে।
আমি এই ত্রিভুজগুলির কোণ ও বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে সদৃশ ত্রিভুজগুলি আলাদা দলে ভাগ করে রাখি।



(i) ও (ii) নং চিত্রদুটি সদৃশ এবং (iii) ও (iv) নং চিত্রদুটি সদৃশ। কারণ এদের অনুরূপ বাহুগুলি ☐ এবং অনুরূপ কোণগুলি সমান।

9 দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলে তাদের কী বলা হয়?

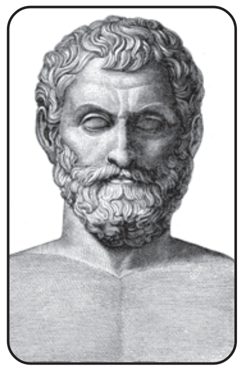
দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলে তাদের **সদৃশকোণী ত্রিভুজ** বলা হয়।

বুঝেছি, দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে, (i) তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে এবং (ii) ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী হবে।

গ্রিক গণিতজ্ঞ থ্যালেস (Thales) সদৃশকোণী ত্রিভুজের সম্পর্কে একটি সত্য বলেছিলেন। সেই সত্যটি হলো — 'সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।' অনেকে বিশ্বাস করেন যে তিনি একটি result ব্যবহার করেছিলেন এবং তাকে Basic Proportionality উপপাদ্য বা থ্যালেসের উপপাদ্য বলা হয়।

থ্যালেস উপপাদ্য বা Basic Proportionality উপপাদ্যটি হলো—

যে-কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপরদুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিত বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।



10 কিন্তু একটি সরলরেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করা বলতে কী বুঝি?

AB সরলরেখাংশের উপর P যে-কোনো একটি বিন্দু। এক্ষেত্রে P বিন্দু AB সরলরেখাংশকে AP : PB অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

P বিন্দু AB সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে $\frac{AP}{PB} = 1$ হবে।

P বিন্দু মধ্যবিন্দু থেকে A বিন্দুর কাছে কিন্তু B বিন্দুর থেকে দূরে থাকলে $\frac{AP}{PB}$ -এর মান 1-এর থেকে কম হবে।

আবার P বিন্দু মধ্যবিন্দু থেকে B বিন্দুর কাছে কিন্তু A বিন্দুর থেকে দূরে থাকলে $\frac{AP}{PB}$-এর মান 1-এর থেকে বেশি হবে।

11 কিন্তু যদি P বিন্দু বর্ধিত AB সরলরেখাংশের উপর থাকে তখন কী হবে?

এক্ষেত্রে, P বিন্দু AB সরলরেখাংশকে $\frac{AP}{PB}$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করেছে।

AP এর দৈর্ঘ্য PB-এর দৈর্ঘ্য থেকে বড়ো হওয়ায় $\frac{AP}{PB}$-এর মান সর্বদা 1-এর থেকে বেশি হবে।

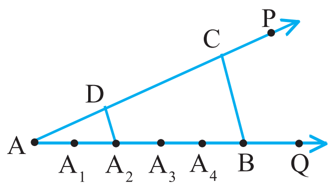
12 কিন্তু যদি P বিন্দু বর্ধিত BA সরলরেখাংশের উপর থাকে তখন কী হবে?

এক্ষেত্রেও P বিন্দু AB সরলরেখাংশকে $\frac{AP}{PB}$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত

করেছে। এখানে PB-এর দৈর্ঘ্য AP-এর দৈর্ঘ্য থেকে বড়ো হওয়ায় $\frac{AP}{PB}$ এর মান 1-এর থেকে ছোটো হবে।

বুঝেছি, একটি ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে একই অনুপাতে বিভক্ত করলে তারা সমানুপাতী হবে।

আমি হাতেকলমে থ্যালেস উপপাদ্যটি যাচাই করি।



(1) আমার খাতায় ∠PAQ অঙ্কন করলাম। AQ রশ্মির উপরে A_1, A_2, A_3, A_4 ও B পাঁচটি বিন্দু এমনভাবে নিলাম যাতে $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4B$ হয়।

(2) B বিন্দু দিয়ে যে-কোনো একটি সরলরেখা টানলাম যা AP রশ্মিকে C বিন্দুতে ছেদ করল।

(3) A_2 বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা AP রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

∴ পেলাম, $\frac{AA_2}{A_2B}=\frac{2}{3}$

স্কেল দিয়ে মেপে দেখছি, $\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$ [নিজে এঁকে যাচাই করি]

∴ পেলাম, Δ ABC-এর BC || A_2D হলে, $\frac{AA_2}{A_2B}=\frac{AD}{DC}$

∴ হাতেকলমে পেলাম, যে-কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা বর্ধিত বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।

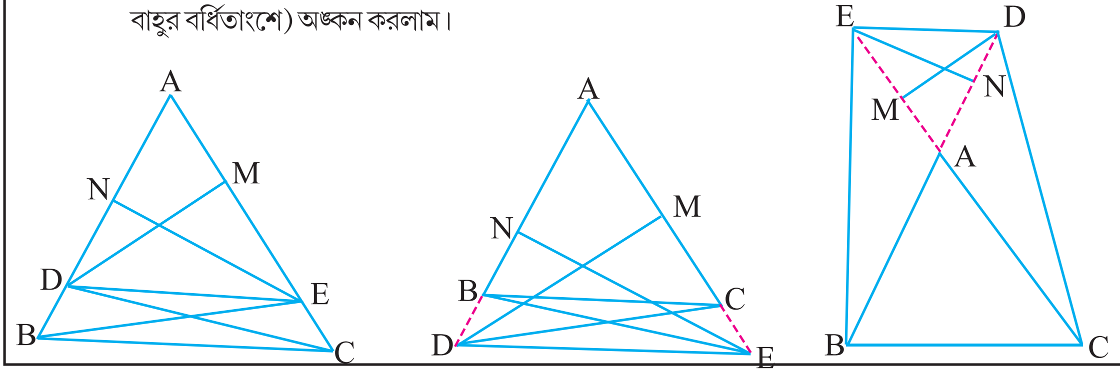
যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :43. 'কোনো ত্রিভুজের কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিত বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে।' *(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)*

প্রদত্ত : Δ ABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে বা AB ও AC বাহুর বর্ধিতাংশকে (BA ও CA বাহুর বর্ধিতাংশকে) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করলাম এবং DM ⊥ AC (বা CA বাহুর বর্ধিতাংশে) ও EN ⊥ AB (বা BA বাহুর বর্ধিতাংশে) অঙ্কন করলাম।



প্রমাণ : ΔADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

অনুরূপে, ΔBDE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times DB \times EN$

$\therefore \frac{\Delta ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta BDE\text{-এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \frac{AD}{DB}$ ——— (I)

আবার, ΔADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AE \times DM$

এবং ΔDEC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times EC \times DM$

$\therefore \frac{\Delta ADE\text{-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta DEC\text{-এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC}$ ——— (II)

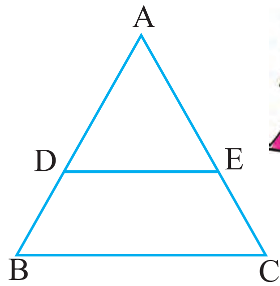
আবার, ΔBDE ও ΔDEC একই ভূমি DE-এর উপর এবং একই সমান্তরালযুগল DE ও BC-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ ΔBDE-এর ক্ষেত্রফল $=$ ΔDEC-এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে পাই, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ [প্রমাণিত]

অনুসিদ্ধান্ত : 1 ΔABC-এর BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করি যে,

(i) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ (ii) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



প্রমাণ : (i) থ্যালেস উপপাদ্য থেকে পাই, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

বা, $\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$

বা, $\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC} \therefore \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ [প্রমাণিত]

(ii) থ্যালেস উপপাদ্য থেকে পাই, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

বা, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

বা, $1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$ বা, $\frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$

বা, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ [প্রমাণিত]

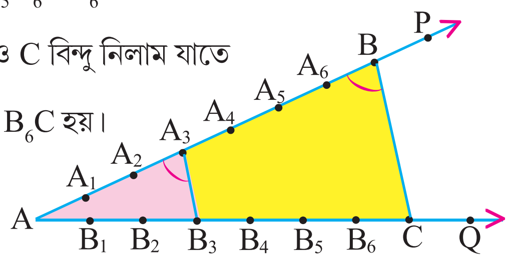
থ্যালেসের উপপাদ্যের বিপরীত কি সম্ভব অর্থাৎ যে সরলরেখা কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করে তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে কি?
হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

(1) আমি খাতায় $\angle PAQ$ অঙ্কন করলাম। $\overrightarrow{AP}$ রশ্মির উপর $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ও B বিন্দু নিলাম যাতে $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6B$ হয়।

আবার, $\overrightarrow{AQ}$ রশ্মির উপর $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ ও C বিন্দু নিলাম যাতে

$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = B_5B_6 = B_6C$ হয়।



(2) এবার B ও C যোগ করে ΔABC পেলাম।

A_3 ও B_3 যোগ করে দেখছি,

$$\frac{AA_3}{A_3B} = \frac{AB_3}{B_3C} = \frac{3}{4}$$

(3) এবার $\angle AA_3B_3$ কেটে নিয়ে $\angle ABC$ -এর উপর $\angle AA_3B_3$ কোণটি বসিয়ে দেখছি কোণদ্বয় মিলে যাচ্ছে বা সমাপতিত হচ্ছে।

$\therefore$ পেলাম $\angle AA_3B_3 = \angle ABC$ যারা অনুরূপ কোণ,

$\therefore$ পেলাম $A_3B_3 \parallel BC$

একইভাবে A_1, B_1 যোগ করে পাব $\dfrac{AA_1}{A_1B} = \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{\square}{\square}$ এবং $A_1B_1 \parallel BC$

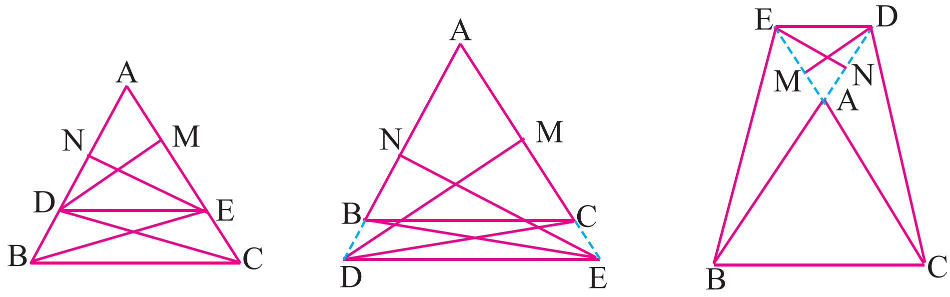
A_2, B_2 যোগ করে পাব $\dfrac{AA_2}{A_2B} = \dfrac{AB_2}{B_2C} = \dfrac{\square}{\square}$ এবং A_2B_2 $\square$ BC [= / || বসাই]

A_4, B_4 বা A_5, B_5 বা A_6, B_6 যোগ করে কী পাব নিজে যাচাই করে লিখি।

আমি একইভাবে অন্য একটি ত্রিভুজ আঁকলাম ও একটি সরলরেখা আঁকলাম যা ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করেছে এবং দেখছি সরলরেখাটি তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। [নিজে করি]

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে সরলরেখা কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে।

উপপাদ্য : 44. *যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে 'কোনো সরলরেখা যে-কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতবাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করলে, তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে'।* **(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)**



প্রদত্ত : ABC একটি ত্রিভুজ। একটি সরলরেখাংশ AB এবং AC বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশকে (বা BA এবং CA এর বর্ধিতাংশ) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

প্রমাণ করতে হবে : DE || BC

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করলাম। DM ⊥ AC (বা CA-এর বর্ধিতাংশ) ও EN ⊥ AB (বা BA -এর বর্ধিতাংশ) অঙ্কন করলাম।

প্রমাণ : Δ ADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

Δ BDE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2} \times DB \times EN$

$$\frac{\Delta \text{ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta \text{BDE-এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \frac{AD}{DB}$$

আবার, Δ ADE-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AE \times DM$

Δ DEC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times EC \times DM$

$$\frac{\Delta \text{ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta \text{DEC-এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC}$$

যেহেতু, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (প্রদত্ত)

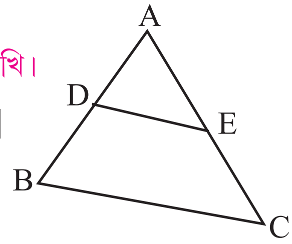
সুতরাং, $\frac{\Delta \text{ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta \text{BDE-এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\Delta \text{ADE-এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta \text{DEC-এর ক্ষেত্রফল}}$

$\therefore$ Δ BDE-এর ক্ষেত্রফল = Δ DEC-এর ক্ষেত্রফল

Δ BDE ও Δ DEC একই ভূমি DE-এর উপর অবস্থিত, DE-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং তাদের ক্ষেত্রফল সমান। সুতরাং, তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ DE || BC **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 1 পাশের চিত্রে ΔABC-এর $DE \parallel BC$; যদি $AD = 5$ সেমি., $DB = 6$ সেমি. এবং $AE = 7.5$ সেমি. হয়,তবে AC-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।



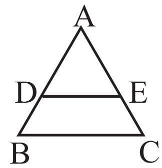
ΔABC-এর $DE \parallel BC$, $\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পেলাম]

$\therefore \frac{5}{6} = \frac{7.5}{EC}$

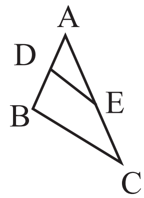
$\therefore EC = 7.5 \times \frac{6}{5}$ সেমি. $= 9$ সেমি.

$\therefore \quad AC = AE + EC = \square + \square = \square$

প্রয়োগ : 2 যদি ΔABC-এর $BC \parallel DE$, $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{5}$ এবং $AC = 21$ সেমি. হয়, তবে AE-এর মান হিসাব করে লিখি**[নিজে করি]**



প্রয়োগ : 3 ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। $AE = 2AD$ হলে, $DB : EC$-এর মান হিসাব করে লিখি।

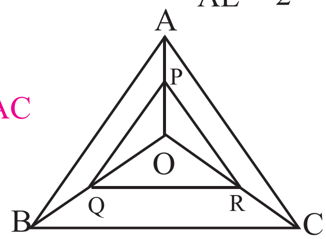


ΔABC -এর $DE \parallel BC$, $\quad \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$\therefore \frac{DB}{EC} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$ $[\because AE = 2AD \quad \therefore \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}]$

$\therefore DB : EC = 1 : 2$

প্রয়োগ : 4 পাশের চিত্রের $PQ \parallel AB$ এবং $PR \parallel AC$ হলে, প্রমাণ করি যে $QR \parallel BC$



ΔOAB-এর $PQ \parallel AB$, $\therefore \frac{OP}{PA} = \frac{OQ}{QB}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই] ——— (i)

আবার, ΔAOC-এর $PR \parallel AC$, $\therefore \frac{OP}{PA} = \frac{OR}{RC}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই] ——— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{OQ}{QB} = \frac{OR}{RC}$

$\therefore \Delta OBC$-এর OB ও OC-এর উপর যথাক্রমে দুটি এমন বিন্দু Q ও R পেলাম যাতে $\frac{OQ}{QB} = \frac{OR}{RC}$

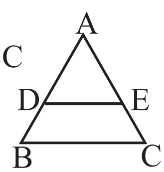
$\therefore$ থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পেলাম, $QR \parallel BC$.

প্রয়োগ : 5 একটি সরলরেখা ΔABC-এর AB ও AC -কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করল যে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ হলো। যদি $\angle ADE = \angle ACB$ হয়, প্রমাণ করি যে, ΔABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রদত্ত : ΔABC-এর DE সরলরেখাংশ AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

প্রমাণ করতে হবে : ΔABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ সুতরাং, থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই, $DE \parallel BC$



$\therefore$ অনুরূপ $\angle ADE = \angle ABC$ ——— (i)

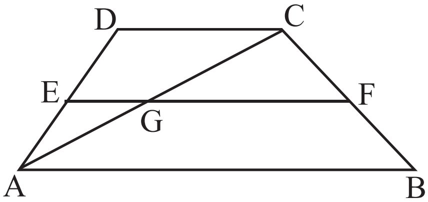
আবার, $\angle ADE = \angle ACB$ [প্রদত্ত] ——— (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই, $\angle ABC = \angle ACB$

$\therefore AB = AC \qquad \therefore$ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রয়োগ : 6 ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করেছি যার AB || DC; AB-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করেছি যা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, AE : ED = BF : FC

প্রদত্ত : ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC; AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা AD ও BC-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে : AE : ED = BF : FC

অঙ্কন : A, C যোগ করলাম যা EF-কে G বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ΔADC -এর DC || EG

সুতরাং, থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ ——— (i)

আবার, ΔACB -এর AB || GF

$\therefore$ থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই, $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ ——— (ii)

সুতরাং, (i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

$\therefore$ AE : ED = BF : FC

প্রয়োগ : 7 থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজের মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 8 ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করেছি যার AB || DC; AD ও BC-এর উপর যথাক্রমে P ও Q এমন দুটি বিন্দু নিলাম যাতে AP : PD = BQ : QC হয়। প্রমাণ করি যে, PQ || DC.

প্রদত্ত : ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC; P ও Q বিন্দু দুটি যথাক্রমে AD ও BC বাহুর উপর এমনভাবে অবস্থিত যাতে AP : PD = BQ : QC হয়।

প্রমাণ করতে হবে : PQ || DC

অঙ্কন : ধরি AB < DC; DA এবং CB বাহুকে বর্ধিত করা হলো। বর্ধিত DA ও CB বাহু পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল। PQ যোগ করলাম।

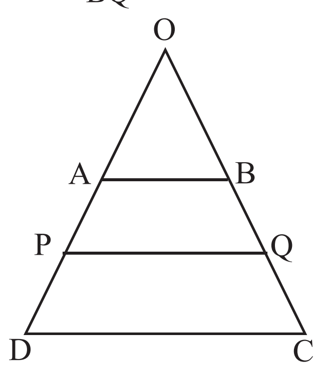
প্রমাণ : ΔODC-এর AB || DC

$\therefore \frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BC}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পেলাম] ——— (i)

আবার $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ [প্রদত্ত]

অর্থাৎ, $\frac{PD}{AP} = \frac{QC}{BQ}$ বা, $1+\frac{PD}{AP} = 1+\frac{QC}{BQ}$ বা, $\frac{AP+PD}{AP} = \frac{BQ+QC}{BQ}$

$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{BC}{BQ}$ ——— (ii)



(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{OA}{AD} \times \frac{AD}{AP} = \frac{OB}{BC} \times \frac{BC}{BQ}$

$\therefore \frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$

$\therefore$ পেলাম, ΔOPQ-এর $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$

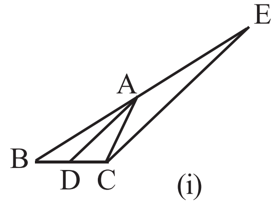
$\therefore$ থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই, AB || PQ

আবার, AB || DC. $\therefore$ PQ || DC **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 9 *যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে একটি ত্রিভুজের কোনো কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক কোণটির বিপরীত বাহুকে অন্তঃস্থভাবে বা বহিঃস্থভাবে কোণসংলগ্ন বাহুদুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাতে বিভক্ত করে।* ***(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)***

প্রদত্ত: ABC ত্রিভুজের ∠BAC-এর AD অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-i) বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-ii) BC বাহুকে বা BC-এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : BD : DC = AB : AC



(i)

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে DA বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করি যা বর্ধিত BA বাহুকে (চিত্র-i) বা BA বাহুকে (চিত্র-ii) E বিন্দুতে ছেদ করে।

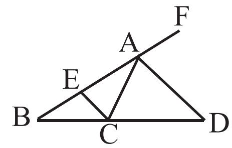
প্রমাণ : DA || CE ∴ ∠DAC = একান্তর ∠ACE

DA || CE, ∴ ∠BAD (বা ∠FAD চিত্র নং (ii)) = অনুরূপ ∠AEC

কিন্তু ∠BAD (বা ∠FAD চিত্র নং (ii)) = ∠DAC

∴ ∠ACE = ∠AEC

সুতরাং, AC = AE



(ii)

ΔBEC (চিত্র i) বা ΔBDA (চিত্র ii)-তে DA || CE; সুতরাং, $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE}$ (থ্যালেসের উপপাদ্য অনুযায়ী)

অর্থাৎ BD : DC = AB : AE

সুতরাং, BD : DC = AB : AC (∵ AE = AC) **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 10 *যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, একটি ত্রিভুজের কোনো কোণ থেকে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি ওই কোণের বিপরীত বাহুকে অন্তঃস্থভাবে বা বহিঃস্থভাবে ত্রিভুজের কোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাতে বিভক্ত করে তাহলে সরলরেখাটি কোণটির অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক হবে।* ***(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)***

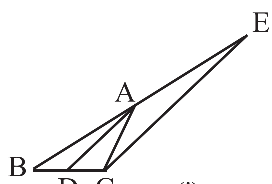
প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজে A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত একটি সরলরেখা BC (চিত্র-i) বা বর্ধিত BC (চিত্র-ii) বাহুকে D বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে, BD : DC = AB : AC হয়।

প্রমাণ করতে হবে : AD, ∠BAC-এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-i) বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-ii)

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে DA বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত করি যা বর্ধিত BA বাহুকে (চিত্র-i) বা BA বাহুকে (চিত্র-ii) E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : ΔBCE (চিত্র-i) বা ΔABD (চিত্র-ii)-তে, DA || CE

$\therefore \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}$ (থ্যালেসের উপপাদ্য অনুযায়ী)

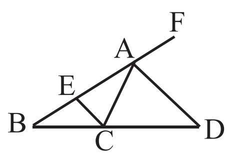


(i)

কিন্তু, $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (প্রদত্ত)

সুতরাং, $\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{AC}$

∴ AE = AC



(ii)

সুতরাং ∠AEC = ∠ACE

আবার, DA || CE ;

∴ ∠DAC = একান্তর ∠ACE এবং ∠BAD (চিত্র-i) বা ∠FAD (চিত্র-ii) = অনুরূপ ∠AEC.

যেহেতু, ∠AEC = ∠ACE,

সুতরাং ∠BAD (চিত্র-i) বা ∠FAD (চিত্র-ii) = ∠DAC.

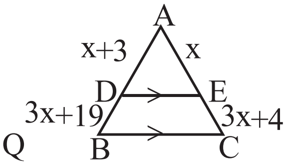
সুতরাং AD, ∠BAC এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-i) বা বহির্সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র-ii) **[প্রমাণিত]**

কষে দেখি 18.2

1. ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।
   (i) PB = AQ, AP = 9 একক, QC = 4 একক হলে, PB-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
   (ii) PB-এর দৈর্ঘ্য AP-এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ এবং QC-এর দৈর্ঘ্য AQ-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 3 একক বেশি হলে, AC-এর দৈর্ঘ্য কত হবে, হিসাব করে লিখি।
   (iii) যদি AP = QC, AB-এর দৈর্ঘ্য 12 একক এবং AQ-এর দৈর্ঘ্য 2 একক হয়, তবে CQ-এর দৈর্ঘ্য কত হবে, হিসাব করে লিখি।
2. ΔPQR-এর PQ ও PR বাহুর উপর যথাক্রমে X, Y দুটি বিন্দু নিলাম।
   (i) PX = 2 একক, XQ = 3.5 একক, YR = 7 একক এবং PY = 4.25 একক হলে, XY ও QR পরস্পর সমান্তরাল হবে কিনা যুক্তি দিয়ে লিখি।
   (ii) PQ = 8 একক, YR = 12 একক, PY = 4 একক এবং PY-এর দৈর্ঘ্য XQ-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 2 একক কম হলে, XY ও QR সমান্তরাল হবে কিনা যুক্তি দিয়ে লিখি।
3. প্রমাণ করি যে, কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [থ্যালেসের উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করি]
4. ΔABC-এর AD মধ্যমার উপর P একটি বিন্দু। বর্ধিত BP ও CP যথাক্রমে AC ও AB-কে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, RQ || BC.
5. ΔABC-এর BE ও CF মধ্যমাদুটি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং FE সরলরেখাংশ AG সরলরেখাংশকে O বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে AO = 3OG .
6. প্রমাণ করি যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুগুলির মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখাংশ সমান্তরাল বাহুগুলির সমান্তরাল।
7. ΔABC-এর BC বাহুর উপর D যে-কোনো একটি বিন্দু। P, Q যথাক্রমে ΔABD ও ΔADC-এর ভরকেন্দ্র। প্রমাণ করি যে, PQ || BC.
8. একই ভূমি QR-এর উপর এবং একই পার্শ্বে দুটি ত্রিভুজ ΔPQR ও ΔSQR অঙ্কন করেছি যাদের ক্ষেত্রফল সমান। F ও G যথাক্রমে ত্রিভুজদুটির ভরকেন্দ্র হলে প্রমাণ করি যে, FG || QR.
9. প্রমাণ করি যে, কোনো সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদুটির যে-কোনো একটির সংলগ্ন কোণ দুটি সমান।
10. ΔABC এবং ΔDBC একই ভূমি BC-এর উপর এবং BC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। BC বাহুর উপর E যে-কোনো একটি বিন্দু। E বিন্দু দিয়ে AB এবং BD-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC এবং DC বাহুকে যথাক্রমে F ও G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, AD || FG.
11. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**
   (A) বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :
   (i) ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB এবং AC বাহুকে যথাক্রমে X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। AX = 2.4 সেমি., AY = 3.2 সেমি. এবং YC = 4.8 সেমি., হলে, AB-এর দৈর্ঘ্য
   (a) 3.6 সেমি. (b) 6 সেমি. (c) 6.4 সেমি. (d) 7.2 সেমি.
   (ii) ΔABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর উপর D ও E বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে DE || BC এবং AD : DB = 3 : 1; যদি EA = 3.3 সেমি. হয়, তাহলে AC-এর দৈর্ঘ্য
   (a) 1.1 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 4.4 সেমি. (d) 5.5 সেমি.

(iii) পাশের চিত্রে DE || BC হলে, x-এর মান

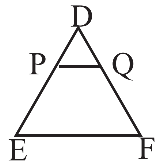
(a) 4 (b) 1 (c) 3 (d) 2



(iv) ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC এবং AD ও BC বাহুর উপর P ও Q বিন্দু দুটি এমনভাবে অবস্থিত যে PQ || DC; যদি PD = 18 সেমি., BQ = 35 সেমি., QC = 15 সেমি. হয়, তাহলে AD-এর দৈর্ঘ্য

(a) 60 সেমি. (b) 30 সেমি. (c) 12 সেমি. (d) 15 সেমি.

(v) পাশের চিত্রে, DP = 5 সেমি., DE = 15 সেমি., DQ = 6 সেমি. এবং QF = 18 সেমি. হলে,

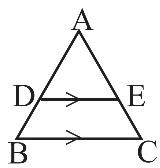


(a) PQ = EF (b) PQ || EF (c) PQ ≠ EF (d) PQ ∦ EF

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) দুটি সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সর্বসম।

(ii) পাশের চিত্রে DE || BC হলে, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।



(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

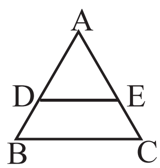
(i) একটি ত্রিভুজের যে-কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুটি বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাশংকে ________ বিভক্ত করে।

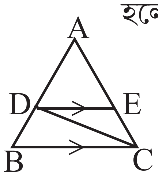
(ii) দুটি ত্রিভুজের ভূমি একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং ত্রিভুজ দুটির অপর শীর্ষবিন্দুটি সাধারণ হলে ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলের অনুপাত ভূমির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের ________।

(iii) একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখা অপর বাহুদ্বয়কে ________ বিভক্ত করে।

12. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

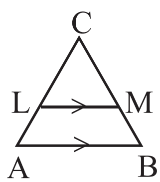
(i) পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ এবং ∠ADE = ∠ACB হলে, বাহুভেদে ABC ত্রিভুজটি কী ধরনের লিখি।

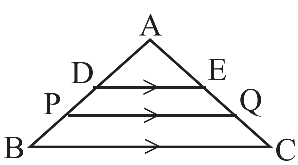




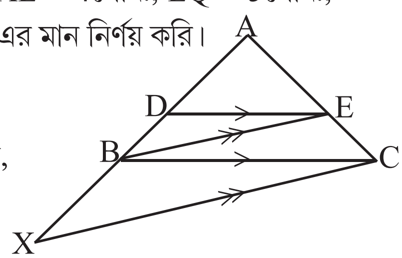
(ii) পাশের চিত্রে DE || BC এবং AD : BD = 3 : 5 হলে, ΔADE-এর ক্ষেত্রফল : ΔCDE-এর ক্ষেত্রফল কত তা লিখি।

(iii) পাশের চিত্রে, LM || AB এবং AL = (x–3) একক, AC = 2x একক, BM = (x–2) একক এবং BC = (2x + 3) একক হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।





(iv) পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে DE || PQ || BC এবং AD = 3সেমি., DP = xসেমি., PB = 4সেমি., AE = 4সেমি., EQ = 5সেমি., QC = y সেমি. হলে, x এবং y-এর মান নির্ণয় করি।



(v) পাশের চিত্রে, DE || BC, BE || XC এবং $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$ হলে, $\frac{AX}{XB}$-এর মান নির্ণয় করি।

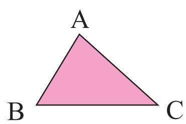
আজ আমরা ঠিক করেছি শাকিলের তৈরি পিচবোর্ডের ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির মধ্যে যেগুলি সদৃশ তাদের একটি চার্টে আটকে আমাদের শ্রেণিকক্ষে টাঙিয়ে রাখব।

রাবেয়া ওই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির মধ্যে যাদের কোণগুলি সমান অর্থাৎ যারা সদৃশকোণী আলাদা করে রেখেছে।

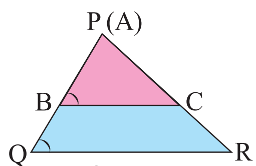
কিন্তু এই সকল সদৃশকোণী ত্রিভুজগুলির বাহুগুলি কি সমানুপাতে আছে? অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি কি সদৃশ হবে? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. প্রথমে দুটি রঙিন ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC ও PQR নিলাম যাদের কোণগুলি সমান অর্থাৎ $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ এবং $\angle C = \angle R$ এবং $PQ > AB$, $PR > AC$, $QR > BC$.



চিত্র (i)



চিত্র (ii)

2. ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উপর এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু A ও শীর্ষবিন্দু P মিশে যায় এবং AB বাহু PQ বাহুর উপর থাকে। [(ii) নং চিত্রের মতো]

দেখছি, (i) ΔABC-এর AC বাহু PR বাহুর সঙ্গে মিশে গেছে, **[নিজে যাচাই করি]**

(ii) $\frac{PB}{PQ} = \frac{PC}{PR}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ [নিজে যাচাই করি] ——— (I)

ব্যাখ্যা : (ii) নং চিত্রে $\angle B = \angle Q$

$\therefore BC \parallel QR$ [$\because$ অনুরূপ কোণদ্বয় সমান]

$\therefore \frac{PB}{BQ} = \frac{PC}{CR}$ [থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই]

$\frac{AB}{BQ} = \frac{AC}{CR}$

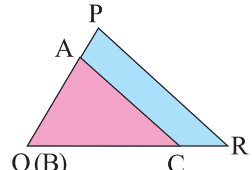
বা, $\frac{BQ}{AB} = \frac{CR}{AC}$

বা, $1 + \frac{BQ}{AB} = 1 + \frac{CR}{AC}$

বা, $\frac{AB + BQ}{AB} = \frac{AC + CR}{AC}$

বা, $\frac{AQ}{AB} = \frac{AR}{AC}$ $\therefore \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC}$ সুতরাং, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$

3. একইরকমভাবে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রকে PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উপর পাশের ছবির মতো এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু B ও শীর্ষবিন্দু Q পরস্পর মিশে যায় এবং AB বাহু PQ বাহুর উপর থাকে।



চিত্র (iii)

দেখছি, (i) BC বাহু QR বাহুর সঙ্গে মিশে গেছে। [নিজে হাতেকলমে যাচাই করি]

এবং (ii) $\frac{AQ}{PQ} = \frac{QC}{QR}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [নিজে যাচাই করি] ———— (II)

উপরের মতো আমি নিজে ব্যাখ্যা লিখি [নিজে করি]

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে পেলাম, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

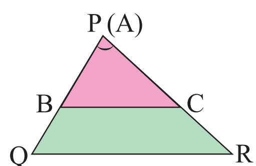
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী। অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি সদৃশ।

কিন্তু এর বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে কি তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে? দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে ত্রিভুজদুটি সদৃশকোণী হবে কিনা হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. প্রথমে রঙিন আর্টপেপার কেটে দুটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC ও PQR তৈরি করলাম যাদের বাহুগুলি সমানুপাতী। অর্থাৎ, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

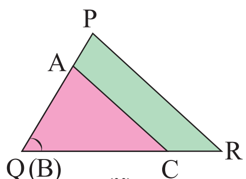
2. এবার পাশের চিত্রের মতো ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উপর এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু A ও শীর্ষবিন্দু P মিশে থাকে এবং AB বাহু PQ বাহুর উপর থাকে।



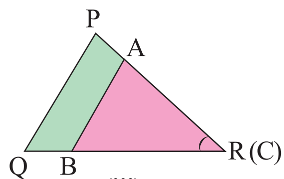
(i)

দেখছি, AC বাহু PR বাহুর সঙ্গে মিশে গেছে। অর্থাৎ পেলাম, $\angle A = \angle P$

3. একইভাবে নীচের (ii) নং ও (iii) নং চিত্রের মতো ΔABC-কে ΔPQR-এর উপরে বসিয়ে দেখছি $\angle B =$ ☐ এবং $\angle C =$ ☐ [নিজে যাচাই করে লিখি]



(ii)



(iii)

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে। অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হবে।

আমরা অন্য যে-কোনো দুটি ত্রিভুজ নিয়ে একইভাবে হাতেকলমে যাচাই করে দেখছি—

(i) দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে।

আবার (ii) দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হলে তারা সদৃশকোণী হবে। [নিজে করি]

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :45. দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান হবে অর্থাৎ তাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে। *[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : ABC ও DEF দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ। অর্থাৎ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

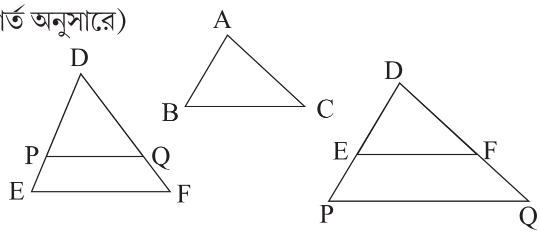
প্রমাণ করতে হবে : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

অঙ্কন : ΔDEF থেকে AB ও AC-এর সমান করে DE বা বর্ধিত DE থেকে এবং DF বা বর্ধিত DF থেকে যথাক্রমে DP ও DQ অংশ কেটে নিলাম। P ও Q বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDPQ-এর মধ্যে,

AB = DP, $\angle A = \angle D$ এবং AC = DQ

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (S-A-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে)



$\therefore \angle B = \angle P$

আবার, $\angle B = \angle E$ [প্রদত্ত]

$\therefore \angle P = \angle E$

সুতরাং, PQ || EF [$\because$ অনুরূপ কোণ সমান]

$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ (থ্যালেসের উপপাদ্য থেকে পাই)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ———— (I) [$\because$ DP = AB এবং DQ = AC]

অনুরূপে, ED বা বর্ধিত ED থেকে BA এবং EF বা বর্ধিত EF থেকে BC-এর সমান করে কেটে নিয়ে প্রমাণ করতে পারি, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ———— (II)

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে পেলাম, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ **[প্রমাণিত]**

বুঝেছি, যদি দুটি ত্রিভুজের একটির দুটি কোণ অপরটির দুটি কোণের সমান হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী হবে। কারণ নিজে বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :46. দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতে থাকলে তাদের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে। অর্থাৎ, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী হবে। *[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : ΔABC ও ΔDEF -এর $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে : ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী অর্থাৎ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

অঙ্কন : DE বা বর্ধিত DE থেকে AB-এর সমান করে DP এবং DF বা বর্ধিত DF থেকে AC-এর সমান করে DQ কেটে নিলাম। P ও Q বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

প্রমাণ : $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$; সুতরাং, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$ [অঙ্কনানুসারে, AB = DP এবং AC = DQ]

$\therefore$ থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে পাই, PQ || EF

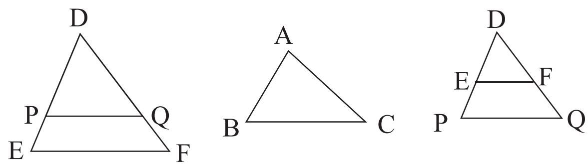
PQ || EF এবং DE ভেদক

$\therefore \angle P = \angle E$

PQ || EF এবং DF ভেদক,

$\therefore \angle Q = \angle F$

$\therefore \Delta DPQ$ ও ΔDEF সদৃশকোণী



$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{PQ}{EF}$

বা, $\frac{AB}{DE} = \frac{PQ}{EF}$ [∵ অঙ্কনানুসারে DP = AB] ———— (i)

কিন্তু $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ [প্রদত্ত] ———— (ii)

∴ (i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{PQ}{EF} = \frac{BC}{EF}$

∴ PQ = BC.

∴ ΔABC ও ΔDPQ-এর মধ্যে AB = DP, BC = PQ এবং AC = DQ

∴ ΔABC ≅ ΔDPQ (S-S-S সর্বসমতার শর্ত অনুসারে)

∴ ∠A = ∠D, ∠B = ∠P = ∠E এবং ∠C = ∠Q = ∠F

∴ ∠A = ∠D, ∠B = ∠E এবং ∠C = ∠F

∴ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

13 দুটি বহুভুজ সদৃশ হবে যখন

(i) বহুভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী এবং (ii) বহুভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হবে।

14 কিন্তু দুটি ত্রিভুজ কখন সদৃশ হবে?

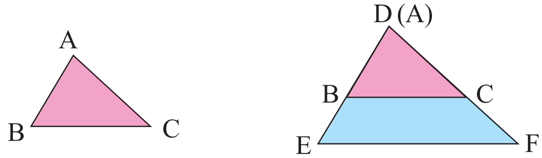
উপরের প্রমাণ থেকে দেখছি, দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে যদি,

ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী হয়। অথবা ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হয় বা ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী হয়।

কিন্তু যদি দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণদুটির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হয়, তবে কি ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. কাগজ কেটে দুটি রঙিন ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC ও DEF তৈরি করলাম যাদের ∠A = ∠D এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$



2. উপরের ছবির মতো ΔABC-কে ΔDEF-এর উপর এমনভাবে বসালাম যাতে শীর্ষবিন্দু A ও শীর্ষবিন্দু D মিশে থাকে এবং DE বাহু AB বাহুর উপর থাকে।

দেখছি, (i) AC বাহু DF বাহুর সঙ্গে মিশে আছে [∵ ∠A = ∠D]

এবং (ii) $\frac{BC}{EF} = \frac{\square}{\square}$ [নিজে মেপে লিখি] $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

হাতেকলমে দেখছি, দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য :47. দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে। *[প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*

প্রদত্ত : ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$ এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে : ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

প্রমাণ : $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ বা, $\frac{DB}{DE} = \frac{DC}{DF}$ বা, $\frac{DB}{BE} = \frac{DC}{CF}$ $\therefore BC \parallel EF$ [থ্যালেসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই]

সুতরাং, $\angle B =$ অনুরূপ $\angle E$ এবং $\angle C =$ অনুরূপ $\angle F$

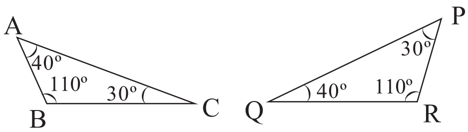
অর্থাৎ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী। $\therefore$ ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে সর্বসমতার চিহ্ন হিসাবে যেমন $\cong$ এটি ব্যবহার করি, সেরকম দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে কোনো চিহ্ন ব্যবহার করা যায় কি?

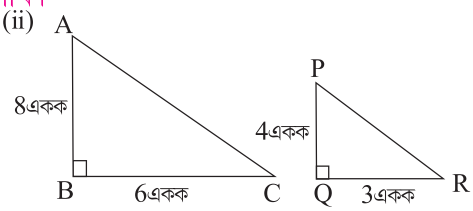
ΔABC ও ΔDEF-এর $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$ হলে ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ। এখন লিখি $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

প্রয়োগ : 11. নীচের কোন ত্রিভুজ জোড়া সদৃশ হিসাব করে লিখি।

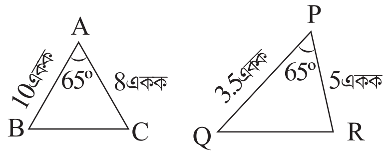
(i)



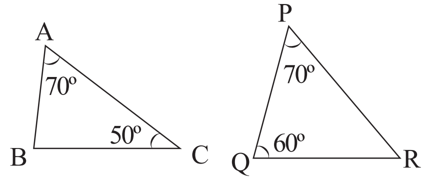
(ii)



(iii)



(iv)



(i) $\angle A = \angle Q$, $\angle B = \angle R$ এবং $\angle C = \angle P$

$\therefore$ ΔABC ও ΔQRP সদৃশকোণী

$\therefore$ ΔABC ও ΔQRP সদৃশ বা $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

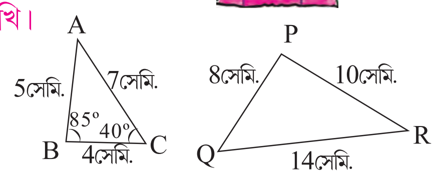
(ii) $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

$\therefore$ ΔABC ও ΔRQP-এর বাহুগুলি সমানুপাতী।

$\therefore$ ΔABC ও ΔRQP সদৃশ বা $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

একইভাবে (iii) ও (iv) চিত্রের বাহু ও কোণের হিসাব করে নিজে লিখি। [নিজে করি]

প্রয়োগ : 12. পাশের ছবি দেখি ও $\angle P$-এর মান হিসাব করে লিখি।



সমাধান : ΔABC ও ΔPQR -এর,

$\frac{AB}{PR} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{BC}{PQ} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ এবং $\frac{AC}{QR} = \frac{\square}{\square} = \frac{1}{2}$

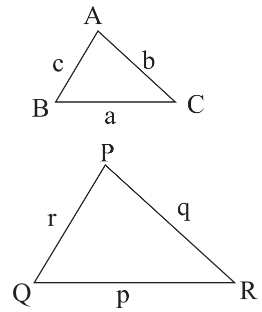
$\therefore$ $\frac{AB}{RP} = \frac{BC}{PQ} = \frac{CA}{QR} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ΔABC ও ΔRPQ সদৃশকোণী

$\therefore$ $\angle A = \angle R$, $\angle B = \angle P$ এবং $\angle C = \angle Q$

$\therefore$ $\angle P = \angle B = 85^\circ$

প্রয়োগ : 13. প্রমাণ করি যে, দুটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিসীমা ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহুগুলির সঙ্গে সমানুপাতী।



প্রদত্ত : ABC ও PQR দুটি সদৃশ ত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে : $\dfrac{\Delta ABC\text{-এর পরিসীমা}}{\Delta PQR\text{-এর পরিসীমা}} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$

প্রমাণ : ΔABC ও ΔPQR সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$

সুতরাং, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP} = \dfrac{AB + BC + CA}{PQ + QR + PR}$

(সংযোজন প্রক্রিয়া করে পাই)

$\dfrac{\Delta ABC\text{-এর পরিসীমা}}{\Delta PQR\text{-এর পরিসীমা}} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 14. দুটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিসীমা যথাক্রমে 20 সেমি. ও 16 সেমি., প্রথম ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সেমি. হলে, দ্বিতীয় ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুর দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

উত্তর সংকেত : $\dfrac{\text{প্রথম ত্রিভুজের পরিসীমা}}{\text{দ্বিতীয় ত্রিভুজের পরিসীমা}} = \dfrac{9 \text{ সেমি.}}{\text{দ্বিতীয় ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু}}$

প্রয়োগ : 15. প্রমাণ করি যে, যে-কোনো ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং দুটি বাহু দ্বারা সমান্তরাল সরলরেখার খণ্ডিতাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হবে।

প্রদত্ত : ΔABC-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু P দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা AC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।

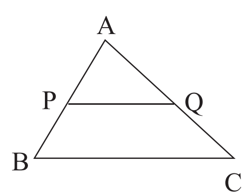
প্রমাণ করতে হবে : (i) Q, AC-এর মধ্যবিন্দু, (ii) $PQ = \frac{1}{2} BC$

প্রমাণ : ΔAPQ ও ΔABC-এর

$\angle PAQ = \angle BAC$ [সাধারণ কোণ]

$\angle APQ = \angle ABC$ [$\because PQ \parallel BC$ এবং AB ভেদক]

∴ ΔAPQ ও ΔABC সদৃশকোণী।



সুতরাং, ΔAPQ ও ΔABC সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{PQ}{BC}$

কিন্তু, $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{1}{2}$ [∵ P, AB-এর মধ্যবিন্দু]

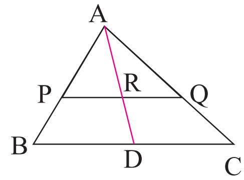
$\therefore \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{1}{2}$ বা, $AQ = \dfrac{1}{2} AC$ ∴ Q, AC-র মধ্যবিন্দু **[(i) প্রমাণিত]**

আবার, $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{1}{2}$ ∴ $PQ = \dfrac{1}{2} BC$ **[(ii) প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 16. ΔABC-এর $\angle B = \angle C$, D ও E বিন্দু BA ও CA-এর উপর এমনভাবে অবস্থিত যে, BD = CE; প্রমাণ করি যে, DE || BC **[নিজে করি]**

প্রয়োগ : 17. ΔABC-এর একটি মধ্যমা AD অঙ্কন করেছি। যদি BC-এর সমান্তরাল কোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে AD দ্বারা PQ সরলরেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত হবে।

প্রদত্ত : ABC-এর AD মধ্যমা। BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা AB, AD ও AC-কে যথাক্রমে P, R ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে : PR = RQ

প্রমাণ : ΔAPR ও ΔABD-এর $\angle PAR = \angle BAD$ [একই কোণ]

এবং $\angle APR$ = অনুরূপ $\angle ABD$ [$\because$ PR || BD এবং AB ভেদক]

$\therefore \Delta APR$ ও ΔABD সদৃশকোণী।

সুতরাং, ΔAPR ও ΔABD সদৃশ।

$\therefore \frac{PR}{BD} = \frac{AR}{AD}$ ———— (i)

ΔARQ ও ΔADC থেকে অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\frac{RQ}{DC} = \frac{AR}{AD}$ ———— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{PR}{BD} = \frac{RQ}{DC}$

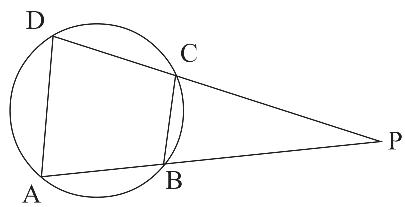
কিন্তু, BD = DC [$\because$ AD মধ্যমা]

$\therefore$ PR = RQ **[প্রমাণিত]**

প্রয়োগ : 18. একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD অঙ্কন করেছি। বর্ধিত AB ও DC বাহুদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, PA.PB = PC.PD

প্রদত্ত : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বর্ধিত AB ও DC বাহুদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে : PA.PB = PC.PD



প্রমাণ : ABCD বৃহস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore \angle DAB + \angle DCB = 180^{\circ}$

আবার, $\angle DCB + \angle BCP = 180^{\circ}$

$\therefore \angle DAB + \angle DCB = \angle DCB + \angle BCP$

$\therefore \angle DAB = \angle BCP$ ———— (i)

ΔAPD ও ΔCPB-এর, $\angle APD = \angle CPB$ [একই কোণ]

এবং $\angle PAD = \angle BCP$ [(i) থেকে পেলাম]

$\therefore \Delta APD$ ও ΔCPB সদৃশকোণী।

সুতরাং, ΔAPD ও ΔCPB সদৃশ।

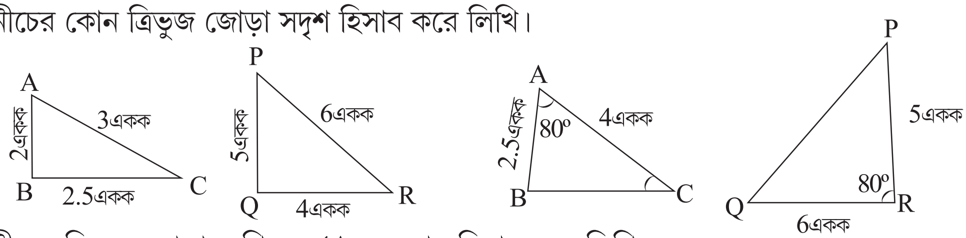
$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$

সুতরাং, PA.PB = PC.PD (প্রমাণিত)

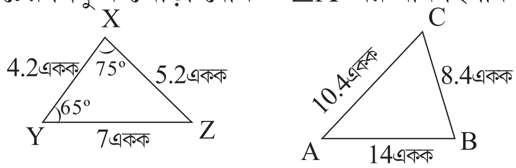
উপরের প্রমাণে দেখছি, ΔAPD ও ΔCPB-এর PA ও PC অনুরূপ বাহু এবং PD ও PB অনুরূপ বাহু।

কষে দেখি 18.3

1. নীচের কোন ত্রিভুজ জোড়া সদৃশ হিসাব করে লিখি।



2. নীচের ত্রিভুজ জোড়া দেখি ও ∠A-এর মান হিসাব করে লিখি।



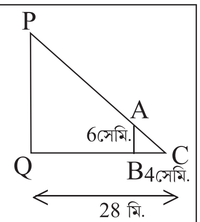
3. আমাদের মাঠে 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের একটি কাঠির 4 সেমি. দৈর্ঘ্যের ছায়া মাটিতে পড়েছে। ওই একই সময়ে যদি একটি উঁচু টাওয়ারের ছায়ার দৈর্ঘ্য 28 মিটার হয়, তবে টাওয়ারের উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি।

উত্তর সংকেত : ধরি, PQ টাওয়ার এবং AB কাঠি

∴ BC = 4 সেমি., QC = 28 মি.

ΔPQC ও ΔABC সদৃশকোণী।

সুতরাং সদৃশ। ∴ $\frac{PQ}{AB} = \frac{QC}{BC}$ **[নিজে করি]**

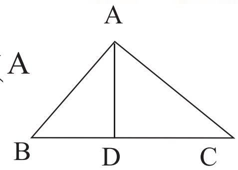


4. প্রমাণ করি যে, কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।
5. তিনটি সমবিন্দু সরলরেখাকে দুটি সমান্তরাল সরলরেখা যথাক্রমে A, B, C ও X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করেছে, প্রমাণ করি যে, AB : BC = XY : YZ
6. PQRS একটি ট্রাপিজিয়াম অঙ্কন করেছি যার PQ || SR ; PR ও QS কর্ণ দুটি O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, OP : OR = OQ : OS; যদি SR = 2PQ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, O বিন্দু কর্ণ দুটির প্রত্যেকটির সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর একটি বিন্দু হবে।
7. PQRS একটি সামান্তরিক। S বিন্দুগামী একটি সরলরেখা PQ এবং বর্ধিত RQ-কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, PS : PX = QY : QX = RY : RS.
8. দুটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ΔABC ও ΔPQR সদৃশকোণী। তাদের পরিকেন্দ্র যথাক্রমে X ও Y; BC ও QR অনুরূপ বাহু হলে, প্রমাণ করি যে, BX : QY = BC : QR.
9. কোনো বৃত্তের PQ ও RS দুটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে X বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। P, S ও R, Q যুক্ত করে, প্রমাণ করি যে, ΔPXS ও ΔRSQ সদৃশকোণী। এর থেকে প্রমাণ করি যে, PX·XQ = RX·XS
অথবা একটি বৃত্তে দুটি জ্যা পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে ছেদ করলে একটির অংশদ্বয়ের আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের আয়তক্ষেত্রের সমান হবে।
10. একটি সরলরেখার উপর P এবং Q দুটি বিন্দু। P এবং Q বিন্দুতে সরলরেখাটির উপর যথাক্রমে PR এবং QS লম্ব। PS এবং QR পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। OT, PQ -এর উপর লম্ব। প্রমাণ করি যে, $\frac{1}{OT} = \frac{1}{PR} + \frac{1}{QS}$
11. একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত ΔABC; বৃত্তের ব্যাস AD এবং AE, BC বাহুর উপর লম্ব যা BC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, ΔAEB এবং ΔACD সদৃশকোণী। এর থেকে প্রমাণ করি যে, AB.AC = AE.AD.

আমরা পিচবোর্ডে যে সকল ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র তৈরি করেছি তাদের মধ্যে সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলি দেবমাল্য আলাদা করে রেখেছে।

নুসরৎ এদের মধ্যে দুটি সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র নিয়ে কাগজ ভাঁজ করে ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব তৈরি করল।

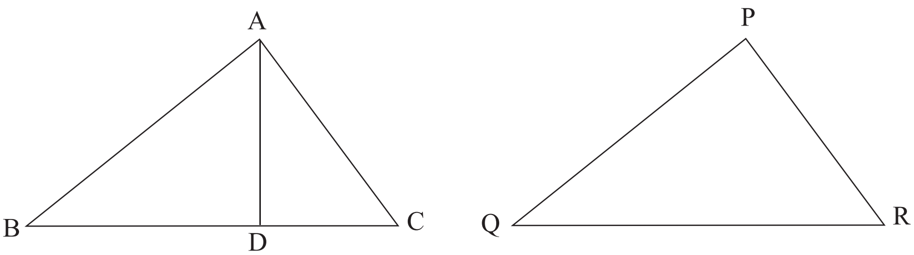
নুসরৎ সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর সমকৌণিক বিন্দু A থেকে AD ⊥ BC অঙ্কন করেছে।



কাগজের ভাঁজ খুলে তিনটি ত্রিভুজ ABD, CAD ও ABC পেলাম। কিন্তু এই তিনটি ত্রিভুজ কি পরস্পর সদৃশ? হাতেকলমে যাচাই করি।

হাতেকলমে

1. দুটি একই মাপের ত্রিভুজ ABC ও PQR তৈরি করলাম যার $\angle A = \angle P = 90^\circ$, $\angle B = \angle Q$ এবং $\angle C = \angle R$ এবং ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র দুটি কেটে নিলাম।
2. এবার কাগজ ভাঁজ করে ΔABC-এর অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব টানলাম।



3. এবার ΔABD ও ΔCAD কেটে নিলাম এবং ΔPQR-এর উপর বসিয়ে দেখছি

$\angle A = \angle P = \angle CDA = \angle ADB$

$\angle B = \angle Q = \angle ABD = \angle CAD$

$\angle C = \angle R = \angle DAB = \angle ACD$ **[নিজে করি]**

$\therefore$ পেলাম ΔABD, ΔCAD ও ΔABC সদৃশকোণী।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম ΔABD, ΔCAD ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব ত্রিভুজটিকে যে দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ।