MP BOARD CLASS 12 PAPER 2013
गणित : कक्षा XII

समय : 3 घण्टा] . पूर्णांक : 100

निर्देश : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) प्रश्न-पत्र में दिये गये निर्देश सावधानीपूर्वक पढ़कर प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) प्रश्न-पत्र में दो खण्ड दिये गये हैं—**खण्ड 'अ'** और **खण्ड 'ब'**।

(iv) खण्ड 'अ' में दिये गये प्रश्न 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं जिनके अन्तर्गत *एक शब्द/वाक्य में उत्तर, रिक्त स्थानों की पूर्ति, सही जोड़े बनाना, सत्य/असत्य तथा सही विकल्प का चयन करना* है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

(v) खण्ड 'ब' के प्रत्येक प्रश्न में आन्तरिक विकल्प दिये गये हैं।

(vi) प्रत्येक प्रश्न पर आबंटित अंक उसके सम्मुख अंकित हैं।

खण्ड 'अ'

1. प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्न में दिये गये विकल्पों में से सही उत्तर चुनकर लिखिए— $1 \times 5 = 5$

(i) व्यंजक $\frac{1}{x(x+a)}$ की आंशिक भिन्नें हैं—

(a) $\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right]$, (b) $\frac{1}{a}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a}\right]$,

(c) $\frac{1}{a}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right]$, (d) $\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a}\right]$.

(ii) $\cos^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{4}{5}$ का मान है—

(a) 1, (b) 0, (c) -1, (d) $\frac{4}{5}$.

(iii) बिन्दु (5, 12, 13) की x अक्ष से लम्बवत् दूरी है—

(a) $\sqrt{313}$, (b) $\sqrt{13}$, (c) $\sqrt{5}$, (d) $\sqrt{12}$.

(iv) उस समतल का समीकरण जो X अक्ष के समान्तर हैं तथा Y और Z अक्षों से क्रमशः 5 और 7 अन्तःखण्ड काटता है, है—

(a) $5x + 3y = 15$, (b) $7x + 3z = 21$,

(c) $7y + 5z = 35$, (d) $35x + 21y + 15z = 105$.

(v) बिन्दुओं (2, 3, 4) तथा (1, – 2, 3) से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण होगा—

(a) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{-1}$, (b) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{-1}$,

(c) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{-1}$, (d) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{1}$.

उत्तर—(i) (c), (ii) (b), (iii) (a), (iv) (c), (v) (b).

2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य बताइए— $1 \times 5 = 5$

(i) उस गोले का समीकरण जिसके एक व्यास के सिरों के निर्देशांक (2, – 3, 4) और (– 5, 6, 7) हैं, $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 3z - 56 = 0$ है।

(ii) एक सादिश जिसके आदि और अन्तिम बिन्दु सपाती होते हैं, एकांक सादिश कहलाता है।

(iii) जब किसी वस्तु को ऊपर की ओर फेंका जाता है तो ऊपर की ओर जाने पर g का मान ऋणात्मक होता है।

(iv) दो चरों x और y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक $r = \dfrac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \sigma_y}$ होता है।

(v) समाश्रयण गुणांकों का समान्तर माध्य सह-सम्बन्ध गुणांक से छोटा होता है।

उत्तर—(i) असत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य।

3. प्रत्येक का एक शब्द में उत्तर दीजिए— $1 \times 5 = 5$

(i) सदिश बीजगणित में विस्थापन कौन-सी राशि है ?

(ii) $\log(\log \sin x)$ का अवकल गुणांक क्या होगा ?

(iii) यदि समाकल की सीमायें परस्पर बदल दी जायें तो समाकल के मान का चिह्न पर क्या प्रभाव पड़ता है ?

(iv) कार्य किस प्रकार की राशि है ?

(v) न्यूटन-रैफ्सन विधि से किसी संख्या y का वर्गमूल ज्ञात करने का सूत्र क्या है ?

उत्तर—(i) सदिश, (ii) $\dfrac{\cot x}{\log(\sin x)}$, (iii) चिह्न विपरीत हो जाता है, (iv) अदिश, (v) $\sqrt{y} = \dfrac{1}{2}\left[x_n + \dfrac{N}{x_n}\right]$.

4. सही जोड़ी बनाइए— $1 \times 5 = 5$

'अ'	'ब'
(i) रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k})$ और समतल $\vec{r}.(\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}) = 5$ आपस में हैं	(a) $\dfrac{45}{16}$
(ii) $\int \sin^2 x \, . \, dx$	(b) $1 - \dfrac{\pi}{4}$
(iii) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, . \, dx$	(c) $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$
(iv) यदि x_n किसी समीकरण $f(x) = 0$ का सन्निकट मूल हो, तो न्यूटन-रैफ्सन विधि से x_{n+1} होगा	(d) समान्तर
(v) न्यूटन-रैफ्सन विधि से $\dfrac{5}{2}$ के निकट समीकरण $x^2 - x - 5$ का मूल है	(e) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

उत्तर—(i) → (d), (ii) → (c), (iii) → (b), (iv) → (e), (v) → (a).

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए— $1 \times 5 = 5$

(i) $\sin x^3$ का अवकल गुणांक .... होगा।

(ii) $\int \dfrac{1}{1 - \sin x} dx$ का मान .... है।

(iii) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल .... है।

(iv) आभासी स्थिति विधि .... है।

(v) न्यूटन-रैफ्सन विधि से 10 का घनमूल प्रथम पुनरावृत्ति पश्चात् .... है।

उत्तर—(i) $3x^2 \cos x^3$, (ii) $\tan x + \sec x$, (iii) πa^2, (iv) समीकरण के वास्तविक मूल ज्ञात करने की सबसे पुरानी विधि, (v) $2 \cdot 167$.

खण्ड 'ब'

6. $\dfrac{x^4}{x^3 + 1}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए। **4 अथवा**

$\dfrac{2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए।

7. यदि $\sin^{-1}x + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$2x^2 = \sqrt{5} - 1.$$ 4 *अथवा*

सिद्ध कीजिए कि : $\cos^{-1}\frac{3}{11} - \sin^{-1}\frac{3}{4} = \sin^{-1}\frac{19}{44}.$

8. प्रथम सिद्धान्त से $\tan^{-1}x$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 4 *अथवा*

$\log\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

9. फलन $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ के लिये अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में रोले की प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 4 *अथवा*

सिद्ध कीजिए कि $\sin x + \cos x$ का उच्चिष्ठ मान $\sqrt{2}$ है।

10. सिद्ध कीजिए कि सहसम्बन्ध गुणांक का मान -1 से $+1$ के बीच होता है। 4 *अथवा*

निम्नलिखित आँकड़ों से पद विचलन विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

x	10	14	18	22	26	30
y	18	12	24	6	30	36

11. किसी फर्म के विज्ञापन के खर्च और बिक्री के आँकड़े निम्न प्रकार प्राप्त हुए :

	बिक्री (करोड़ों में)	विज्ञापन (करोड़ों में)
माध्य	40	6
मानक विचलन	10	1·5

सहसम्बन्ध गुणांक $r = 0\cdot9$

यदि फर्म 60 करोड़ रुपये की बिक्री का लक्ष्य निर्धारित करे, तो विज्ञापन पर खर्च कितना होगा ? 4 *अथवा*

निम्नांकित आँकड़ों के लिए y की x पर समाश्रयण रेखा ज्ञात कीजिए :

x	10	9	8	7	6	4	3
y	8	12	7	10	8	9	6

12. यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$ 4 *अथवा*

यदि $y = (\sin^{-1}x)^2$ तो सिद्ध कीजिए कि : $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\,.\frac{dy}{dx} - 2 = 0.$

13. $x + 3y + 6 = 0$ तथा $3x - y - 4z = 0$ के प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाले उन समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी मूल-बिन्दु से लम्बवत् दूरी 1 है। 5 *अथवा*

एक परिवर्तनशील समतल मूल-बिन्दु से स्थिर दूरी P पर रहता हुआ निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर काटता है। दर्शाइए कि चतुष्फलक OABC के केन्द्रक का बिन्दु-पथ $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = 16P^{-2}$ है।

14. सदिश विधि से त्रिकोणमिति का साइन (sine) नियम सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

5 अथवा

दर्शाइये कि : $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = 0.$

15. $\lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5 अथवा

$f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ जब $x \neq 0$ $f(x) = 1$ जब $x = 0$, क्या $f(x), x = 0$ पर सतत है ?

16. $\int \frac{5x + 7}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5 अथवा

$\int \frac{dx}{1 - 2\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. सिद्ध कीजिए कि : $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^3 x} dx = \frac{\pi}{4}.$ 5 अथवा

वक्र $x^2 = 4y$ और रेखा $x = 4y - 2$ के अन्तर्गत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

'8. अवकल समीकरण $x(x - y)\, dy + y^2 dx = 0$ को हल कीजिए। 5 अथवा

अवकल समीकरण $\cos x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$ को हल कीजिए।

9. 10 बच्चों के समूह में से जिसमें 6 लड़के और 4 लड़कियाँ हैं, 3 बच्चे यदृच्छया चुने जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना हुआ समूह केवल एक विशेष लड़की रखता है। 5 अथवा

दो घनाकार पाँसे एक साथ फेंके जाते हैं। पहले पाँसे पर सम संख्या अथवा दोनों का योगफल 9 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

20. दर्शाइए कि रेखायें $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$ और $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5}$ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं। प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए। 6 अथवा

$\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-4}{1}$ और $\frac{x}{-3} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-2}{4}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

21. किसी बिन्दु (1, 2, 3) से होकर जाने वाली और समतलों $\vec{r}.(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + 5 = 0$ तथा $\vec{r}(2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}) = 3$ के प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 6 अथवा

उन रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ तथा $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ हैं।