JEE MAIN - 2016 (Paper 2) (B .Arch)

1. જો f એ $f(x+4) - f(x+2) + f(x) = 0$ નું સમાધાન કરતું x નું વાસ્તવિક વિધેય હોય તો f નું આવર્તમાન .... છે.

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

ઉકેલ : $f(x+4) - f(x+2) + f(x) = 0$ (i)

$f(x+6) - f(x+4) + f(x+2) = 0$ (x ના બદલે $x+2$ લેતાં) (ii)

$\therefore$ (i) તથા (ii)નો સરવાળો કરતાં, $f(x+6) + f(x) = 0$ (iii)

$\therefore$ $f(x+12) + f(x+6) = 0$ (x ના બદલે $x+6$ લેતાં) (iv)

$\therefore$ (iv)માંથી (iii) બાદ કરતાં $f(x+12) = f(x)$

$\therefore$ f નું આવર્તમાન 12 છે. **જવાબ (D)**

2. જો વિધેય $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$, જ્યાં $f(x) = 3^{x(x-1)}$; હોય તો $f^{-1}(x) =$ ....

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x(x-1)}$ (B) $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4\log_3 x})$

(C) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4\log_3 x})$ (D) અવ્યાખ્યાયિત

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = 3^{x(x-1)} = y$

$\therefore x^2 - x - \log_3 y = 0$

$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\log_3 y}}{2}$

$\therefore x = \frac{1 + \sqrt{1+4\log_3 y}}{2}$ કારણ કે $x > 1$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4\log_3 x})$ (f^{-1}નું અસ્તિત્વ સ્વીકારતાં) **જવાબ (C)**

3. m ની જે પૂર્ણાંક કિંમતો માટે $(1+m^2)x^2 - 2(1+3m)x + (1+8m) = 0$ ને વાસ્તવિક વીજ ન હોય તેમની સંખ્યા .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) અનંત

ઉકેલ : $(1+m^2)x^2 - 2(1+3m)x + (1+8m) = 0$

વાસ્તવિક બીજ ન હોય તો $D < 0$

$\Leftrightarrow 4(1+3m)^2 - 4(1+m^2)(1+8m) < 0$

$\Leftrightarrow 1 + 9m^2 + 6m - (m^2 + 8m^3 + 1 + 8m) < 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 + 9m^2 + 6m - m^2 - 8m^3 - 1 - 8m < 0$

$\Leftrightarrow \quad 8m^3 - 8m^2 + 2m > 0$

$\Leftrightarrow \quad 2m(4m^2 - 4m + 1) > 0$

$\Leftrightarrow \quad 2m(2m - 1)^2 > 0$

$m > 0$. $m \in N$ ની તમામ કિંમતો શક્ય છે.

$\therefore$ m ની કિંમતો અનંત છે. **જવાબ (D)**

4. ધારો કે $S = \{z \in C : z(iz_1 - 1) = z_1 + 1, |z_1| < 1\}$. z ની Sમાં આવેલી પ્રત્યેક કિંમત માટે નીચેના પૈકી કયું સત્ય છે ?

(A) $Re\, z - Im\, z < 0$ (B) $Re\, z + Im\, z < 0$ (C) $Re\, z < 0$ (D) $Re\, z - Im\, z > -1$

ઉકેલ : $z(iz_1 - 1) = z_1 + 1$

$ziz_1 - z = z_1 + 1$

$(iz - 1)z_1 = 1 + z$

$z_1 = \frac{1+z}{i(z+i)}$ $(i^2 = -1)$

$|z_1| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1+z}{i(z+i)}\right| < 1$

$\therefore \quad |z + 1| < |z + i|$

$\therefore \quad (x + 1)^2 + y^2 < x^2 + (y + 1)^2$

$\therefore \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 < x^2 + y^2 + 2y + 1$

$\therefore \quad x < y$

$\therefore \quad x - y < 0$

$\therefore \quad Re(z) - Im(z) < 0$. **જવાબ (A)**

5. શ્રેણિક A માટે $|A| = 6$ તથા $adj\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & k & 0 \end{bmatrix}$, તો $k = ...$

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : $|A| = 6$

$adj\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & k & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |adj\ A| = -1(-2 - 4) - k(1 - 16) + 0 = 6 + 15k$

પરંતુ $|adj\ A| = |A|^2$

$\therefore\ 6 + 15k = 36.$ આથી, $15k = 30$

$\therefore\ k = 2$ **જવાબ (D)**

6. શ્રેણિક $\begin{bmatrix} -2 & tan\theta + sec^2\theta & 3 \\ -sin\theta & cos\theta & sin\theta \\ -3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ ના નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય પ્રત્યેક $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માટે .... અંતરાલમાં છે.

(A) $\left[\frac{7}{2}, \frac{21}{4}\right]$ (B) [3, 5] (C) (4, 6) (D) $\left(\frac{5}{2}, \frac{19}{4}\right)$

ઉકેલ : $C_1 \to C_1 + C_3$ કરતાં,

નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય $= f(\theta) = \begin{vmatrix} 1 & tan\theta + sec^2\theta & 3 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 3cos\theta + 4sin\theta$

$\therefore\ f'(\theta) = 0 \Rightarrow -3sin\theta + 4cos\theta = 0$

$\therefore\ tan\theta = \frac{4}{3}$. તેથી, $\theta = tan^{-1}\frac{4}{3}$. જો $tan\theta < \frac{4}{3}$ તો $f'(\theta) > 0$ તથા જો $tan\theta > \frac{4}{3}$ તો $f'(\theta) < 0$.

$\therefore\ f(\theta)$ એ $\left(0, tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$ માટે વધતું વિધેય છે તથા $\left(tan^{-1}\frac{4}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ માટે ઘટતું વિધેય છે.

$\theta = tan^{-1}\frac{4}{3}$ માટે $f(\theta)$નું મહત્તમ મૂલ્ય મળે. તેથી $sin\theta = \frac{4}{5}$, $cos\theta = \frac{3}{5}$.

$\therefore\ f(\theta)$નું સ્થાનીય મહત્તમ $= 3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = 5$

$\theta = 0$ માટે $f(\theta)$ની નિર્ણાયક કિંમત $f(0) = 3$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$

$\therefore\ f(\theta)$ની ન્યૂનતમ કિંમત 3 છે. આથી વિસ્તાર [3, 5] છે. **જવાબ (B)**

7. બે ભિન્ન વ્યંજનો તથા પુનરાવર્તન સહિત 1થી 9માંથી બે અંકોની પસંદગીથી 4 લંબાઈના સંકેતો બનાવવામાં આવે છે. જો આ રીતે મળતા યુગ્મ અંકમાં અંત પામતા સંકેતોની સંખ્યા 432 k હોય, તો k = ...

(A) 7 (B) 5 (C) 49 (D) 35

ઉકેલ : વ્યંજનોની સંખ્યા = 21

અંકોની સંખ્યા = 9

મળતા સંકેતોની સંખ્યા = $21 \times 20 \times 9 \times 4 = 432\ k$ $({}_{21}P_2 + 9$ (કોઈ પણ અંક) $\times 4$ (2, 4, 6, 8))

$\therefore\ k = 35$ **જવાબ (D)**

8. $S = \frac{1}{19!} + \frac{1}{3!17!} + \frac{1}{5!15!} + \ldots$ 10 પદ સુધી સરવાળાનું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{2^{19}}{20!}$ (B) $\frac{2^{20}}{20!}$ (C) $\frac{2^{10}}{20!}$ (D) $\frac{2^{19}}{19!}$

ઉકેલ : $S = \frac{1}{20!}\left[\frac{20!}{19!1!} + \frac{20!}{3!17!} + \text{....10 પદ સુધી}\right]$

$= \frac{1}{20!}[{}^{20}C_1 + {}^{20}C_3 + ... + {}^{20}C_{19}]$

$= \frac{1}{20!}\left[\frac{2^{20}}{2}\right] = \frac{2^{19}}{20!}$ **જવાબ (A)**

9. ધારો કે a, b, c, d અને e ભિન્ન ધન સંખ્યાઓ છે. જો a, b, c અને $\frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$, સમાંતર શ્રેણીમાં હોય અને b, c, d સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો :

(A) a, c, e સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. (B) a, b, e સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

(C) a, b, e સમાંતર શ્રેણીમાં છે. (D) a, c, e સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

ઉકેલ : ધારો કે b, c, d નો સામાન્ય ગુણોત્તર r છે.

$\therefore b = \frac{c}{r}, d = cr$

$a = \frac{2c}{r} - c = \frac{2c - cr}{r}$ (કારણ કે $a + c = 2b$)

$e = \frac{c^2 r}{2c - cr} = \frac{c^2}{a}$. તેથી, $ae = c^2$ $\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{e} = \frac{2}{d}\right)$

$\therefore$ a, c, e સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. **જવાબ (A)**

10. જો $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{}^nC_{i-1}}{{}^nC_i + {}^nC_{i-1}}\right)^3 = \frac{36}{13}$, તો n = ...

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

ઉકેલ : $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{{}^nC_{i-1}}{{}^nC_i + {}^nC_{i-1}}\right)^3 = \frac{36}{13}$. તેથી $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n+1}\right)^3 = \frac{36}{13}$

$\therefore \frac{1}{(n+1)^3}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{36}{13}$

$\therefore \frac{n^2}{4(n+1)} = \frac{36}{13}$ $\left(13n^2 - 144n - 144 = (n-12)(13n+12) \Rightarrow n = 12\right)$

$\therefore$ 10, 11, 12, 13 વારાફરતી ચકાસતાં $n = 12$. **જવાબ (C)**

11. $\lim_{x\to 1}((1 - x) + [x - 1] + |1 - x|)$, જ્યાં $[x]$એ xથી અધિક નહીં તેવો અધિકતમ પૂર્ણાંક છે.

(A) −1 છે. (B) 0 છે. (C) 1 છે. (D) નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : $\lim_{x\to1+}(1-x+[x-1]+|1-x|) = \lim_{x\to1+}(1-x+0+x-1) = 0$

$\lim_{x\to1-}(1-x+[x-1]+|1-x|) = \lim_{x\to1-}(1-x-1+1-x) = -1$

$\therefore$ લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી. **જવાબ (D)**

12. જો $y(x) = \begin{vmatrix} sin\ x & cos\ x & sin\ x + cos\ x + 1 \\ 23 & 17 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $x \in R$, તો $\frac{d^2y}{dx^2} + y = ...$

(A) 6 (B) 4 (C) −10 (D) 0

ઉકેલ : $y'(x) = \begin{vmatrix} cos\ x & -sin\ x & cos\ x - sin\ x \\ 23 & 17 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$y''(x) = \begin{vmatrix} -sin\ x & -cos\ x & -sin\ x - cos\ x \\ 23 & 17 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$y''(x) + y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 23 & 17 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 23 - 17 = 6$ **જવાબ (A)**

13. ધારો કે $p(x)$ એ 4 ઘાતની વાસ્તવિક બહુપદી છે અને તેના આત્યંતિક મૂલ્યો $x = 1$ તથા $x = 2$ માટે મળે છે. જો $\lim_{x\to0}\frac{p(x)}{x^2} = 1$, તો $p(4) = ...$

(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 64

ઉકેલ : $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$\therefore p'(1) = 4a + 3b + 2c + d = 0$

$\therefore p'(2) = 32a + 12b + 4c + d = 0$

હવે, $\lim_{x\to0}\frac{p(x)}{x^2} = 1$. તેથી, $\lim_{x\to0}\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x^2} = 1$

$\therefore\ c = 1, d = 0, e = 0$

$4a + 3b = -2$ ...(i)

$32a + 12b = -4$ ...(ii)

$8a + 3b = -1$ ((ii)ને 4 વડે ભાગતાં) ...(iii)

$4a = 1$. તેથી, $a = \frac{1}{4}$ ((iii)માંથી (i) બાદ કરતાં)

આથી, $3b = -2 - 1 \Rightarrow b = -1$ ((i) પરથી)

$p(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$

$p(4) = 64 - 64 + 16 = 16$ **જવાબ (B)**

14. $y = e^x \sin x,\ x \in [0, \pi]$ ના જે બિંદુને સ્પર્શકનો ઢાળ મહત્તમ હોય તે બિંદુનો x-યામ .... છે.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

ઉકેલ : $m = \frac{dy}{dx} = e^x \cos x + e^x \sin x$

$\frac{dm}{dx} = e^x \cos x + e^x(-\sin x) + e^x \cos x + e^x \sin x$

$= 2e^x \cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$

વળી, $\frac{d^2m}{dx^2} = 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = -2e^{\frac{\pi}{2}} < 0.$ **જવાબ (C)**

15. જો $\int \frac{dx}{x^3(1+x^6)^{\frac{2}{3}}} = f(x)(1 + x^{-6})^{\frac{1}{3}} + C$, C સ્વૈર અચળ તો $f(x) =$ ....

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{6}$ (C) $-\frac{6}{x}$ (D) $-\frac{x}{2}$

ઉકેલ : $\int \frac{dx}{x^3(1+x^6)^{\frac{2}{3}}} = f(x)(1 + x^{-6})^{\frac{1}{3}} + C$

ધારો કે $1 + \frac{1}{x^6} = t$

$\therefore \frac{-6}{x^7} dx = dt$

$\frac{dx}{x^7} = \frac{-dt}{6}$

$I = \int \frac{dx}{x^3 \cdot x^4 \left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{dx}{x^7 \left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{2}{3}}}$

$= \int \frac{-dt}{6t^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{6}\left[\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]$

$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= -\frac{1}{2}(1 + x^{-6})^{\frac{1}{3}} + C$

$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}$ **જવાબ (A)**

16. સંકલ $\int_0^2 [x^2]\, dx$નું મૂલ્ય .... છે. ($[t]$ એ tથી અધિક નહીં તેવો અધિકતમ પૂર્ણાંક છે.)

(A) $3 - \sqrt{2}$ (B) $5 - 3\sqrt{3}$ (C) $5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ (D) $6 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$

ઉકેલ : $\int_0^2 [x^2]\, dx = \int_0^1 0\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2\, dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} 3\, dx$

$= 0 + (\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3(2 - \sqrt{3})$

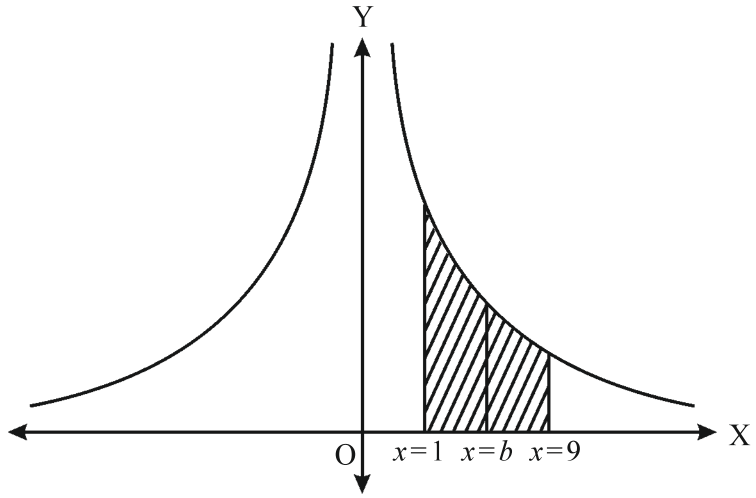
$= 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$

જવાબ **(C)**

17. જો રેખા $x = b$ એ $y = \frac{1}{x^2}$, $1 \le x \le 9$ નીચેના પ્રદેશના ક્ષેત્રફળનું દ્વિભાજન કરે તો $b = $ ....

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{9}{5}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{9}{4}$

ઉકેલ : $y = \frac{1}{x^2}$, $1 \le x \le 9$



$2\int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \int_1^9 \frac{1}{x^2}\, dx$

$\therefore \quad -\left[\frac{2}{x}\right]_1^b = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^9$

$\therefore \quad \left(\frac{2}{b} - 2\right) = \left(\frac{1}{9} - 1\right)$

$\therefore \quad \frac{2}{b} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$

$\therefore \quad b = \frac{9}{5}$

જવાબ **(B)**

18. $y(0) = 1$ને અધીન $\frac{ydx + xdy}{ydx - xdy} = \frac{x^2 e^{xy}}{y^4}$નો ઉકેલ ....

(A) $x^3 = 3y^3(-1 + e^{-xy})$ (B) $x^3 = 3y^3(1 - e^{-xy})$

(C) $x^3 = 3y^3(-1 + e^{xy})$ (D) $x^3 = 3y^3(1 - e^{xy})$

ઉકેલ : $\dfrac{d(xy)}{d\left(\frac{x}{y}\right)} = \dfrac{x^2e^{xy}}{y^2}$

$\therefore \quad -\int e^{-xy}\, d(-xy) = \int \left(\frac{x}{y}\right)^2 d\left(\frac{x}{y}\right)$

$\therefore \quad -e^{-xy} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^3 + C$

$y(0) = 1$

$\therefore \quad -1 = 0 + C \Rightarrow C = -1$

$\therefore \quad -e^{-xy} = \dfrac{x^3}{3y^3} - 1$

$\therefore \quad 3y^3\,(1 - e^{-xy}) = x^3$ **જવાબ (B)**

19. P(1, 2)માંથી પસાર થતી રેખા P થી 3 અંતરે $x + y = 7$ ને છેદે છે. આ રેખાનો ઢાળ ....નું સમાધાન કરે.

(A) $8x^2 - 9x + 1 = 0$ (B) $7x^2 - 18x + 7 = 0$

(C) $16x^2 - 39x + 16 = 0$ (D) $7x^2 - 6x + 7 = 0$

ઉકેલ : ધારો કે રેખાનો ઢાળ $m = tan\theta$

$\therefore$ રેખાનું સમીકરણ

$\dfrac{x-1}{cos\theta} = \dfrac{y-2}{sin\theta} = r$. અહીં બિંદુ માટે $r = 3$

બિંદુ $(3cos\theta + 1, 3sin\theta + 2)$ એ $x + y = 7$ રેખા પર છે.

$\therefore \quad 3cos\theta + 3sin\theta = 4$

$\therefore \quad cos\theta + sin\theta = \frac{4}{3}$

$\therefore \quad 1 + sin2\theta = \frac{16}{9}$

$\therefore \quad sin2\theta = \frac{7}{9}$

$\therefore \quad \dfrac{2tan\theta}{1 + tan^2\theta} = \frac{7}{9}$

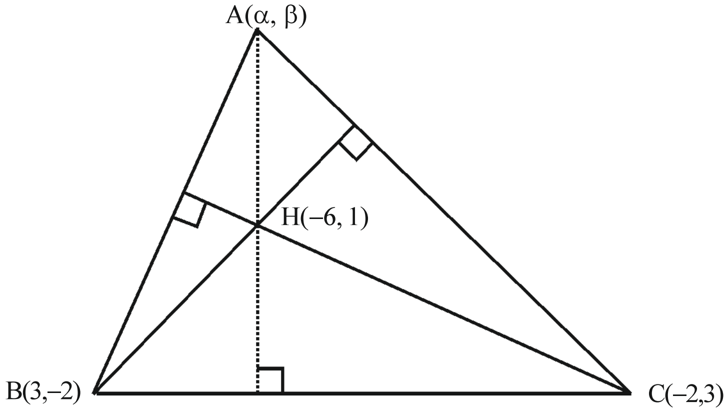
$\therefore \quad 18m = 7 + 7m^2$ $(m = tan\theta)$

$\therefore \quad m$ એ $7x^2 - 18x + 7 = 0$ નું બીજ છે. **જવાબ (B)**

20. ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુઓ (3, –2) અને (–2, 3) છે અને લંબકેન્દ્ર (–6, 1) છે. તો ત્રીજું શિરોબિંદુ .... રેખા પર ન હોઈ શકે.

(A) $6x + y = 0$ (B) $4x + y = 2$ (C) $5x + y = 2$ (D) $3x + y = 3$

ઉકેલ :



$\frac{3-\beta}{-2-\alpha} \times \frac{2+1}{-3-6} = -1$ કારણ કે $\overleftrightarrow{BH} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

$\frac{3(3-\beta)}{9(2+\alpha)} = -1$

$3 - \beta = -3(2 + \alpha)$

$3\alpha - \beta = -9$ ...(i)

$\left(\frac{\beta+2}{\alpha-3}\right)\left(\frac{3-1}{-2+6}\right) = -1$

$\frac{2(\beta+2)}{4(\alpha-3)} = -1$

$\beta + 2 = -2(\alpha - 3)$

$2\alpha + \beta = 4$ ...(ii)

$5\alpha = -5.$ ((i) તથા (ii)નો સરવાળો કરતાં)

આથી, $\alpha = -1$ તેથી, $\beta = 6$

$\therefore$ A = (−1, 6) એ $5x + y = 2$ પર નથી. **જવાબ (C)**

21. $\overline{PQ}$ એ પરવલય $y^2 = 4x$ ની નાભિજીવા છે. $\overline{PQ}$ ને વ્યાસ તરીકે લઈને દોરેલા વર્તુળનું કેન્દ્ર $\sqrt{5}y + 4 = 0$ પર હોય તો જીવા $\overline{PQ}$ ની લંબાઈ = ...

(A) $\frac{36}{5}$ (B) $\frac{26}{5}$ (C) $\frac{36\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{26\sqrt{5}}{5}$

ઉકેલ : ધારો કે $P(t^2, 2t)$ અને $Q\left(\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t}\right)$ એ નાભિજીવાનાં અંત્યબિંદુ છે.

$\overline{PQ}$ ને વ્યાસ તરીકે લઈને દોરેલા વર્તુળનું કેન્દ્ર

$\overline{PQ}$ નું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{t^2+\frac{1}{t^2}}{2}, \frac{2t-\frac{2}{t}}{2}\right)$ છે.

તે $\sqrt{5}y + 4 = 0$ પર છે.

$\sqrt{5}\left(t-\frac{1}{t}\right) + 4 = 0 \Rightarrow t - \frac{1}{t} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ ...(i)

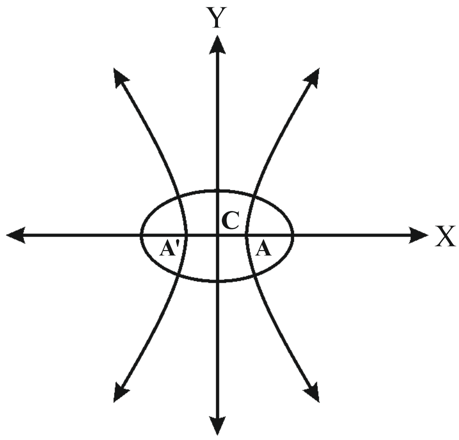
નાભિજીવાની લંબાઈ $= \left(t + \frac{1}{t}\right)^2$

$= \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 4 = \frac{16}{5} + 4 = \frac{36}{5}$ **જવાબ (A)**

22. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$નાં નાભિ તથા એક અતિવલયનાં નાભિ એક જ છે. અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા 2 હોય, તો અતિવલયના (4, 6) પરના બિંદુમાંથી પસાર થતાં સ્પર્શકનું સમીકરણ .... છે.

(A) $2x - y - 2 = 0$ (B) $3x - 2y = 0$ (C) $2x - 3y + 10 = 0$ (D) $x - 2y + 8 = 0$

ઉકેલ :



ઉપવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

$e = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$e' = 2$ S(4, 0), S'(−4, 0) $(\pm ae, 0) = \left(\pm 5\left(\frac{4}{5}\right), 0\right)$

$a'e' = 4$

$a' = 2$

A(2, 0), A'(−2, 0) એ અતિવલયનાં શિરોબિંદુ છે.

$(b')^2 = (a')^2 ((e')^2 - 1) = 4(4 - 1) = 12$

અતિવલયનું સમીકરણ

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

(4, 6) આગળના અતિવલયના સ્પર્શકનું સમીકરણ $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ પરથી,

$\frac{4x}{4} - \frac{6y}{12} = 1$

$\therefore \frac{x}{1} - \frac{y}{2} = 1$

$\therefore 2x - y = 2$ **જવાબ (A)**

23. (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)માંથી પસાર થતા સમતલમાં કયું બિંદુ $(d, 2d, 3d)$નું પ્રતિબિંબ છે ? $0 < d < 1$.

(A) $\left(\frac{2}{3} - 3d, \frac{2}{3} - 2d, \frac{2}{3} - d\right)$ (B) $\left(-\frac{1}{3} + 3d, 2d, \frac{1}{3} + d\right)$

(C) $(3d, 2d, d)$ (D) $\left(\frac{1}{3} + d, \frac{2}{3} - 2d, -\frac{1}{3} + d\right)$

ઉકેલ : (1, 0, 0), (0, 1, 0) અને (0, 0, 1)માંથી પસાર થતાં સમતલનું સમીકરણ $x + y + z = 1$.

$\therefore$ આ સમતલમાં $(d, 2d, 3d)$ ના પ્રતિબિંબ માટે,

$$\frac{x - d}{1} = \frac{y - 2d}{1} = \frac{z - 3d}{1} = \frac{-2(6d - 1)}{1+1+1} \Rightarrow x = -3d + \frac{2}{3}, y = -2d + \frac{2}{3}, z = -d + \frac{2}{3}$$

$\therefore$ પ્રતિબિંબ $\left(\frac{2}{3} - 3d, \frac{2}{3} - 2d, \frac{2}{3} - d\right)$ છે. **જવાબ (A)**

24. $x + y + z = 1$ અને $2x + 3y - z + 4 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતો Y-અક્ષને સમાંતર સમતલ ....માંથી પણ પસાર થાય છે.

(A) (–3, 0, –1) (B) (3, 0, 1) (C) (–3, 0, 1) (D) (3, 0, –1)

ઉકેલ : ધારો કે $x + y + z - 1 = 0$ અને $2x + 3y - z + 4 = 0$ ની છેદરેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $x + y + z - 1 + \lambda(2x + 3y - z + 4) = 0$ છે.

તે Y-અક્ષને સમાંતર છે. એટલે કે તેનો અભિલંબ Y-અક્ષને લંબ છે.

$\therefore$ $(0)(1 + 2\lambda) + 1(1 + 3\lambda) + (0)(1 - \lambda) = 0$

$\lambda = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $3x + 3y + 3z - 3 - 2x - 3y + z - 4 = 0$ છે.

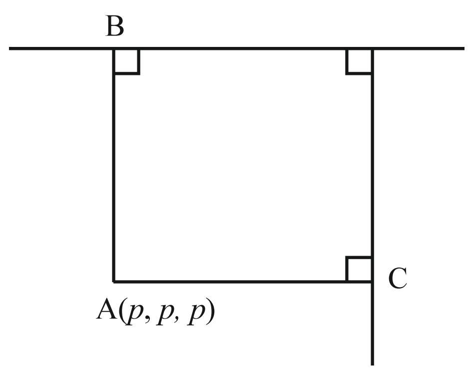
$\therefore$ $x + 4z - 7 = 0$

તે (3, 0, 1)માંથી પસાર થાય છે. **જવાબ (B)**

25. $p(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ સ્થાન સદિશ ધરાવતા બિંદુ Aમાંથી $\vec{r} = \vec{k} + \lambda(\hat{i} + \hat{j})$ અને $\vec{r} = -\vec{k} + \mu(\hat{i} - \hat{j})$ રેખાઓ પર લંબ $\overrightarrow{AB}$ તથા $\overrightarrow{AC}$ દોરવામાં આવ્યા છે. p નું મૂલ્ય ....

(A) –2 (B) –1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

ઉકેલ :



ધારો કે $B(\lambda\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k})$ અને $C(\mu\hat{i} - \mu\hat{j} - \hat{k})$

$\vec{AB} \perp (\hat{i} + \hat{j}) \Rightarrow \lambda = p$

$\vec{AC} \perp (\hat{i} - \hat{j}) \Rightarrow \mu = 0$

Bનો સ્થાન સદિશ $(p\hat{i} + p\hat{j} + \hat{k})$ છે. C નો સ્થાન સદિશ $(-\hat{k})$ છે.

p ની અનંત કિંમતો હોઈ શકે. **જવાબ (A), (B), (C), (D)**

26. $n \in N$ માટે $(a + b)^{2n-3}$ ના દ્વિપદી સહગુણકોનો મધ્યક 16 હોય તો n = ...

(A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 9

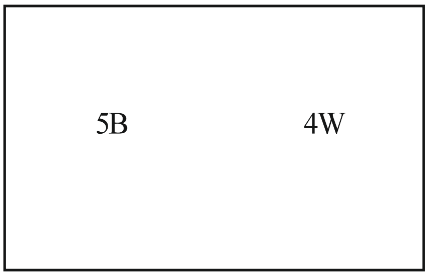
ઉકેલ : $$\frac{{}^{2n-3}C_0 + {}^{2n-3}C_1 + \ldots + {}^{2n-3}C_{2n-3}}{2n-2} = 16$$

$2^{2n-3} = 32(n-1) \Rightarrow n = 5$ (ચકાસતાં) **જવાબ (B)**

27. એક પેટીમાં 5 કાળા અને 4 સફેદ દડા છે. તેમાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી તેનો રંગ નોંધવામાં આવે છે અને પછી તેના વિરુદ્ધ રંગના બે વધારાના દડા સાથે પાછો મૂકવામાં આવે છે. હવે તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલો દડો કાળો હોવાની સંભાવના .... છે.

(A) $\frac{7}{11}$ (B) $\frac{5}{11}$ (C) $\frac{53}{99}$ (D) $\frac{48}{99}$

ઉકેલ :



ધારો કે B_1 : પ્રથમ પ્રયત્ને કાળો દડો મળે છે.

B_2 : પ્રથમ પ્રયત્ને સફેદ દડો મળે છે.

A : બીજા પ્રયત્ને કાળો દડો મળે છે.

$P(B_1) = \frac{5}{9}$ $P(B_2) = \frac{4}{9}$

$P(A \mid B_1) = \frac{5}{11}$ $\begin{pmatrix} B & W \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$P(A \mid B_2) = \frac{7}{11}$ $\begin{pmatrix} B & W \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{11} + \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{11} = \frac{53}{99}$ **જવાબ (C)**

28. $x + 3y + 7z = 0$

$-x + 4y + 7z = 0$

$(sin3\theta)x + (cos2\theta)y + 2z = 0$

સમીકરણ સંહતિને શૂન્યેતર ઉકેલ હોય તો $[0, \pi]$માં θની કિંમતોની સંખ્યા .... છે.

(A) એક (B) બે (C) ત્રણ (D) ત્રણથી વધુ

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 7 \\ sin3\theta & cos2\theta & 2 \end{vmatrix} = 0$ હોય તો શૂન્યેતર ઉકેલ મળે છે.

$\therefore \quad 1(8 - 7cos2\theta) - 3(-2 - 7sin3\theta) + 7(-cos2\theta - 4sin3\theta) = 0$

$\therefore \quad 8 - 7cos2\theta + 6 + 21sin3\theta - 7cos2\theta - 28sin3\theta = 0$

$\therefore \quad -7sin3\theta - 14cos2\theta + 14 = 0$

$\therefore \quad sin3\theta + 2cos2\theta - 2 = 0$

$\therefore \quad 3sin\theta - 4sin^3\theta + 2(1 - 2sin^2\theta) - 2 = 0$

$\therefore \quad 3sin\theta - 4sin^3\theta + 2 - 4sin^2\theta - 2 = 0$

$\therefore \quad -sin\theta\ (4sin^2\theta + 4sin\theta - 3) = 0$

$\therefore \quad -sin\theta\ (2sin\theta - 1)(2sin\theta + 3) = 0$

$\therefore \quad sin\theta = 0$ અથવા $sin\theta = \frac{1}{2}$. વળી $sin\theta \neq \frac{-3}{2}$

$\therefore \quad \theta = 0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **જવાબ (D)**

29. $cot\left(\sum_{n=1}^{19} cot^{-1}\left(1 + \sum_{p=1}^{n} 2p\right)\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{19}{20}$ (B) $\frac{20}{19}$ (C) $\frac{19}{21}$ (D) $\frac{21}{19}$

ઉકેલ : $cot\left(\sum_{n=1}^{19} cot^{-1}\left(1 + 2\frac{n(n+1)}{2}\right)\right)$

$= cot\left(\sum_{n=1}^{19} tan^{-1}\left(\frac{1}{1+(n+1)(n)}\right)\right)$

$= cot\left(\sum_{n=1}^{19} tan^{-1}\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}\right)$

$= cot\left(\sum_{n=1}^{19}\left(tan^{-1}(n+1) - tan^{-1}n\right)\right)$

$= cot\left(tan^{-1}20 - tan^{-1}1\right)$

$= cot\left(tan^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)\right) = \frac{21}{19}$ **જવાબ (D)**

30. $A \rightarrow (A \vee \sim B)$ નો નિષેધ

(A) નિત્ય મિથ્યા

(B) નિત્ય સત્ય

(C) $(A \vee \sim B) \rightarrow A$ને સમાન

(D) $A \rightarrow (A \wedge \sim B)$ને સમાન છે

ઉકેલ :

A	**B**	**~B**	**A ∨ ~B**	**A → (A ∨ ~B)**	**(A ∨ ~B) → A**	**A ∧ ~B**	**A → (A ∧ ~B)**
T	T	F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T
F	F	T	T	T	F	F	T

$$A \rightarrow (A \vee (\sim B)) = (\sim A) \vee (A \vee (\sim B))$$

$$= ((\sim A) \vee A) \vee (\sim B)$$

$$= t \vee (\sim B)$$

$$= t$$

$\therefore \quad \sim[A \rightarrow A \vee (\sim B)] = c$

જવાબ (A)

●