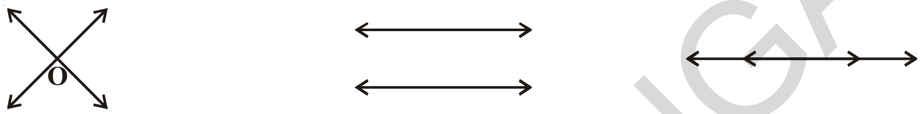
अध्याय

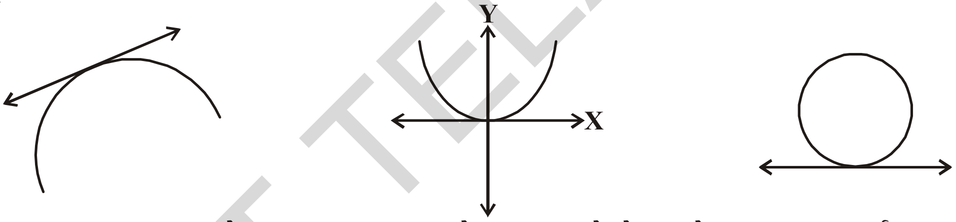
9 वृत्त की स्पर्श रेखाएँ और छेदन रेखाएँ
(Tangents and Secants to a Circle)

9.1 प्रस्तावना

हमने देखा की किसी भी तल पर डाली गयी दो रेखाएँ या तो प्रतिच्छेदित होती है या प्रतिच्छेदित नहीं होती हैं। कहीं - कहीं पर वे एक दूसरे के ऊपर (coincide) होती है।



उसी प्रकार यदि किसी तल पर एक वक्र तथा एक सरल रेखा खींची जाय तो क्या होता है? इनसे किन आकारों को खींचना संभव है। जैसा कि बहुपद व्यंजक में बताया गया है एक वक्र परवलय या वृत्ताकार हो सकता है। एक स्थिर बिन्दु में समान दूरी पर डाले गये बिन्दुओं के समूह को वृत्त कहते हैं।



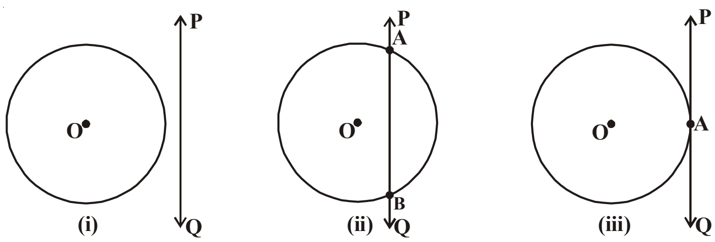
एक वृत्ताकार वस्तु को समतल पर लुढकते हुए आपने देखा होगा। उदाहरणार्थ :- सडक पर चलती हुई साइकिल के पहिए, रेल की पटरी पर चलते हुए रेल के पहिए आदि जहाँ पर एक वृत्त तथा सरल रेखा को देखते हैं।

चलिए अब हम देखेंगे कि किसी तल पर एक वृत्त तथा रेखा डालने पर क्या होता है?

9.1.1 एक रेखा तथा वृत्त (A Line and a Circle)

आपको एक कागज पर एक वृत्त तथा एक रेखा डालकर दी गई है। सलमान का तर्क है कि इसको दर्शाने की केवल तीन संभावनाएँ है।

वृत्त जिसका केन्द्र 'O' तथा रेखा PQ, को देखिए, नीचे निम्न चित्र में तीन संभाषनाएँ दर्शायी गयी है।



चित्र (i) में वृत्त तथा रेखा PQ का कोई उभयनिष्ट बिन्दु नहीं है। इसमें रेखा PQ वृत्त को प्रतीच्छेदित नहीं करती है।

चित्र (ii) में रेखा PQ वृत्त को बिन्दु A तथा B. पर प्रतिच्छेदित करती है। यह वृत्त पर ज्या (chord) AB का निर्माण करती है। इस स्थिति में रेखा PQ को वृत्त की ''छेदन रेखा'' कहते हैं।

चित्र (iii) में वृत्त तथा रेखा PQ का केवल एक उभयनिष्ठ बिन्दु A है। इस रेखा को वृत्त की ''स्पर्श रेखा''(Tangent) कहते हैं।

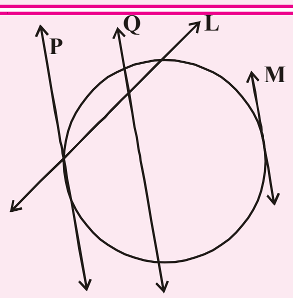
वृत्त तथा रेखा को तल पर डालने की कोई और विधि नहीं है। अब हम वृत्त की स्पर्श रेखा के अस्तित्व, लक्षण तथा रचना के बारे में अध्ययन करेंगे।

क्या आप जानते हैं?

शब्द 'Tangent' (स्पर्शरेखा) का लाटिन शब्द 'tangere' से आया है। जिसका अर्थ होता है स्पर्श करना और जिसे सबसे पहले 'डेनमार्क' के गणितज्ञ थॉमस फिनेकी (Thomas Fineke) ने 1583 में बताया था।

यह कीजिए।

i. किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। उस पर विभिन्न बिन्दुओं से चार स्पर्श रेखाएँ डालिए। इस वृत्त पर आप कितनी और स्पर्श रेखाएँ खींच सकते है।
ii. वृत्त से कुछ दूरी पर स्थित बिन्दु से आप कितनी स्पर्श रेखाएँ खींच सकते है।
iii. दिए गए चित्र में कौनसी स्पर्श रेखाएँ है?

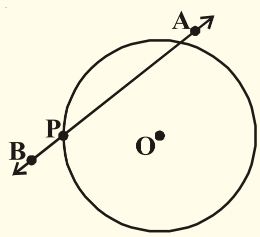


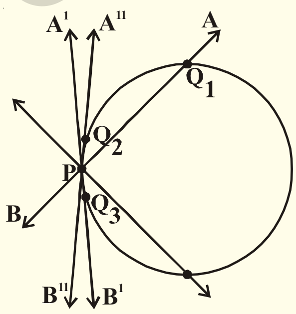
9.2 वृत्त की स्पर्श रेखाएँ (Tangent)

हमने देखा कि वृत्त पर किसी भी बिन्दु से स्पर्श रेखा खींच सकते है। क्या आप बता सकते हैं कि एक वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींच सकते है? इस क्रिया-कलाप द्वारा इस तथ्य को समझने का प्रयत्न करेंगे।

क्रिया-कलाप

एक वृत्ताकार तार के साथ एक सीधे तार AB को जोडिए जिससे यह बिन्दु P पर दोलन कर सके। वृत्ताकार तार वृत्त का तथा सीधा तार AB सरल रेखा का निरुपण करते हैं, जो बिन्दु P पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते हैं।





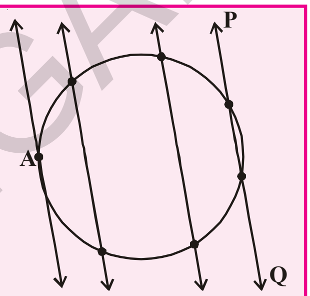
चित्र में दर्शाए अनुसार इस पूर्ण विधान को टेबल पर रखकर तार AB को बिन्दु P के चारों ओर घुमाइए जिससे तार की विभिन्न स्थितियों को प्राप्त कर सके। वृत्त सीधे तार को बिन्दु P पर तथा अन्य बिन्दु Q_1, Q_2, Q_3 पर प्रतिच्छेदित करता है। जब रेखा वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती हैं तो उनमें से एक बिन्दु P अवश्य होगा।

AB के A^1B^1 की दिशा देखिए। वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा हैं। रेखा AB की सभी स्थितियों में बिन्दु P वृत्त को अन्य बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती है। बिन्दु P तथा और एक बिन्दु पर वृत्त को प्रतिच्छेदित करता है। बिन्दु P पर A^1B^1 वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।

हम देख सकते हैं कि बिन्दु P पर केवल एक ही स्पर्श रेखा डाली गयी है।

तार AB को दोनों दिशाओं में घुमाने पर वह वृत्ताकार तार को दो बिन्दुओं पर काटता है। ये सभी छेदन रेखाएँ कहलाती है। स्पर्श रेखा छेदन रेखा की वह विशेष स्थिति है जहाँ उसके दोनों कटान बिन्दु एक ही स्थान पर स्थित होते हैं।

यह कीजिए।



चित्र में दर्शाए अनुसार एक कागज़ पर वृत्त डालकर उस पर PQ एक छेदन रेखा खींचिए। छेदन रेखा के दोनों ओर कुछ समानान्तर रेखाएँ खींचिए।

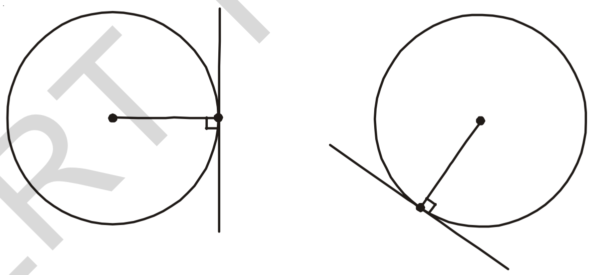
जैसे-जैसे ज्या केन्द्र बिन्दु के समीप आएगी तब उसकी लम्बाई क्या होगी?

सबसे बडी ज्या (chord) कौनसी होगी?

किसी भी वृत्त पर एक दूसरे के समानान्तर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींच सकते हैं?

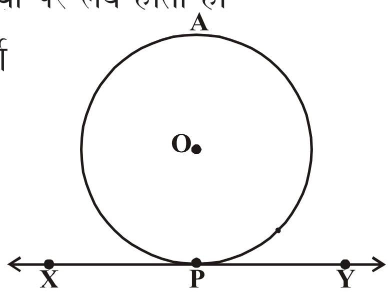
वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को स्पर्श बिन्दु तथा स्पर्श रेखा उसी बिन्दु पर वृत्त को स्पर्श करती है।

दिए गए चित्रों में वृत्त की स्पर्श रेखा का निरीक्षण कीजिए।



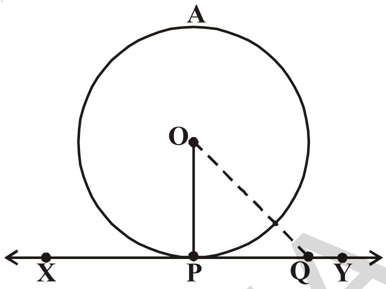
किसी भी एक बिन्दु से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ डाली जा सकती है? एक वृत्त पर कुल कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं। स्पर्श बिन्दु को देखिए। उस बिन्दु से एक त्रिज्या खींचीए। आपने स्पर्श बिन्दु से खींचे गए त्रिज्या तथा स्पर्श रेखा के बीच बनने वाले कोण में कोई विशेषता पाई है? ये त्रिज्यायें स्पर्श रेखा पर लंब दिखाई देती है। अब हम इसे सिद्ध करने का प्रयत्न करेंगे।

प्रमेय-9.1 : एक वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से गुजरने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।



दिया गया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा स्पर्श रेखा XY स्पर्श बिन्दु P पर वृत्त को स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है : OP लंब है XY पर (अर्थात् $OP \perp XY$)



उपपत्ति : बिन्दु Q वृत्त के बाहर स्थित होगा (क्यों?) (नोट किजिए यदि बिन्दु Q वृत्त के अन्दर स्थित होगा तो XY एक छेदन रेखा बनेगी, स्पर्श रेखा नहीं।)

अतः OQ त्रिज्या OP से बडा होना चाहिए (क्यों?) अर्थात् $OQ > OP$.

यह XY पर स्थित सभी बिन्दुओं को लागू होगा। अतः यह सिद्ध होता है कि OP उन सभी रेखाओं से छोटी होगी जो XY पर डाले गये दूसरे बिन्दुओं से खींची जाती है। क्योंकि दिए गए बिंदु से डाली गयी रेखाओं में लंब सबसे छोटी होती है। (सातवीं कक्षा की क्रियाकलाप 5.3 के अनुसार)

अतः हमारी कल्पना OP, XY पर लंब नहीं है यह असत्य सिद्ध होती है। अर्थात् OP लंब है XY पर यह सिद्ध होता है। अर्थात् $\overline{OP} \perp \overline{XY}$

नोट : स्पर्श बिन्दु से डाली गयी त्रिज्या को हम स्पर्श रेखा का लंब कह सकते हैं।

प्रयत्न कीजिए।

ऊपरी प्रमेय का विलोम आप कैसे सिद्ध करोगे?

"एक वृत्त की त्रिज्या के अंत बिन्दु से उस पर खींची गयी लंब रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती हैं।

उपरोक्त प्रमेय से हम कुछ और निष्कर्ष प्राप्त करेंगे।

(i) क्योंकि बिन्दु P से केवल एक ही लंब OP डाला जा सकता है इससे यह पता चलता है कि वृत्त परिधि पर डाले गए बिन्दु से केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

(ii) क्योंकि बिन्दु P से XY पर एक ही लंब डाला जा सकता है इससे यह पता चलता है कि वृत्त के स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर डाला गया लंब केन्द्र से गुजरता है।

इनके बारे में विचार कीजिए और अपने मित्रों तथा अध्यापक के साथ इसकी चर्चा कीजिए।

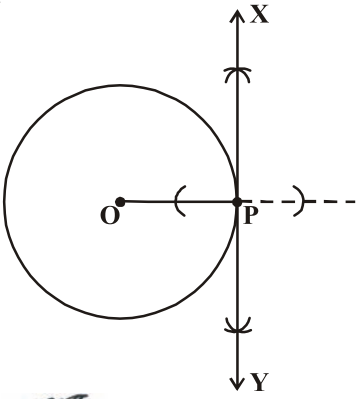
9.2.1 वृत्त के स्पर्श रेखा की रचना (Construction of Tangent to a Circle)

हम वृत्त के स्पर्श बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना कैसे करेंगे? हम इसी तथ्य को आधार मानेंगे कि स्पर्श बिन्दु पर डाली गयी स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लंब होता है। स्पर्श रेखा को खींचने के लिए त्रिज्या के अंतिम बिन्दु पर लंब डालना होगा। त्रिज्या को खींचने के लिए वृत्त के केन्द्र बिन्दु की जानकारी आवश्यक है। चलिए अब हम इसकी रचना क्रम को देखेंगे।

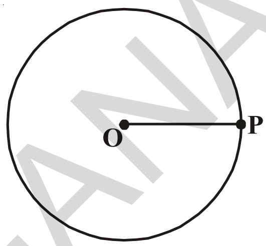
रचना : उस वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए जिसका केन्द्र बिन्दु ज्ञात है।

हमें एक वृत्त प्राप्त है जिसका केन्द्र 'O' है तथा उसकी परिधि पर बिन्दु P डाला गया है। अब हमें बिन्दु P से स्पर्श रेखा खींचनी है। अब हम स्पर्श रेखा के रचना क्रम को देखेंगे।

रचना क्रम :-



1. केन्द्र 'O' से एक वृत्त खींचिए उस पर एक बिन्दु 'P' अंकित कीजिए। OP को मिलाइए।



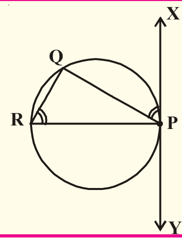
2. बिन्दु P से एक लंब खींचिए तथा उसको XY नाम दीजिए।
3. XY दिए गए वृत्त की इच्छित स्पर्श रेखा होगी जो बिन्दु P से गुजरती है।

क्या बिन्दु P से दूसरी स्पर्श रेखा खींची जा सकती है? कारण बताइए।

प्रयत्न कीजिए।

जब वृत्त का केन्द्र बिन्दु ज्ञात न हो तो आप उसकी स्पर्श रेखा कैसे खींचेंगे?

संकेत (Hint) : दो समान कोण $\angle QPX$ तथा $\angle PRQ$. खींचिए। उसकी रचना को समझाइए।



9.2.2 स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात करना (Finding Length of the Tangent)

क्या हम दिए गए बिन्दु से स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण : यदि एक वृत्त की त्रिज्या = 6 से.मी. तथा बिन्दु P से दूरी OP = 10 से.मी. है, तथा उसका केन्द्र बिन्दु O हो तो उस पर डाले गये स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

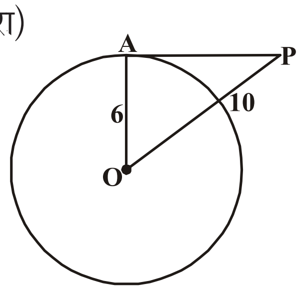
हल : स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लंब होती है। (प्रमेय 9.1)

यहाँ PA स्पर्श रेखाखण्ड है तथा OA वृत्त की त्रिज्या है।

$\therefore$ $OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90°$

अब ΔOAP में, $OP^2 = OA^2 + PA^2$ (पायथागोरस प्रमेय द्वारा)

$$10^2 = 6^2 + PA^2$$
$$100 = 36 + PA^2$$
$$PA^2 = 100 - 36$$
$$= 64$$
$$\therefore \; PA = \sqrt{64} = 8 \text{ से.मी.}$$



अभ्यास - 9.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) एक स्पर्श रेखा वृत्त को .... बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है।
   (ii) एक रेखा जो वृत्त को दो विभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है उसे वृत्त का .... कहते हैं।
   (iii) वृत्त पर सरलता से डाले जाने वाली स्पर्श रेखाएँ .... होती है ।
   (iv) किसी भी वृत्त पर अधिक से अधिक .... समानान्तर स्पर्श रेखाएँ डाल सकते हैं।
   (v) वृत्त तथा स्पर्श रेखा का छेदन बिन्दु .... कहलाता है।
   (vi) एक वृत्त पर .... स्पर्श रेखाएँ डाल सकते हैं।
2. स्पर्श रेखा PQ , 5 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त को, बिन्दु P पर स्पर्श करती है। वह रेखा O से गुजरने वाली रेखा पर Q पर मिलती है जिससे OQ = 12 से.मी. PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
3. वृत्त पर दो समानान्तर रेखाएँ इस प्रकार डालिए जिसमें से एक स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदन रेखा हो।
4. केन्द्र से 15 से.मी. दूरी पर स्थित बिन्दु पर डाली गयी स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिस वृत्त की त्रिज्या 9 से.मी. है।
5. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के व्यास के अंतिम बिन्दुओं पर डाली गयी स्पर्श रेखायें समानान्तर होती है।

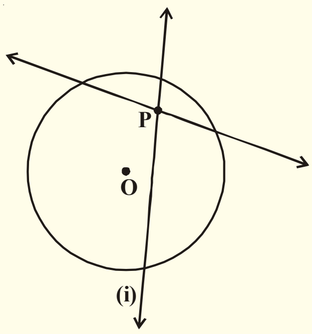
9.3 किसी बिन्दु से वृत्त पर डाली गयी स्पर्श रेखाओं की संख्या (Number of tangent to a circle from any point)

इस क्रिया कलाप द्वारा हम एक वृत्त पर डाले गये स्पर्श रेखाओं की जानकारी प्राप्त करेंगे।

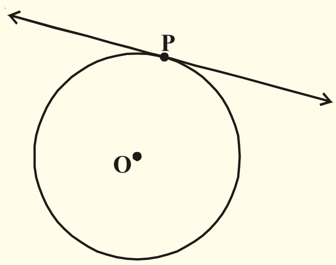
क्रियाकलाप

(i) एक कागज पर वृत्त डालिए। एक बिन्दु P को वृत्त के अन्दर डालिए। क्या हम इस बिन्दु से कोई स्पर्श रेखा डाल सकते है? आप देखेंगे कि इस बिन्दु से गुजरने वाली सभी रेखाएँ वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है। इन्हें क्या कहते है।

(ii) अब हम एक बिन्दु वृत्त पर डालेंगे, आपने देखा कि इस बिन्दु से केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। (साथ वाले चित्र को देखिए।)



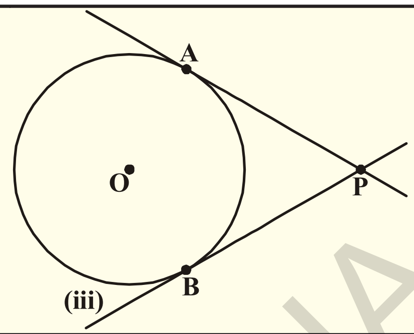
(i)



(ii)

(iii) अब हम एक बिन्दु वृत्त के बाहर डालेंगे उस बिन्दु से स्पर्श रेखाएँ खींचने का प्रयत्न करेंगे। आपने क्या देखा? इस बिन्दु में हमें दो स्पर्श रेखाएँ प्राप्त होगी। (चित्र में देखिए)

अब हमें यह सार प्राप्त होता है।



स्थिति (i) : वृत्त के भीतरी बिन्दु से कोई भी स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती है।

स्थिति (ii) : वृत्त पर डाले गये बिन्दु से केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

स्थिति (iii) : वृत्त के बाहरी बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB डाली गयी है इस स्थिति में बिन्दु A तथा B पर वृत्त को स्पर्श करती है।

इस रेखाखण्ड की लम्बाई बाह्य बिन्दु P से स्पर्श बिन्दु की दूरी होगी। जिसे हम स्पर्श रेखा की लम्बाई कहेंगे।

ध्यान दीजिए ऊपर के चित्र (iii) में PA तथा PB स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बिन्दु P से वृत्त के स्पर्श बिन्दु तक की दूरी है। PA तथा PB के बीच क्या संबंध होगा?

प्रमेय-9.2 : बाह्य बिन्दु से वृत्त पर डाले गये स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है।

दिया गया : केन्द्र O से एक वृत्त डाला गया है P वृत्त के बाहर स्थित एक बिन्दु है। तथा बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB खींचे गये है। (चित्र में देखिए)

सिद्ध करना है : PA = PB

उपपत्ति : OA तथा OB तथा OP को मिलाइए।

$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$ (त्रिज्या तथा स्पर्श रेखा के मध्य बनने वाला कोण प्रमेय 9.1 सिद्ध)

दो समकोण त्रिभुजों में

ΔOAP तथा ΔOBP में

OA = OB (वृत्त की त्रिज्याये)

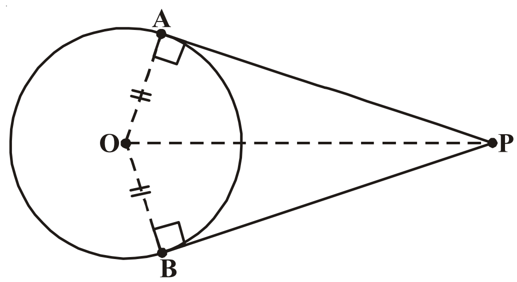
OP = OP (उभयनिष्ठ)

इसलिए R.H.S. स्वयं तथ्य द्वारा

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$

इससे PA = PB(CPCT) प्राप्त होता है।

अतः सिद्ध किया गया।



प्रयत्न कीजिए।

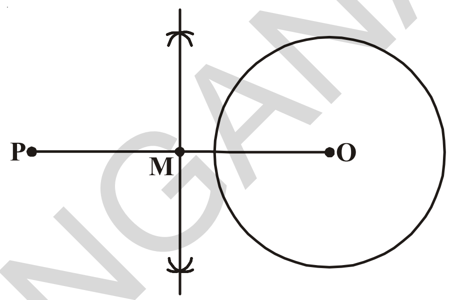
पायथागोरस प्रमेय द्वारा उपरोक्त प्रमेय की उपपत्ति लिखिए।

9.3.1. वृत्त के बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखाओं की रचना (Construction of Tangents to a Circle from an external Point) :-

आपने देखा कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से दो स्पर्श रेखाएँ खींच सकते हैं। अब हम इसे डालने की विधि देखेंगे।

रचना : वृत्त के बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखाओं की रचना

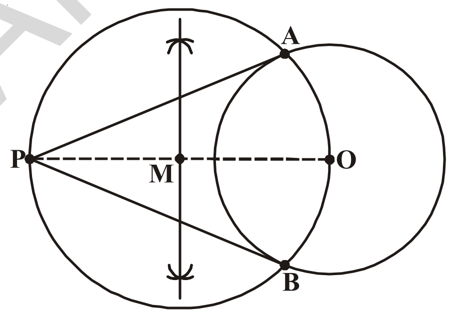
दिया गया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र 'O' है तथा बाह्य बिन्दु P है हमें बिन्दु P से दो स्पर्श रेखोंएँ खींचना है।



रचना क्रम:

चरण(i) : OP को जोडकर उसका समद्विभाजक खींचिए। M को PO का मध्य बिन्दु मानिए।

चरण(ii) : PM या OM त्रिज्या से M को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त को दो बिन्दु A तथा B पर पहले वृत्त पर प्रतिच्छेदित होने दीजिए।



चरण (iii) : PA तथा PB को मिलाइए। हमें PA तथा PB दो इच्छित स्पर्श रेखाएँ प्राप्त होंगे।

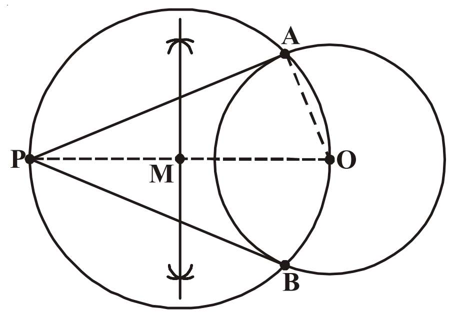
उपपत्ति: अब हम इस रचना के औचित्य (Justify) को प्राप्त करेंगे।

OA को मिलाइए। $\angle PAO$ अर्धवृत्त का कोण होगा।

$\therefore \angle PAO = 90°$.

क्या हम कह सकते है $PA \perp OA$?

क्योंकि, OA दिए गए वृत्त की त्रिज्या है, PA वृत्त की स्पर्श रेखा होनी चाहिए। (प्रमेय 9.1 के विलोम द्वारा)



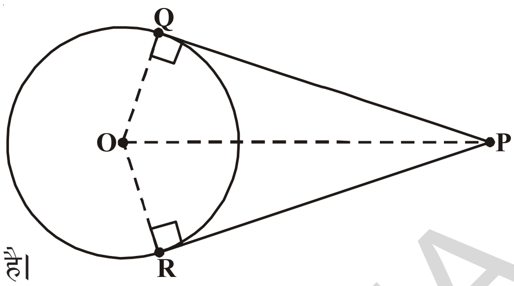
उसी प्रकार, PB भी वृत्त एक स्पर्श रेखा होगी। अतः यह सिद्ध होता है।

स्पर्श रेखा तथा चापकर्ण के बारे में कुछ और महत्वपूर्ण तथ्यों को देखेंगे।

कथन-1 : वृत्त का केन्द्र उस कोण के समद्विभाजक पर स्थित होगा जो स्पर्श रेखाओं के बीच बनता है। क्या आप बता सकते हैं कि हम इसे कैसे सिद्ध कर सकते हैं।

उपपत्ति : मान लिजिए PQ तथा PR दो स्पर्श रेखाएँ बिन्दु P से डाली गयी हैं। OQ तथा OR को मिलाइए।

ΔOQP तथा ΔORP सर्वसमान है। क्योंकि हम जानते हैं कि



$\angle OQP = \angle ORP = 90^o$ (प्रमेय 9.1)

$OQ = OR$ (ज्यायें)

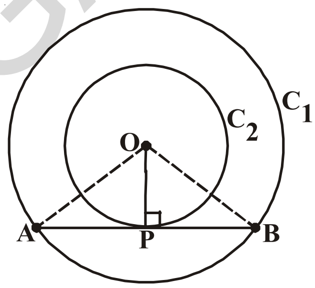
$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

अर्थात् $\angle OPQ = \angle OPR$ (CPCT)

इसलिए OP, कोण $\angle QPR$ का समद्विभाजक है।

अतः वृत्त का केन्द्र कोण के समद्विभाजक पर स्थित होता है जो दो स्पर्श रेखाओं द्वारा बनता है।

कथन-2 : दो समकेन्द्रित वृत्तों को इस प्रकार डाला गया है जिसमें बडे वृत्त की ज्या छोटे वृत्त के स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजक होती हैं।



उपपत्तिः हमारे पास दो समकेन्द्रिक वृत्त है जिसके केन्द्र O है तथा वे C_1, C_2 दिये गये हैं। बडे वृत्त C_1 की ज्या AB छोटे वृत्त C_2 को बिन्दु P पर स्पर्श करता है। (चित्र में देखिए।) हमें AB = BP सिद्ध करना है। OP को मिलाइए। तब AB वृत्त C_2 की स्पर्श रेखा तथा OP त्रिज्या बनेगी।
अतः प्रमेय 9.1 से

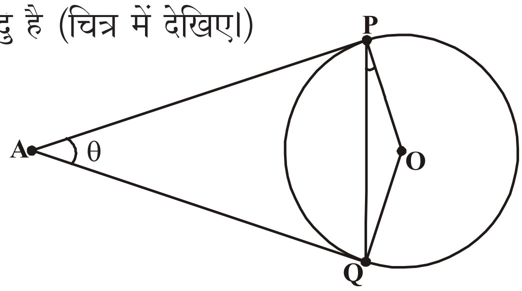
$OP \perp AB$

अब ΔOAP तथा ΔOBP सर्वसमान होंगे (क्यों?) इसका अर्थ हुआ AP = PB. अतः OP ज्या AB का समद्विभाजक होगा। क्योंकि केन्द्र से डाला गया लंब ज्या पर लंब होता है जो उसे समद्विभाजित करता है।

कथन-3 : यदि एक वृत्त जिसका केन्द्र O है उस पर बाह्य बिन्दु A से दो स्पर्श रेखायें डाली गयी हैं तब $\angle QAP = 2\angle QPO = 2\angle OQP$

क्या आप देख सकते हैं?

उपपत्ति : हमें केन्द्र O वाला वृत्त दिया गया है। उसका बाह्य बिन्दु A है जहाँ से दो स्पर्श रेखाएँ AP तथा AQ डाली गयी हैं जहाँ बिन्दु P तथा Q स्पर्श बिन्दु है (चित्र में देखिए।)



हमें सिद्ध करना है

$\angle PAQ = 2\angle QOP$

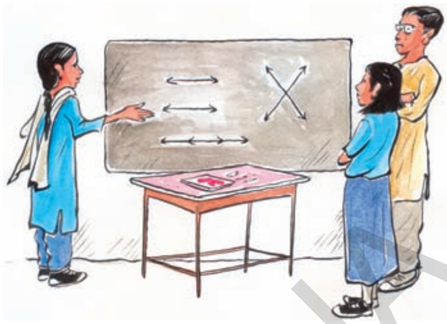
मान लीजिए $\angle QAP = \theta$

अब, प्रमेय 9.2 से

$AP = AQ$, इसलिए ΔAPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

इसलिए $\angle APQ + \angle AQP + \angle QAP = 180°$ (तीन कोणों का योग)

$$\angle APQ = \angle PQA = \frac{1}{2}(180° - \theta)$$



$$= 90° - \frac{1}{2}\theta$$

पुनः प्रमेय 9.1 से

$$\angle OPA = 90°$$

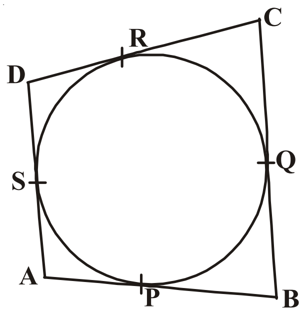
इसलिए, $\angle OPQ = \angle OPA - \angle APQ$

$$= 90° - \left[90 - \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

इससे यह $\angle OPQ = \frac{1}{2}\angle PAQ$.

\ ÐPAQ = 2ÐOPQ. उसी प्रकार PAQ = 2ÐOQP

कथन-4 : यदि एक वृत्त, चतुर्भुज ABCD में परिगत वृत्त डाला गया हो तो सिद्ध कीजिए कि AB+CD = AD + BC



क्या आप बता सकते हैं कि इसके आगे कैसे हल किया जा सकता है? AB, CD, BC, DA सभी वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

वृत्त को चतुर्भुज की भुजाओं को बिन्दु P, Q, R, S, स्पर्श करने के लिए वृत्त को चतुर्भुज के अन्दर स्थित होना आवश्यक है।

अब इसे आगे कैसे हल करेंगे?

उपपत्ति : एक वृत्त, चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA को क्रमशः बिन्दु P, Q, R तथा S पर स्पर्श करता है (चित्र में देखिए) अर्थात् $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ और $\overline{DA}$ स्पर्श रेखाएँ है।

प्रमेय 9.2 से बाह्य बिन्दु से वृत्त पर डाले गये दो स्पर्श रेखाएँ समान होती है।

$AP = AS$

$BP = BQ$

$DR = DS$

तथा $CR = CQ$ इनको जोडने पर

$$AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ$$

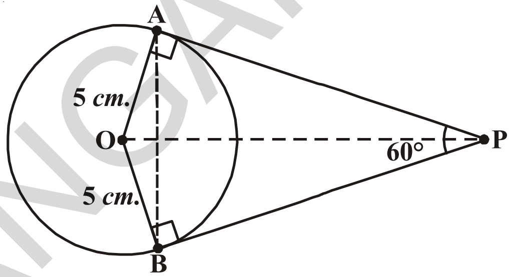
या $(AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)$

या $AB + CD = BC + DA$.

उदाहरण-1. 5 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का एक युग्म खींचिए जो एक दूसरे के साथ 60° का कोण बनाते है।

हल : एक वृत्त तथा उस दो स्पर्श रेखाएँ खींचने के लिए हमें एक विधि का निरीक्षण करना चाहिए। यहाँ हमें केवल वृत्त की त्रिज्या तथा स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण दिया गया है। हमें स्पर्श रेखाओं की दूरी ज्ञात नहीं है। हमें स्पर्श रेखाओं की लम्बाई भी नहीं दी गयी है। हमें केवल उनके मध्य का कोण दिया गया है। इसकी सहायता से हमें वृत्त के बाह्य बिन्दु की दूरी को ज्ञात करना है। जहाँ से हमें स्पर्श रेखाओँ को खींचना है।

इसका आरम्भ हमें वृत्त के केन्द्र 'O' तथा त्रिज्या 5 से.मी. से करना है। मान लिजिए PA तथा PB, बिन्दु 'P' से दो स्पर्श रेखाएँ डाली गयी हैं। उनके बीच 60^o का कोण बनाया गया है। इसमें $\angle APB = 60^o$, OP को मिलाइए। जैसा कि हम जानते है



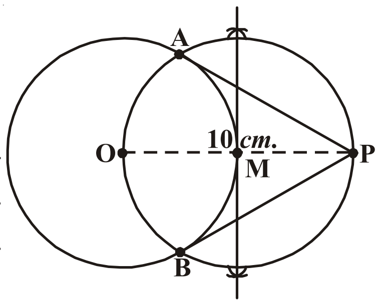
रेखा OP कोण $\angle APB$ का समद्विभाजक होता है।

$$\angle OAP = \angle OPB = \frac{60^o}{2} = 30^o \;(\because \Delta OAP \cong \Delta OBP)$$

अब ΔOAP में

$$\sin 30^o \; \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{OA}{OP}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{OP}$$ (त्रिकोणमीतिय अनुपातों से) OP = 10 से.मी.



अब हम 5 से.मी. त्रिज्या से केन्द्र 'O' पर एक वृत्त डालेंगे फिर 10 से.मी. दूरी पर एक बिन्दु P डालेंगे OP को मिलाकर रचना पूर्ण कीजिए जैसा 9.2. में दिया गया है। अतः PA तथा PB वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ होंगी।

आप त्रिकोणमीति के अनुपातों के बिना भी इसकी रचना की जा सकती है।

प्रयत्न कीजिए।

दो त्रिज्याओं का युग्म इस प्रकार खींचिए जिसमें OA तथा OB के मध्य कोण $\angle BOA = 120^o$, $\angle BOA$ का समद्विभाजक खींचिए। A तथा B पर OA तथा OB पर लम्ब डालिए। ये रेखाएँ $\angle BOA$ के समद्विभाजक से बाह्य बिन्दु पर स्पर्श करती हैं तथा लंब उसकी ऐच्छित स्पर्श रेखाएँ होंगी। इसकी रचना कर औचित्य प्राप्त कीजिए।

अभ्यास - 9.2

1. सही उत्तर चुनकर प्रत्येक की सत्यता बताइए।

(i) वृत्त की स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिन्दु पर डाले गये त्रिज्या के मध्य बनने वाला कोण

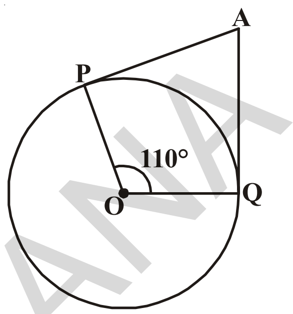
(अ) 60° (आ) 30° (इ) 45° (ई) 90°

(ii) बिन्दु Q से वृत्त के स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 से.मी. तथा केन्द्र से Q की दूरी 25 से.मी. हो तो वृत्त की त्रिज्या होगी।

(अ) 7 से.मी. (आ) 12 से.मी. (इ) 15 से.मी. (ई) 24.5 से.मी.

(iii) यदि एक वृत्त (O) पर दो स्पर्श रेखाएँ AP तथा AQ है तथा $\angle QOP = 110°$, हो तो $\angle QOP =$ ....

(अ) 60° (आ) 70° (इ) 80° (ई) 90°



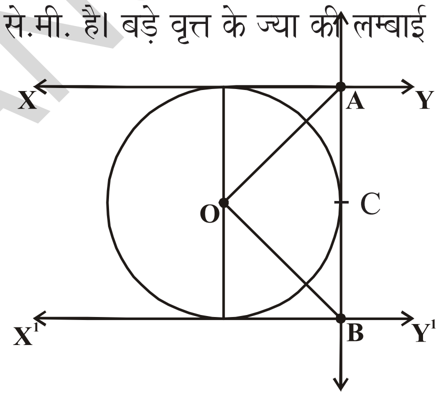
(iv) यदि बिन्दु P से वृत्त (O) पर दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB डाली गयी है दोनों के मध्य कोण 80° का होतो $\angle POA =$

(अ) 50° (आ) 60° (इ) 70° (ई) 80°

(v) दिये गये चित्र में XY तथा X^1Y^1 दो समानान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं। स्पर्श बिन्दु C पर और एक स्पर्श रेखा AB डाली गयी है जो XY को A पर X^1Y^1 को B पर प्रतिच्छेदित करती है तो $\angle BOA =$

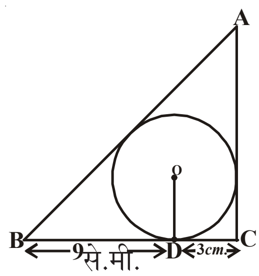
(अ) 80° (आ) 100° (इ) 90° (ई) 60°

2. दो समकेन्द्रीय वृत्त की त्रिज्यायें क्रमशः 5 से.मी. तथा 3 से.मी. है। बड़े वृत्त के ज्या की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करते हुए गुजरती है।



3. यदि वृत्त में समानान्तर चतुर्भुज बनाया जाय तो सिद्ध कीजिए कि वह सम चतुर्भुज रहता है।

4. 3 से.मी. त्रिज्या वाला एक अंतःवृत्त त्रिभुज ΔABC में इस प्रकार डाला गया है कि बिन्दु D भुजा BC को BD तथा DC में विभाजित करता है जिनकी लम्बाई क्रमशः 9 से.मी. तथा 3 से.मी. है। (संगत चित्र में देखिए।) भुजा AB तथा AC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

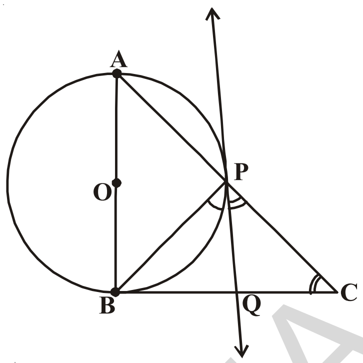


5. 6 से.मी. त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए, केन्द्र से 10 से.मी. दूरी पर डाले गये बिन्दु से उस पर दो स्पर्श रेखाएँ डालकर उनकी लम्बाई ज्ञात कर उसकी पायथागोरस प्रमेय द्वारा जाँच कीजिए।

6. 4 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त पर एक स्पर्श रेखा खींचिए जो दूसरे समकेन्द्रीय वृत्त जिसकी त्रिज्या 6 से.मी. है कि स्पर्श करती है उसकी लम्बाई ज्ञात कीजिए तथा सही मापदण्डों से उसकी जाँच कीजिए।

7. एक चूडी की सहायता से एक वृत्त खींचकर उसका एक बाह्य बिन्दु डालिए उस पर एक जोडी स्पर्श रेखा डालिए उनकी लम्बाई मापिए। आपका निष्कर्ष लिखिये।

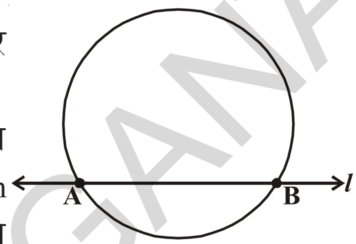
8. एक समकोण त्रिभुज ABC में एक वृत्त जिसका व्यास AB खींचा गया है जो कर्ण AC को P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P बिन्दु पर वृत्त की स्पर्श रेखा भुजा BC को समद्विभाजित करती है।



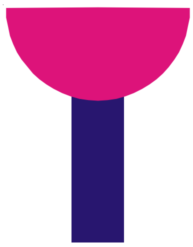
9. O केन्द्र से एक वृत्त खींचिये, बाह्य बिन्दु R से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं बताइए?
(संकेत :- वृत्त के केन्द्र से बिन्दुओं की दूरी समान है।)

9.4 छेदन रेखा द्वारा बनने वाली वृत्त की अवधाएँ

हमने एक वृत्त तथा रेखा के बारे में अध्ययन किया है। यदि एक रेखा वृत्त को केवल एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है तो उसे स्पर्श रेखा कहते हैं और यदि रेखा वृत्त को दो विभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है तो दो बिंदुओं के मध्य रेखा को ज्या कहते हैं।

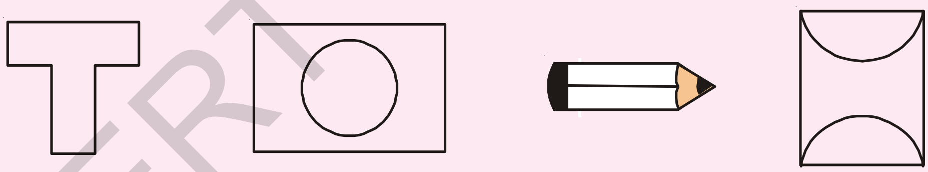


शंकर ने गुलाबी तथा नीले कागज को चिपका कर एक आकृति का निर्माण किया। उनमें से एक है वॉशबेसीन (सैलाबची) (wash basin) इस आकृति को बनाने के लिए उसे कितने कागज की आवश्यकता होगी। हमें इस आकृति में दो भाग दिखाई देते है उनमें से एक आयताकार है दूसरा कौनसा होगा? उसे वृत्त की अवधा कहते है। आयत के क्षेत्रफल को ज्ञात करना हम जानते हैं। वृत्त की अवधा (segment) का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे? अवधा का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे? अगली चर्चा में अवधा के क्षेत्रफल को ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे-



यह कीजिए।

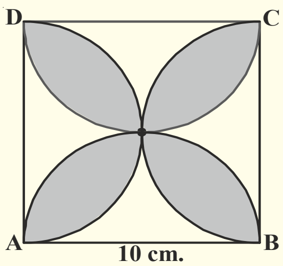
शंकर ने वॉशबेसीन के साथ इन आकृतियों को भी बनाया।



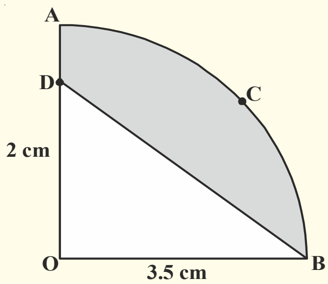
इन्हे किस प्रकार विभाजित करें जिससे उनके क्षेत्रफल सरलता से प्राप्त हो?

कुछ और आकृतियों को बनाकर उनको अलग-अलग भागों में विभाजित करने का प्रयत्न कीजिए।

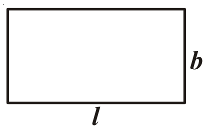
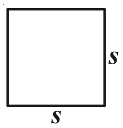
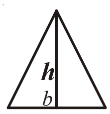
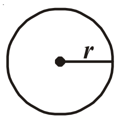
प्रयत्न कीजिए।



प्रस्तुत चित्रों में दिखने वालों सभी आकारों के नाम बताइए।

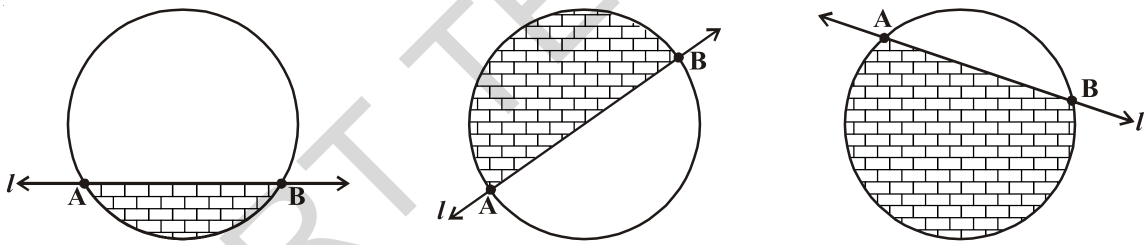


निम्न तालिका में गणितीय आकृतियों के क्षेत्रफल का स्मरण करेंगे।

क्र.सं	आकृति	परिमाप	क्षेत्रफल
1.		लम्बाई = l चौडाई = b	$A = lb$
2.		भुजा = s	$A = s^2$
3.		ऊँचाई = h आधार = b,	$A = \frac{1}{2} bh$
4.		त्रिज्या = r	$A = \pi r^2$

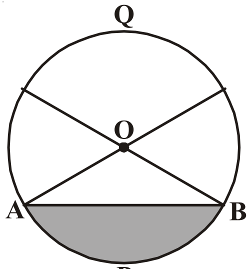
9.4.1. वृत्त की अवधाओं का क्षेत्रफल ज्ञात करना (Finding the Area of Segment of a Circle) :–

अवधाओं (segment) के क्षेत्रफल के लिए श्वेता ने छेदन रेखा (secants) द्वारा उनका निर्माण किया।



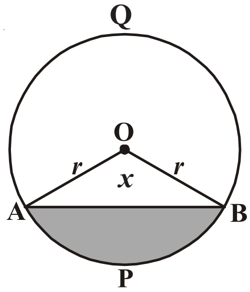
(i) (ii) (iii)

आप जानते है **"वृत्त की ज्या तथा चाप के मध्य भाग को अवधा कहते है।"** आप चित्र (i) में ( ) अंकित भाग को देखिए वह लघु अवधा है चित्र (ii) में अर्धवृत्त तथा चित्र (iii) में गुरू अवधा को दर्शाता है।



अवधा के क्षेत्रफल को कैसे ज्ञात करोगे? निम्न क्रिया कलाप कीजिए।

एक वृत्ताकार कागज लेकर उसकी एक ज्या पर मोडिए जो अर्धवृत्त से कम हो। जैसे कि चित्र में दर्शाया गया है। इस छोटे भाग को क्या कहेंगे? यह एक **"लघु अवधा"** (APB) होगा।



पिछली कक्षाओं में आपने अवधा तथा वृत्त खण्ड के बारे में अध्ययन किया था। रंगीन भाग (लघु अवधा) तथा कुछ (रंगहीन) बेरंगीन भाग को "वृत्त खण्ड" कहते है जो एक त्रिभुज और अवधा का सम्मिलन है। मान लीजिए OAPB उस वृत्त का वृत्तखण्ड है जिसका केन्द्र (O) तथा त्रिज्या r है, जैसे कि चित्र में दर्शाया गया है। माल लीजिए $\angle AOB$ का माप 'x' है।

आप जानते हैं कि वृत्त के केन्द्र का कोण $360°$ हो तो उसका क्षेत्रफल πr^2 होता है।

अतः यदि केन्द्र का कोण $1°$ हो तो वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $\frac{1°}{360°} \times \pi r^2$ होगा।

इसलिए यदि केन्द्र का कोण $x°$ हो तो वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $\frac{x°}{360°} \times \pi r^2$

अब हम अवधा APB के क्षेत्रफल के बारे में देखेंगे जिसका केन्द्र 'O' और त्रिज्या 'r' हैं।

आप देखते हैं कि अवधा APB का क्षेत्रफल = वृत्तखण्ड OAPB का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

$$= \frac{x°}{360°} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल}$$

प्रयत्न कीजिए।

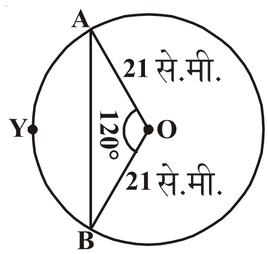
आप लघु अवधा के क्षेत्रफल के उपयोग से गुरू अवधा का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे?

यह कीजिए।

1. दिए गए कोणों से वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 से.मी. है।
   i. $60°$ ii. $30°$ iii. $72°$ iv. $90°$ v. $120°$
2. एक घडी के मिनट काँटे की लम्बाई 14 से.मी. है तो 10 मिनट में उसके द्वारा तय किये गये क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अब हम वृत्त की अवधा का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक उदाहरण को हल करेंगे।

उदाहरण-1. दिए गए चित्र में अवधा AYB का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें वृत्त की त्रिज्या 21 से.मी. तथा $\angle AOB = 120^0$ ($\pi = \frac{22}{7}$ तथा $\sqrt{3} = 1.732$) दिया गया है।



हल : अवधा AYB का क्षेत्रफल

= अवधा OAYB का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

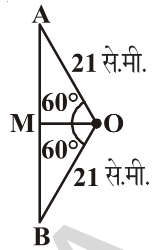
अब अवधा OAYB का क्षेत्रफल $= \frac{120^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ से.मी.

= 462 से.मी. ...(1)

ΔOAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए चित्र में दर्शाए अनुसार $OM \perp AB$ पर डालिए।

नोट OA = OB अतः R.H.S. स्वयं तथ्य द्वारा $\Delta AMO \cong \Delta BMO$

अतः AB का मध्य बिन्दु M है तथा $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$



मान लीजिए, OM = x से.मी.

अतः ΔOMA , $\frac{OM}{OA} = \cos 60^0$.

या, $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\because \cos 60^0 = \frac{1}{2}\right)$

या, $x = \frac{21}{2}$

और $OM = \frac{21}{2}$ से.मी.

और $\frac{AM}{OA} = \sin 60°$

$\frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

अतः $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ से.मी.

इसलिए $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ से.मी. $= 21\sqrt{3}$ से.मी.

अतः ΔOAB क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ वर्ग से.मी.

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ वर्ग से.मी. ...(2)

इसलिए अब अवधा AYB का क्षेत्रफल $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ वर्ग से.मी.

($\because$ (1) और (2)]

$= \frac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ व.से.मी.

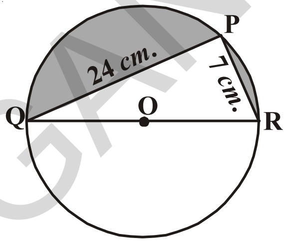
$= 271.047$ व.से.मी.

उदाहरण-2. चित्र में रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि PQ = 24 से.मी., PR = 7 से.मी. तथा QR वृत्त का व्यास है ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल : रंगीन अवधा का क्षेत्रफल = OQPR अवधा का क्षेत्रफल – Δ PQR. क्षेत्रफल

क्योंकि QR वृत्त का व्यास है, $\angle QPR = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)

अतः पायथागोरस प्रमेय द्वारा



ΔQPR में $QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49 = 625$

$QR = \sqrt{625} = 25$ से.मी.

अब वृत्त की त्रिज्या $= \frac{1}{2}$ QR

$= \frac{1}{2}(25) = \frac{25}{2}$ से.मी.

अर्धवृत्त OQPR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2}$

$= 245.53$ व.से.मी. ..... (1)

समकोण त्रिभुज Δ QPR का क्षेत्र फल $= \frac{1}{2} \times PR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 24$

$= 84$ व.से.मी. ..... (2)

(1) और (2) से

रंगीन अवधा का क्षेत्रफल = 245.53 - 84 = 161.53 व.से.मी.

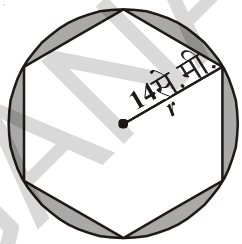
उदाहरण-3. एक वृत्तकार टेबल के उपरी तल पर चित्र में दर्शाए अनुसार छः समान आकृतियाँ बनाई गई है। यदि उसकी त्रिज्या 14 से.मी. हो तो आकृतियों को रंगने का खर्च ₹5 प्रति व.से.मी. दर से ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3} = 1.732$ का उपयोग कीजिए।)

हल : हम जानते है कि एक वृत्त में डाले गये समषट्भुजाकार के भुजा की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के समान होती है।

$\therefore$ षट्भुज की भुजा = 14 से.मी.

अतः छः आकृतियों का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – षट्भुज का क्षेत्रफल

अब वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$



$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$ व.से.मी. ..... (1)

षट्भुज का क्षेत्रफल $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14 = 509.2$ व.से.मी. ..... (2)

अतः छः आकृतियों का क्षेत्रफल = 616 - 509.21 ((1) और (2) से)

= 106.79 व.से.मी.

इसलिए आकृतियों को रंगने का खर्च ₹5 प्रति वर्ग से.मी. से = ₹106.79 × 5 = ₹533.95

अभ्यास - 9.3

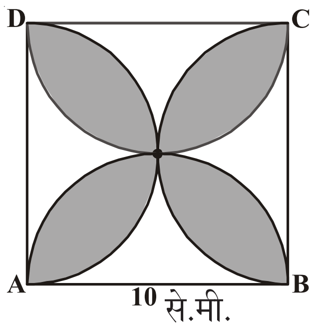
1. 10 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त में एक ज्या केन्द्र पर समकोण बनाती है तो निम्न के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का उपयोग कीजिए।)

   i. लघु अवधा ii. गुरू अवधा

2. 12 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त में एक ज्या केन्द्र पर 120° का कोण बनाती है उससे बनने वाले लघु अवधा का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।. ($\pi = 3.14$ तथा $\sqrt{3} = 1.732$ का उपयोग कीजिए।)

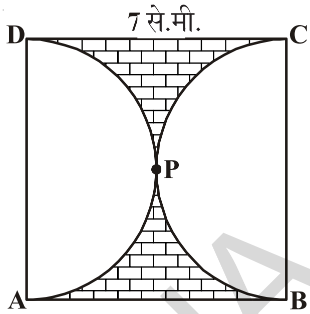
3. एक कार को दो wipers होते है जो कभी भी एक दूसरे से नहीं 'टकराते' हैं। प्रत्येक ब्लेड (blade) की लम्बाई 25 से.मी. होती है। जो 115°. के कोण पर सफाई करते हैं। प्रत्येक घुमाव में उनके द्वारा साफ किये गये क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

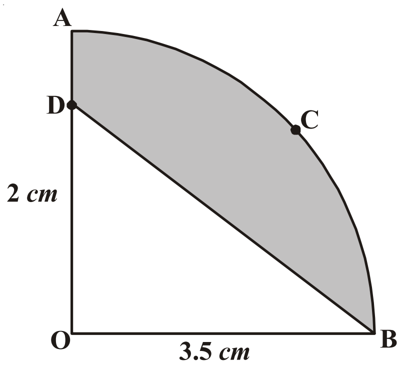
   $(\pi = \frac{22}{7})$



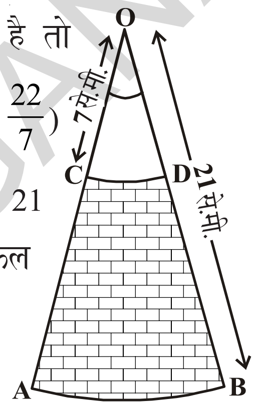
4. दिए गए चित्र में रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा 10 से.मी. तथा उसके प्रत्येक भुजा से एक अर्धवृत्त खींचा गया है। ($\pi = 3.14$ का उपयोग कीजिए।)

5. दिये गये चित्र में रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जहाँ ABCD एक 7 से.मी. भुजा वाला वर्ग है तथा APD तथा BPC दो अर्धवृत्त डाले गये है। ($\pi = \frac{22}{7}$)

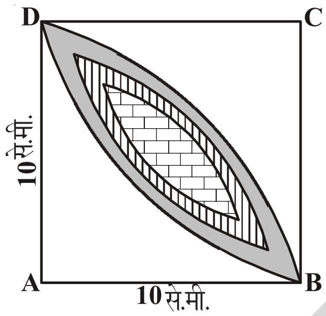




6. दिए गए चित्र में OACB वृत्त का चतुर्थांश है तथा उसकी त्रिज्या 3.5 से.मी. OD = 2 से.मी. दीया गया है तो रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)



7. AB तथा CD दो समकेन्द्रिक वृत्तों के चाप है। जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः 21 से.मी. तथा 7 से.मी. है। यदि $\angle AOB = 30°$, हो तो रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)

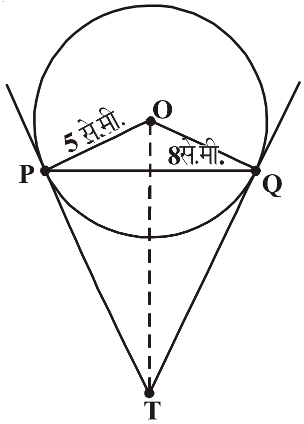


8. दिए गए चित्र में अंकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो 10 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त के दो चतुर्थांशों का उभयनिष्ठ भाग है। ($\pi = 3.14$)

अतिरिक्त अभ्यास

(यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं है।)

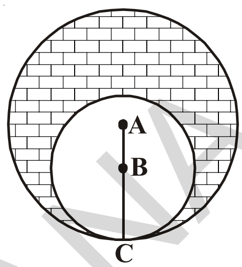
1. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से डाले गये दो स्पर्श रेखाओं के मध्य बनने वाला कोण स्पर्श बिन्दु से डाली गयी रेखा द्वारा केन्द्र पर बनने वाले कोण का संपूरक होता है।
2. 5 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त पर PQ = 8 से.मी. की ज्या खींची गयी है। बिन्दु P तथा Q से डाली गयी स्पर्श रेखाएँ T पर प्रतिच्छेदित होती है। (चित्र में देखिए।) TP की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

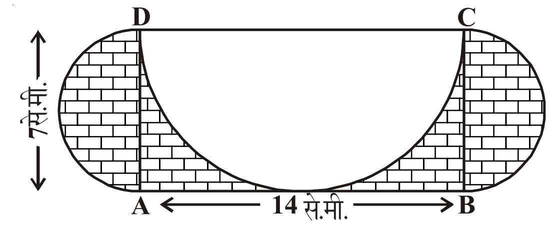


3. सिद्ध कीजिए कि वृत्त में डाले गये चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें केन्द्र पर संपूरक कोण बनाती हैं।
4. 8 से.मी. वाली रेखा AB खींचिए। A को केन्द्र मानकर 4 से.मी. त्रिज्या वाला वृत्त डालिए तथा B केन्द्र से 3 से.मी. त्रिज्या वाला अन्य वृत्त खींचिए। प्रत्येक केन्द्र से दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा डालिए।

5. मान लीजिए ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $AB = 6$ से.मी., $BC = 8$ से.मी. तथा $\angle B = 90^0$. BD, B से डाला गया AC पर लम्ब है B, C, D से एक वृत्त खींचा गया है। A से इस पर स्पर्श रेखा खींचिये।

6. दिए गए चित्र में रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें A तथा B से खींचे गये दो वृत्त है जो बिन्दु C पर स्पर्श करते हैं यदि $AC =$ 8 से.मी. तथा $AB = 3$ से.मी. दिया गया है।





7. ABCD एक आयत है जिसमें $AB = 14$ से.मी. तथा $BC = 7$ से.मी. है। DC, BC तथा AD व्यास वाले तीन अर्धवृत्त चित्र में दर्शाये अनुसार खींचिए। इसमें रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की!

इस अध्याय में हमने निम्नलिखित अंशो का अध्ययन किया है।

1. वृत्त की ''स्पर्श रेखा'' वह रेखा होती है जो वृत्त को केवल एक ही बिंदु पर स्पर्श करती हैं।
2. किसी भी बिंदु से स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लंब होती है।
3. बाह्य बिन्दु से वृत्त पर डाले गये दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है।
4. हमने निम्न की रचना करना सीखा है।

   a) वृत्त की स्पर्श रेखा की रचना जब उसका केन्द्र बिन्दु ज्ञात है।

   b) बाह्य बिन्दु से वृत्त पर एक जोडी स्पर्श रेखाओं की रचना।
5. वृत्त की छेदन रेखा वृत्त को दो विभिन्न बिंदुओं पर प्रतिछेदित करती हैं और वह दो बिंदुओं को छुनेवाली रेखा होती है।
6. वृत्त की अवधा का क्षेत्रफल = संबंधित वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल – संबंधित त्रिभुज का क्षेत्रफल