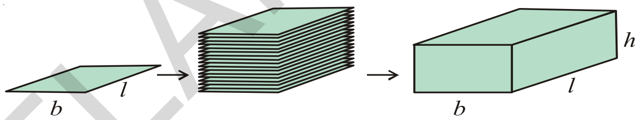
अध्याय 13

3-D को 2-D में देखना (VISUALISING 3D IN 2D)

13.0 परिचय

हम3-विनिमय संसार में रहते हैं। हमारी चारों ओर वस्तुओं की आकृति 3 विनिमय की होती हैं। हम 2-D और 3-D आकृतियों को देखकर उनकी भिन्नता को पहचान सकते हैं। दीवार पर लगे एक चित्र (पोस्टर) को देखिए। इसका तल आयताकार है। इसके कितने मापन हैं? इसके 2 मापन हैं।वे हैं लम्बाई और चौड़ाई। एक पुस्तक को देखिए। पुस्तक की आकृति कैसी है? इसकी आकृति घनाब जैसी होती है। इसके 3 मापन हैं। लम्बाई और चौड़ाई के साथ एक और मापन ऊँचाई भी होता है।

एक त्रिभुज, वर्ग, आयत 2-मापन वाले सरल चित्र हैं। घन और घनाभ 3 मापनवाले ठोस वस्तुएँ हैं। 2-D वस्तुओं को एक के ऊपर एक व्यवस्थित करने पर वह कुछ स्थान घेरता है और चित्र में दर्शाये जैसा 3-D वस्तु बनाना हैं। इसका आयतन भी होता हैं।



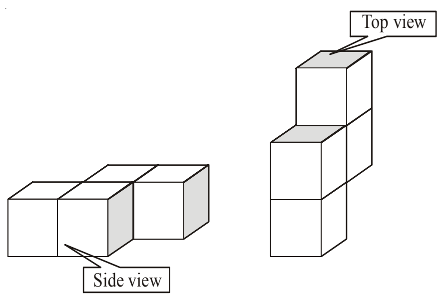
इसे कीजिए।

1. कुछ 3- विनिमय चित्रों के नाम बताइए।
2. कुछ 2-D वस्तुओं के उदाहरण दीजिए।
3. अपनी पुस्तक में पतंग का चित्र उतारिए। यह चित्र 2-D है या 3-D है?
4. घन और घनाभ आकृति की कुछ वस्तुओं को पहचानिये।
5. एक वृत्त और गोले के कितने मापन होते हैं?

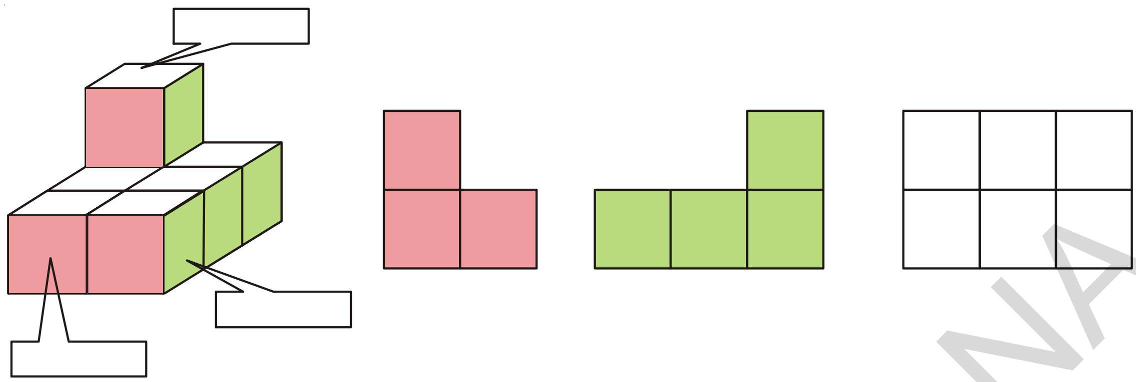
13.1 घन से बने 3-D वस्तुएँ

निम्न ठोस आकृतियों का निरीक्षण कीजिए।

दोनों का निर्माण चार इकाइ घनों की व्यवस्था से हुई हैं। यदि हम भिन्न दिशाओं से इनका निरीक्षण करे, तो यह भिन्न होते हैं। परन्तु वस्तु वही है। इसी प्रकार एक ठोस को विभिन्न दिशाओं से देखने पर वह भिन्न आकृतियों में दिखाई देता हैं। उदाहरण के लिए



SCERT TELANGANA

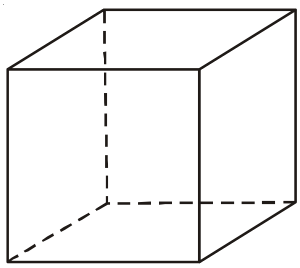


यह किजिए

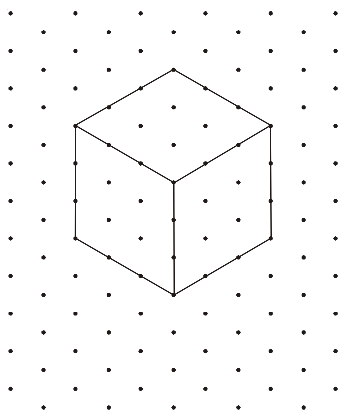
उपर्युक्त चित्रों में ऊपर और नीचे के तलों के क्षेत्र पर और परिमिति कैसे ज्ञात करसकते हैं?

13.2 2-Dके चित्रों पर 3-D के चित्रों का प्रदर्शण

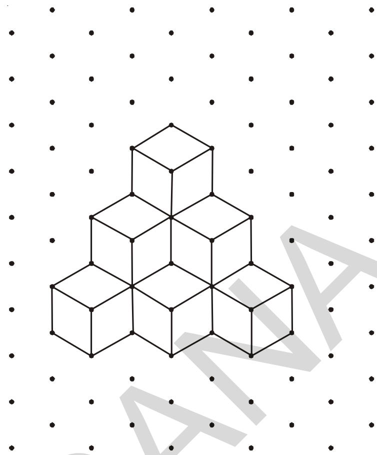
जो 3-D चित्रों को हम कागज़ से बनाते हैं, 2-D हैं। वास्तव में हम कागज़ पर केवल दो मापन को ही सूचित कर सकते हैं। तीसरा मापन केवल हमारी कल्पना है। हमें, एक 3-D घनाकार वस्तु को संलग्न चित्र जैसा दर्शाने का अभ्यास हैं। घन के सभी किनारों की लम्बाई समान हैं। परंतु संलग्न चित्र में, वे समान नहीं हैं। इस चित्र को हमारी कल्पना के अनुसार बनाया गया है। इस समस्या का हल निकालने के लिए हम आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ का उपयोग करेंगे। इसमें हम 3-D की ठोस वस्तुओं की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई को वस्तु के माप से सूचित करसकते हैं।



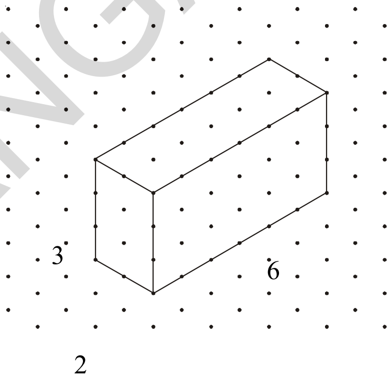
उदाहरण 1 : संलग्न चित्र में घनों की संख्या को पहचानिए।



हल : घन के तीन परत हैं। ऊपर की परत में केवल एक ही घन है। दूसरी परत में 3 घन हैं। (1 छिपा हुआ है।) नीचे की परत में 6 घन हैं। (3छिपे हुए हैं।) तो घनों की कुल संख्या $= 1 + 3 + 6 = 10$ घन



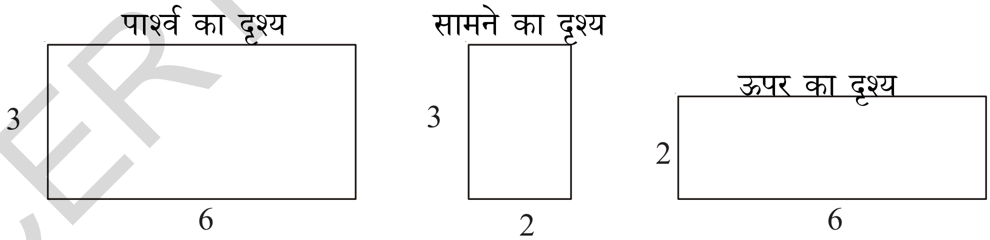
उदाहरण 2 : संलग्न चित्र में घनाभ के मापन ज्ञात कीजिए। दो क्रमागत बिंदुओं की दूरी को एक इकाई मानना है। अनुपाती मापन से पार्श्व का दृश्य ऊपर का दृश्य और सामने के दृश्य के चित्र भी बनाइए।



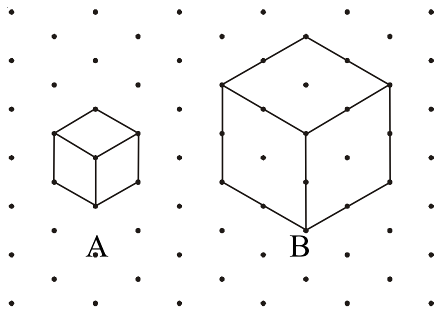
हल : घनात की लम्बाई $l = 6$ इकाई

घनात की चौड़ाई $b = 2$ इकाई

घनात की ऊँचाई $h = 3$ इकाई

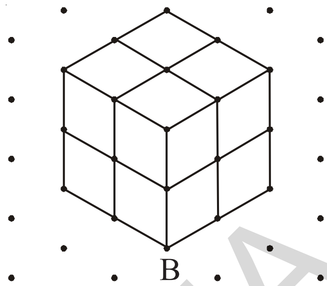


उदाहरण 3 : संलग्न चित्र को देखिए। A और B में इकाई घनों की संख्या ज्ञात करो और उनका अनुपात भी ज्ञात करो।



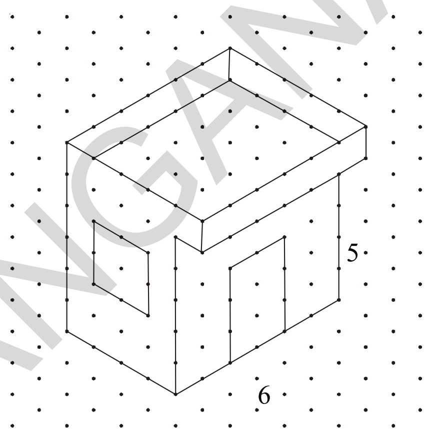
SCERT TELANGANA

हल : A. में केवल एक ही घन है। चित्र B में, सभी भुजाओं के समानांतर रेखाएँ खींचकर उसे इकाई घनों में विभाजित करके गिनेंगे। इसमें दो परत हैं और प्रत्येक परत में चार इकाई घन हैं। तो घनों की संख्या B = 8 और घनों का अनुपात A और B = 1 : 8.



B

उदाहरण 4 : संलग्न चित्र में आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ पर एक घर का चित्र है। घर की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का मापन ज्ञात कीजिए। पटिया का प्रक्षेपण आगे की ओर है। पटिया का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



हल : घर की लम्बाई = 6 इकाई

घर की चौड़ाई = 4 इकाई

घर की ऊँचाई = 5 इकाई

पटिया को 1 इकाई से आगे प्रक्षेपित किया गया।

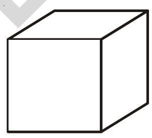
पटिया के मापन = 5 × 6 इकाई

पटिया का क्षेत्रफल= 5 × 6 = 30 वर्ग इकाई

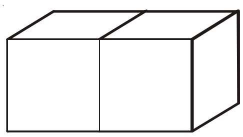
अभ्यास - 13.1

1. निम्न 3-D चित्रों को आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ पर उतारिए।

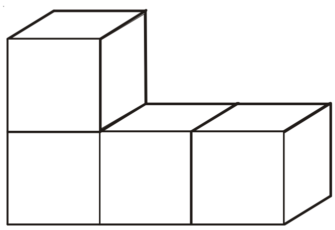
(i)



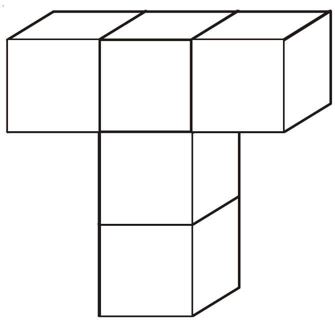
(ii)



(iii)



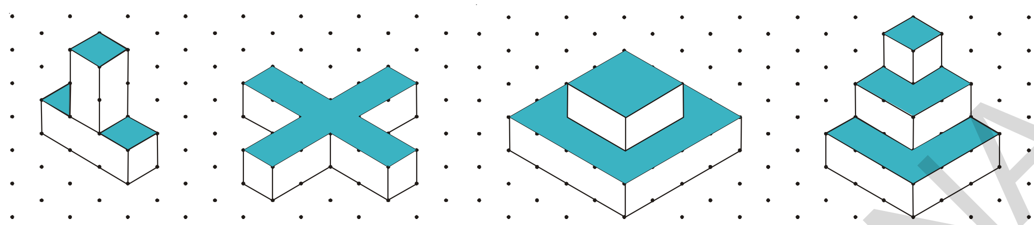
(iv)



SCERT TELANGANA

2. 5 इकाई × 3 इकाई × 2इकाई मापन से आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ पर घनाभ का चित्र बनाइए।

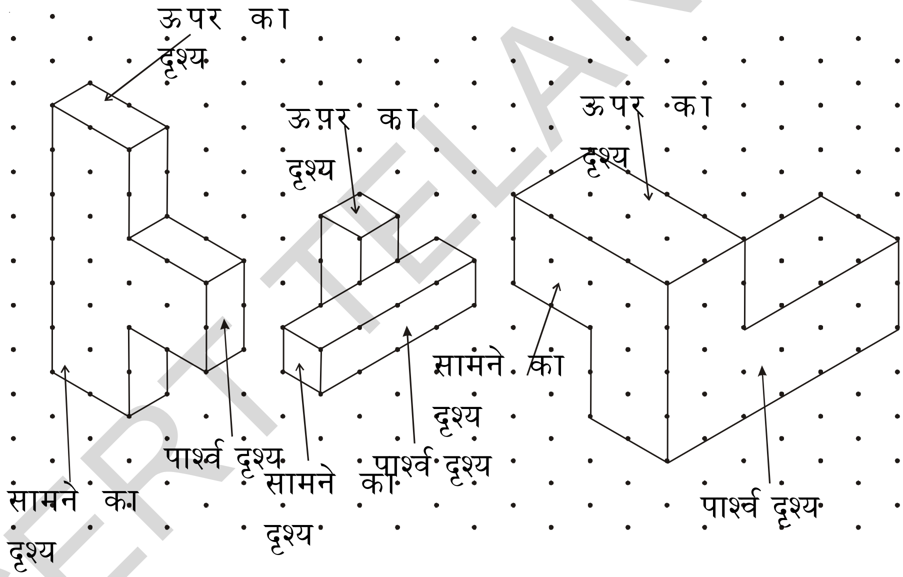
3. निम्न 3-D चित्रों में इकाई घनों की संख्या ज्ञात कीजिए।



(i) (ii) (iii) (iv)

4. प्रश्न 3 में दिये गए 3-D चित्र में छायांकित क्षेत्रों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. दो क्रमगत बिंदुओं की बीच की दूरी को 1 से.मी. मानते हुए निम्न 3-D चित्रों के सामने का दृश्य, पार्श्व दृश्य और ऊपर दृश्य के चित्र बनाइए।

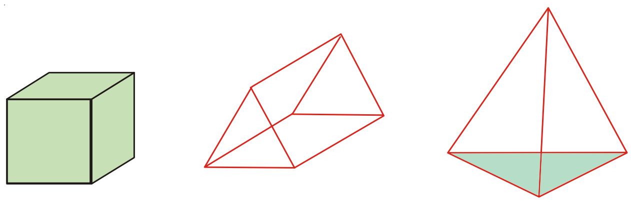


13.3 विभिन्न ज्यामितीय ठोस

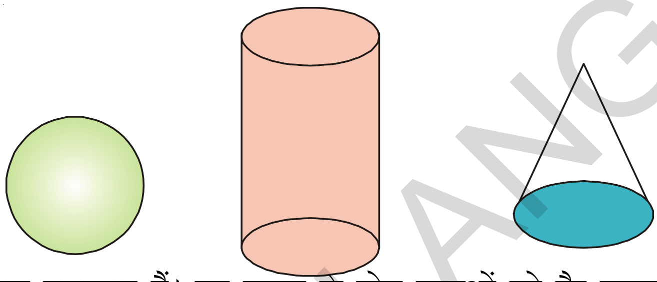
हमारे परिसरों में हम विभिन्न प्रकार के ठोस वस्तुओं को देखते हैं। इन में कुछ वस्तुओं के फलक वक्राकार और कुछ वस्तुओं के फलक सपाट होते हैं। डिब्बे, पुस्तक, पासा जैसे 3-D वस्तुओं के फलक सपाट होते हैं। गेंद, नली आदि। इसी गुण के आधार पर हम 3-D आकृतियों को बहुलीय एवं गैर बहुलीय में वर्गीकृत कर सकते हैं।

SCERT TELANGANA

निम्न ठोस का निरीक्षण कीजिए।



ऊपर दिये गए ठोस में क्या किसी का फलक वक्राकार हैं? नहीं, सभी के सपाट तल हैं।इस प्रकार के ठोस वस्तुएँ जिन के फलक बहुभुजीय होते हैं, उन्हें बहुतलीय कहते हैं। (इसका एकवचन बहुफलक है।) अब निम्न चित्रों का निरीक्षण कीजिए।



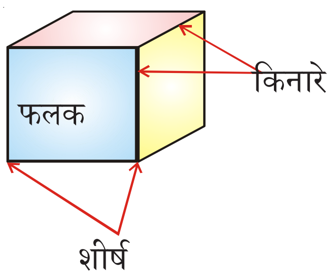
इन वस्तुओं के फ लक वक्राकार हैं। इस प्रकार के ठोस वस्तुओं को गैर बहुतलीय कहते हैं।

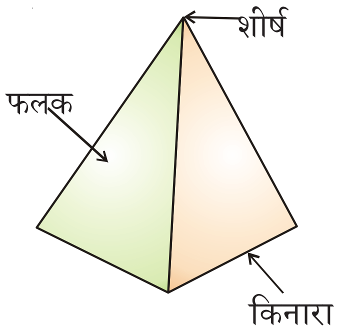
प्रयास कीजिए।

1. बहुफलक के तीन उदाहरण दीजिए।
2. गैर बहुफलक के तीन उदाहरण दीजिए।

13.4 3D-वस्तुओं के फलक, किनारे और शीर्ष (Faces, Edges, Vertices) :

हमारे कमरे की दीवार, खिड़कियाँ, दरवाज़े, फर्श, छत, कोने आदि और मेज़, डिब्बों का निरीक्षण कीजिए। इनमें फलक सपाट हैं। सपाट फलक किनारों पर मिलते हैं। दो या अधिक किनारे कोनों पर मिलते हैं। प्रत्येक कोने को शीर्ष कहते हैं। एक घन को लेकर देखिये कि उसके फलक कहाँ पर मिलते हैं? इसके किनारे कहाँ मिलते हैं?

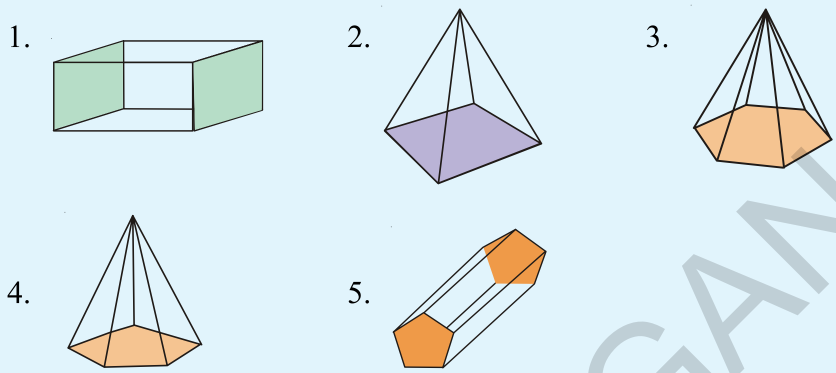




SCERT TELANGANA

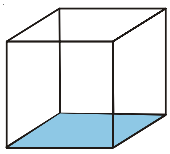
इन्हें कीजिए

दिये गए चित्रों के फलक, किनारे और शीर्षों को पहचानिए।

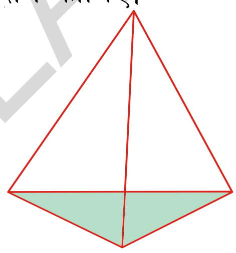


13.5 सम बहुफलक (Regula Polygon) :

निम्न आकृतियों के फलक, किनारे और शीर्षों का निरीक्षण कीजिए।

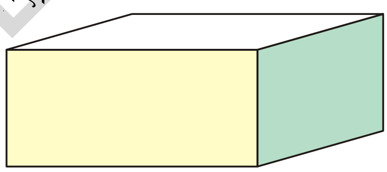


घन

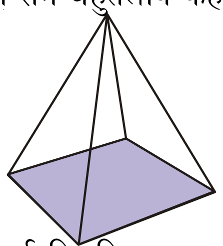


त्रिभुजाकार पिरामिड(चतुष्फलक)

ऊपर की दो वस्तुओं में दोनों के फलक समरूप हैं। उनके सभी किनारे समान हैं और समान किनारों की संख्या से शीर्ष निर्मित हुए हैं। इस प्रकार की ठोस वस्तुओं को सम बहुतलीय कहते हैं। निम्न चित्रों का निरीक्षण कीजिए।



घनाभ



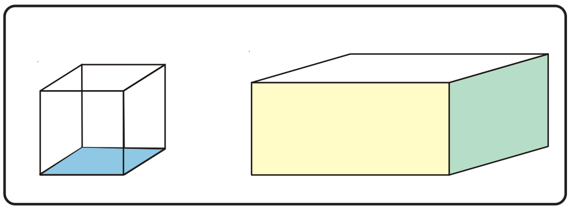
वर्ग पिरामिड

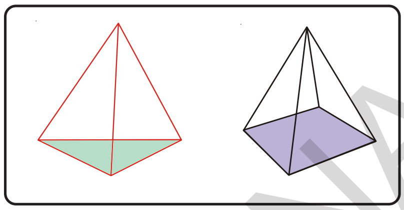
घनाभ गैर बहुतलीय है क्यों कि उसके सभी फलक समरूप नहीं हैं और वर्ग पिरामिड़ में एक शीर्ष का निर्माण 4 किनारों से हुआ और अन्य शीर्षों का निर्माण 3 किनारों से हुआ है। पिरामिड़ के सभी फलक समरूप नहीं हैं। इस लिए यह भी गैर बहुतलीय है। इस प्रकार की वस्तुओं को गैर-सम बहुतलीय कहते हैं।अतः बहुतलीय को सम बहुतलीय एवं गैर-सम बहुतलीय में वर्गीकृत किया जा सकता है।

SCERT TELANGANA

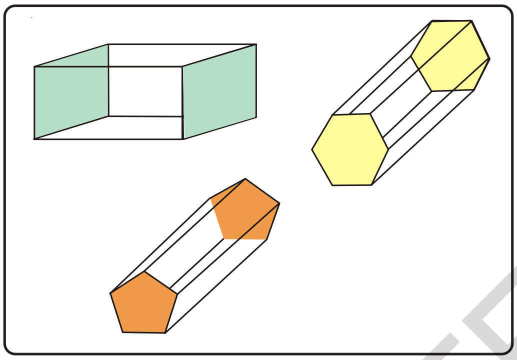
13.4.1 प्रिज़्म और पिरामिड

अब निम्न चित्रों का निरीक्षण कीजिए।

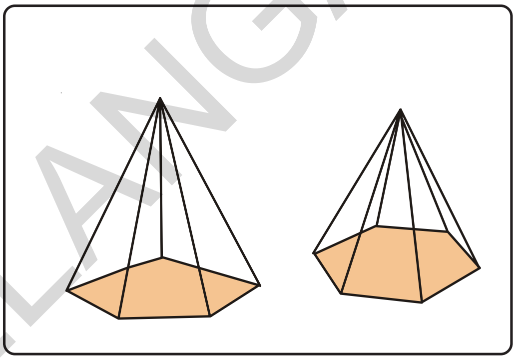




पहले बक्से में वस्तुओं के ऊपर और नीचे के फलक समान हैं। दूसरे बक्से में वस्तुओं का आधार भिन्न है परन्तु ऊपर शीर्ष सामान्य है। आइए हम इसी प्रकार के कुछ और वस्तुओं का निरीक्षण करें।



(a)



(b)

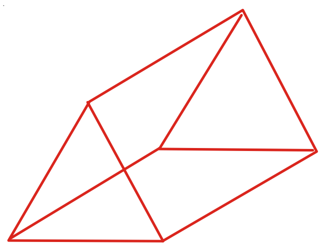
चित्र(a) में प्रत्येक वस्तु के दो समानांतर और समरूप बहुभुजीय फलक हैं और पार्श्य फलक आयत (या समानांतर चतुर्भुज हैं। चित्र (b) आधार बहुभुज और पार्श्य फलक त्रिभुज हैं, वे सभी एक सामान्य शीर्ष पर मिलते हैं।

एक ठोस वस्तु जिसमें दो समानान्तर और समरूप बहुभुजीय फलक हो और जिसके पार्श्व फलक आयत या समानान्तर चतुर्भुज हो **"प्रिज़्म"** कहलाते हैं।

एक ठोस वस्तु जिसका आधार बहुभुज है और जिसके पार्श्य फलक त्रिभुजाकार फलक है, **"पिरामिड"** कहलाता है।

एक **"प्रिज़्म"** या **"पिरामिड"** उसके समानांतर और समरूप बहुभुजीय फलक या आधार के आकृति पर नामांकित किया जाता है।

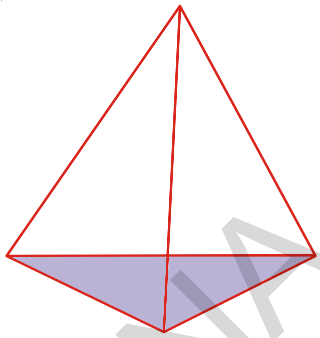
A. त्रिभुजाकार प्रिज़्म



संलग्न चित्र में दो समरूप और समानान्तर फलक की आकृति क्या है? इसके दो समरूप और समानांतर फलक त्रिभुजाकार हैं और पार्श्य फलक समानांतर चतुर्भुज हैं। इसे त्रिभुजाकार प्रिज़्म कहते हैं। यदि आधार वर्ग है तो इसे प्रिज़्म कहते हैं। यदि आधार पंचभुज हैं तो इसे पंचभुजीय प्रिज़्म कहते हैं।

SCERT TELANGANA

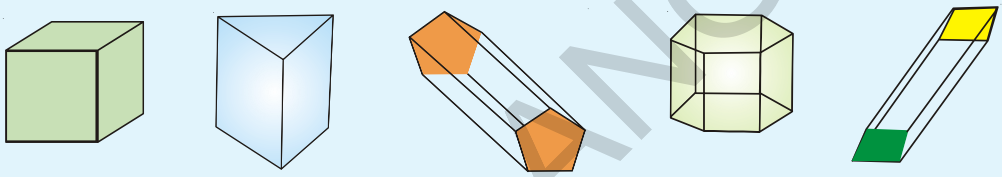
B. त्रिभुजाकार पिरामिड



वह पिरामिड जिसका आधार त्रिभुज हो तो त्रिभुजाकार पिरामिड कहलाता है। इसे चतुर्पार्शीय कहते हैं। (चतुर्पार्शीय का अर्थ = जिसमें चार फलक हों) यदि पिरामिड का आधार वर्ग हो तो उसे पंचभिुजीय पिरामिड कहते हैं।

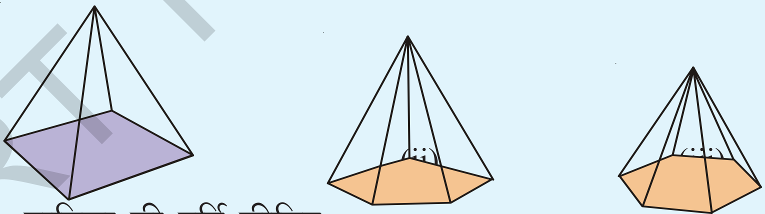
इसे कीजिए

1. निम्न प्रिज़्म के नाम लिखो।



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. निम्न पिरामिड के नाम लिखो।



3. तालिका की पूर्ति कीजिए :

प्रिज़्म/पिरामिड के आधार के भुजाओं की संख्या	प्रिज़्म का नाम	पिरामिड का नाम
3 भुजाएँ		
4 भुजाएँ		
5 भुजाएँ		
6 भुजाएँ		
8 भुजाएँ		

4. प्रिज़्म और पिरामिड के बीच अंतर समझाइए।

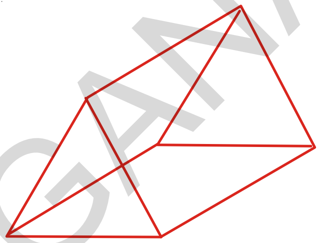
SCERT TELANGANA

सोचिए और चर्चा कीजिए

यदि एक सम पिरामिड के बहुभुजीय आधार के भुजाओं की संख्या को बढाते जायें तो पिरामिड की आकृति क्या होगी?

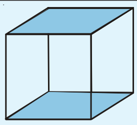
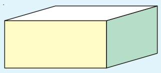
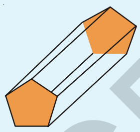
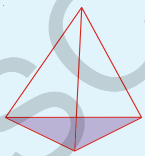
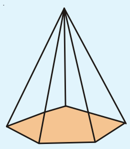
13.6 बहु फलक के किनारे, फलक और शीर्षों की संख्या:

आइए हम एक बहुफलक के फलक, किनारे और शीर्षो की संख्या गिनें।



फलकों की संख्या	5 फलक
किनारों की संख्या	9 किनारे
शीर्षों की संख्या	6 शीर्षे

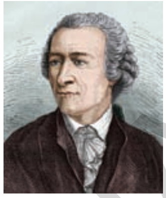
तालिका का निरीक्षण कर उसकी पूर्ति कीजिए।

वस्तु का चित्र	वस्तु का नाम	फलकों की संख्या(F)	शीर्षों की संख्या (V)	किनारों की संख्या (E)	F+V	E+2
	घन	6	8	12	6 + 8 = 14	12 + 2 = 14
	घनाभ					
	पंचभुजीय प्रिज़्म					
	चतुर्भुजीय पिरामिड					
	पंचभुजीय पिरामिड					

तालिका के आख़री दो स्तंभों के निरीक्षण से हम यह निष्कर्ष कर सकते हैं कि सभी बहुफलक के लिए

SCERT TELANGANA

लियोनार्ड नामक गणितज्ञ ने सर्वप्रथम इस संबंध का निरीक्षण किया। इन्होंने यह बताया कि F + V = E + 2 इस संबंध को पिरामिड का “यूलर संबंध” कहते हैं।



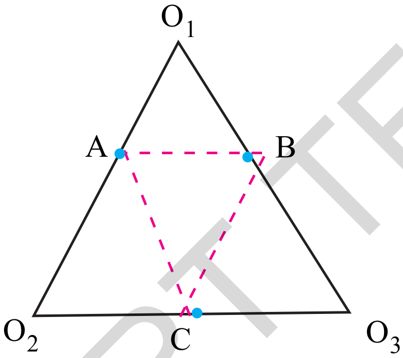
लियोनार्ड यूलर
(1707-1783)

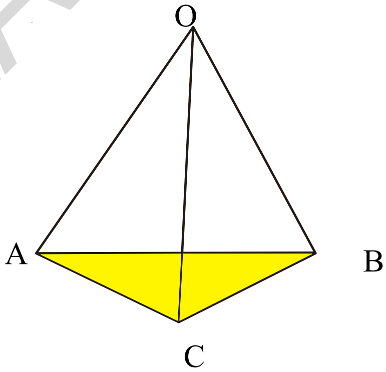
13.7 जाली चित्र (Net Diagrams)

एक जाली जित्र 2-D, में कंकाल रूपरेखा जैसा हैं, जिसे मोड़ने से यह शुध्द आकृति 3-D का परिणाम लेता है।

जाली चित्रों का प्रयोग करते हुए हम प्रिज़्म और पिरामिड बनासकते हैं। निम्न एक त्रिभुजाकार प्रिज़्म बनाने का कार्यकलाप दिया गया है। इनका निरीक्षण कीजिए।

एक कागज़ के टुकडे को लेकर, त्रिभुज की आकृति में काटिए। शीर्षों को A, B, C. चिह्न लगाइए।



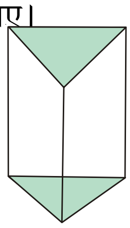


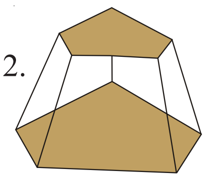
बिंदीकार रेखाएँ AB, BC, CA पर कागज़ को मोडिए और इनको तब तक उठाइए जब तक कि ये बिंदु O_1, O_2, O_3 को एक बिंदु (मानो O पर) मिले एक इससे AO_1, AO_2, से मिलता है, BO_1, BO_3 से और CO_2, CO_3 से मिलता है।

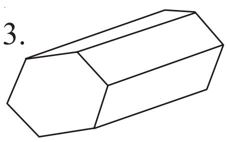
निर्मित वस्तु एक पिरामिड है। चित्र O_1, O_2, O_3 पिरामिड का जाली चित्र (Net Diagrams) होता है।

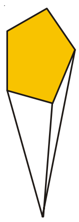
अभ्यास - 13.2

1. निम्न बहुफलक के फलक, शीर्ष और किनारों की संख्या को गिनकर यूलर सूत्र की जाँच कीजिए।

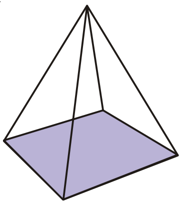
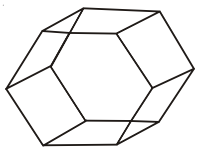
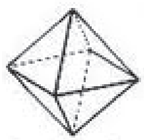
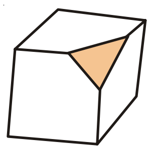
1. 

2. 

3. 

4. 

SCERT TELANGANA

5.  6.  7.  8. 

2. क्या वर्ग प्रिज़्म और घन एक समान हैं? समझाइए।

3. क्या एक बहुफलक में केवल 3 त्रिभुजाकार फलक होसकते हैं? समझाइए।

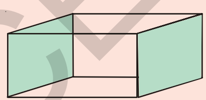
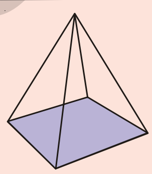
4. क्या एक बहुफलक में केवल 4 त्रिभुजाकार फलक होसकते हैं?

5. यूलर सूत्र के उपयोग से निम्न तालिका की पूर्ति कीजिए।

F	8	5	?
V	6	?	12
E	?	9	30

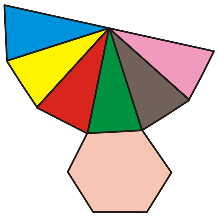
6. क्या एक बहुफलक में 10 फलक, 20 किनारे और 15 शीर्षक होसकते हैं?

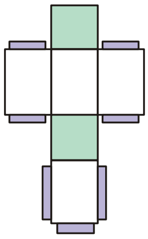
7. निम्न तालिका की पूर्ति कीजिए।

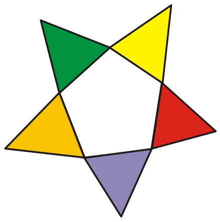
वस्तु	शीर्षों की संख्या	किनारों की संख्या
		
		

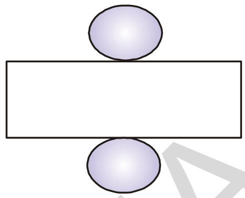
SCERT TELANGANA

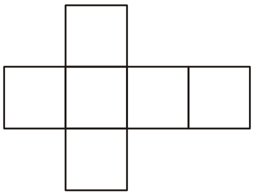
8. निम्न जालि चित्रों से बननेवाले 3-D वस्तुएँ या आकृतियों के नाम लिखो।

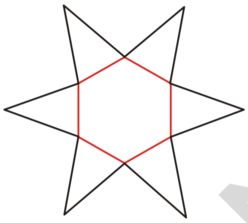

(i)

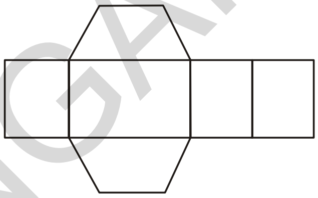

(ii)


(iii)


(iv)

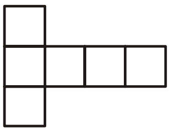

(v)

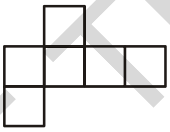

(vi)

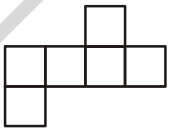

(vii)

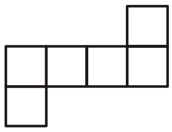
9. निम्न चित्रों को चेकरूल्ड कॉपी में बनाकर मालूम कीचिए कि इनमें से कौनसे चित्र घन को बना सकते हैं?

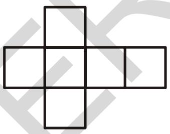
(i)

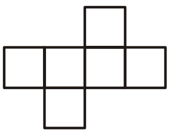

(a)

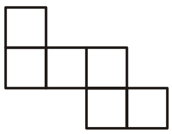

(b)

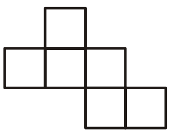

(c)

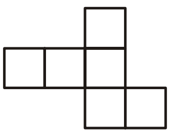

(d)

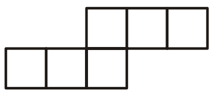

(e)

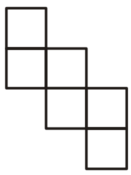

(f)


(g)


(h)


(i)


(j)


(k)

SCERT TELANGANA

(ii). निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(a) उस बहुफलक का नाम लिखिए जिसके चार शीर्ष, चार फलक हों।

(b) उस ठोस वस्तु का नाम लिखिए जिसका कोई शीर्ष न हो।

(c) उस बहुफलक का नाम लिखिए जिनके 12 किनारे हो।

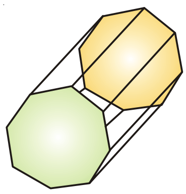
(d) उस ठोस वस्तु का नाम लिखिए जिसमें एक ही तल हो।

(e) एक घन घनाभ से कैसे भिन्न है?

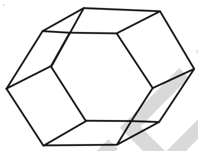
(f) दो आकृतियों के नाम लिखिए जिनके किनारे, शीर्ष और फलक की संख्या समान होती है?

(g) उस बहुफलक का नाम लिखिए जिसके 5 शीर्ष और 5 फल हैं।

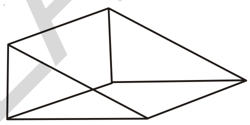
(iii). निम्न वस्तुओं के नाम लिखिए।



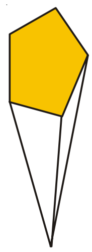
(a)



(b)



(c)



(d)

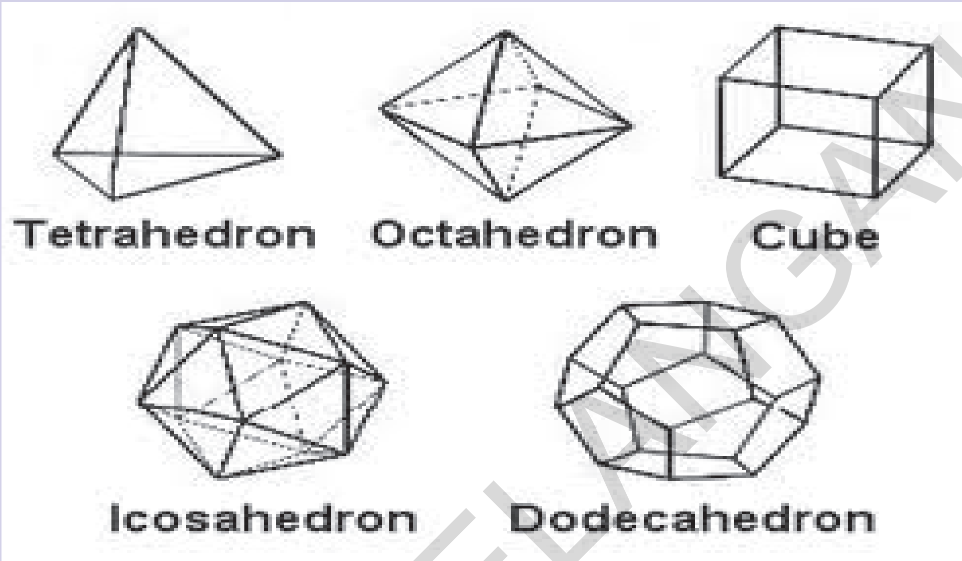
हमने क्या सीखा?

1. 2-D आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ पर 3-D वस्तुओं के चित्र कैसे बनाते हैं?
2. 3-D आकृतियों के तीन भिन्न दृष्य हैं, ऊपरका दृश्य, पार्श्व दृष्य और सामने का दृश्य।
3. बहुफलक : ठोस वस्तुएँ जिनके तल सपाट हो।
4. प्रिज़्म : इस बहुफलक का शीर्ष भाग और आधार समान बहुभुज होते हैं। और अन्य फलक आयताकार (समान्तर चतुर्भुज) होते हैं।
5. पिरामिड : वह बहुफलक है जिसका आधार और शीर्ष एक बहुभुज और अन्य फलक त्रिभुज होते हैं।
6. 2-D जाली चित्रों के उपयोग से 3-D वस्तुओं को बनाना।
7. बहुफलक के लिए यूलर सूत्र : $E + 2 = F + V$.

SCERT TELANGANA

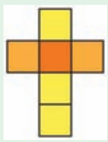
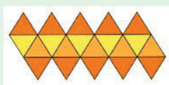
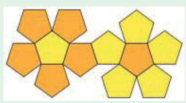
क्या आप जानते हैं?

नीचे पाँच सम बहुफलक हैं। सभी जटिल हैं, इन्हें प्लेटो की याद में अक्सर प्लेटोनिक ठोस कहते हैं।



केवल घन ऐसा बहुफलक है जो स्थान को पूर्ण रूप से भरता है।

बहुफलकीय जाली चित्र

बहुफलक का नाम	सामने का बहुभुज	जाली चित्र
चतुर्पाश्वीय	4 त्रिभुज	
अष्टफलक	8 त्रिभुज	
घन	6 चतुर्भुज	
विंशतिफलक	20 त्रिभुज	
द्वादशाफलक	12 पंचभुज	

SCERT TELANGANA