উৎপাদকে বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ লিখি।

17 কিন্তু এই অভেদের আকারে না লিখে অন্য আকারে $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ -কে লেখা যায় কিনা দেখি।

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} \times 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\}$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

18 আমি নিষাদকে $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ -এর মান বের করতে বললাম যখন

$a = 999, b = 998, c = 997$

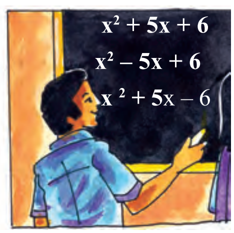
নিষাদ লিখল, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c) \quad \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$$= \frac{1}{2}(999 + 998 + 997)\{(999 - 998)^2 + (998 - 997)^2 + (997 - 999)^2\}$$
$$= \frac{1}{2} \times 2994 \times (1 + 1 + 4)$$
$$= \frac{1}{2} \times 2994 \times 6 = 8982$$

জাকির একটি বোর্ডে লিখল $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

——— XII

19 পল্লব ব্ল্যাকবোর্ডে চারটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখল



(i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $x^2 - 5x + 6$ (iii) $x^2 + 5x - 6$ (iv) $x^2 - 5x - 6$

আমি এই বহুপদী সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি ।

(i) $x^2 + 5x + 6$

$= x^2 + 3x + 2x + 6$

$= x(x + 3) + 2(x + 3)$

$= (x + 3)(x + 2)$

(ii) $x^2 - 5x + 6$

$= x^2 - 3x - 2x + 6$

$= x(x - 3) - 2(x - 6)$

$= (x - 3)(x - 2)$

(iii) $x^2 + 5x - 6$

$= x^2 + 6x - x - 6$

$= x(x + 6) - 1(x + 6)$

$= (x + 6)(x - 1)$

(iv) $x^2 - 5x - 6$

$= x^2 - 6x + x - 6$

$= x(x - 6) + 1(x - 6)$

$= (x - 6)(x + 1)$

20 জাকির ব্ল্যাকবোর্ডে আরো কয়েকটি বহুপদী সংখ্যামালা লিখল।

(i) $p^2 + p - (a + 1)(a + 2)$

(ii) $x^2 + 3x - a^2 - a + 2$

(iii) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6$

(iv) $x^2 + (p + \frac{1}{p})x + 1$

(v) $(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1) - 4x^2$

(vi) $x^2 - bx - (a + 3b)(a + 2b)$

(vii) $2x^2 - 3ab - (a - 6b)x$

(viii) $x^2 + 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2$

পল্লব, জাকিরের লেখা বহুপদী সংখ্যামালাগুলির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করল।

(i) $p^2 + p - (a + 1)(a + 2)$

$= p^2 + \{(a + 2) - (a + 1)\}p - (a + 1)(a + 2)$

$= p^2 + (a + 2)p - (a + 1)p - (a + 1)(a + 2)$

$= p(p + a + 2) - (a + 1)(p + a + 2)$

$= (p + a + 2)\{p - (a + 1)\}$

$= (p + a + 2)(p - a - 1)$

(ii) $x^2 + 3x - a^2 - a + 2$

$= x^2 + 3x - (a^2 + a - 2)$

$= x^2 + 3x - (a^2 + 2a - a - 2)$

$= x^2 + 3x - \{a(a + 2) - 1(a + 2)\}$

$= x^2 + 3x - (a + 2)(a - 1)$

$= x^2 + \{(a + 2) - (a - 1)\}x - (a + 2)(a - 1)$ $[\because (a + 2) - (a - 1) = a + 2 - a + 1 = 3]$

$= x^2 + (a + 2)x - (a - 1)x - (a + 2)(a - 1)$

$= x(x + a + 2) - (a - 1)(x + a + 2)$

$= (x + a + 2)\{x - (a - 1)\}$

$= (x + a + 2)(x - a + 1)$

(iii) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) + 6$

$= (x - 1)(x + 3)(x - 2)(x + 4) + 6$

$= (x^2 - x + 3x - 3)(x^2 - 2x + 4x - 8) + 6$

$= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 8) + 6$

$= (a - 3)(a - 8) + 6$ [ধরি, $x^2 + 2x = a$]

$= a^2 - 3a - 8a + 24 + 6$

$= a^2 - 11a + 30$

$= a^2 - 6a - 5a + 30$

$= a(a - 6) - 5(a - 6)$

$= (a - 6)(a - 5)$

$= (x^2 + 2x - 6)(x^2 + 2x - 5)$ [যেহেতু, $a = x^2 + 2x$]

(iv) $x^2 + (p + \frac{1}{p})x + 1$

$= x^2 + px + \frac{x}{p} + \frac{p}{p}$ [যেহেতু, $\frac{p}{p} = 1$]

$= x(x + p) + \frac{1}{p}(x + p)$

$= (x + p)(x + \frac{1}{p})$

(v) $(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1) - 4x^2$

$= (x^2 - 1)^2 + 4.x^2.1 - (x^2 - 1) - 4x^2$ [যেহেতু, $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$]

$= (x^2 - 1)^2 + 4x^2 - (x^2 - 1) - 4x^2$

$= (x^2 - 1)(x^2 - 1 - 1)$

$= (x + 1)(x - 1)(x^2 - 2)$

(vi) $x^2 - bx - (a + 3b)(a + 2b)$

$= x^2 - \{(a + 3b) - (a + 2b)\} x - (a + 3b)(a + 2b)$ [যেহেতু, $(a + 3b) - (a + 2b)$

$= x^2 - (a + 3b)x + (a + 2b)x - (a + 3b)(a + 2b)$ $= a + 3b - a - 2b = b$]

$= x\{x - (a + 3b)\} + (a + 2b)\{x - (a + 3b)\}$

$= \{x - (a + 3b)\}\{x + (a + 2b)\}$

$= (x - a - 3b)(x + a + 2b)$

(vii) $2x^2 - 3ab - (a - 6b)x$

$= 2x^2 - 3ab - ax + 6bx$

$= 2x^2 - ax + 6bx - 3ab$

$= x(2x - a) + 3b(2x - a)$

$= (2x - a)(x + 3b)$

(viii) $x^2 + 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2$

$= x^2 + 2(a^2 + b^2)x + \{(a + b)(a - b)\}^2$

$= x^2 + 2(a^2 + b^2)x + (a + b)^2(a - b)^2$

$= x^2 + \{(a + b)^2 + (a - b)^2\} x + (a + b)^2(a - b)^2$ [যেহেতু, $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$]

$= x^2 + (a + b)^2 x + (a - b)^2 x + (a + b)^2(a - b)^2$

$= x\{x + (a + b)^2\} + (a - b)^2\{x + (a + b)^2\}$

$= \{x + (a + b)^2\}\{x + (a - b)^2\}$

$= (x + a^2 + 2ab + b^2)(x + a^2 - 2ab + b^2)$

কষে দেখি—8.5

1. নীচের বীজগাণিতিক সংখ্যামালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

(i) $(a+b)^2-5a-5b+6$

(ii) $(x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4)+12$

(iii) $x(x^2-1)(x+2)-8$

(iv) $7(a^2+b^2)^2-15(a^4-b^4)+8(a^2-b^2)^2$

(v) $(x^2-1)^2+8x(x^2+1)+19x^2$

(vi) $(a-1)x^2-x-(a-2)$

(vii) $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$

(viii) $x^2-qx-p^2+5pq-6q^2$

(ix) $2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)-7$

(x) $(x^2-x)y^2+y-(x^2+x)$

2. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q):

(i) $a^2-b^2=11\times9$ এবং a ও b ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $(a>b)$ হলে,

(a) $a=11, b=9$ (b) $a=33, b=3$ (c) $a=10, b=1$ (d) $a=100, b=1$

(ii) যদি $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$ হয়, তাহলে a^3+b^3 -এর মান

(a) 1 (b) a (c) b (d) 0

(iii) $25^3-75^3+50^3+3\times25\times75\times50$-এর মান

(a) 150 (b) 0 (c) 25 (d) 50

(iv) $a+b+c=0$ হলে, $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$ -এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 3

(v) $x^2-px+12=(x-3)(x-a)$ একটি অভেদ হলে, a ও p এর মান যথাক্রমে

(a) $a=4, p=7$ (b) $a=7, p=4$ (c) $a=4, p=-7$ (d) $a=-4, p=7$

3. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) $\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$ -এর সরলতম মান লিখি।

(ii) $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ এবং $a+b+c\neq0$ হলে, a, b ও c -এর মধ্যে সম্পর্ক লিখি।

(iii) $a^2-b^2=224$ এবং a ও b $(a<b)$ ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, a ও b -এর মান লিখি।

(iv) $3x=a+b+c$ হলে, $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)$ -এর মান কত লিখি।

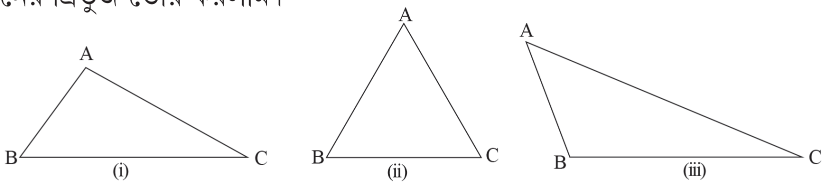
(v) $2x^2+px+6=(2x-a)(x-2)$ একটি অভেদ হলে, a ও p -এর মান কত লিখি।

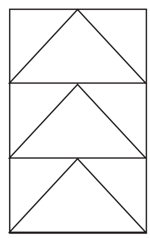
9 ভেদক ও মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য
(TRANSVERSAL & MID-POINT THEOREMS)

কলেজ স্ট্রিটে আমার বড়োপিসিমা থাকেন। গতকাল বড়োপিসিমার বাড়ি বেড়াতে গিয়েছিলাম। গঙ্গার উপরের ব্রিজটি অতিক্রম করার সময়ে আমি খুব মন দিয়ে ব্রিজের নানান জ্যামিতিক আকারগুলি লক্ষ করেছি। ব্রিজটি খুব সুন্দর দেখতে লাগছিল। তখনই ঠিক করেছিলাম বাড়ি ফিরে আমি ছোটো বড়ো নানান মাপের কাঠি দিয়ে ব্রিজ তৈরির চেষ্টা করব।

তাই আজ আমি ও আমার তিন বন্ধু মিলে ব্রিজ তৈরির চেষ্টা করছি।

দেখছি, ব্রিজে অনেকগুলি ত্রিভুজের মতো আকার আছে। তাই আমি কাঠিগুলি দিয়ে ছোটো বড়ো নানা মাপের ও নানান ধরনের ত্রিভুজ তৈরি করলাম।

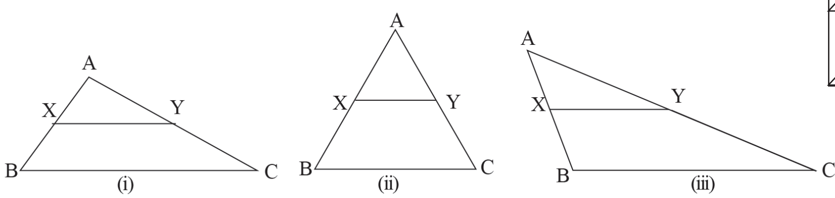




আয়েশা কয়েকটি ত্রিভুজ জুড়ে জুড়ে খানিকটা ব্রিজের মতো আকার তৈরি করল।

কিন্তু তুষার অন্য কাঠি দিয়ে এই ত্রিভুজগুলির দুটি বাহুর মধ্যবিন্দু বরাবর দড়ি দিয়ে বেঁধে দিল।

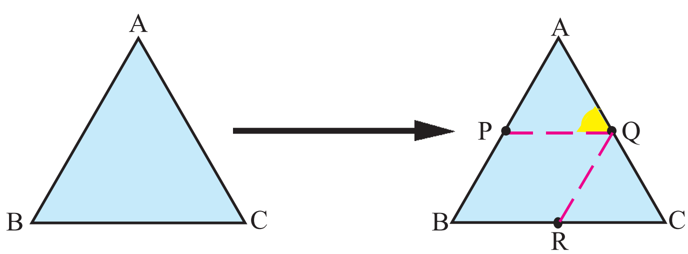
তুষার করল,



1 মেপে দেখছি প্রতিক্ষেত্রেই XY কাঠিটির দৈর্ঘ্য BC কাঠির দৈর্ঘ্যের অর্ধেক। কিন্তু এভাবে লাগানোর পরে BC কাঠিটি কি XY কাঠির সমান্তরাল আছে? হাতেকলমে যাচাই করে দেখি কী পাই?

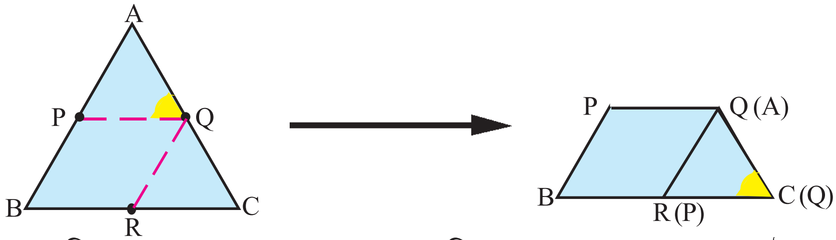
হাতেকলমে

1. প্রথমে সাদা কাগজে একটি ত্রিভুজ ABC আঁকলাম এবং ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।
2. এবার কাগজ ভাঁজ করে ΔABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু P ও Q পেলাম।



3. এবার কাগজ ভাঁজ করে PQসরলরেখাংশ পেলাম এবং $\angle AQP$ টি রঙিন করলাম।
4. এবার কাগজ ভাঁজ করে BC বাহুর মধ্যবিন্দু R পেলাম।

5. এবার APQ ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিয়ে PBCQ চতুর্ভুজের উপর এমনভাবে বসালাম যাতে ছবির মতো A বিন্দু Q বিন্দুর উপর বসে এবং AQ , QC -র সঙ্গে মিশে যায়।



দেখছি, APQ ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের PQ বাহু ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের BC বাহুর উপর সমাপতিত হয়েছে। কিন্তু এখানে PQ ও BC সরলরেখাংশ সমাপতিত হওয়ায়

$$PQ \,||\, BC$$

আবার দেখছি, P বিন্দু BC-এর মধ্যবিন্দু R এর সাথে মিশে গেছে।

$$\therefore\ PQ = RC = \frac{1}{2}\ BC$$

হাতেকলমে পেলাম, কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। সুতারাং, তুষারের রাখা XY কাঠিটি BC কাঠিটির সমান্তরালে আছে।

উপপাদ্য- 20 কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

প্রদত্ত : ধরা যাক, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু E;
D ও E যুক্ত করলাম।

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) DE || BC এবং (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$

অঙ্কন : ED কে F বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যেন ED = DF হয়। B ও F বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

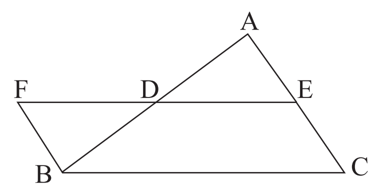
প্রমাণ : Δ ADE এবং Δ BDF -এ AD = BD [স্বীকার]

$\angle ADE = \angle BDF$ [বিপ্রতীপ কোণ]

DE = DF [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ $\Delta ADE \cong \Delta BDF$ [S-A-S শর্তানুসারে]

$\therefore$ AE = BF [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]



কিন্তু, AE = CE [স্বীকার]

$\therefore$ BF = CE

এবং $\angle DAE = \angle DBF$; কিন্তু এরা একান্তর কোণ।

$\therefore$ BF || AE; অর্থাৎ, BF || CE

BCEF চতুর্ভুজের BF || CE এবং BF = CE

$\therefore$ BCEF একটি সামান্তরিক [BCEF চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল]

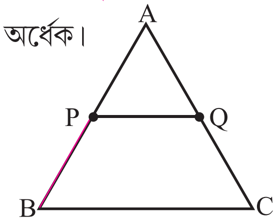
$\therefore$ FE || BC; অর্থাৎ, DE || BC (প্রমাণিত)

এবং, BC = EF = DE + DF = DE + DE = 2DE ($\because$ DE = DF)

$\therefore$ $DE = \frac{1}{2}BC$ (প্রমাণিত)।

2 PQR ত্রিভুজের PQ এবং PR-বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X এবং Y; X, Y বিন্দু দুটি যোগ করলাম। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, XY || QR এবং $XY = \frac{1}{2}$ QR [নিজে করি]

প্রয়োগ 1 আয়েশা একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি.; AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q; PQ - এর দৈর্ঘ্য এবং ∠APQ-এর মান হিসাব করে লিখি।



ত্রিভুজের মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

$PQ = \frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$ ×8 সেমি. = ☐ সেমি.

PQ || BC.

∠APQ = অনুরূপ ∠ABC = 60° [∵ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

প্রয়োগ 2 যদি ABC সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি. হতো, তাহলে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু P ও Q এর সংযোজক সরলরেখাংশ PQ-এর দৈর্ঘ্য ও ∠APQ-এর মান লিখি। [নিজে করি]

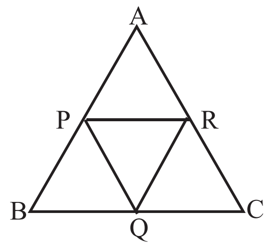
প্রয়োগ 3 জাকির একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার AB, BC, CA বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু তিনটি যথাক্রমে P, Q, R। প্রমাণ করি যে PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ

প্রমাণ : Δ ABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও R

∴ $PR = \frac{1}{2}$ BC ....(i)

একইভাবে, $PQ = \frac{1}{2}$ CA ....(ii)

এবং $QR = \frac{1}{2}$AB ....(iii)



যেহেতু, AB = BC = CA [∵ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

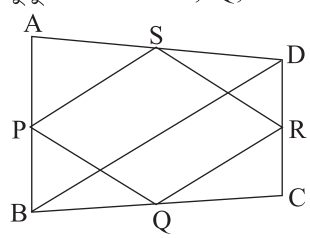
সুতরাং, $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ BC= $\frac{1}{2}$ CA

∴ QR = PR= PQ

∴ PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ

প্রয়োগ 4 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক পাবো।

প্রদত্ত : ধরি, ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও DA-র মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে P, Q, R ও S; P, Q ; Q, R; R, S ও S, P যোগ করলাম।



প্রমাণ করতে হবে যে: PQRS একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : BD কর্ণ টানলাম।

প্রমাণ : Δ ABD-এর AB ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও S ;

∴ PS || BD এবং $PS = \frac{1}{2}$ BD.

একইভাবে, ΔCBD-এর CB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে ☐ ও ☐

∴ QR || BD এবং $QR = \frac{1}{2}$ BD.

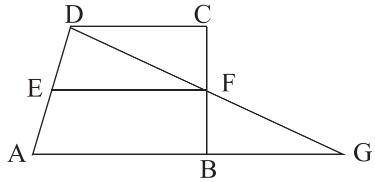
যেহেতু PS || BD এবং QR || BD, সুতরাং PS || QR.

$PS = \frac{1}{2}$ ☐ এবং $QR = \frac{1}{2}$ BD, সুতরাং PS = QR

পেলাম, PQRS চতুর্ভুজের PS || QR এবং PS = QR

PQRS একটি ☐ [যেহেতু PQRS চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল।]

প্রয়োগ 5 আয়েশা ABCD ট্রাপিজিয়াম এঁকেছে যার দুটি তির্যক বাহু AD ও BC -এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F; আমি প্রমাণ করি যে EF || AB এবং $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$



প্রদত্ত : ABCD ট্রপিজিয়ামের তির্যক বাহু AD ও BC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) EF || AB এবং (ii) $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

অঙ্কন : D, F যুক্ত করে এমনভাবে বর্ধিত করলাম যা বর্ধিত AB বাহুকে কে G বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : Δ DFC ও Δ BFG-এর মধ্যে, ∠CFD = বিপ্রতীপ ∠ BFG

∠FCD = একান্তর ∠FBG [∵ DC||AB, অর্থাৎ DC||AG, BC ভেদক; সুতরাং ∠BCD = একান্তর ∠CBG]

CF = BF [∵ F, BC বাহুর মধ্যবিন্দু]

∴ Δ DFC ≅ Δ BFG [সর্বসমতার A-A-S শর্তানুসারে]

সুতরাং, DC = BG এবং DF = FG [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]

ΔADG -এর AD ও AG-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F

∴ EF || AG; অর্থাৎ EF || AB এবং $EF = \frac{1}{2} AG$

$= \frac{1}{2}(AB + BG) = \frac{1}{2}(AB + DC)$ (প্রমাণিত)

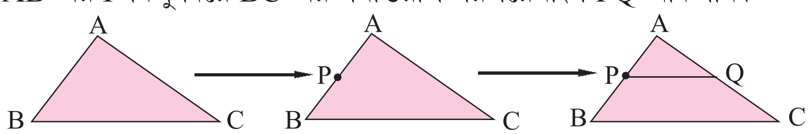
আমরা হাতে কলমে বিভিন্ন ধরনের ত্রিভুজ এঁকে মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত অপর উপপাদ্যটি যাচাই করার চেষ্টা করি।

হাতেকলমে

(1) প্রথমে যেকোনো ধরনের একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC এঁকে কেটে নিলাম।

(2) এবার কাগজ ভাঁজ করে AB-এর মধ্যবিন্দু P নিলাম।

(3) এরপরে AB-এর P বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখাংশ PQ আঁকলাম।



(4) কাগজ ভাঁজ করে দেখছি AC-এর মধ্যবিন্দু ও Q একই বিন্দু অর্থাৎ Q, AC -এর মধ্যবিন্দু।

(5) আগের মতো APQ ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে PBCQ এর উপর বসাই যাতে A বিন্দু Q বিন্দুতে এবং AQ ও QC সমাপতিত হয়। পেলাম $PQ = \frac{1}{2} BC$

হাতেকলমে পেলাম 'যেকোনো ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং ত্রিভুজের বাহুগুলির দ্বারা সমান্তরাল সরলরেখার খণ্ডিতাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হবে।'

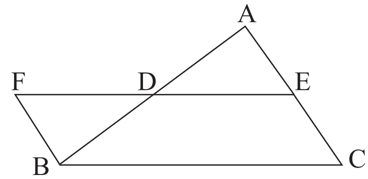
যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য- 21 কোনো ত্রিভুজের যে কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত দ্বিতীয় একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং ত্রিভুজের বাহুগুলির দ্বারা সমান্তরাল সরলরেখার খণ্ডিতাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হবে।

প্রদত্ত : ধরা যাক, ΔABC এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে BC এর সমান্তরাল DE টানা হল যা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ করতে হবে যে: $AE = CE$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

অঙ্কন : ED কে F বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম, যেন ED=DF হয়। B ও F বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।



প্রমাণ : ΔADE এবং ΔBDF -এর মধ্যে

$AD = BD$ [স্বীকার]

$\angle ADE = \angle BDF$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$DE = DF$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta BDF$ [S-A-S শর্তানুসারে]

$\therefore AE = FB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]

এবং $\angle DAE = \angle DBF$, কিন্তু এরা একান্তর কোণ।

$\therefore AE \parallel BF$ বা $CE \parallel BF$

আবার, $EF \parallel BC$ [স্বীকার]

$\therefore$ BCEF চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

সুতরাং, $BC = FE$ এবং $BF = CE$; কিন্তু $FB = AE$

$\therefore AE = CE$ (প্রমাণিত)

আবার, $BC = EF = DF + DE = DE + DE$ [$\because DF = DE$] $= 2DE$

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$ (প্রমাণিত)।

শাকিল এক মজার কাজ করল, সে এই প্রমাণিত 21 নং উপপাদ্যের সাহায্যে অন্যভাবে [20] নং উপপাদ্যটি প্রমাণ করল।

আমি এখন অন্যভাবে প্রমাণ করব যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

প্রদত্ত : ΔABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু দুটি যথাক্রমে D ও E; D, E যুক্ত করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে: (i) $DE \parallel BC$ (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$

অঙ্কন : AC বাহুর মধ্যবিন্দু E দিয়ে AB বাহুর সমান্তরাল সরলরেখাংশ টানলাম যা BC-কে F বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : E, AC-এর মধ্যবিন্দু এবং $EF \parallel AB$ [অঙ্কনানুসারে]

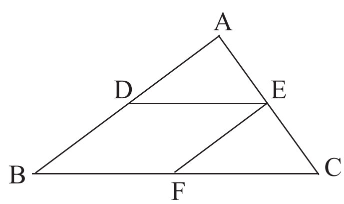
$\therefore$ F, BC-এর মধ্যবিন্দু। অর্থাৎ $BF = \frac{1}{2}BC$ এবং $EF = \frac{1}{2}AB$

সুতরাং, $EF = \frac{1}{2}AB = DB$ [$\because$ D, AB -এর মধ্যবিন্দু]

চতুর্ভুজ DBFE-এর

$EF = DB$ এবং $EF \parallel DB$ [অঙ্কনানুযায়ী]

$\therefore$ DBFE একটি সামান্তরিক।



সুতরাং, $DE \parallel BF$; অর্থাৎ $DE \parallel BC$ [(i) নং প্রমাণিত]

$DE = BF = \frac{1}{2}BC$ [(ii) নং প্রমাণিত]

প্রয়োগ 6 ABCD ট্রাপিজিয়মের $AB \parallel DC$ এবং E, AD-এর মধ্যবিন্দু। যদি E বিন্দু দিয়ে AB-এর সমান্তরাল সরলরেখা BC কে F বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে,

(i) F, BC-এর মধ্যবিন্দু এবং (ii) $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$ [নিজে করি]

প্রয়োগ : 7 আয়েশা একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল যার $\angle BAC$ সমকোণ এবং অতিভুজ BC-এর মধ্যবিন্দু D; আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে $AD = \frac{1}{2} BC$

প্রদত্ত : ΔABC-এর $\angle BAC = 90^\circ$ এবং BC-এর মধ্যবিন্দু D

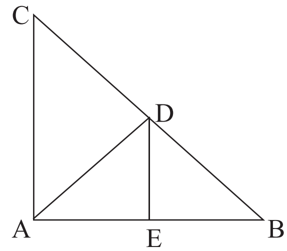
প্রমাণ করতে হবে যে: $AD = \frac{1}{2} BC$

অঙ্কন : D বিন্দু দিয়ে AC-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যা AB বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D (প্রদত্ত) এবং $DE \| AC$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ E, AB বাহুর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং, $AE = EB$ —— (i)



আবার, $AC \| DE$ এবং AB ভেদক,

$\therefore$ $\angle DEB =$ অনুরূপ $\angle CAB = 90^\circ$

ΔAED ও ΔDEB-এর মধ্যে

$AE = EB$

$\angle AED = \angle DEB = 90^\circ$

এবং DE সাধারণ বাহু

$\therefore$ $\Delta AED \cong \Delta DEB$ [সর্বসমতার S-A-S শর্তানুসারে]

সুতরাং, $AD = DB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু]

$\therefore$ $AD = DB = \frac{1}{2}$ BC [$\because$ D,BC-এর মধ্যবিন্দু]

প্রয়োগ : 8 ΔABC -এর AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E এবং বর্ধিত BE, AC বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AF = \frac{1}{3}$ AC

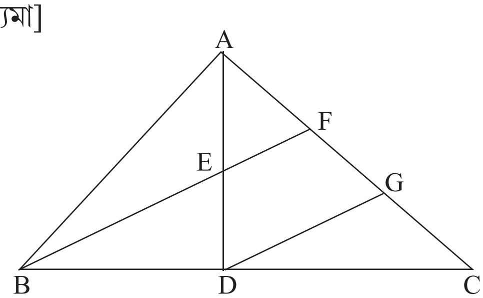
প্রদত্ত : ΔABC -এর AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E এবং বর্ধিত BE, AC বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: $AF = \frac{1}{3} AC$

অঙ্কন : D বিন্দু দিয়ে BF-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যা AC বাহুকে G বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ΔBFC-এর D, BC-এর মধ্যবিন্দু [$\because$ AD মধ্যমা]

এবং $DG \| BF$ [অঙ্কনানুসারে]



$\therefore$ G , FC-এর মধ্যবিন্দু

সুতরাং, $FG = GC$ —— (i)

আবার, ΔADG-এর AD বাহুর মধ্যবিন্দু E [প্রদত্ত]

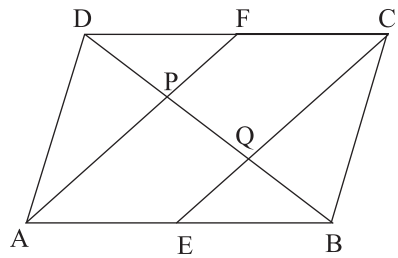
এবং $EF \| DG$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore$ F, AG -এর মধ্যবিন্দু

সুতরাং, $AF = FG$ —— (ii)

$\therefore AF = FG = GC$ সুতরাং, $AF = \frac{1}{3} AC$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : 9 ABCD সামান্তরিকের AB ও DC বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে E এবং F; A, F ও C, E যোগ করলাম যা BD কর্ণকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে, AF ও CE, BD কর্ণকে সমত্রিখণ্ডিত করেছে।



সংকেত : ABCD সামান্তরিকের AB || DC এবং AB = DC

$\therefore$ AE || FC এবং $\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2}$DC

অর্থাৎ, AE = FC

$\therefore$ AECF একটি সামান্তরিক ($\because$ AE || FC এবং AE = FC)

সুতরাং, AF || EC

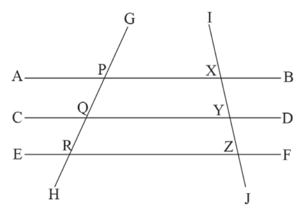
মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্যের সাহায্যে

BQ = QP এবং QP = PD এই প্রমাণটি নিজে করি

$\therefore$ BQ = QP = PD

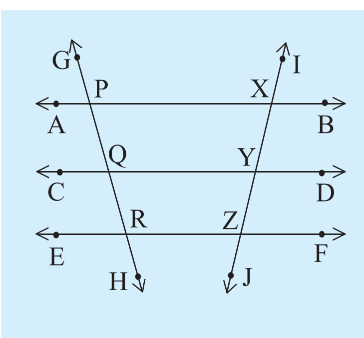
আমরা যখন সবাই মিলে কাঠি দিয়ে ব্রিজ তৈরি করছি, ত্রিভুজ আঁকছি, ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রবিশিষ্ট কাগজ কেটে ভাঁজ করে তার বাহুর মধ্যবিন্দু ও ভেদকের সম্পর্ক হাতে কলমে যাচাই করতে ব্যস্ত, তখন আমার মামাতো ভাই কুণাল বাড়ির সামনের মাঠে বাঁশের প্যান্ডেল দেখে সেইরকমভাবে একটি আয়তাকার কাগজকে সমান চারভাঁজ করল। তারপর কাগজটিকে তির্যকভাবে ভাঁজ করে নীচের ছবির মতো পেল।

দেখছি, AB, CD, EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখাংশ ও GH সরলরেখাংশ AB, CD, ও EF-এর দ্বারা যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে দুটি সমান অংশে ভাগ হয়েছে। অর্থাৎ PQ = QR এবং মেপে দেখছি IJ সরলরেখাংশটিও এই তিনটি সমান্তরাল সরলরেখাংশ দ্বারা XY ও YZ দুটি সমান সমান অংশে খণ্ডিত হয়েছে।

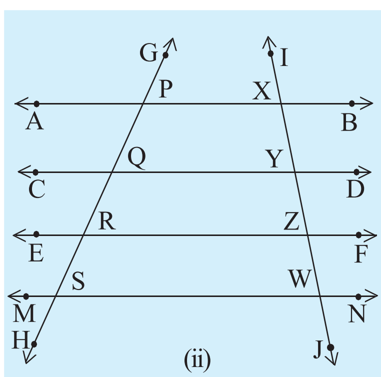


কিন্তু সবসময়ে কি এটা সম্ভব? অর্থাৎ তিনটি বা তার বেশি সমান্তরাল সরলরেখা যদি কোনো একটি ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করে তবে অপর যে-কোনো ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করবে? ছবি এঁকে মাপ নিয়ে হাতেকলমে যাচাই করি।

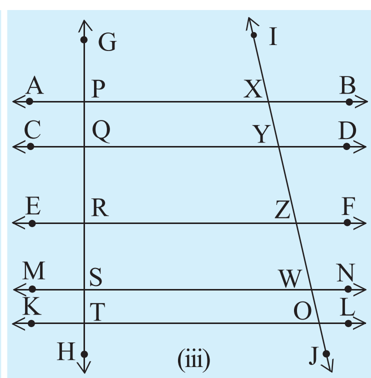
আমরা অনেকগুলি সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের ভেদকের ছবি এঁকেছি। সেগুলি হলো,



(i)



(ii)



(iii)

সমান্তরাল সরলরেখাগুলির প্রতিটি ভেদক থেকে খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্যের মাপ নিয়ে নীচের ছকে লিখলাম।

ছবি	সমান্তরাল সরলরেখা	GH ভেদক থেকে খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য [মাপ নিয়ে পেলাম]	IJ ভেদক থেকে খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য [মাপ নিয়ে পেলাম]	সিদ্ধান্ত
(i) নং ছবি	AB, CD ও EF	PQ = QR = ☐	XY = YZ = ☐	AB, CD, EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি GH থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করলে, IJ থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করবে।
(ii) নং ছবি	নিজে লিখি	নিজে লিখি	নিজে লিখি	নিজে লিখি
(iii) নং ছবি	AB, CD,EF, MN ও KL	সকল খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য সমান নয়।	সকল খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য সমান নয়।	AB, CD, EF MN ও KL 5টি সমান্তরাল সরলরেখা GH ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত না করায় অপর ভেদক IJ থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করেনি।
(iv) নং ছবি একইরকম কতকগুলি (তিনের বেশি) সমান্তরাল সরলরেখা আঁকি ও দুটি ভেদক এঁকে যাচাই করি। [নিজে করি]				

3 আমি যে কোনো 4টি এমন পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা টানলাম যারা একটি ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করেছে। এই 4টি সমান্তরাল সরলরেখার অপর একটি ভেদক টেনে মাপ নিয়ে দেখলাম এই ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করেছে। [নিজে করি]

∴ হাতেকলমে পেলাম, যদি তিনটি বা তার বেশি সমান্তরাল সরলরেখা যে-কোনো ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করে তাহলে তারা অপর যে-কোনো ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করবে।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

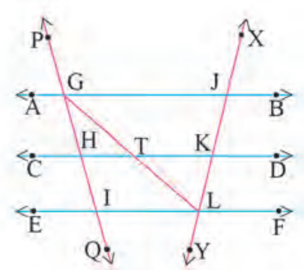
উপপাদ্য- 22 যদি তিনটি বা তার বেশি সমান্তরাল সরলরেখা যে-কোনো ভেদক থেকে সমান সমান অংশ খণ্ডিত করে তাহলে তারা অপর যে-কোনো ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ খণ্ডিত করবে।

প্রদত্ত : AB, CD এবং EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি PQ ভেদক থেকে GH ও HI দুটি সমান অংশ খণ্ডিত করেছে। অর্থাৎ GH=HI; ওই সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি অপর একটি ভেদক XY থেকেও JK ও KL দুটি অংশ খণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে: JK= KL

অঙ্কন : G ও L বিন্দু দুটি যোগ করলাম যা CD সরলরেখাকে T বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : ΔGIL-এর, H, GI-এর মধ্যবিন্দু [∵ GH = HI, প্রদত্ত]
এবং HT || IL [প্রদত্ত]
∴ T, GL-এর মধ্যবিন্দু।
আবার, ΔGLJ-এর, T, GL-এর মধ্যবিন্দু এবং TK || GJ [প্রদত্ত]
∴ K, JL-এর মধ্যবিন্দু।
∴ JK = KL (প্রমাণিত)



[উপপাদ্য: 22-এর প্রমাণ মূল্যায়ণের অন্তর্ভুক্ত নয়।]

কষে দেখি— 9

1. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D ; D বিন্দু দিয়ে CA এবং BA বাহুর সমান্তরাল সরলরেখাংশ BA এবং CA বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $EF = \frac{1}{2}BC$

2. D এবং E বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর উপর এমনভাবে অবস্থিত যে, $AD = \frac{1}{4}AB$ এবং $AE = \frac{1}{4}AC$; প্রমাণ করি যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{4}BC$

3. X এবং Z যথাক্রমে PQR ত্রিভুজের QR এবং QP বাহুর মধ্যবিন্দু। QP বাহুকে S বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হলো যাতে PS = ZP হয়। SX, PR বাহুকে Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $PY = \frac{1}{4}PR$

4. প্রমাণ করি যে, একটি সামান্তরিকের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয়, সেটি একটিসামান্তরিক।

5. প্রমাণ করি যে, একটি আয়তাকার চিত্রের বাহুগুলির মধ্যেবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, সেটি একটি রম্বস, কিন্তু বর্গাকার চিত্র নয়।

6. প্রমাণ করি যে, একটি বর্গাকার চিত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করলে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, সেটি একটি বর্গাকার চিত্র।

7. প্রমাণ করি যে, একটি রম্বসের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পরপর যুক্ত করে যে চতুর্ভুজটি গঠিত হয়, সেটি একটিআয়তাকার চিত্র।

8. ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E ; P এবং Q যথাক্রমে CD ও BD -এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করি যে, BE এবং PQ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

9. ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর AD লম্ব। D বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখাংশ DE টানা হলো যা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, AE = EC

10. ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা। B ও C বিন্দু দিয়ে AD-এর সমান্তরাল সরলরেখাংশ BR এবং CT টানা হলো যারা বর্ধিত BA এবং CA বাহুর সঙ্গে যথাক্রমে T এবং R বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করি যে, $\frac{1}{AD} = \frac{1}{RB} + \frac{1}{TC}$

11. ABCD ট্রাপিজিয়ামের $AB \parallel DC$ এবং $AB > DC$; E এবং F যথাক্রমে কর্ণদ্বয় AC ও BD-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করি যে, $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$

12. AB সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু C এবং PQ যেকোনো একটি সরলরেখা। A, B ও C বিন্দু থেকে PQ সরলরেখার ক্ষুদ্রতম দূরত্ব যথক্রমে AR, BS এবং CT ; প্রমাণ করি যে, AR + BS = 2CT

13. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D ; A বিন্দু দিয়ে PQ যেকোনো একটি সরলরেখা। B, C এবং D বিন্দু থেকে PQ সরলরেখার উপর লম্ব যথাক্রমে BL, CM এবং DN ; প্রমাণ করি যে, DL = DM.

14. ABCD একটি বর্গাকার চিত্র। AC এবং BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক BO-কে P বিন্দুতে এবং BC -কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, $OP = \frac{1}{2} CQ$

15. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

(i) PQR ত্রিভুজে ∠PQR = 90º এবং PR = 10 সেমি.। PR বাহুর মধ্যবিন্দু S হলে, QS-এর দৈর্ঘ্য

(a) 4 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 6 সেমি. (d) 3 সেমি.

(ii) ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC এবং AB = 7 সেমি. ও DC = 5 সেমি.। AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F হলে, EF-এর দৈর্ঘ্য

(a) 5 সেমি. (b) 7 সেমি. (c) 6 সেমি. (d) 12 সেমি.

(iii) ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E ; বর্ধিত BE, AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। AC = 10.5 সেমি. হলে, AF-এর দৈর্ঘ্য

(a) 3 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 2.5 সেমি. (d) 3.5 সেমি.

(iv) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F; BE ও DF, X বিন্দুতে এবং CF ও DE, Y বিন্দুতে ছেদ করলে, XY-এর দৈর্ঘ্য সমান

(a) $\frac{1}{2}$BC (b) $\frac{1}{4}$BC (c) $\frac{1}{3}$BC (d) $\frac{1}{8}$BC

(v) ABCD সামান্তরিকের BC বাহুর মধ্যবিন্দু E ; DE এবং বর্ধিত AB, F বিন্দুতে মিলিত হয়। AF-এর দৈর্ঘ্য সমান

(a) $\frac{3}{2}$AB (b) 2AB (c) 3AB (d) $\frac{5}{4}$AB

16. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

(i) ABC ত্রিভুজের AD এবং BE মধ্যমা এবং BE-এর সমান্তরাল সরলরেখা DF, AC বাহুর সঙ্গে F বিন্দুতে মিলিত হয়। AC বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি. হলে, CF বাহুর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R; যদি AC = 21 সেমি., BC = 29 সেমি. এবং AB = 30 সেমি. হয়, তাহলে ARPQ চতুর্ভুজের পরিসীমা লিখি।

(iii) ABC ত্রিভুজের AC বাহুর উপর D যে-কোনো একটি বিন্দু। P, Q, X, Y, যথাক্রমে AB, BC, AD এবং DC-এর মধ্যবিন্দু। PX = 5 সেমি. হলে, QY-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iv) ABC ত্রিভুজের BE ও CF মধ্যমা G বিন্দুতে ছেদ করে। P এবং Q যথাক্রমে BG এবং CG-এর মধ্যবিন্দু। PQ = 3 সেমি. হলে, BC -এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(v) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F ; FE, AD -কে O বিন্দুতে ছেদ করে। AD = 6 সেমি. হলে, AO-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

10 লাভ ও ক্ষতি (PROFIT AND LOSS)

18 জানুয়ারি আমাদের বিদ্যালয়ের প্রতিষ্ঠা দিবস। এ বছরে আমরা একটি প্রদর্শনীর আয়োজন করেছি। আমরা ঠিক করেছি যে প্রদর্শনীতে আমরা নিজেদের আঁকা ছবি ও নিজেদের হাতে তৈরি জিনিস বিক্রি করব।

সুপ্রিয়া 4 টাকা দরে 10 টি ছবি বিক্রি করল।

হিসাব করে দেখেছি প্রতিটা ছবি তৈরি করতে 2 টাকা খরচ হয়েছে।

∴ ওই 10 টি ছবির উৎপাদন খরচ 10×2 টাকা = 20 টাকা

কিন্তু, ওই 10 টি ছবি বিক্রি করে সুপ্রিয়া পেল 10×4 টাকা = 40 টাকা

∴ ওই 10 টি ছবি বিক্রি করে উৎপাদন খরচের বা কেনা দামের থেকে বেশি টাকা পেলাম।

বিক্রি করে কেনাদামের থেকে বেশি টাকা পাওয়াকে কী বলে?

কোনো জিনিস বিক্রি করে কেনা দামের থেকে বেশি টাকা পাওয়াকে **লাভ** বলা হয়।

এক্ষেত্রে কেনা দাম (ক্রয়মূল্য) = 20 টাকা , বিক্রির দাম (বিক্রয়মূল্য) = 40 টাকা [বিক্রি করে পেলাম]

∴ লাভ = 40 টাকা - 20 টাকা = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য

লাভ = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য

সজল কিন্তু শাকিলচাচাকে 10 টি ছবির প্রতিটি ছবি 1 টাকা দরে বিক্রি করল।

এক্ষেত্রে, 10 টি ছবির বিক্রি দাম 10×1 টাকা = 10 টাকা

কিন্তু, ওই 10 টি ছবির কেনা দাম 10×2 টাকা = 20 টাকা

সজল এই 10 টি ছবি বিক্রি করে কেনা দামের থেকে কম টাকা পেল।

এইরকম বিক্রি করে কেনা দামের থেকে কম টাকা পাওয়াকে কী বলব?

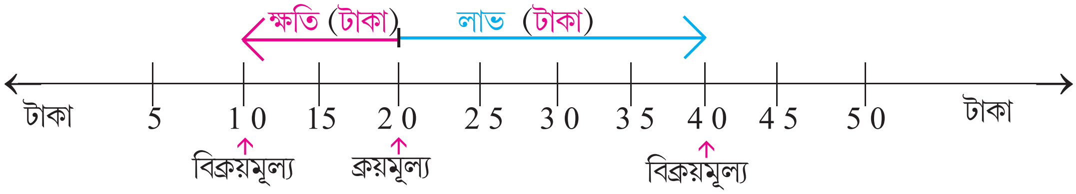
কোনো জিনিস বিক্রি করে কেনা দামের থেকে কম টাকা পাওয়াকে **ক্ষতি** বলা হয়।

এক্ষেত্রে কেনা দাম (ক্রয়মূল্য) = 20 টাকা । বিক্রি দাম (বিক্রয়মূল্য) = ☐ টাকা

∴ ক্ষতি = 20 টাকা - 10 টাকা = ক্রয়মূল্য - বিক্রয়মূল্য

ক্ষতি = ক্রয়মূল্য - বিক্রয়মূল্য

আমি একটি সরলরেখায় লাভ ও ক্ষতি লেখার চেষ্টা করি।



দেখছি, বিক্রয়মূল্য ☐ ক্রয়মূল্য [>/< বসাই] হলে **লাভ** হয়।

এবং বিক্রয়মূল্য ☐ ক্রয়মূল্য [>/< বসাই] হলে **ক্ষতি** হয়।

1 আজ স্কুলে টিফিনের সময়ে আমি ও জয়ন্ত কিছু ফল কিনে আনলাম। আমি 6 টা পেয়ারা 25 টাকায় কিনলাম ও জয়ন্ত 6 টা কলা 10 টাকায় কিনল। আমাদের 6 জন বন্ধু আমাদের কেনা পেয়ারা ও কলা প্রত্যেকে সমান ভাগে ভাগ করে নিল। অর্থাৎ প্রত্যেক বন্ধু 1 টি পেয়ারা ও 1 টি কলা নিল এবং প্রত্যেকে 1 টি পেয়ারার জন্য 4 টাকা ও 1 টি কলার জন্য 2 টাকা আমাদের দিল।

1.1 হিসাব করে দেখি ফলগুলি বিক্রি করে আমরা কেনাদামের থেকে বেশি টাকা পেলাম না কম টাকা পেলাম।

আমি পেয়ারা কিনেছি ☐ টাকায় কিন্তু বিক্রি করে পেলাম 4×6 টাকা = ☐ টাকা।

যেহেতু বিক্রয়মূল্য ☐ ক্রয়মূল্য [>/<]

$\therefore$ আমি পেয়ারা বিক্রি করে 25 টাকা – 24 টাকা = ☐ টাকা ☐ [লাভ/ক্ষতি] করলাম।

1.2 হিসাব করে দেখি পেয়ারা বিক্রি করে আমার শতকরা কত ক্ষতি হলো।

25 টাকায় ক্ষতি হলো 1 টাকা

1 টাকায় ক্ষতি হলো $\frac{1}{25}$ টাকা

100 টাকায় ক্ষতি হলো $\frac{1}{25} \times 100$ টাকা = 4 টাকা

বুঝেছি, পেয়ারা বিক্রি করে আমার 4% ক্ষতি হয়েছে

$\therefore$ পেলাম, শতকরা ক্ষতি = $\frac{\text{মোট ক্ষতি}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100$

1.3 হিসাব করে দেখি কলা বিক্রি করে জয়ন্তর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হলো।

জয়ন্ত কলা কিনেছিল ☐ টাকায়

কিন্তু, কলা বিক্রি করে জয়ন্ত পেল ☐ × ☐ টাকা = 12 টাকা

$\therefore$ কলা বিক্রি করে জয়ন্তর (☐ টাকা - ☐ টাকা) = 2 টাকা ☐ [লাভ/ক্ষতি] হলো।

জয়ন্ত 10 টাকায় লাভ করে 2 টাকা

$\therefore$ 1 টাকায় লাভ করে $\frac{1}{10}$ টাকা

$\therefore$ 100 টাকায় লাভ করে $\frac{2 \times 100}{10}$ টাকা = 20 টাকা

তাই, জয়ন্ত কলা বিক্রি করে 20% লাভ করল।

$\therefore$ পেলাম, শতকরা লাভ = $\frac{\text{মোট লাভ}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100$

1.4 কিন্তু জয়ন্ত বিক্রয়মূল্যের উপর কত টাকা লাভ করল হিসাব করে লিখি।

12 টাকায় লাভ করে 2 টাকা

1 টাকায় লাভ করে $\frac{2}{12}$ টাকা

$\therefore$ 100 টাকায় লাভ করে $\frac{2}{12} \times 100$ টাকা $= \frac{50}{3}$ টাকা $= 16\frac{2}{3}$ টাকা

অর্থাৎ, বিক্রয়মূল্যের উপর লাভ করে $16\frac{2}{3}$ %

বিক্রয়মূল্য (টাকা)	লাভ (টাকা)
12	**2**
100	**?**

আমি অন্যভাবে সমানুপাতে হিসাব করি।

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

যেহেতু, বিক্রয়মূল্য ও লাভ ☐ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে,

$\therefore$ সরল সমানুপাতটি হলো, 12:100::2:? (নির্ণেয় লাভ)

$\therefore$ নির্ণেয় লাভ $= \frac{100}{12} \times 2\,\% = 16\frac{2}{3}\%$

1.5 নাসরিন একটি পেন বিক্রি করে বিক্রয়মূল্যের উপর 20% লাভ করে। ক্রয়মূল্যের উপর তাঁর শতকরা লাভ কত হলো হিসাব করি।

বিক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে লাভ হয় = 20 টাকা

$\therefore$ ক্রয়মূল্য (100 – 20) টাকা = 80 টাকা

80 টাকার উপর লাভ হয় 20 টাকা

1 টাকার উপর লাভ হয় $\frac{20}{80}$ টাকা

100 টাকার উপর লাভ হয় $100 \times \frac{20}{80}$ টাকা = 25 টাকা। $\therefore$ নাসরিনের ক্রয়মূল্যের উপর লাভ 25%

1.6 10টি পেনের ক্রয়মূল্য 8টি পেনের বিক্রয়মূল্যের সমান হলে, শতকরা লাভ বা ক্ষতি হিসাব করি।

10টি পেনের ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে,

8টি পেনের বিক্রয়মূল্য হয় 100 টাকা।

1টি পেনের বিক্রয়মূল্য $\frac{100}{8}$ টাকা

10টি পেনের বিক্রয়মূল্য $10 \times \frac{100}{8}$ টাকা = 125 টাকা

$\therefore$ 10টি পেন বিক্রয় করে লাভ ☐ টাকা $\therefore$ শতকরা লাভ = ☐

1.7 **ছক পূরণ করি:**

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	লাভ/ক্ষতি	শতকরা লাভ/ক্ষতি	বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ/ক্ষতি
400 টাকা	475 টাকা			
125 টাকা		25 টাকা লাভ		
750 টাকা		50 টাকা ক্ষতি		

আমাদের নসিবপুর গ্রামে সোফিয়াবিবি বাড়িতে আচার তৈরি করে কাঁচের ছোটো ছোটো শিশিতে ভরে গ্রামের বাজারে বিক্রি করেন।

আমি ঠিক করেছি সোফিয়াবিবির আচার তৈরি করতে কত খরচ পড়ল, অর্থাৎ আচারের উৎপাদন খরচ বা ক্রয়মূল্য এবং বিক্রয়মূল্য জানব।

আমি হিসাব করে দেখছি, 1 শিশি আচারের উৎপাদন খরচ 20 টাকা।
কিন্তু সোফিয়াবিবি প্রতি শিশি আচার 25 টাকায় বিক্রয় করেন।

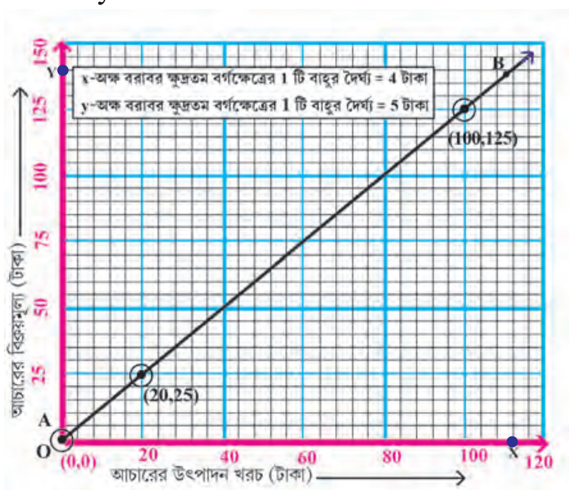
আমি সোফিয়াবিবির আচারের ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের ছক তৈরি করি।

আচারের ক্রয়মূল্য (টাকা)	0	20
আচারের বিক্রয়মূল্য (টাকা)	0	25

2 আমি ছক কাগজে উপরের সোফিয়াবিবির ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের তথ্যগুলির একটি লেখচিত্র আঁকি।

(1) প্রথমে ছক কাগজে দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা x-অক্ষ ও y-অক্ষ আঁকলাম।

(2) x-অক্ষ বরাবর আচারের উৎপাদন খরচ (টাকা) এবং y-অক্ষ বরাবর আচারের বিক্রয়মূল্য (টাকা) নিয়ে (0,0) ও (20,25) বিন্দুগুলি বসিয়ে যোগ করে OB রশ্মি পেলাম।



লেখচিত্রটি থেকে কী কী তথ্য জানতে পারছি দেখি।

(1) দেখছি, ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের লেখচিত্রটি রৈখিক লেখচিত্র। অর্থাৎ ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্য ☐ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

(2) সোফিয়াবিবির যদি উৎপাদন খরচ 100 টাকা হয়, লেখচিত্র থেকে বিক্রয়মূল্য লিখি।

দেখছি, উৎপাদন খরচ 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য 125 টাকা।

অর্থাৎ, সেক্ষেত্রে সোফিয়াবিবির লাভ হবে 125 টাকা - 100 টাকা = 25 টাকা

বুঝেছি, লেখচিত্র থেকে আচার বিক্রি করে সোফিয়াবিবির লাভ শতকরা 25 বা 25%

(3) আবার লেখচিত্র থেকে দেখছি, বিক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে ক্রয়মূল্য ☐ টাকা [নিজে লিখি]

সেক্ষেত্রে, বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ কত দেখি।

লেখচিত্র থেকে দেখছি বিক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে উৎপাদন খরচ 80 টাকা।

∴ লাভ = ☐ টাকা - 80 টাকা = 20 টাকা ∴ বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ 20

(4) লেখচিত্র থেকে ক্রয়মূল্য 120 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য ☐ টাকা [নিজে লিখি]
সেক্ষেত্রে সোফিয়াবিবির কত টাকা লাভ হবে হিসাব করি। [নিজে লিখি]

(5) লেখচিত্র থেকে বিক্রয়মূল্য 75 টাকা হলে সোফিয়াবিবির উৎপাদন খরচ কত টাকা হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে লিখি]

3 আমি ও আমার বন্ধু সায়ন ঠিক করেছি কয়েক দিস্তা কাগজ কিনে ছোটো ছোটো খাতা তৈরি করে বিক্রি করব। বিক্রি করে যে টাকা লাভ হবে, সেই টাকা কোনো দাতব্য হাসপাতালে দুঃস্থ মানুষদের ওষুধ কেনার জন্য দেব। তাই আমরা ঠিক করেছি 25% লাভে খাতা বিক্রি করব। লেখচিত্র তৈরি করে,আমাদের খাতা তৈরির ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের হিসাব করি।

আমরা 25% লাভে খাতা বিক্রয় করব। অর্থাৎ ,

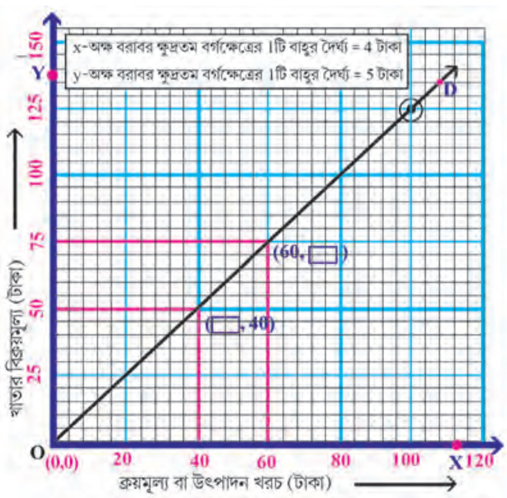
খাতার ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য হবে (100 + □) টাকা = □ টাকা।

আমি ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের ছক তৈরি করলাম—

খাতার ক্রয়মূল্য (টাকা)	0	100
খাতার বিক্রয়মূল্য (টাকা)	0	125

1. প্রথমে ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এঁকে দুই অক্ষ বরাবর একটি সুবিধাজনক স্কেল নিলাম।
2. x-অক্ষ বরাবর খাতার ক্রয়মূল্য এবং y-অক্ষ বরাবর খাতার □ নিলাম।
3. ছক কাগজে □ ও □ বিন্দুগুলি বসিয়ে যোগ করে OD রশ্মি পেলাম।

(i) লেখচিত্র থেকে দেখি, আমাদের খাতা তৈরি করার জন্য যদি খরচ 60টাকা হয়, তখন 25% লাভে বিক্রয় করার জন্য বিক্রয়মূল্য কত রাখতে হবে।



(ii) লেখচিত্র থেকে খাতা তৈরির খরচের সঙ্গে বিক্রয়মূল্যের সম্পর্ক লিখি।

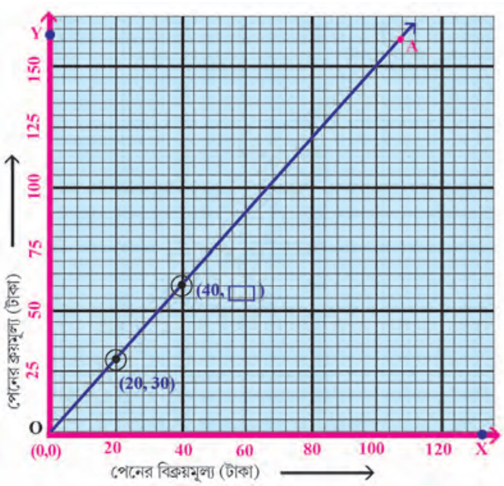
(iii) লেখচিত্র থেকে 40 টাকা বিক্রয়মূল্য হলে, খাতা তৈরির জন্য কতটাকা খরচ হবে হিসাব করে লিখি।

(iv) লেখচিত্র থেকে 80 টাকা খাতা তৈরি করতে খরচ হলে, বিক্রয়মূল্য কত হবে লিখি। [লেখচিত্রে নিজে এঁকে লিখি]

(v) লেখচিত্র থেকে 90 টাকা বিক্রয়মূল্য হলে খাতা তৈরি করতে কত খরচ হবে লিখি।

(vi) লেখচিত্র থেকে হিসাব করে দেখি, বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা কত লাভ হবে।

4 **লেখচিত্র দেখি ও নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর খুঁজি**



(i) পেনের ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্য কী সম্পর্কে আছে লিখি।

(ii) পেনের বিক্রয়মূল্য যখন 20 টাকা, তখন ক্রয়মূল্য কত টাকা হবে লিখি এবং এর ফলে লাভ না ক্ষতি হবে দেখি।

(iii) পেনের ক্রয়মূল্য 90 টাকা হলে, বিক্রয়মূল্য কত টাকা হবে লিখি।

(iv) যখন পেনের ক্রয়মূল্য 60 টাকা, তখন পেন বিক্রি করে কত ক্ষতি হবে লিখি।

(v) লেখচিত্র থেকে পেন বিক্রি করে ক্ষতির শতকরা হার লিখি।

5 কামাল 200 টাকায় একটি ঘড়ি কিনল। সে ওই ঘড়িটি বিক্রি করে 30% লাভ করতে চায়। হিসাব করে দেখি, কামাল কত টাকায় ওই ঘড়িটি বিক্রি করবে।

কামাল 30% লাভ করতে চায়। অর্থাৎ,

100 টাকা ক্রয়মূল্য (কেনা দাম) হলে বিক্রয়মূল্য হবে (100+30) টাকা = 130 টাকা

∴ 100 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য হবে 130 টাকা

1 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য হবে $\frac{130}{100}$ টাকা

200 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য হবে $\frac{130}{100} \times 200$ টাকা = 260 টাকা

∴ 30% লাভ রাখতে হলে কামালকে ওই ঘড়িটি 260 টাকায় বিক্রি করতে হবে।

অন্যপদ্ধতি

100 টাকা ক্রয়মূল্য হলে লাভ হবে 30 টাকা

1 টাকা ক্রয়মূল্য হলে লাভ হবে $\frac{30}{100}$ টাকা

200 টাকা ক্রয়মূল্য হলে লাভ হবে $\frac{30 \times 200}{100}$ টাকা

= 60 টাকা

বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্য + লাভ

= 200 টাকা + 60 টাকা = 260 টাকা

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি

বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্য + ক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ

= 200 টাকা + $200 \times \frac{30}{100}$ টাকা

= 260 টাকা

6 ঝরনা মাসি 22.80 টাকায় 1 ডজন কলা বিক্রি করায় 5% ক্ষতি হলো। 1 ডজন কলা ঝর্না মাসি কত টাকায় কিনেছিলেন হিসাব করে দেখি।

1ডজন কলার ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য হবে (100-5) টাকা = 95 টাকা।

[কারণ বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্য - ক্ষতি]

কলার [ ] দেওয়া আছে। [ক্রয়মূল্য] বের করতে হবে।

কলার বিক্রয়মূল্য 95 টাকা হলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা।

কলার বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100}{95}$ টাকা।

কলার বিক্রয়মূল্য 22.80 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100 \times 22.80}{95}$ টাকা = $\frac{2280}{95}$ টাকা = 24 টাকা

∴ ঝরনা মাসি 1 ডজন কলা কিনেছিলেন 24 টাকায়।

7 শ্রাবণী 1টি শাড়ি বিক্রি করল ও দেখল ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের অনুপাত 25:24 হয়েছে। তার শতকরা লাভ বা ক্ষতি সমানুপাত তৈরি করে হিসাব করি।

শাড়িটির ক্রয়মূল্য 25x টাকা হলে বিক্রয়মূল্য হবে 24x টাকা, যেখানে ($x>0$)

এখানে, বিক্রয়মূল্য [ ] ক্রয়মূল্য (>/< লিখি)

সুতরাং, ক্ষতি হয় ([ ] − [ ]) টাকা = xটাকা

ক্রয়মূল্য ও ক্ষতি [ ] (সরল / ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

∴ সরল সমানুপাতটি হলো, 25x : 100 :: x : ? (নির্ণেয় ক্ষতি)

∴ নির্ণেয় ক্ষতি = 4%

∴ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো

ক্রয়মূল্য (টাকা)	ক্ষতি (টাকা)
25x	x
100	?

শ্রাবণীর বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা কত ক্ষতি হলো হিসাব করি। [নিজে করি]

8 সুরজিতবাবু 660 টাকায় একটি শাল বিক্রি করলেন। শাল বিক্রি করে সুরজিতবাবুর যত টাকা লাভ হলো 640 টাকায় বিক্রি করলে তত টাকা ক্ষতি হতো। সুরজিতবাবু শালটি কত টাকায় কিনেছিলেন হিসাব করে লিখি।

ধরি, 660 টাকায় বিক্রি করে সুরজিতবাবুর x টাকা লাভ হলো।

∴ ওই শালটির ক্রয়মূল্য = (660 – x) টাকা

আবার, 640 টাকায় বিক্রি করলে x টাকা ক্ষতি হতো

∴ শালের ক্রয়মূল্য পাই (640 + x) টাকা।

শর্তানুসারে, 660 – x = 640 + x

বা, – x – x = 640 – 660

বা, – 2x = – 20

∴ x = 10 ∴ সুরজিতবাবু শালটি (660–10) টাকা = 650 টাকায় কিনেছিলেন।

9 রফিকুলচাচা 178 টাকায় একটি ছাতা বিক্রি করায় 11% ক্ষতি হলো। ছাতাটি কত টাকায় বিক্রি করলে রফিকুলচাচার 11% লাভ হতো তা সমানুপাত তৈরি করে হিসাব করে লিখি।

প্রথমে রফিকুলচাচা কত টাকায় ছাতাটি কিনেছিলেন, অর্থাৎ ছাতাটির ক্রয়মূল্য হিসাব করি।

11% ক্ষতি হয়েছে। অর্থাৎ ,

ছাতাটির ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (100 – 11) টাকা = 89 টাকা

∴ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

বিক্রয়মূল্য (টাকা)	ক্রয়মূল্য (টাকা)
89	**100**
178	**?**

বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্য ☐ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

∴ সরল সমানুপাতটি হলো, 89 : 178 :: 100 : ? (নির্ণেয় ক্রয়মূল্য)

∴ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য = $\frac{100\times178}{89}$ টাকা =200 টাকা

রফিকুলচাচা 11% লাভ করতে চান।

∴গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

ক্রয়মূল্য (টাকা)	বিক্রয়মূল্য (টাকা)
100	**100+11=111**
200	**?**

ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্য ☐ (সরল/ব্যস্ত) সম্পর্কে আছে।

∴ সরল সমানুপাতটি হলো,

100 : 200 :: 111 : ? (নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য)

∴ নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য = $\frac{200\times111}{100}$ টাকা = 222 টাকা

∴ 11% লাভ পেতে হলে রফিকুলচাচাকে ছাতাটি 222 টাকায় বিক্রি করতে হবে।

10 সিতারা বেগম একটি ব্যাগ বিক্রি করে 10% ক্ষতি করলেন। যদি ওই ব্যাগের ক্রয়মূল্য আরও 10 টাকা কম এবং বিক্রয়মূল্য 26 টাকা বেশি হতো তবে সিতারা বেগমের 15% লাভ হতো। হিসাব করে দেখি, সিতারা বেগম কত টাকায় ব্যাগটি কিনেছেন।

ধরি, সিতারা বেগম ব্যাগটি x টাকায় কিনেছিলেন।

10% ক্ষতিতে বিক্রি করেন। অর্থাৎ,

100 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য (100-10) টাকা = 90 টাকা

1 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য $= \frac{90}{100}$ টাকা

x টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য $= \frac{90 \times x}{100}$ টাকা $= \frac{9x}{10}$ টাকা

ক্রয়মূল্য যদি 10 টাকা কম হতো, তখন ক্রয়মূল্য = (x - 10) টাকা

বিক্রয়মূল্য যদি 26 টাকা বেশি হতো, তখন বিক্রয়মূল্য = $(\frac{9x}{10} + 26)$ টাকা .... (I)

তখন 15% লাভ হতো। অর্থাৎ ক্রয়মূল্য (x -10) টাকার উপর 15% লাভ হতো।

∴ তখন বিক্রয়মূল্য = $[(x-10) + (x-10) \times \frac{15}{100}]$ টাকা

$= [(x-10) + \frac{3}{20}(x-10)]$ টাকা = ☐ টাকা [নিজে করি] .... (II)

(I) ও (II) থেকে পাই, $\frac{9x}{10} + 26 = \frac{23x-230}{20}$

বা, $\frac{9x+260}{10} = \frac{23x-230}{20}$

বা, $2(9x+260) = 23x-230$

বা, $18x + 520 = 23x - 230$

বা, $18x - 23x = -520 - 230$ বা, $-5x = -750$

∴ $x = 150$ ∴ সিতারা বেগম ব্যাগটি 150 টাকায় কিনেছিলেন।

অন্য পদ্ধতি

ধরি, ক্রয়মূল্য 100x টাকা।

∴ বিক্রয়মূল্য (100x - 10x) টাকা = 90x টাকা।

ক্রয়মূল্য 10 টাকা কম হলে ক্রয়মূল্য হয় (100x - 10) টাকা।

বিক্রয়মূল্য 26 টাকা বেশি হলে বিক্রয়মূল্য হয় (90x + 26) টাকা।

এখন লাভ হয় 15% অর্থাৎ বর্তমান ক্রয়মূল্যের উপর লাভ 15%

ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (100 + 15) টাকা

ক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\frac{115}{100}$ টাকা

ক্রয়মূল্য (100x - 10) টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $(100x-10) \times \frac{115}{100}$ টাকা

আবার, বর্তমান বিক্রয়মূল্য (90x + 26) টাকা

শর্তানুসারে, $(100x-10) \times \frac{115}{100} = 90x + 26$

বা, $2300x - 230 = 1800x + 520$

বা, $2300x - 1800x = 520 + 230$

বা, $500x = 750$

বা, $x = \frac{750}{500}$ বা, $100x = \frac{750}{500} \times 100$

∴ $100x = 150$

সুতরাং সিতারা বেগম ব্যাগটি 150 টাকায় কিনেছিলেন।

11 রণেনবাবু 12 টি লজেন্স 5 টাকায় বিক্রি করায় 4% ক্ষতি হলো। তিনি কতগুলি লজেন্স 10 টাকায় বিক্রি করলে 28% লাভ হতো তা হিসাব করে দেখি।

বিক্রয়মূল্য (100 – 4) টাকা = 96 টাকা হলে ক্রয়মূল্য হয় 100 টাকা

বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য হয় $\frac{100}{96}$ টাকা

বিক্রয়মূল্য 5 টাকা হলে ক্রয়মূল্য হয় $\frac{100}{96} \times 5$ টাকা = $\frac{125}{24}$ টাকা।

ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (100 + 28) টাকা = 128 টাকা

ক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\frac{128}{100}$ টাকা

ক্রয়মূল্য $\frac{125}{24}$ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\frac{128}{100} \times \frac{125}{24}$ টাকা = $\frac{20}{3}$ টাকা

$\frac{20}{3}$ টাকায় বিক্রি করেন 12 টি লজেন্স।

1 টাকায় বিক্রি করেন $\frac{12 \times 3}{20}$ টি লজেন্স।

10 টাকায় বিক্রি করেন $\frac{12 \times 3 \times 10}{20}$ টি = 18 টি লজেন্স

সুতরাং রণেনবাবু 10 টাকায় 18 টি লজেন্স বিক্রি করলে 28% লাভ হতো।

12 জয়ন্তবাবু একটি টেলিভিশন 10% লাভে বিক্রি করেন। যদি ক্রয়মূল্য 10% কম এবং বিক্রয়মূল্য 180 টাকা কম হতো, তাহলে জয়ন্তবাবুর 20% লাভ হতো। টেলিভিশনটির ক্রয়মূল্য কত তা হিসাব করি।

ধরি, টেলিভিশনটির ক্রয়মূল্য 100x টাকা।

সুতরাং, বিক্রয়মূল্য $100x \times \frac{110}{100}$ টাকা = 110x টাকা

ক্রয়মূল্য 10% কম হলে ক্রয়মূল্য হয় 90x টাকা।

বিক্রয়মূল্য 180 টাকা কম হলে বিক্রয়মূল্য হয় (110x – 180) টাকা

কিন্তু বর্তমান ক্রয়মূল্যের উপর 20% লাভ হয়।

সুতরাং, বর্তমান বিক্রয়মূল্য $90x \times \frac{120}{100}$ টাকা = 108x টাকা।
10

শর্তানুসারে, $110x - 180 = 108x$

বা, $110x - 108x = 180$

বা, $2x = 180$

বা, $x = \frac{180}{2}$

$\therefore x = 90$

সুতরাং, $100x = 9000$

∴ টেলিভিশনটির ক্রয়মূল্য 9000 টাকা।

13 সুদীপকাকু 32 টাকা প্রতি কিগ্রা. দামের পেঁয়াজের সঙ্গে 25 টাকা প্রতি কিগ্রা. দামের পেঁয়াজ মিশিয়ে প্রতি কিগ্রা. মিশ্রিত পেঁয়াজ 32.40 টাকায় বিক্রি করে 20% লাভ করেন। তিনি কী অনুপাতে দু-ধরনের পেঁয়াজ মিশিয়ে ছিলেন হিসাব করি।

ধরি, সুদীপকাকু x কিগ্রা. প্রথম প্রকারের পেঁয়াজের সঙ্গে y কিগ্রা. দ্বিতীয় প্রকারের পেঁয়াজ মিশিয়ে ছিলেন।

x কিগ্রা. প্রথম প্রকারের পেঁয়াজের ক্রয়মূল্য 32x টাকা।

y কিগ্রা. দ্বিতীয় প্রকারের পেঁয়াজের ক্রয়মূল্য 25y টাকা।

(x +y) কিগ্রা. মিশ্রিত পেঁয়াজের ক্রয়মূল্য (32x + 25y) টাকা।

প্রতি কিগ্রা. পেঁয়াজের বিক্রয়মূল্য 120 টাকা হলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা

প্রতি কিগ্রা. পেঁয়াজের বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100}{120}$ টাকা

প্রতি কিগ্রা. পেঁয়াজের বিক্রয়মূল্য 32.40 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100 \times 32.40}{120}$ টাকা = $\frac{3240}{120}$ টাকা= 27 টাকা

$\therefore$ (x + y) কিগ্রা. মিশ্রিত পেঁয়াজের ক্রয়মূল্য 27(x + y) টাকা।

শর্তানুসারে, $32x + 25y = 27(x + y)$

বা, $32x + 25y = 27x + 27y$

বা, $32x - 27x = 27y - 25y$

বা, $5x = 2y$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$

$\therefore \quad x : y = 2 : 5$

সুতরাং, সুদীপকাকু প্রথম ধরনের পেঁয়াজের সঙ্গে দ্বিতীয় ধরনের পেঁয়াজ 2 : 5 অনুপাতে মিশিয়ে ছিলেন।

14 রমেনকাকু তাঁর দোকানে একটি টেবিল ও একটি চেয়ার 3000 টাকায় কিনে আনেন। তিনি টেবিলটি 15% লাভে এবং চেয়ারটি 10% ক্ষতিতে বিক্রি করে মোট ক্রয়মূল্যের ওপর $8\frac{1}{3}$% লাভ করেন। টেবিল ও চেয়ারটি রমেনকাকু কত দামে কিনেছিলেন হিসাব করি।

ধরি, রমেনকাকু টেবিলটি x টাকায় ও চেয়ারটি y টাকায় কিনেছিলেন।

শর্তানুসারে, $x + y = 3000$ .... (I)

$\frac{15x}{100} - \frac{10y}{100} = 3000 \times \frac{25}{300}$

বা, $\frac{15x}{100} - \frac{10y}{100} = 250$ .... (II)

(II) নং সমীকরণ থেকে পাই, $15x - 10y = 25000$

(I) নং সমীকরণকে 10 দিয়ে গুণ করি, $10x + 10y = 30000$

$15x - 10y = 25000$

যোগ করে পাই, $25x = 55000$

বা, $x = \frac{55000}{25} = 2200$

আবার, (I) নং থেকে পাই, $y = 3000 - 2200 = 800$

সুতরাং রমেনকাকু টেবিলটি 2200 টাকায় এবং চেয়ারটি 800 টাকায় কিনেছিলেন।

স্কুল থেকে বাড়ি ফিরে আমি আমার মায়ের সঙ্গে মিতা কাকিমার বইয়ের দোকানে গেলাম। একটি গল্পের বই আমার পছন্দ হলো। বইটির দাম লেখা আছে 50 টাকা। কিন্তু মিতা কাকিমা 45 টাকায় আমাকে বইটি বিক্রি করলেন।

মিতা কাকিমা বইটি (50 টাকা – 45 টাকা) = ☐ টাকা কমে বিক্রি করলেন।

মিতা কাকিমার 5 টাকা ক্ষতি হলো। কিন্তু কিছু লাভ না রাখলে মিতা কাকিমা দোকানের অন্যান্য খরচ কীভাবে চালাবেন?

মিতা কাকিমা 42 টাকায় বইটি কিনেছিলেন।

∴ বইটির বিক্রয়মূল্য ☐ ক্রয়মূল্য (>/< বসাই)

∴ ওই বইটি বিক্রি করে মিতা কাকিমা (45 টাকা – 42 টাকা) = ☐ টাকা ☐ (লাভ/ক্ষতি) করলেন।

বুঝেছি, বইটির ক্রয়মূল্য 42 টাকা
বইটির বিক্রয়মূল্য ☐ টাকা

তাহলে বইয়ের উপর লেখা মূল্যটিকে কী বলব?

বইয়ের উপরে লেখা মূল্যটি হলো ধার্যমূল্য।

এই (50 টাকা – 45 টাকা) = 5 টাকা কমানোকে কী বলে?

একে ছাড় বা ডিসকাউন্ট বলা হয়।

বুঝেছি, তাহলে বইটির ধার্যমূল্য 50 টাকা।

মিতা কাকিমা 50 টাকা ধার্যমূল্যের বই 45 টাকায় বিক্রয় করলেন।

বুঝেছি, 50 টাকা ধার্যমূল্যের বই 5 টাকা ছাড় দিয়ে 45 টাকায় বিক্রি করেছেন।

সরলরেখায় পাই,

15 আমার বন্ধু অয়ন ওই দোকান থেকে একটি বই কিনল যার ধার্যমূল্য 140 টাকা। মিতা কাকিমা অয়নকে ধার্যমূল্যের উপর 10% ছাড় দিয়ে বইটি বিক্রি করলেন। '140 টাকার উপর 10% ছাড়' — মানে কত টাকা ছাড় দিলেন হিসাব করি।

10% ছাড় মানে 100 টাকা ধার্যমূল্য হলে 10 টাকা ছাড়

1 টাকা ধার্যমূল্য হলে $\frac{\square}{\square}$ টাকা ছাড়

140 টাকা ধার্যমূল্য হলে $\frac{10}{100}$ × 140 টাকা = 14 টাকা ছাড়

∴ 140 টাকায় 14 টাকা ছাড় পেয়ে (140 টাকা – 14 টাকা) = ☐ টাকায় অয়ন বইটি কিনল।

16 মিতা কাকিমা 120 টাকায় বইটি কিনেছেন। হিসাব করে দেখি ওই বইটি অয়নকে বিক্রি করে শতকরা কত লাভ করলেন।

বইটির ক্রয়মূল্য = 120 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য = 126 টাকা

∴ লাভ = 126 টাকা – 120 টাকা = 6 টাকা

∴ শতকরা লাভ = $\frac{6}{120}$ × 100 টাকা = 5 টাকা

∴ ওই বইটি ধার্যমূল্যের উপর 10% ছাড় দিয়ে বিক্রি করেও মিতা কাকিমার 5% লাভ থাকল।

17 এক পুস্তক প্রকাশক উৎপাদন ব্যয়ের উপর 30% দাম বাড়িয়ে একটি বইয়ের দাম ছাপেন 286 টাকা। কিন্তু বিক্রি করার সময় লিখিত দামের উপর 10% ছাড় দেন। পুস্তক প্রকাশকের শতকরা লাভ হিসাব করি।

ধরি, বইটির উৎপাদন ব্যয় 100 টাকা।

সুতরাং, বইটির উপর লিখিত মূল্য (100 + 30) টাকা = 130 টাকা।

বইটির লিখিত মূল্য 130 টাকা হলে উৎপাদন ব্যয় 100 টাকা

বইটির লিখিত মূল্য 1 টাকা হলে উৎপাদন ব্যয় $\frac{100}{130}$ টাকা

বইটির লিখিত মূল্য 286 টাকা হলে উৎপাদন ব্যয় $\frac{100 \times 286}{130}$ টাকা = 220 টাকা

∴ বইটির উৎপাদন ব্যয় 220 টাকা।

কিন্তু প্রকাশক বিক্রি করার সময় লিখিত মূল্যের উপর 10% ছাড় দেন।

সুতরাং প্রকাশক বইটি বিক্রি করেন $(286 - \frac{286 \times 10}{100})$ টাকায়

= (286 – 28.60) টাকায় = 257.40 টাকায়।

∴ প্রকাশকের লাভ 257.40 টাকা — 220 টাকা = 37.40 টাকা।

প্রকাশক 220 টাকায় লাভ করেন 37.40 টাকা

প্রকাশক 1 টাকায় লাভ করেন $\frac{37.40}{220}$ টাকা

প্রকাশক 100 টাকায় লাভ করেন $\frac{37.40 \times 100}{220}$ টাকা = $\frac{3740}{220}$ টাকা = 17 টাকা

∴ প্রকাশকের শতকরা লাভ 17

18 **ছক পূরণ করি :** [নিজে করি]

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	ধার্যমূল্য	ধার্যমূল্যের উপর ছাড়	শতকরা লাভ/ক্ষতি
140 টাকা		160 টাকা	10%	
260 টাকা	285 টাকা		5%	
350 টাকা		400 টাকা	15%	
420 টাকা	480 টাকা	500 টাকা		
600 টাকা		700 টাকা		5 লাভ

19 আমার বন্ধু মাসুদদের একটি জুতো ও ব্যাগের দোকান আছে। তারা চামড়ার জুতো ও ব্যাগ তৈরি করে এবং বিক্রি করে। আমি মাসুদদের দোকান থেকে একটি জুতো কিনব। জুতোটির দাম 240 টাকা। মাসুদের দাদা 5% ছাড়ে আমাকে জুতোটির বিক্রয়মূল্য বলল। কিন্তু কাকাবাবু (মাসুদের বাবা) কিছু পরে এসে ওই বিক্রয়মূল্যের উপর আরো 5% ছাড় দিয়ে জুতোটি বিক্রি করলেন। হিসাব করে দেখি আমি জুতোটি কিনতে মোট কত টাকা ছাড় পেলাম।

মাসুদের দাদা 5% ছাড় দিলে ছাড় পাই

= 240 × $\frac{5}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

∴ বিক্রয়মূল্য হলো 240 টাকা – 12 টাকা = 228 টাকা

কাকাবাবু বিক্রয়মূল্যের উপর 5% ছাড় দিলেন।

ছাড় দিলেন = 228 × $\frac{5}{100}$ টাকা = 11.40 টাকা

∴ মোট ছাড় পেলাম 12 টাকা + 11.40 টাকা = 23.40 টাকা

বুঝেছি, 240 টাকার উপর পরপর দুবার 5% ছাড় দিলে জুতোটির দাম 23.40 টাকা কম হয়।

19.1 কিন্তু আমি জুতো কিনতে শতকরা কত ছাড় পেলাম হিসাব করে দেখি।

240 টাকায় ছাড় পেলাম 23.40 টাকা

1 টাকায় ছাড় পেলাম $\frac{23.40}{240}$ টাকা

100 টাকায় ছাড় পেলাম $\frac{23.40 \times 100}{240}$ টাকা = $9\frac{3}{4}$ টাকা

$\therefore$ আমি $9\frac{3}{4}$ % ছাড়ে জুতোটি কিনলাম।

দেখছি, 240 টাকার উপর পরপর দুবার 5% ছাড় দিয়ে যত টাকার ছাড় পাব, 240 টাকার উপর $9\frac{3}{4}$ % ছাড় দিয়ে একই পরিমাণ ছাড় পাব।

19.2 240 টাকায়, 'পরপর দুবার 5% ছাড়' ও '$9\frac{3}{4}$% ছাড়'-এর মধ্যে কি সম্পর্ক আছে?

একে সমতুল্য ছাড় বলা হয়।

অর্থাৎ 240 টাকায় পরপর দুবার 5% ছাড়ের সমতুল্য ছাড় (Equivalent discount) $9\frac{3}{4}$%

কোনো নির্দিষ্ট মূলধনের সমতুল্য ছাড় হলো ওই মূলধনের উপর পরপর একাধিক ছাড়ের সমান।

20 আমি 20%, 10% এবং 5% পরপর ছাড়ের সমতুল্য ছাড় হিসাব করে লিখি।

100-য় 20% ছাড়ের পর বাকি থাকে 100 – 20 = 80

এবার 80-এর 10% $= 80 \times \frac{10}{100} = 8$

$\therefore$ বাকি থাকে = 80 – 8 = 72

72-র 5% $= 72 \times \frac{5}{100} = \frac{18}{5} = 3.6$

$\therefore$ মোট ছাড় = 20 + 8 + 3.6 = 31.6

$\therefore$ 20%, 10% এবং 5% পরপর ছাড়ের সমতুল্য ছাড় 31.6 %

21 সায়ন্তন একটি হারমোনিয়াম বিক্রি করবে যার ধার্যমূল্য 4000 টাকা। যদি সে ধার্যমূল্যের উপর পরপর যথাক্রমে 20%, 10% এবং 10% ছাড় দেয়, তবে হারমোনিয়ামের বিক্রয়মূল্য কত হবে হিসাব করে লিখি এবং সেক্ষেত্রে সমতুল্য ছাড় হিসাব করি। [নিজে করি]

কষে দেখি— 10.1

1. নীচের ছক পূরণ করি:

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	লাভ/ক্ষতি	শতকরা লাভ/ক্ষতি
500 টাকা			25 লাভ
300 টাকা			7 ক্ষতি
1250 টাকা			8 ক্ষতি
	23000 টাকা		15 লাভ

2. লেখচিত্রটি থেকে নীচের প্রশ্নের উত্তর খুঁজি :

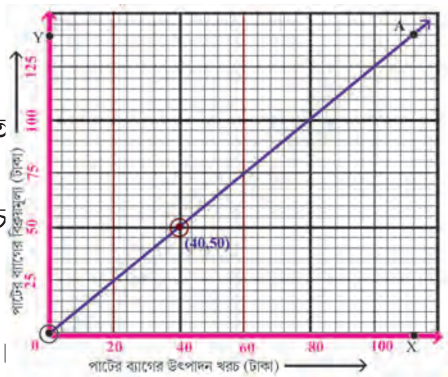
(a) লেখচিত্র দেখে ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের সম্পর্ক লিখি।

(b) যে পাটের ব্যাগের উৎপাদন খরচ 60 টাকা তার বিক্রয়মূল্য কত হবে লিখি।

(c) যে পাটের ব্যাগের বিক্রয়মূল্য 125 টাকা তার উৎপাদন খরচ কী হবে লেখচিত্র দেখে লিখি।

(d) লেখচিত্র থেকে শতকরা লাভ বা ক্ষতি হিসাব করে লিখি।

(e) লেখচিত্র থেকে বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ বা ক্ষতি লিখি।



3. সুবীরকাকা 176 টাকা মূল্যে একটি ঘড়ি বিক্রি করেছেন। যদি ঘড়ি বিক্রি করে সুবীরকাকার 12% ক্ষতি হয়, তাহলে হিসাব করে দেখি তিনি কত টাকায় ঘড়িটি কিনেছিলেন।

4. আনোয়ারাবিবি 10টি লেবু 30 টাকায় কিনে প্রতি ডজন 42 টাকায় বিক্রি করলেন। হিসাব করে দেখি, আনোয়ারাবিবির শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হলো।

[সংকেত : 1টি লেবুর ক্রয়মূল্য = ☐ টাকা, 1টি লেবুর বিক্রয়মূল্য = $\frac{42}{12}$ টাকা = ☐ টাকা ☐ পয়সা]

5. অমলবাবু একটি ছবি 20% ক্ষতিতে বিক্রয় করলেন। কিন্তু আরও 200 টাকা বেশি মূল্যে বিক্রয় করলে 5% লাভ করতেন। তিনি ছবিটি কত মূল্যে কিনেছিলেন হিসাব করে লিখি।

6. সুপ্রিয়া একটি ঘড়ি কিনেছে। যদি সে ঘড়িটি 370 টাকায় বিক্রি করে তখন তার যত টাকা লাভ হবে, 210 টাকায় বিক্রি করলে তত টাকা ক্ষতি হবে। হিসাব করে ঘড়িটির ক্রয়মূল্য লিখি।

7. আমার দিদি অরুণমামার দোকান থেকে 255 টাকায় একটি ছাতা কিনল। অরুণমামা যদি ছাতার ধার্যমূল্যের উপর 15% ছাড় দিয়ে থাকেন, তবে ওই ছাতার ধার্যমূল্য কত ছিল হিসাব করে লিখি।

8. আমার বন্ধু একটি গল্পের বই লিখিত মূল্যের উপর 25% ছাড়ে কিনল। সে যদি ওই বইটি লিখিত মূল্যেই বিক্রি করে, তবে সে শতকরা কত লাভ করবে হিসাব করে লিখি।

9. নিয়ামতচাচা প্রতিটি 5 টাকা দরে 150টি ডিম কিনেছেন। কিন্তু দোকানে এনে দেখলেন 8টি ডিম ফেটে গেছে এবং 7টি ডিম পচা। প্রতিটি ডিম 6 টাকা দরে বিক্রি করলে, নিয়ামতচাচার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে হিসাব করে লিখি।

10. আসিফচাচা একটি খেলনা 5% লাভে বিক্রি করলেন। যদি খেলনাটির ক্রয়মূল্য 20% কম এবং বিক্রয়মূল্য 34 টাকা কম হতো, তাহলে আসিফচাচার 10% লাভ হতো। খেলনাটির ক্রয়মূল্য কত হিসাব করি।

11. টাকায় 12টি জিনিস বিক্রি করে 4% ক্ষতি হয়। টাকায় কটি জিনিস বিক্রি করলে 44% লাভ হবে?

12. রমা পিসি দুটি শাড়ি তৈরি করে একটি 15% এবং অপরটি 20% লাভে বিক্রি করলেন। তাঁর মোট লাভ হলো 262.50 টাকা। শাড়ি দুটির উৎপাদন ব্যয় 1:3 হলে, শাড়ি দুটির প্রত্যেকটির উৎপাদন ব্যয় কত?

13. এক ব্যক্তি 2 টাকায় 15টি হিসাবে কিছু লজেন্স কিনলেন। তিনি অর্ধেক টাকায় 5টি দরে এবং বাকি অর্ধেক টাকায় 10টি দরে বিক্রি করলেন। তাঁর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হলো?

14. আফসারচাচা দুটি কাঠের চেয়ার একই দামে তৈরি করলেন এবং চেয়ার দুটির প্রত্যেকটির ধার্যমূল্য ঠিক করলেন 1250 টাকা। তিনি একটি চেয়ার 8% ছাড়ে বিক্রি করে 15% লাভ করলেন। যদি তিনি দ্বিতীয় চেয়ারটি 1120 টাকায় বিক্রি করেন, তাহলে তাঁর মোটের উপর শতকরা লাভ কত হলো হিসাব করি।

15. একটি বিশেষ ধরনের কলমের ধার্যমূল্য 36.50 টাকা। রফিকচাচা শুভমকে একটি পেনে 2.90 টাকা ছাড় দিয়ে বিক্রি করে, 12% লাভ করলেন। যদি তিনি ওই ধরনের আর একটি কলম মিতাকে 34.50 টাকায় বিক্রি করেন, তাহলে দ্বিতীয় কলমটিতে তাঁর শতকরা লাভ কত হলো নির্ণয় করি।

16. এক পুস্তক প্রকাশক 2000 কপি বই ছাপার জন্য 3,875 টাকার কাগজ কিনতে, 3,315 টাকা ছাপতে এবং 810 টাকা বাঁধানোর জন্য খরচ করেন। তিনি পুস্তক বিক্রেতাদের 20% ছাড় দিয়ে 20% লাভে বিক্রি করেন। প্রতিটি বইয়ের ধার্যমূল্য কত নির্ণয় করি?

17. হাসিমাবিবি দুটি হস্তশিল্পের প্রত্যেকটি 1248 টাকায় বিক্রি করেন। তিনি প্রথমটিতে 4% লাভ করেন, কিন্তু দ্বিতীয়টিতে তার 4% ক্ষতি হয়। তার মোট লাভ বা ক্ষতি কত হলো?

18. করিম, মোহনকে 4860 টাকায় একটি মোবাইল ফোন বিক্রি করায় 19% ক্ষতি হয়। মোহন, রহিমকে যে দামে বিক্রি করে সেই দামে করিম মোহনকে বিক্রি করলে করিমের 17% লাভ হয়। মোহনের শতকরা লাভ কত?

19. ফিরোজচাচা একটি প্যান্ট 20% লাভে এবং একটি জামা 15% লাভে বিক্রি করে মোট 719.50 টাকা পেলেন। তিনি যদি প্যান্টটি 25% এবং জামাটি 20% লাভে বিক্রি করতেন, তাহলে তিনি আরও 30.50 টাকা বেশি পেতেন। প্যান্ট ও জামার ক্রয়মূল্য নির্ণয় করি।

20. রবীনকাকু 3000 টাকার চাল কিনলেন। তিনি $\frac{1}{3}$ অংশ 20% ক্ষতিতে এবং $\frac{2}{5}$ অংশ 25% লাভে বিক্রি করলেন। শতকরা কত লাভে তিনি বাকি অংশ বিক্রি করলে তাঁর মোটের উপর 10% লাভ হবে?

21. এক ব্যবসায়ী এক ধরনের চা 80 টাকা প্রতি কিগ্রা দরে বিক্রি করে 20% ক্ষতি এবং অপর এক ধরনের চা 200 টাকা প্রতি কিগ্রা দরে বিক্রি করে 25% লাভ করেন। তিনি দু-ধরনের চা কি অনুপাতে মিশিয়ে প্রতি কিগ্রা 150 টাকা দরে বিক্রি করলে 25% লাভ হবে?

শাকিলচাচা শাড়ি তৈরি করছেন

শাকিলচাচা রতনকে শাড়ি বিক্রি করছেন

রতন আমিনাবিবিকে শাড়ি বিক্রি করছেন

আমিনাবিবি ফতিমাকে শাড়ি বিক্রি করছেন

22 শান্তিপুরে শাকিলচাচার তাঁত আছে। তিনি প্রতিটি শাড়ি 25% লাভে পাইকারি ব্যবসায়ী রতনকাকাকে বিক্রি করেন। রতনকাকা আবার 20% লাভে খুচরো ব্যবসায়ী আমিনাবিবিকে বিক্রি করেন। আমিনাবিবি আবার 25% লাভে ফতিমাকে শাড়ি বিক্রি করেন। হিসাব করে দেখি, যে শাড়ি আমি আমিনাবিবির থেকে 300 টাকায় কিনেছি, যদি ওই শাড়ি শাকিলচাচার থেকে কিনতে পারতাম আমার কত টাকা সাশ্রয় হতো এবং শাকিলচাচার উৎপাদন ব্যয় কত ছিল হিসাব করি।

প্রথমে একটি সরলরেখাংশে ছবি এঁকে বোঝার চেষ্টা করি।

শাকিলচাচা শাড়ি তৈরি করে 25% লাভে বিক্রি করলেন → রতনকাকা ওই শাড়ি কিনে 20% লাভে বিক্রি করেন → আমিনাবিবি ওই শাড়ি কিনে 25% লাভে বিক্রি করলেন

ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য		ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য		ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য
		=			=		

আমি প্রথমে আমিনাবিবি কত টাকায় ওই শাড়িটি রতনকাকার থেকে কিনেছিলেন হিসাব করি।

আমিনাবিবি শাড়িটি কিনে 25% লাভ করেছিলেন

∴ শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 125 টাকা হলে ক্রয়মূল্য ছিল 100 টাকা

শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য ছিল $\frac{100}{125}$ টাকা

শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 300 টাকা হলে ক্রয়মূল্য ছিল $\frac{100 \times 300}{125}$ টাকা = 240 টাকা

আমিনাবিবি ওই শাড়িটি 25% লাভে বিক্রি করায় → ক্রয়মূল্য 240 টাকা; → বিক্রয়মূল্য 300 টাকা

আমিনাবিবি 240 টাকায় শাড়িটি রতনকাকার থেকে কিনেছিলেন।

∴ আমিনা বিবির কাছে ওই শাড়িটির ক্রয়মূল্য = রতনকাকার কাছে ওই শাড়িটির বিক্রয়মূল্য।

22.1 কিন্তু রতনকাকা শাড়িটি 20 % লাভে আমিনাবিবিকে 240টাকায় বিক্রি করেছিলেন। হিসাব করে দেখি রতনকাকা কত টাকায় ওই শাড়িটি শাকিলচাচার থেকে কিনেছিলেন।

রতনকাকা শাড়িটি 20 % লাভে বিক্রি করেন।

অর্থাৎ শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 120 টাকা হলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা

শাড়িটির বিক্রয়মূল্য 240 টাকা হলে ক্রয়মূল্য = ☐ টাকা [নিজে লিখি]

রতনকাকা শাড়িটি 20 % লাভে বিক্রি করায় → ক্রয়মূল্য: 200 টাকা; বিক্রয়মূল্য: 240 টাকা

এবার বুঝেছি রতনকাকা 200 টাকায় ওই শাড়িটি শাকিলচাচার থেকে কিনেছিলেন। অর্থাৎ শাকিলচাচা 200 টাকায় শাড়িটি বিক্রি করেছেন।

শাকিলচাচা 25 % লাভে রতনকাকাকে শাড়িটি বিক্রি করায় → ক্রয়মূল্য: ☐ [নিজে লিখি]; বিক্রয়মূল্য: 200 টাকা

বুঝেছি, শাকিলচাচার ওই শাড়িটি তৈরি করতে 160 টাকা খরচ হয়েছে।

∴ শাকিলচাচার থেকে ওই শাড়িটি কিনলে আমার 300 টাকা – 200 টাকা = 100 টাকা সাশ্রয় হতো।

∴ পেলাম,

শাকিলচাচার 25% লাভে বিক্রি		রতনকাকার 20% লাভে বিক্রি		আমিনাবিবির 25% লাভে বিক্রি	
ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য
160 টাকা	200 টাকা	200 টাকা	240 টাকা	240 টাকা	300 টাকা

কিন্তু রতনকাকার কাছ থেকে কিনলে আমার কত টাকা সাশ্রয় হতো দেখি

রতনকাকার কাছ থেকে কিনলে আমার সাশ্রয় হতো = ☐ টাকা – ☐ টাকা = ☐ টাকা।

23 1 ডজন টেবিল ল্যাম্পের উৎপাদন খরচ ও বিভিন্ন পর্যায়ে ক্রয়মূল্য হলো,

উৎপাদন খরচ (টাকা)	পাইকারি বিক্রেতার ক্রয়মূল্য (টাকা)	খুচরা ব্যবসায়ীর ক্রয়মূল্য (টাকা)	ক্রেতার ক্রয়মূল্য (টাকা)
2700	3000	3300	3795

হিসাব করে দেখি, টেবিল ল্যাম্প বিক্রি করে খুচরা ব্যবসায়ী শতকরা কত লাভ করলেন।

খুচরা ব্যবসায়ীর 1 ডজন টেবিল ল্যাম্পের ক্রয়মূল্য 3300 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য 3795 টাকা

∴ তিনি লাভ করেন 3795 টাকা – 3300 টাকা = 495 টাকা

∴ খুচরা ব্যবসায়ীর শতকরা লাভ $\frac{495}{3300} \times 100 = 15$ ∴ খুচরা ব্যবসায়ী 15 % লাভ করেন।

23.1 আমি হিসাব করে দেখি টেবিল ল্যাম্প বিক্রি করে পাইকারি বিক্রেতা শতকরা কত লাভ করলেন।

পাইকারি ব্যবসায়ীর 1 ডজন টেবিল ল্যাম্প ক্রয় করেন ☐ টাকায়।

1 ডজন টেবিল ল্যাম্প বিক্রয় করেন ☐ টাকায়।

সুতরাং, তিনি লাভ করেন 3300 টাকা – 3000 টাকা = ☐ টাকা

∴ পাইকারি ব্যবসায়ীর শতকরা লাভ ☐ [নিজে করি]

একইভাবে আমি হিসাব করে দেখছি টেবিল ল্যাম্প বিক্রি করে উৎপাদকের লাভ হলো ☐ % [নিজে করি]

23.2 কোনো ক্রেতা যদি সরাসরি উৎপাদকের কাছ থেকে কিনত তবে কত সাশ্রয় করত হিসাব করে লিখি।

উৎপাদকের কাছ থেকে সরাসরি কিনলে ক্রেতার সাশ্রয় হতো (3795 – 3000) টাকা = 795 টাকা

24 জোসেফের একটি টর্চ তৈরি করতে 560 টাকা খরচ হলো। জোসেফ ওই টর্চ দোকানদার রাণাকে 22% লাভে বিক্রি করল। রাণা যদি 854 টাকায় ওই টর্চটি বিক্রি করে তবে রাণার শতকরা কত লাভ হবে হিসাব করে লিখি।

প্রথমে জোসেফ রাণাকে 22% লাভে বিক্রি করলে বিক্রয়মূল্য কত হবে হিসাব করি।

100 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য (100 + 22) টাকা=122 টাকা

1 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য $= \frac{122}{100}$ টাকা

560 টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য $= \frac{122 \times 560}{100}$ টাকা

$= \frac{6832}{10}$ টাকা = 683.20 টাকা

∴ রাণা 683.20 টাকায় ওই টর্চটি কেনে। কিন্তু রাণা 854 টাকায় ওই টর্চটি বিক্রি করে।

∴ রাণার লাভ হয় = 854 টা. – 683.20 টা.= 170.80 টাকা

∴ ওই টর্চ বিক্রি করে রাণার শতকরা লাভ হয় $= \frac{170.80 \times 100}{683.20} = \square$

কষে দেখি— 10.2

1. আঁটপুরের সুবলবাবু ধান উৎপাদন করে এক পাইকারি বিক্রেতা সাহানাবিবিকে 20% লাভে চাল বিক্রি করেন। সাহানাবিবি দোকানদার উৎপলবাবুকে 10% লাভে ওই চাল বিক্রি করেন। কিন্তু উৎপলবাবু যদি 12 % লাভে ওই চাল বিক্রি করে থাকেন তবে একটি সরলরেখাংশে ছবি এঁকে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর খুঁজি:
   (i) সুবলবাবুর যে চাল উৎপাদন করতে 7500 টাকা খরচ হয়েছে, সেই চাল সাহানাবিবি কত টাকায় কিনেছেন হিসাব করে লিখি।
   (ii) সুবলবাবুর যে চাল উৎপাদন করতে 2500 টাকা খরচ হয়েছে, সেই চাল উৎপলবাবু কত টাকায় বিক্রি করবেন হিসাব করে লিখি।
   (iii) উৎপলবাবু আমাদের যে দামে চাল বিক্রি করেন সুবলবাবু যদি সেই দামে সরাসরি চাল বিক্রি করেন তবে সুবলবাবুর শতকরা কত লাভ হবে হিসাব করে লিখি।

2. কোন এক বাজারে পাটের ব্যাগ বিক্রয়ের সময়ে উৎপাদনকারী, পাইকারি বিক্রেতা ও খুচরো ব্যবসায়ী যথাক্রমে 15%, 20% ও 25% লাভ করেন। এখন যদি কোনো একটি ব্যাগ উৎপাদনকারী, পাইকারি বিক্রেতা ও খুচরো ব্যবসায়ীর মধ্য দিয়ে ক্রেতার কাছে পৌঁছায়, তবে নীচের প্রশ্নের উত্তর খুঁজি:
   (i) যে ব্যাগ ক্রেতা 138 টাকা দিয়ে কিনেছে তার উৎপাদন খরচ হিসাব করে লিখি।
   (ii) যে ব্যাগের খরচ 140 টাকা সেই ব্যাগ ক্রেতা কী দামে কিনবে হিসাব করে লিখি।
   (iii) খুচরো ব্যবসায়ী যে ব্যাগ 98 টাকা দিয়ে কিনেছেন সেই ব্যাগ কিনতে ক্রেতাকে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করে লিখি।
   (iv) পাইকারি বিক্রেতা যে ব্যাগ 175 টাকায় কিনেছেন সেই ব্যাগ কিনতে ক্রেতাকে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করি।

(v) ক্রেতা যে ব্যাগ 276 টাকায় কিনেছে, সেই ব্যাগ সরাসরি পাইকারি বিক্রেতার থেকে কিনলে কত টাকা তার সাশ্রয় হতো হিসাব করে লিখি।

3. একটি সাইকেলের উৎপাদন খরচ ও বিভিন্ন পর্যায়ে ক্রয়মূল্য হলো,

উৎপাদন খরচ (টাকা)	পাইকারি বিক্রেতার ক্রয়মূল্য (টাকা)	খুচরো ব্যবসায়ীর ক্রয়মূল্য (টাকা)	ক্রেতার ক্রয়মূল্য (টাকা)
1050	1260	1449	1666.35

(i) হিসাব করে দেখি সাইকেল বিক্রি করে খুচরো ব্যবসায়ীর শতকরা কত লাভ হলো।
(ii) হিসাব করে দেখি সাইকেল বিক্রি করে পাইকারি বিক্রেতার শতকরা কত লাভ হলো।
(iii) সাইকেল বিক্রি করে উৎপাদনকারীর শতকরা কত লাভ হলো হিসাব করে লিখি।
(iv) একটি সাইকেল কিনতে ক্রেতাকে সাইকেলটির উৎপাদন খরচের শতকরা কত বেশি দিতে হবে হিসাব করে লিখি।
(v) যদি কোনো ক্রেতা উৎপাদনকারীর কাছ থেকে সরাসরি সাইকেল কেনেন যেখানে উৎপাদনকারীর 30% লাভ থাকে, তাহলে ওই ক্রেতার কত টাকা সাশ্রয় হবে হিসাব করে লিখি।

4. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

(i) ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের অনুপাত 10:11 হলে, শতকরা লাভ
(a) 9 (b) 11 (c) $10\frac{1}{9}$ (d) 10

(ii) একটি বই 40 টাকায় কিনে 60 টাকায় বিক্রি করলে শতকরা লাভ
(a) 50 (b) $33\frac{1}{3}$ (c) 20 (d) 30

(iii) একটি জামা 360 টাকায় বিক্রি করায় 10% ক্ষতি হলো। জামাটির ক্রয়মূল্য
(a) 380 টাকা (b) 400 টাকা (c) 420 টাকা (d) 450 টাকা

(iv) 20% ছাড় দিয়ে বিক্রি করায় একটি জ্যামিতি বাক্সের বিক্রয়মূল্য হয় 48 টাকা। জ্যামিতি বাক্সের ধার্যমূল্য
(a) 60 টাকা (b) 75 টাকা (c) 80 টাকা (d) 50 টাকা

(v) এক খুচরো বিক্রেতা ধার্যমূল্যের উপর 20% ছাড়ে ওষুধ কিনে ক্রেতাকে ধার্যমূল্যে ওষুধ বিক্রি করেন। খুচরো বিক্রেতার শতকরা লাভ
(a) 20 (b) 25 (c) 10 (d) 30

5. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন:

(i) ক্রয়মূল্যের উপর 20% লাভ হলে, বিক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ কত?
(ii) বিক্রয়মূল্যের উপর 20% লাভ হলে, ক্রয়মূল্যের উপর শতকরা লাভ কত?
(iii) 110 টি আম বিক্রি করে 120 টি আমের ক্রয়মূল্য পেলে শতকরা লাভ কত?
(iv) সময়মতো ইলেকট্রিক বিল জমা দিলে 15% ছাড় পাওয়া যায়। সুমনবাবু সময় মতো ইলেকট্রিক বিল জমা দিয়ে 54 টাকা ছাড় পেলেন। তাঁর ইলেকট্রিক বিল কত ছিল?
(v) বিক্রয়মূল্যের উপর 20% ক্ষতিতে একটি দ্রব্য 480 টাকায় বিক্রি করা হলে দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত?
(vi) একটি দ্রব্য পরপর 20% ও 10% ছাড়ে বিক্রয় করা হলে সমতুল্য ছাড় কত?

11 রাশিবিজ্ঞান
STATISTICS

প্রতি বছরের মতো এবছরেও আমাদের গ্রামবাসীদের আর্থিক অবস্থা জানার জন্য আমাদের পাড়ার গ্রাম উন্নয়ন সমিতির কিছু সদস্য গ্রামবাসীদের নানান তথ্য জোগাড় করবেন।

এখন আমাদের স্কুলে গ্রীষ্মের ছুটি চলছে। তাই আমি ও আমার কিছু বন্ধু ঠিক করেছি এবছরে এই কাজে সমিতির দাদা ও দিদিদের সাহায্য করব।

সেইজন্য আমরা গ্রামের 50টি পরিবারের খাদ্যের দৈনিক খরচের একটি **কাঁচা তথ্য (Raw data)** সংগ্রহ করেছি।

গ্রামের 50টি পরিবারের খাদ্যের জন্য দৈনিক খরচ (টাকায়)

145,	150,	200,	175,	75,	90,	250,	125,	190,	175,
110,	175,	90,	150,	145,	125,	190,	200	225,	110,
75,	225,	200,	125,	190,	110,	145,	175,	125,	150,
190,	110,	150,	175,	145,	125,	75,	275,	150,	225,
125,	150,	225,	110,	90,	145,	190,	125,	110,	75

1 **আমি ট্যালিমার্ক দিয়ে এই কাঁচা তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।**

ছক 1

দৈনিক খরচ (x) টাকা	ট্যালি মার্ক	পরিসংখ্যা (f)
75	IIII	4
90	III	3
110	卌I	6
125	卌II	7
145	卌	5
150	卌I	6
175	卌	5
190	卌	5
200	III	3
225	IIII	4
250	I	1
275	I	1
মোট		50

পরিবর্তনশীল সংখ্যাগত লক্ষণকে চল (Variable) বলে। যেমন পরিবারের দৈনিক খরচ একটি চল। যেহেতু পরিবারের দৈনিক খরচ পরিবর্তনশীল এবং দৈনিক খরচ পরিমাপ করা যায় তাই দৈনিক খরচ চল।

চল বিচ্ছিন্ন (Discrete) ও অবিচ্ছিন্ন (Continuous) এই দুইপ্রকার হতে পারে। যেমন দেশে নদীর সংখ্যা, পরিবারের সদস্য সংখ্যা ইত্যাদি বিচ্ছিন্ন চল। আবার ছাত্রের ওজন, উচ্চতা ইত্যাদি অবিচ্ছিন্ন চল।

যা পরিমাপ করা যায় না এমন পরিবর্তনশীল গুণকে কী বলব?

রাশিবিজ্ঞানে (Statistics) পরিবর্তনশীল লক্ষণকে গুণ-লক্ষণ বা গুণ (Attribute) বলে।
যেমন, কোনো বাড়িতে যতগুলি ইলেট্রিক সুইচ থাকে তার দুটি অবস্থা— জ্বালানো (on) ও নিভানো (off)।
কোনো বাড়ির সদস্যদের মহিলা ও পুরুষ এই দুটি ভাগে ভাগ করা যায়।

2 আগের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে পাই চলের সর্বোচ্চ মান 275 ও সর্বনিম্ন মান 75; আমি এই চলের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মানের পার্থক্য হিসাব করি। এই পার্থক্যকে কী বলা হয় লিখি।
কোনো প্রদত্ত রাশিতথ্যের চলের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের অন্তর হলো প্রসার (Range)।
এখানে, প্রসার $= 275 - 75 = 200$

আমি প্রাপ্ত তথ্যকে কতকগুলি শ্রেণিতে বিভক্ত করি।
যদি প্রাপ্ত তথ্যকে 6টি শ্রেণিতে ভাগ করি তবে প্রতিটি শ্রেণির দৈর্ঘ্য হবে $\frac{200}{6} \approx 35$

প্রাপ্ত তথ্যকে শ্রেণিতে ভাগ করে পেলাম: **ছক - 2**

দৈনিক খরচ টাকায় (x)	ট্যালি মার্ক	পরিসংখ্যা (f)
70 – 105	卌 II	7
105 – 140	卌 卌 III	13
140 – 175	卌 卌 I	11
175 – 210	卌 卌 III	13
210 – 245	IIII	4
245 – 280	II	2

∴ পেলাম, বিস্তৃত প্রসার আছে এইরকম চলের মানগুলিকে কতকগুলি শ্রেণি বা বিভাগে ভাগ করা যায়। এরকম প্রত্যেকটি শ্রেণিকে শ্রেণি অন্তর (Class interval) বলা হয়।
আবার কোনো শ্রেণির অন্তর্গত মানগুলির সংখ্যাকে শ্রেণিটির শ্রেণি-পরিসংখ্যা (Class frequency) বলা হয়।

কিন্তু শ্রেণি অন্তরের সংখ্যা কতগুলি নেব?

শ্রেণি অন্তরের সংখ্যা **পাঁচের কম এবং তিরিশের বেশি** হওয়া উচিত নয়। কারণ, শ্রেণি অন্তরের সংখ্যা খুব কম হলে ভ্রমশূন্যতা নষ্ট হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। আবার শ্রেণি অন্তরের সংখ্যা খুব বেশি হলে হিসাব পরিশ্রমসাধ্য হয়ে পড়ে।

শ্রেণী অন্তরে প্রান্তস্থ মানদুটিকে কী বলব?

শ্রেণি অন্তরের প্রান্তস্থ মানদ্বয়কে **শ্রেণি-সীমা** (class-limit) বলা হয়।

একটি নির্দিষ্ট শ্রেণির শ্রেণি-সীমাদ্বয়ের ক্ষুদ্রতর মানটিকে **নিম্নসীমা** (Lower class-limit) এবং বৃহত্তর মানটিকে **ঊর্ধ্বসীমা** (Upper class-limit) বলা হয়।

2 নং ছকে দ্বিতীয় শ্রেণিটির (অর্থাৎ 105 – 140 শ্রেণিটির) নিম্নসীমা 105 এবং ঊর্ধ্বসীমা 140

শ্রেণি-সীমা নির্ধারণের সময়ে অবিন্যাসিত চলের সর্বনিম্ন মান থেকেই যে শুরু করতে হবে এবং সর্বোচ্চ মানে গিয়ে শেষ করতে হবে এমন কোনো বাঁধাধরা নিয়ম নেই। সকল শ্রেণির প্রসার একই মানের রাখার জন্য প্রয়োজন বোধে চলের সর্বনিম্ন মান অপেক্ষা কম যে কোনো উপযোগী সংখ্যাকে প্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা ধরা যেতে পারে।

ছক 2 নং -এ দেখেছি , (140 – 175) ও (175 – 210)-শ্রেণি দুটির মধ্যে 175 এই নিম্নসীমাটিকে (175 – 210)- শ্রেণির মধ্যে নেওয়া হয়েছে কিন্তু (140 – 175)-শ্রেণিতে নেওয়া হয়নি কেন?

শ্রেণি-সীমা দুইভাবে প্রকাশ করা হয়।

(i) শ্রেণি-বহির্ভূত পদ্ধতি (Exclusive method)

(ii) শ্রেণি-অন্তর্ভুক্ত পদ্ধতি (Inclusive method)

(i) শ্রেণি-বহির্ভূত পদ্ধতিতে প্রতিটি শ্রেণির ঊর্ধ্বসীমা ঠিক পরবর্তী শ্রেণির নিম্নসীমা হিসাবে প্রকাশ করা হয় এবং শ্রেণির ঊর্ধ্বসীমা ওই শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত হয় না। সেটি ঠিক পরবর্তী শ্রেণিটিতে অন্তর্ভুক্ত হয়। যেমন, শ্রেণী-বহির্ভূত পদ্ধতিতে 70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, 175 – 210, ইত্যাদি।

(ii) শ্রেণি-অন্তর্ভুক্ত পদ্ধতিতে প্রতিটি শ্রেণির নিম্নসীমা ও ঊর্ধ্বসীমা নির্দেশক সংখ্যাগুলি ওই শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত হয়। যেমন, 60 – 69, 70 – 79, 80 – 89, ইত্যাদি।

শ্রেণি-অন্তর্ভুক্ত পদ্ধতিতে দুটি ক্রমিক (পরপর) শ্রেণির শ্রেণি-সীমার মধ্যবর্তী ফাঁক কীভাবে পূরণ করা হয়। অর্থাৎ, 60 – 69 এবং 70 – 79 শ্রেণিদুটির 69 ও 70-এর মধ্যবর্তী ফাঁক কীভাবে পূরণ করা হয়?

কোন রাশিতথ্যের ক্রমিক শ্রেণিগুলির শ্রেণি-সীমাগুলির মধ্যবর্তী ফাঁক পূরণ করার জন্য যে সীমাদ্বয় পর্যন্ত কোনো শ্রেণিকে প্রসারিত করা হয় সেই সীমাদ্বয়কে ওই শ্রেণির শ্রেণি-সীমানা (Class-boundaries) বা শ্রেণিসীমান্ত বলা হয়। ক্ষুদ্রতর মানটিকে নিম্ন শ্রেণি-সীমানা (Lower class boundary) এবং বৃহত্তর মানটিকে ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা (Upper class boundary) বলা হয়।

শ্রেণি-সীমা থেকে কীভাবে শ্রেণি-সীমানা পাবো দেখি।

ধরি, কোনো শ্রেণির ঊর্ধ্বসীমা ও তার ঠিক পরবর্তী শ্রেণিটির নিম্নসীমার অন্তর $= d$

$\therefore$ সেক্ষেত্রে, শ্রেণিটির নিম্ন শ্রেণি-সীমানা = শ্রেণিটির নিম্নসীমা $- \frac{d}{2}$

এবং শ্রেণিটির ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা = শ্রেণিটির ঊর্ধ্বসীমা $+ \frac{d}{2}$

বুঝেছি, 60 – 69, 70 –79, 80 – 89, ... শ্রেণিগুলি শ্রেণি-সীমানার সাহায্যে প্রকাশ করে পাই,

59.5 – 69.5, ☐ – ☐, ☐ – 89.5, ... [নিজে লিখি]

[যেহেতু, $\frac{70-69}{2} = 0.5$]

আবার, 70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, ... শ্রেণিগুলির শ্রেণি-সীমানার সাহায্যে প্রকাশ করে পাই,

70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, ...

অর্থাৎ একই পেলাম। কারণ, এক্ষেত্রে $d = \frac{105 - 105}{2} = 0$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে শ্রেণি-সীমা ও শ্রেণি-সীমানা একই।

কোন শ্রেণিসীমানাদ্বয়ের মাঝখানের মানকে কী বলব?

চলের যে মান শ্রেণিসীমানাদ্বয়ের ঠিক মাঝখানে থাকে তাকে ওই শ্রেণির মধ্যমান বা শ্রেণি-মধ্যক (Mid - value or Class-mark) বলা হয়।

∴ কোনো শ্রেণির মধ্যমান = $\frac{\text{ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমা + নিম্ন শ্রেণি-সীমা}}{2}$

বা কোনো শ্রেণির মধ্যমান = $\frac{\text{ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা + নিম্ন শ্রেণি-সীমানা}}{2}$

আবার, কোনো শ্রেণির সীমানাদ্বয়ের অন্তর হলো ওই শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য।

∴ শ্রেণি-দৈর্ঘ্য = ঊর্ধ্ব শ্রেণি-সীমানা – নিম্ন শ্রেণি-সীমানা।

বুঝেছি, 60 – 69 শ্রেণির মধ্য-মান = $\frac{60 + 69}{2}$ (বা, $\frac{59.5 + 69.5}{2}$) = 64.5

এবং 60 – 69 -এর শ্রেণি-দৈর্ঘ্য = 69.5 – 59.5 = 10

ছক 2 থেকে দেখছি, 70 – 105, 105 – 140, 140 – 175, 175 – 210, 210 – 245 ও 245 – 280-এর শ্রেণি পরিসংখ্যা যথাক্রমে □, □, □, □, □ ও □,

ছক 2 -এর মোট পরিসংখ্যা = 7 + 13 + □ + □ + 4 + □ = 50,

3 আমি ছক 2 নং -এর শ্রেণি পরিসংখ্যা ও শ্রেণি-দৈর্ঘ্যের অনুপাত নিই ও কী পাই দেখি।

70 – 105 শ্রেণিটির শ্রেণি পরিসংখ্যা = □

70 – 105 শ্রেণিটির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য = 105 – 70 = 35

∴ (70 – 105) শ্রেণিটির, $\frac{\text{শ্রেণিপরিসংখ্যা}}{\text{শ্রেণি-দৈর্ঘ্য}} = \frac{7}{35} = 0.2$

কোন শ্রেণিবিন্যাসিত রাশি তথ্যের কোন শ্রেণির শ্রেণি পরিসংখ্যা ও ওই শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্যের অনুপাতকে ওই শ্রেণিটির পরিসংখ্যা ঘনত্ব (Frequency density) বলা হয়।

সুতরাং, কোনো শ্রেণির পরিসংখ্যা ঘনত্ব = $\frac{\text{উক্ত শ্রেণির পরিসংখ্যা}}{\text{শ্রেণি-দৈর্ঘ্য}}$

বুঝেছি ছক 2 নং -এর শ্রেণিবিন্যাসের, (70 – 105) শ্রেণিটির পরিসংখ্যা ঘনত্ব = 0.2

একইভাবে 105 – 140 শ্রেণিটির পরিসংখ্যা ঘনত্ব = □ [নিজে লিখি]

কিন্তু কোনো শ্রেণির শ্রেণি পরিসংখ্যা ও মোট পরিসংখ্যার অনুপাতকে কী বলা হয়?

কোনো শ্রেণিবিন্যাসিত রাশিতথ্যের কোনো শ্রেণির শ্রেণি পরিসংখ্যা ও মোট পরিসংখ্যার অনুপাতকে ওই শ্রেণিটির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা (Relative frequency) বলা হয়।

$\therefore$ কোনো শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা = $\dfrac{\text{উক্ত শ্রেণির পরিসংখ্যা}}{\text{মোট পরিসংখ্যা}}$

বুঝেছি, 70 – 105 শ্রেণিটির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা = $\dfrac{7}{50}$ = 0.14

105 – 140 শ্রেণিটির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা = □ [নিজে লিখি]

যদি আপেক্ষিক পরিসংখ্যা শতকরায় প্রকাশ করি তাকে কী বলে?

আপেক্ষিক পরিসংখ্যাকে শতকরায় প্রকাশ করলে তাকে বলা হয় পরিসংখ্যার শতকার হার (Percentage frequency) অর্থাৎ

কোনো শ্রেণির পরিসংখ্যার শতকরা হার = $\dfrac{\text{উক্ত শ্রেণির পরিসংখ্যা}}{\text{মোট পরিসংখ্যা}} \times 100$

আমি ছক 2 -এর তথ্য নতুন ছকে সাজিয়ে লিখি :

[ফাঁকা ঘরে নিজে হিসাব করে লিখি]

ছক 3

দৈনিক খরচ	শ্রেণি পরিসংখ্যা	শ্রেণি-সীমা		শ্রেণি-সীমানা		মধ্য-মান	শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা ঘনত্ব	আপেক্ষিক পরিসংখ্যা	পরিসংখ্যার শতকরা হার
		নিম্ন	উচ্চ	নিম্ন	উচ্চ					
70 – 105	07	70	105	70	105	87.5	35	0.2	0.14	0.14× 100 = 14
105 – 140	13	□	□	105	140	□	□	$\frac{13}{35}$ = .37	$\frac{13}{50}$ = .26	□
140 – 175	11	□	□	□	□	□	35	□	$\frac{11}{50}$ = .22	□
175 – 210	13	□	□	□	□	192.5	□	□	□	□
210 – 245	04	□	□	□	□	□	□	□	□	□
245 – 280	02	□	□	□	□	□	□	□	□	□
মোট	50								□	□

একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে সকল শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যার যোগফল সর্বদা 1 এবং পরিসংখ্যার শতকরা হারের যোগফল সর্বদা 100.

আমাদের স্কুলে ছাত্রছাত্রীরা সারা বছর ধরে স্কুলের বিভিন্ন অনুষ্ঠানে অংশগ্রহণ করে এবং ওই অনুষ্ঠানগুলোয় তারা তাদের মতো কিছু করে। তাই বছরের শেষে কিছু নম্বরও তাদের দেওয়া হয়।

4 এইরকমই আমাদের স্কুলের 40 জন ছাত্রছাত্রীর প্রাপ্ত নম্বর নীচে লিখলাম।

30	23	45	40	29	34	15	01	41	12
11	12	49	03	13	02	29	30	24	29
25	03	13	32	39	19	49	07	43	09
41	13	02	44	27	12	22	32	25	31

1 – 10, 11 – 20, ... , 41 – 50 শ্রেণিগুলি নিয়ে নম্বরগুলির একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

ছক 4

শ্রেণি	শ্রেণি পরিসংখ্যা	শ্রেণি-সীমা		শ্রেণি-সীমানা		শ্রেণি মধ্যমান	শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা ঘনত্ব
		নিম্ন	উচ্চ	নিম্ন	উচ্চ			
1 – 10	7	1	10	0.5	10.5	5.5	10	0.7
11 – 20	☐	11	20	10.5	20.5	15.5	10	0.9
21 – 30	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
31 – 40	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
41 – 50	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
মোট	40							

5 মিহির এক ঝুড়ি আপেলের ভিতর থেকে 35 টি আপেল নিয়ে তাদের ওজন (গ্রামে) নীচে লিখল।

82	109	107	141	165	115	93
172	92	86	70	150	126	130
129	100	119	84	99	113	106
111	136	90	115	110	78	90
107	131	104	110	118	80	128

আমি উপরের তথ্যের এমন একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করি যেন উহার প্রথম শ্রেণিটির মধ্যমান 70 গ্রাম হয় এবং প্রত্যেকটি শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 20 হয়।

প্রথম শ্রেণির মধ্যমান 70 গ্রাম এবং প্রত্যেক শ্রেণির প্রসার 20

$\therefore$ প্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা $= 70 - \frac{20}{2} = 60$

এবং উর্ধ্বসীমা $= 70 + \frac{20}{2} = 80$

$\therefore$ প্রথম শ্রেণি (60 – 80)

ছক 5

শ্রেণি ওজন (গ্রামে)	ট্যালি মার্ক	পরিসংখ্যা
60 – 80	II	2
80 – 100	卌 IIII	9
100 – 120	卌 卌 IIII	14
120 – 140	卌 I	6
140 – 160	II	2
160 – 180	II	2

6 নীচে 40টি দোকানের মাসিক ভাড়া (টাকায়) লিখেছি। 80 শ্রেণি দৈর্ঘ্যযুক্ত একটি পরিসংখ্যা- বিভাজন ছক তৈরি করি।

380	420	490	370	820	370	755	620	540	790
840	750	630	440	740	440	480	540	690	360
510	820	770	720	740	470	520	570	620	670
770	470	640	840	810	310	380	430	750	670

[নিজে করি]

7 আজ সপ্তম শ্রেণির 40জন ছাত্রছাত্রীর 100 নম্বরের গণিত পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বর জানানো হয়েছে।
তাদের প্রাপ্ত নম্বরগুলি নীচের ছকে লিখলাম।

32	40	45	92	83	48	56	71	77	49
61	97	36	44	52	67	85	70	45	56
81	73	39	50	74	60	48	64	80	44
45	64	42	71	70	42	75	41	78	60

আমি উপরের তথ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করি যার শ্রেণি দৈর্ঘ্য 10

সর্বোচ্চ নম্বর = ☐, সর্বনিম্ন নম্বর = 31

পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি যার শ্রেণি দৈর্ঘ্য 10

ছক 6

প্রাপ্ত নম্বর	ট্যালি মার্ক	পরিসংখ্যা (ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা)
30-40	III	3
40-50	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
50-60	IIII	4
60-70	~~IIII~~ I	6
70-80	~~IIII~~ IIII	9
80-90	IIII	4
90-100	II	2

7.1 আগের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে কতজন 50 থেকে 60 নম্বরের মধ্যে এবং কতজন 50 নম্বরের কম নম্বর পেয়েছে হিসাব করি :

দেখছি, 4 জন শিক্ষার্থী গণিতে 50 নম্বর থেকে 60 নম্বরের মধ্যে পেয়েছে।

কিন্তু মোট কতজন শিক্ষার্থী 50 নম্বরের কম পেয়েছে কীভাবে দেখব?

আগের ছক থেকে দেখছি,

40 নম্বরের কম নম্বর পেয়েছে 3 জন

40 ও 40-এর বেশি কিন্তু 50 নম্বরের কম নম্বর পেয়েছে 12 জন

$\therefore$ 50 নম্বরের কম নম্বর পেয়েছে মোট (3+12) জন

= 15 জন

সহজে হিসাবের জন্য পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি নীচের মতো লিখলাম।

ছক - 7

প্রাপ্ত নম্বর	পরিসংখ্যা (ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা)
30-এর কম	0
40-এর কম	3
50-এর কম	3 + 12 = 15
60-এর কম	3 + 12 + 4 = 19
70-এর কম	3 + 12 + 4 + 6 = 25
80-এর কম	3 + 12 + 4 + □ + □ = □
90-এর কম	3 + 12 + 4 + 6 + 9 + 4 = 38
100-এর কম	3 + 12 + 4 + 6 + 9 + 4 + □ = □

এইরকম পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাকে কী বলা হয়?

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকায় শ্রেণি পরিসংখ্যাগুলিকে ক্রমে পরপর যোগ করে নতুন পরিসংখ্যা পেয়েছি। এই পরিসংখ্যা-বিভাজন তালিকাকে ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা (Less than type cumulative Frequency distribution table) বলা হয়।

7.2 একইভাবে 50 অথবা 50 নম্বরের বেশি নম্বর কত জন ছাত্রছাত্রী পেয়েছে হিসাব করি।

প্রথম পরিসংখ্যা বিভাজন ছক বা ছক 6 থেকে দেখছি,

50 বা 50-এর চেয়ে বেশি নম্বর পেয়েছে, মোট = (2 + 4 + 9 + 6 + 4) জন = 25 জন।

সহজে সুবিধার জন্য পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি নীচের মতো লিখলাম।

প্রাপ্ত নম্বর	পরিসংখ্যা (ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা)
30 অথবা 30-এর বেশি	3 + 12 + 4 + 6 + 9 + 4 + 2 = 40
40 অথবা 40-এর বেশি	12 + 4 + 6 + 9 + 4 + 2 = 37
50 অথবা 50-এর বেশি	4 + 6 + 9 + 4 + 2 = 25
60 অথবা 60-এর বেশি	□ + □ + □ + □ = 21
70 অথবা 70-এর বেশি	9 + 4 + 2 = 15
80 অথবা 80-এর বেশি	□ + □ = □
90 অথবা 90-এর বেশি	2
100 অথবা 100-এর বেশি	0

এইরকম পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাকে কী বলা হয়?

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাকে বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা (More than type cumulative Frequency Distribution table) বলা হয়।

উপরের তালিকা থেকে সহজেই দেখেছি 25 জন ছাত্রছাত্রী 50 বা 50-এর থেকে বেশি নম্বর পেয়েছে।

পেলাম, যে পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রত্যেকটি শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা দেখানো হয় তাকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন বলা হয়।

দুই ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করা হয়।

(i) ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক। (ii) বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক।

উপরের ছক থেকে বলতে পারি, 50-60 শ্রেণির ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 19

এবং 50-60 শ্রেণির বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 25

কতজন ছাত্রছাত্রী 40 বা 40-এর চেয়ে বেশি নম্বর পেয়েছে হিসাব করে লিখি। [নিজে লিখি]

8 অনুষ্কা ও কুশল স্কুলের 100 জন বন্ধুদের সপ্তাহের টিফিন খরচের একটি তালিকা তৈরি করেছে।

সাপ্তাহিক টিফিন খরচ (টাকা)	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
বন্ধুদের সংখ্যা	13	12	20	13	23	19

আমি উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি এবং নীচের প্রশ্নের উত্তর খুঁজি।

(i) কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 80 টাকার কম লিখি।

(ii) কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 40 টাকা বা 40 টাকার বেশি লিখি।

(iii) কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 60 টাকা বা 60 টাকার বেশি, কিন্তু 100 টাকার কম লিখি।

আমি প্রথমে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

শ্রেণি-সীমানা সাপ্তাহিক খরচ (টাকা)	ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0-এর কম	0
20-এর কম	13
40-এর কম	25
60-এর কম	45
80-এর কম	58
100-এর কম	81
120-এর কম	100

শ্রেণি-সীমানা সাপ্তাহিক খরচ (টাকা)	বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
120 বা 120-এর বেশি	0
100 বা 100-এর বেশি	19
80 বা 80-এর বেশি	42
60 বা 60-এর বেশি	55
40 বা 40-এর বেশি	75
20 বা 20-এর বেশি	87
0 বা 0-এর বেশি	100

উপরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে দেখছি,

☐ জন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 80 টাকার কম।

☐ জন বন্ধুর সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 40 টাকা বা 40 টাকার বেশি।

সাপ্তাহিক টিফিন খরচ 60 টাকা বা 60 টাকার বেশি কিন্তু 100 টাকার কম এমন ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা,

(81 – 45) = 36 বা (55 – 19) = 36

ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা থেকে পেলাম

বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা তালিকা থেকে পেলাম

9 আমি নীচের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা থেকে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

শ্রেণি	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 — 7	5
7 — 14	14
14 — 21	25
21 — 28	42
28 — 35	50
35 — 42	61
42 — 49	65

প্রদত্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা থেকে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি তৈরি করলাম।

শ্রেণি	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 — 7	5	5
7 — 14	14 – 5 = 9	14
14 — 21	25 – 14 = 11	25
21 — 28	42 – 25 = 17	42
28 — 35	50 – 42 = 8	50
35 — 42	61 – 50 = ☐	61
42 — 49	☐ – ☐ = 4	65

নিজে করি— 11.1

মৃগাঙ্ক তাদের কারখানার 30 জন কর্মচারীর বয়স লিখেছে।

বয়স (বছর)	21–23	23–25	25–27	27–29	29–31	31–33	33–35
কর্মচারীর সংখ্যা	3	4	5	6	5	4	3

আমি উপরের তথ্যের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি এবং সেখান থেকে নীচের প্রশ্নের উত্তর খুঁজি।

(i) কারখানায় 27 বছরের কম বয়সের কতজন কর্মচারী আছে লিখি।

(ii) 25 বছর বা 25 বছরের বেশি বয়সের কতজন কর্মচারী আছে লিখি।

(iii) 25 বছর বা 25 বছরের বেশি কিন্তু 33 বছরের কম বয়সের কতজন কর্মচারী আছে লিখি।

কষে দেখি— 11.1

1. পাড়ার 40 টি পরিবারের প্রত্যেকটি পরিবারের শিশুসংখ্যার তথ্য নীচে লিখেছি।

1	2	6	5	1	5	1	3	2	6
2	3	4	2	0	4	4	3	2	2
0	0	1	2	2	4	3	2	1	0
5	1	2	4	3	4	1	6	2	2

আমি উপরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি যার শ্রেণিগুলি হলো 0–2, 2–4, ... ইত্যাদি। এই পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে (i) শ্রেণি-অন্তর (ii) শ্রেণি-দৈর্ঘ্য (iii) শ্রেণি-পরিসংখ্যা (iv) শ্রেণি-সীমা বলতে কী বুঝি লিখি।

2. স্কুলের কোনো এক পরীক্ষায় 40 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের তালিকা নীচে প্রদত্ত হলো :

34	27	45	21	30	40	11	47	01	15
03	40	12	47	48	18	30	24	25	28
32	31	25	22	27	41	12	13	02	44
43	07	09	49	13	19	32	39	24	03

1–10, 11–20, ..., 41–50 শ্রেণিগুলি নিয়ে নম্বরগুলির একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করি।

3. একটি ঝুড়িতে অনেকগুলি কমলালেবু রাখা আছে। এই এক ঝুড়ি কমলালেবু থেকে লক্ষ্যহীনভাবে 40টি কমলালেবু নিয়ে তাদের ওজন (গ্রামে) নীচে লিখলাম।

45, 35, 30, 55, 70, 100, 80, 110, 80,75, 85, 70, 75, 85, 90, 75, 90, 30, 55, 45, 40, 65, 60, 50, 40, 100, 65, 60, 40, 100, 75, 110, 30, 45, 84, 70, 80, 95, 85, 70.

এবার আমি উপরের তথ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক এবং একটি ক্ষুদ্রতর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

4. মিতালী ও মহিদুল গ্রামের 45টি বাড়ির এই মাসের ইলেকট্রিক বিলের টাকার পরিমাণ নীচে লিখল।

116, 127, 100, 82, 80, 101, 91, 65, 95, 89, 75, 92, 129, 78, 87, 101, 65, 52, 59, 65, 95, 108, 115, 121, 128, 63, 76, 130, 116, 108, 118, 61, 129, 127, 91, 130, 125, 101, 116, 105, 92, 75, 98, 65,110.

আমি উপরের তথ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

5. মারিয়া একটি হাসপাতালের 300 জন রোগীর বয়স নীচের ছকে লিখল।

বয়স (বছরে)	10−20	20−30	30−40	40−50	50−60	60−70
রোগীর সংখ্যা	80	40	50	70	40	20

আমি উপরের তথ্যের বৃহত্তর-সূচক ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরি করি।

6. নীচের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি দেখি এবং একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

শ্রেণি	10 -এর কম	20-এর কম	30-এর কম	40-এর কম	50-এর কম	60-এর কম
ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা	17	22	29	37	50	60

7. নীচের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি দেখি এবং একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা
60 -এর বেশি	0
50 -এর বেশি	16
40 -এর বেশি	40
30 -এর বেশি	75
20 -এর বেশি	87
10 -এর বেশি	92
0 -এর বেশি	100

8. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

i) নিম্নের কোনটি তথ্যের চিত্র উপস্থাপন
(a) দণ্ডলেখ (b) কাঁচা তথ্য (c) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (d) পরিসংখ্যা বিভাজন।

ii) 12, 25, 15, 18, 17, 20, 22, 26, 6, 16, 11, 8, 19, 10, 30, 20, 32 তথ্যের প্রসার
(a) 10 (b) 15, (c) 18 (d) 26

iii) 1-5, 6-10 , ... শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য
(a) 4 (b) 5 (c) 4.5 (d) 5.5

iv) একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার শ্রেণির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে 15, 20, 25, 30 ....। যে শ্রেণির মধ্যবিন্দু 20 সেটি হলো,
(a) 12.5 – 17.5 (b) 17.5 – 22.5 (c) 18.5 – 21.5 (d) 19.5 – 20.5

v) একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকায় একটি শ্রেণির মধ্যবিন্দু 10 এবং প্রতিটি শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 6; শ্রেণিটির নিম্নসীমা
(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 12

9. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন:

a) একটি অবিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার একটি শ্রেণির মধ্যবিন্দু m এবং উচ্চশ্রেণি-সীমানা u হলে নিম্নশ্রেণি সীমানাটি কত তা বের করি।

b) একটি অবিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকায় একটি শ্রেণির মধ্যবিন্দু 42 এবং শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 10 হলে শ্রেণিটির উচ্চ ও নিম্ন সীমা কত তা লিখি।

c)

শ্রেণিসীমা	70 – 74	75 – 79	80 – 84	85 – 89
পরিসংখ্যা	3	4	5	8

উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার প্রথম শ্রেণির পরিসংখ্যা ঘনত্ব কত তা লিখি।

d) (c) প্রশ্নের শেষ শ্রেণির আপেক্ষিক পরিসংখ্যা কত তা লিখি।

e) নীচের উদাহরণগুলিতে কোনগুলি গুণ এবং কোনগুলি চল নির্দেশ করে লিখি :
i) পরিবারের জনসংখ্যা ii) দৈনন্দিন তাপমাত্রা iii) শিক্ষাগত মান iv) মাসিক আয়
v) মাধ্যমিক পরীক্ষায় প্রাপ্ত গ্রেড

আজ ধ্রুব ও অহনা ঠিক করেছে ছক 3-এর পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির লৈখিক উপস্থাপন করে গ্রামবাসীদের আর্থিক অবস্থার একটি চিত্র তুলে ধরবে।

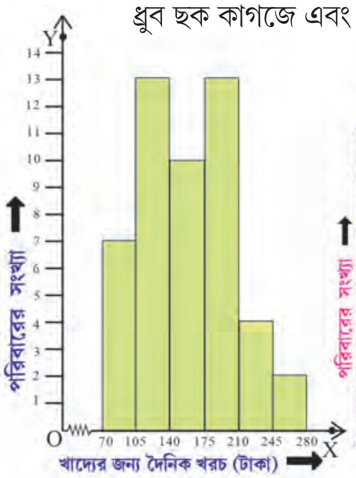
10 ছক 3-এর অবিচ্ছিন্ন চলের তথ্যটির লৈখিক উপস্থাপন করার চেষ্টা করি ও কী পাই দেখি।

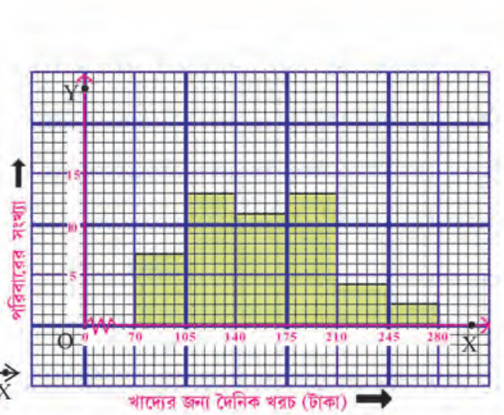
(i) প্রথমে x-অক্ষ (অনুভূমিক রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 35 টাকা [অথবা 0.5 সেমি. = 35 টাকা] নিয়ে পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণিবিভাগগুলির শ্রেণি সীমানাগুলির মানগুলিকে কোনো ফাঁক না রেখে পরপর স্থাপন করলাম। অর্থাৎ অনুভূমিক রেখাটি 70–105, 105–140....... শ্রেণি বিভাগগুলির অনুরূপ কয়েকটি অংশে বিভক্ত করলাম। যেহেতু 0 থেকে শুরু না করে 70 থেকে শুরু করব তাই x-অক্ষে বা অনুভূমিক রেখায় একটি (–/\/\/\/–) ভগ্নরেখা নির্দেশ করব।

দৈনিক খরচ শ্রেণি	শ্রেণি সীমানা		শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	শ্রেণি পরিসংখ্যা
	নিম্ন	উচ্চ		
70 – 105	70	105	35	7
105 – 140	105	140	35	13
140 – 175	140	175	35	11
175 – 210	175	210	35	13
210 – 245	210	245	35	4
245 – 280	245	280	35	2
				মোট = 50

আবার y-অক্ষ (উলম্ব রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 টি পরিবার [অথবা 0.5 সেমি. = 1 টি পরিবার] নিয়ে নীচের ছবির মতো কতকগুলি পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করলাম যার প্রস্থ শ্রেণির শ্রেণি-দৈর্ঘ্য এবং দৈর্ঘ্য অর্থাৎ এক্ষেত্রে উচ্চতা অনুরূপ শ্রেণির পরিসংখ্যা বা পরিসংখ্যা ঘনত্বের সমান দৈর্ঘ্য এককে হয়। যখন শ্রেণিগুলির দৈর্ঘ্যগুলি সমান হয় না, তখন উচ্চতাগুলির দৈর্ঘ্যগুলিকে অনুরূপ পরিসংখ্যা ঘনত্বের সাথে সমানুপাতী নিতে হয়। ছক কাগজে 70-105 শ্রেণি অন্তরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ 5 একক এবং দৈর্ঘ্য 7 একক।

ধ্রুব ছক কাগজে এবং অহনা নিজের খাতায় আঁকল।





আমরা এইভাবে লেখচিত্র অঙ্কন করে কতকগুলি আয়তক্ষেত্র পেলাম যাদের মধ্যে কোনো ফাঁক নেই এবং আয়তক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণিগুলির পরিসংখ্যার সমানুপাতী।

অবিচ্ছিন্ন চলের শ্রেণি-বিন্যাসিত পরিসংখ্যা বিভাজনের এরকম আয়তক্ষেত্রের মাধ্যমে লৈখিক উপস্থাপনকে কী বলা হয়?

অবিচ্ছিন্ন চলের শ্রেণি বিন্যাসিত পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক উপস্থাপনকে আয়তলেখ (Histogram) বলা হয়।

আয়তলেখ হলো পরস্পর সংলগ্ন একগুচ্ছ আয়তক্ষেত্র। প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণির পরিসংখ্যার বা পরিসংখ্যা ঘনত্বের সমানুপাতী।

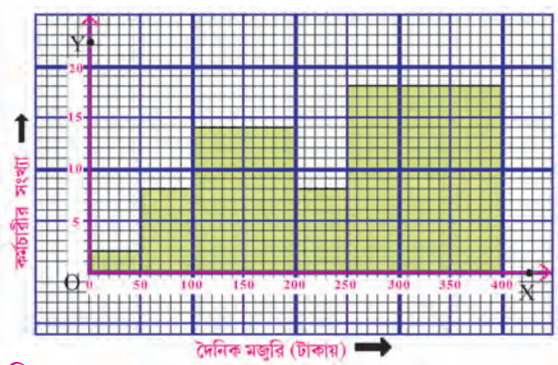
আমাদের পাড়ার একটি ছোটো লোহার যন্ত্রপাতি তৈরির কারখানায় অনেক কর্মচারী কাজ করেন। আমরা তাদের কিছুজনের দৈনিক মজুরির (টাকায়) একটি তালিকা তৈরি করেছি।

11 সেই তালিকাটি হলো,

দৈনিক মজুরি (টাকায়)	0 – 50	50 – 100	100 – 200	200 – 250	250 – 400
কর্মচারীর সংখ্যা	2	8	14	8	18

আমি উপরের তথ্যকে একটি আয়তলেখর মাধ্যমে প্রকাশ করি।
প্রথমে উপরের তথ্যের নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করলাম।

শ্রেণি (দৈনিক মজুরি টাকায়)	শ্রেণি সীমানা দ্বারা নির্দিষ্ট শ্রেণি	শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা
0 – 50	0 – 50	50	2
50 – 100	50 – 100	50	8
100 – 200	100 – 200	100	14
200 – 250	200 – 250	50	8
250 – 400	250 – 400	150	18
মোট			50



পরিসংখ্যা বিভাজনের ছকটির শ্রেণি-বিভাগগুলির লৈখিক উপস্থাপন করলাম। x-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 একক এবং y-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক ধরে আয়তলেখ অঙ্কন করেছি।
দেখছি পাশের লৈখিক চিত্রটিতে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলগুলি আয়তলেখর শ্রেণি-পরিসংখ্যার সমানুপাতী নয়।

কিন্তু কেন এমন হলো?

বুঝেছি, পূর্বে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে শ্রেণি দৈর্ঘ্যগুলি সমান ছিল। কিন্তু এই ছকে শ্রেণি-দৈর্ঘ্যগুলি অসমান।

এই রকমক্ষেত্রে অর্থাৎ পরিসংখ্যা বিভাজনে শ্রেণি-দৈর্ঘ্যগুলি যখন সমান নয়, তখন আয়তলেখর মাধ্যমে তথ্যটি কীভাবে উপস্থাপন করব?

এইরকম ক্ষেত্রে আমাদের নীচের দুটি ধাপ অনুসরণ করতে হবে।

(i) প্রথমে সুবিধামতো সবচেয়ে ছোটো শ্রেণি-দৈর্ঘ্যর একটি শ্রেণি-অন্তর বেছে নেব। উপরের উদাহরণে সবচেয়ে ছোটো শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 50 বেছে নিলাম।

(ii) এবার আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য (উলম্ব) এমন করব যাতে অন্যান্য সকল আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 50 শ্রেণি-দৈর্ঘ্যের সমানুপাতী হয়।

যেমন, যখন শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 100 তখন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 14

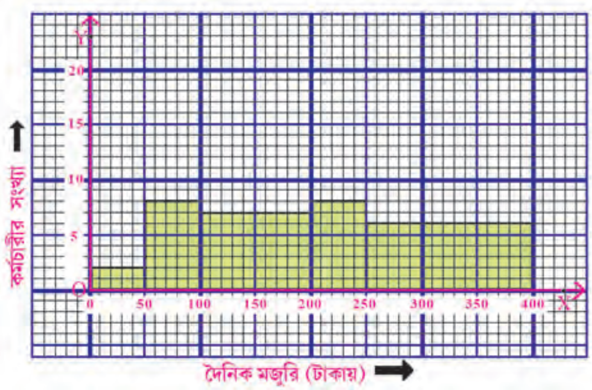
সুতরাং, যখন শ্রেণি দৈর্ঘ্য 50 তখন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য হবে $\frac{14}{100} \times 50 = 7$

একইভাবে, আয়তলেখর আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যগুলি হিসাব করে লিখি।

শ্রেণি (দৈনিক মজুরি টাকায়)	পরিসংখ্যা	শ্রেণি-দৈর্ঘ্য	আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য
0 – 50	2	50	$\frac{2}{50} \times 50 = 2$
50 – 100	8	50	$\frac{8}{50} \times 50 = 8$
100 – 200	14	100	$\frac{14}{100} \times 50 = 7$
200 – 250			$\frac{8}{50} \times 50 = 8$
250 – 400			$\frac{18}{150} \times 50 = 6$

উপরের ছকে দৈনিক মজুরি প্রতি 50 টাকায় শ্রমিক সংখ্যা পেয়েছি।

আগের পাতার ছকের হিসাব অনুযায়ী প্রদত্ত তথ্যের সঠিক আয়তলেখ অঙ্কন করি যার প্রস্থ সমান নয়।



যদি সংগৃহীত তথ্যটি নিম্নরূপ হতো,

দৈনিক মজুরি (টাকায়)	0–50	50–150	150–200	200–300	300–350
কর্মচারীর সংখ্যা	200	900	600	1200	1000

নিজে আয়তলেখ অঙ্কন করি

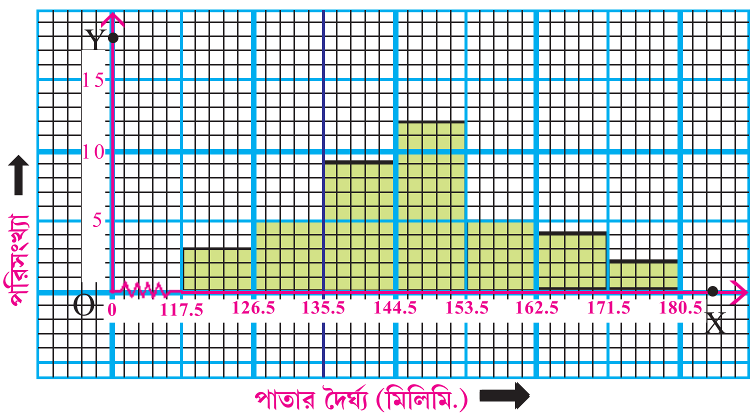
12 সিমরন ও রাহুল অনেকগুলি গাছের পাতার দৈর্ঘ্য মেপে যে তথ্যগুলি পেল সেগুলি নীচের ছকে লিপিবদ্ধ করল।

পাতার দৈর্ঘ্য [মিলিমি.]	118–126	127–135	136–144	145–153	154–162	163–171	172–180
পাতার সংখ্যা	3	5	9	12	5	4	2

আমি আগের পাতার তথ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি।

পাতার দৈর্ঘ্যের শ্রেণি (মিলিমি.)	শ্রেণি সীমানা দ্বারা নির্দিষ্ট শ্রেণি	শ্রেণি দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা
118 – 126	117.5 – 126.5	9	03
127 – 135	126.5 – 135.5	9	05
136 – 144	135.5 – 144.5	9	09
145 – 153	144.5 – 153.5	9	12
154 – 162	153.5 – 162.5	9	05
163 – 171	162.5 – 171.5	9	04
172 – 180	171.5 – 180.5	9	02

আমি উপরের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটি আয়তলেখর মাধ্যমে প্রকাশ করি।



x -অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 মিলিমি. এবং y অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির আয়তলেখ অঙ্কন করলাম।

আমি কোন অবিচ্ছিন্ন চলের শ্রেণিবিন্যাসিত পরিসংখ্যা বিভাজনের তালিকার আয়তলেখ অঙ্কনের জন্য কী কী পদ্ধতিতে অঙ্কন করলাম লিখি।

আয়তলেখ অঙ্কনের পদ্ধতি পেলাম —

(i) অবিচ্ছিন্ন চলের মানগুলিকে সাধারণত অনুভূমিক রেখা বরাবর এবং শ্রেণি-পরিসংখ্যাগুলিকে উল্লম্ব রেখা বরাবর নেওয়া হয়। অনুভূমিক রেখা বরাবর (অর্থাৎ x-অক্ষ বরাবর) পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণি বিভাগগুলির শ্রেণিসীমানাগুলির মানগুলিকে কোনো ফাঁক না রেখে পর পর সংস্থাপিত করা হয়। ফলে অনুভূমিক রেখাটি শ্রেণি-বিভাগের অনুরূপ কয়েকটি অংশে বিভক্ত হয়।

(ii) যদি পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণি-বিভাগগুলি সমদৈর্ঘ্যের হয়, তবে প্রত্যেকটি অংশের উপর নির্দিষ্ট শ্রেণি-বিভাগের পরিসংখ্যার সমান (বা পরিসংখ্যার সমানুপাতিক) দৈর্ঘ্যের একটি করে আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা হয়।

(iii) যদি পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণি-বিভাগগুলি সমদৈর্ঘ্যের না হয়, সুবিধামতো সবচেয়ে ছোটো শ্রেণি-দৈর্ঘ্যের একটি শ্রেণি-অন্তর বেছে নিয়ে প্রতিটি শ্রেণি-বিভাগের পরিসংখ্যা সমানুপাতে নির্ণয় করা হয় এবং প্রতিটি অংশের উপর অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য অনুরূপ শ্রেণি-বিভাগের নির্ধারিত পরিসংখ্যার সমান হয়।

(নবম শ্রেণিতে অসম দৈর্ঘ্যের শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ পাঠ্যসূচি বহির্ভূত)।

13 মেঘা অন্য এক ছোটো কারখানার শ্রমিকদের নির্দিষ্ট সময়ে কাজের মজুরি নীচের ছকে লিখল।

দৈনিক বেতন (টাকায়)	100	90	80	70	60	50
শ্রমিক সংখ্যা	6	4	12	16	20	12

আমি উপরের তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

দেখছি, মেঘার সংগ্রহ করা তথ্যগুলি শ্রেণি-সাপেক্ষে নয়। এক্ষেত্রে তথ্যে লেখচিত্র কীভাবে অঙ্কন করা যায় দেখি।

দেখছি, দুটি ক্রমিক বেতনের অন্তর 10

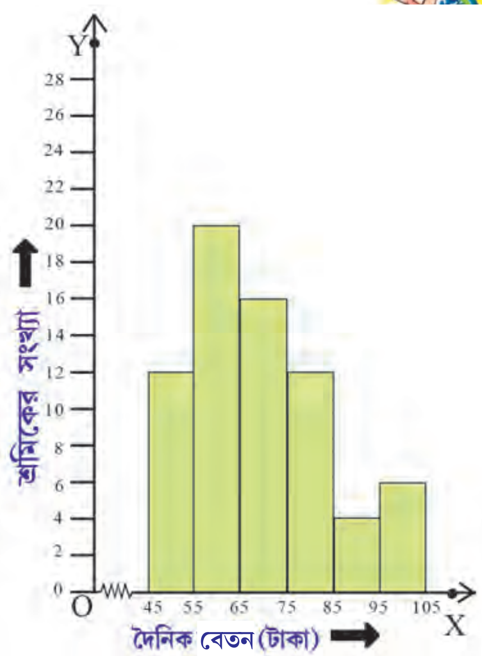
∴ সমদৈর্ঘ্যের শ্রেণি পাওয়ার জন্যে 100, 90, 80, 70 বেতন সমূহকে 95 – 105, 85 – 95, 75 – 85, 65 – 75, ... প্রভৃতি শ্রেণি অন্তরের মধ্যবিন্দু নেব।

[∴ $(100 - \frac{10}{2}) - (100 + \frac{10}{2}) \rightarrow (95 - 105)$]

∴ প্রদত্ত তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কনের জন্য পরিসংখ্যা-বিভাজন ছকটি পেলাম :

শ্রেণি (দৈনিক বেতন টাকায়)	পরিসংখ্যা (শ্রমিক সংখ্যা)
95 — 105	06
85 — 95	04
75 — 85	12
65 — 75	16
55 — 65	20
45 — 55	12
মোট	70

আমি অনুভূমিক রেখায় **1 সেমি. = 10 টাকা** বেতন এবং উল্লম্ব রেখায় **0.5 সেমি. = 2 জন** শ্রমিক ধরে অবিচ্ছিন্ন চলের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ অঙ্কন করলাম।

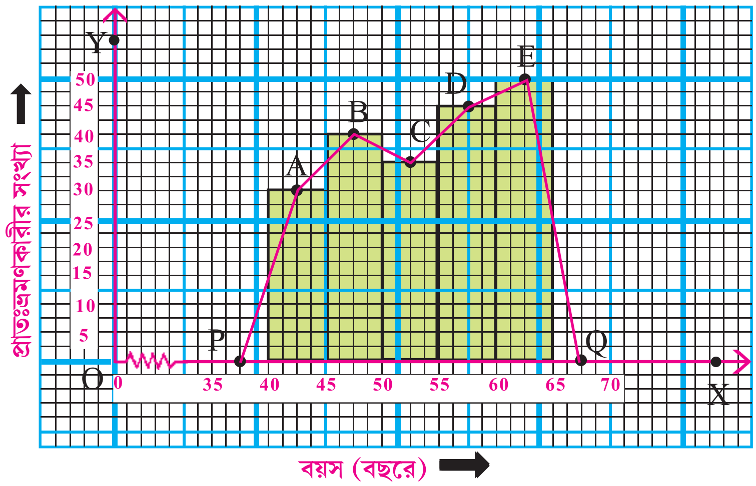


14 আমি আমার দাদুর সঙ্গে প্রতিদিন ভোরে বোটানিক্যাল্ গার্ডেনে প্রাতঃভ্রমণে যাই। আজ আমি ও আমার বন্ধু সাহানা ঠিক করেছি আজ যতজন প্রাতঃভ্রমণে এসেছে তাদের বয়স অনুযায়ী তথ্য সংগ্রহ করে লিখব। আজ আমাদের সংগ্রহ করা তথ্যটি হলো,

শ্রেণি (বয়স বছরে)	40–45	45–50	50–55	55–60	60-65
পরিসংখ্যা	30	40	35	45	50

আমরা আগের সংগৃহীত তথ্যটি একটি আয়তলেখর মাধ্যমে প্রকাশ করব

x-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 4টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 5 বছর এবং y-অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 টি বাহুর দৈর্ঘ্য=5 জন প্রাতঃভ্রমণকারী ধরে উপরের সংগৃহীত তথ্যটির আয়তলেখ অঙ্কন করলাম।



আমার ভাই রোহিত মজার কান্ড করল, সে আমার আঁকা আয়তলেখের পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্রের উপরের বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি A,B,C,D ও E দিয়ে চিহ্নিত করল।
দেখছি, A,B,C,D, E -এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (42.5, 30), (47.5, 40), (52.5, 35), (57.5, 45) এবং (62.5, 50)

শ্রেণি	শ্রেণি মধ্যমান	পরিসংখ্যা
40–45	42.5	30
45–50	47.5	40
50–55	52.5	35
55–60	57.5	45
60–65	62.5	50

আমি A,B; B,C; C,D; D,E; সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করলাম এবং এই A,B,C,D কে নিয়ে বহুভুজ গঠনের জন্য x-অক্ষে P (37.5,0) এবং Q (67.5,0) দুটি বিন্দু নিয়ে A, P; E, Q সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করলাম।

37.5 হলো (35-40) -এর মধ্যবিন্দু এবং 67.5 হলো ☐ - ☐ -এর মধ্যবিন্দু

দেখছি, PABCDEQ বহুভুজ পেলাম। এই বহুভুজকে কী বলা হয়?

PABCDEQ বহুভুজটিকে প্রদত্ত তথ্যের পরিসংখ্যা বহুভুজ [Frequency Polygon] বলা হয়।

কোনো অবিচ্ছন্ন চলের সমদৈর্ঘ্যের শ্রেণিগুলির মাধ্যমে প্রকাশিত পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক-উপস্থাপনের জন্য **পরিসংখ্যা বহুভুজ** অঙ্কন করা হয়। এক্ষেত্রে ধরে নেওয়া হয় যে কোনো শ্রেণির অন্তর্গত চলের মানগুলি অনুরূপ শ্রেণির মধ্যবিন্দুতে কেন্দ্রীভূত [কখনও কখনও বিচ্ছিন্ন চলের পরিসংখ্যা বিভাজন উপস্থাপনের জন্যও পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হয়।]

কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনের পরিসংখ্যা বহুভুজের ক্ষেত্রফল পরিসংখ্যা বিভাজনটির আয়তলেখর ক্ষেত্রফলের সমান হবে। ত্রিভুজের সর্বসমতার সাহায্যে আয়তলেখর ক্ষেত্রফল এবং পরিসংখ্যা বহুভুজের ক্ষেত্রফল সমান দেখাই।

আমি আমাদের স্কুলের 100 জন বন্ধুদের ওজন (কিগ্রা) নিয়েছি। সেগুলি হলো,

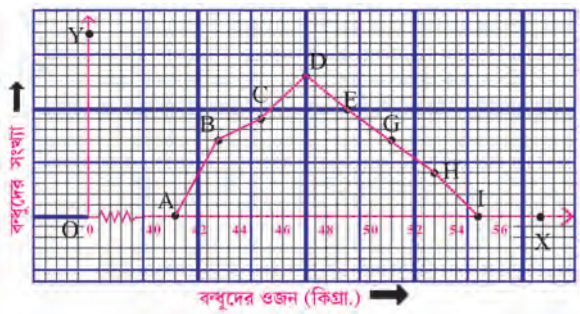
বন্ধুদের ওজন (কিগ্রা.)	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	52–54
বন্ধুদের সংখ্যা	14	18	26	20	14	8

15 আমি উপরের তথ্যটি পরিসংখ্যা বহুভুজের মাধ্যমে প্রকাশ করি।

1) আমি প্রথমে পরিসংখ্যান বিভাজন ছকটি করলাম।

2) এবার x -অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 4টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 কিগ্রা. এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1টি বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 জন বন্ধু ধরি।

শ্রেণি	শ্রেণি-মধ্যক বা মধ্যমান	পরিসংখ্যা
42–44	43	14
44–46	45	18
46–48	47	26
48–50	49	20
50–52	51	14
52–54	53	8
মোট		100

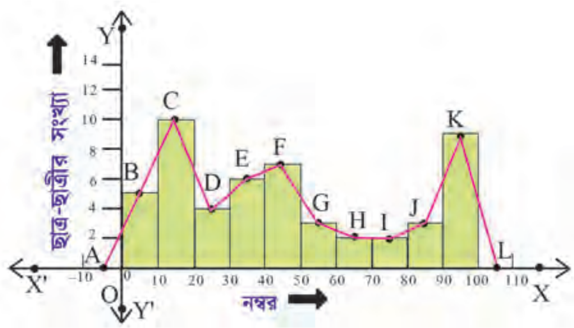


প্রত্যেকটি শ্রেণির শ্রেণিমধ্যমান ভুজ এবং শ্রেণি পরিসংখ্যা কোটি ধরে (43,14), (45,18), (47,26), (49,20), (51,14), (53,8) বিন্দুগুলি স্থাপন করলাম; এবার ওই বিন্দুগুলি পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করলাম এবং বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করার জন্য x-অক্ষের উপর প্রথম শ্রেণিসীমানার ঠিক আগের শ্রেণি সীমানার ‘0’ (শূন্য) পরিসংখ্যা বিশিষ্ট মধ্যবিন্দু ও শেষ শ্রেণিসীমানার ঠিক পরের শ্রেণিসীমানার ‘0’ (শূন্য) পরিসংখ্যা বিশিষ্ট মধ্যবিন্দুও সরলরেখাংশ দিয়ে যোগ করে (এখানে (41,0) ও (55,0) যোগ করে) নির্ণেয় ABCDEFGHI বহুভুজটি পেলাম।

সাবিনাদের স্কুলে 51 জন ছাত্র-ছাত্রী 100 নম্বরের মধ্যে নিম্নলিখিত নম্বর পেয়েছে।

নম্বর	ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা
0-10	5
10-20	10
20-30	4
30-40	6
40-50	7
50-60	3
60-70	2
70-80	2
80-90	3
90-100	9
	মোট = 51

আমি ওই পরিসংখ্যা বিভাজনের ছক থেকে একটি আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।



XOX' ও YOY' দুটি অক্ষ লম্বভাবে অঙ্কন করলাম। x -অক্ষ বরাবর 0.5 সেমি. দৈর্ঘ্য = 10 নম্বর এবং y -অক্ষ বরাবর 0.5 সেমি. দৈর্ঘ্য = 1 জন ধরে আয়তলেখটি অঙ্কন করি।

এবার পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কনের জন্য প্রথম শ্রেণির ঠিক আগের একটি শ্রেণি –10-0 এবং শেষ শ্রেণির ঠিক পরের শ্রেণি 100-110 নিই। এই দুই শ্রেণির পরিসংখ্যা ‘0’ হবে।

এরপর (-5,0), (5,5), (15,10), (25,4), (35,6), (45,7), (55,3), (65,2), (75,2), (85,3), (95,9), (105,0) বিন্দুগুলি পরপর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করে ABCDEFGHIJKL পরিসংখ্যা বহুভুজটি অঙ্কন করলাম।

আমাদের পাড়ায় A ও B দুটি দলের ক্রিকেট খেলা চলছে। প্রথম 5 ওভারে অর্থাৎ $5 \times 6 = 30$ টি বলে কোন দল কত রান করেছে তা ছক করে নীচে লিখলাম।

বলের সংখ্যা	1-6	7-12	13-18	19-24	25-30
A দলের রান	2	1	8	9	4
B দলের রান	5	6	2	10	5

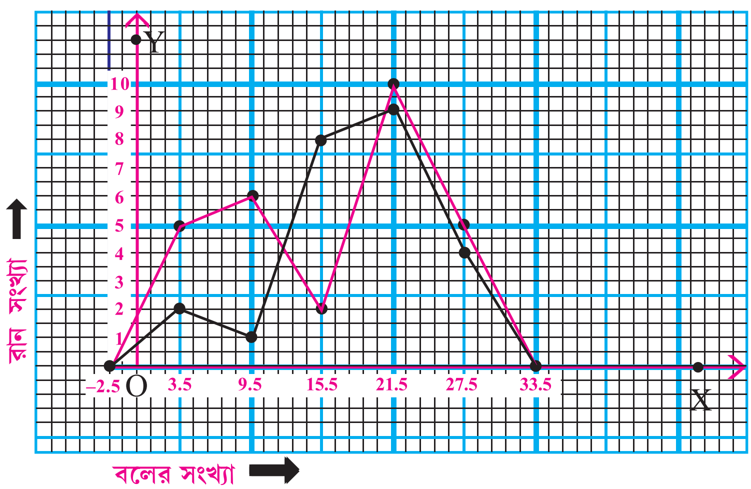
16 আমি একই ছক কাগজে উপরের দুটি দলের তথ্যগুলির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি ও তুলনা করি।

আমি প্রথমে তথ্যগুলির পরিসংখ্যা বিভাজন ছক তৈরি করি

শ্রেণি (বলের সংখ্যা)	শ্রেণি সীমানা	শ্রেণির মধ্যমান	A দলের রান	B দলের রান
1–6	0.5–6.5	3.5	2	5
7–12	6.5–12.5	9.5	1	6
13–18	12.5–18.5	15.5	8	2
19–24	18.5–24.5	21.5	9	10
25–30	24.5–30.5	27.5	4	5

আমি বলের সংখ্যা x-অক্ষ বরাবর এবং রানের পরিমাণ y-অক্ষ বরাবর নিলাম। x-অক্ষ বরাবর 5টি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = 6 বল এবং y-অক্ষ বরাবর 2টি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 রান বসাই। A দলের জন্য (3.5, 2), (9.5, 1), (15.5, 8), (21.5, 9), (27.5, 4) বিন্দুগুলি স্থাপন করে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যোগ করে A দলের পরিসংখ্যা বহুভুজ পেলাম।

একইভাবে, B দলের জন্য (3.5, 5), (9.5, 6), (15.5, 2), (21.5, 10), (27.5, 5) বিন্দুগুলি স্থাপন করে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যোগ করে B দলের পরিসংখ্যা বহুভুজ পেলাম।



দেখছি, পরিসংখ্যা বহুভুজের সাহায্যে আমরা একাধিক তথ্যের সহজে তুলনা করতে পারি।

কষে দেখি— 11.2

1. বকুলতলা গ্রামের 50টি দোকানের দৈনিক লাভ (টাকা) নীচে ছক করে লিখলাম।

দৈনিক লাভ (টাকা)	0–50	50–100	100–150	150–200	200–250
দোকানের সংখ্যা	8	15	10	12	5

উপরের তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

2. মিতা তাদের স্কুলের 75 জন বন্ধুদের উচ্চতা মেপে নীচের ছকে লিখল।

উচ্চতা (সেমি.)	136–142	142–148	148–154	154–160	160–166
বন্ধুদের সংখ্যা	12	18	26	14	05

আমি মিতার সংগ্রহ করা তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

3. আমাদের পাড়ায় 10 বছর থেকে 45 বছর বয়স পর্যন্ত বাসিন্দাদের মধ্যে হিন্দিভাষী লোকের সংখ্যা সংগ্রহ করে নীচের ছকে লিখলাম।

বয়স (বছরে)	10–15	16–21	22–27	28–33	34–39	40–45
হিন্দিভাষী লোকের সংখ্যা	8	14	10	20	6	12

আমি উপরের তথ্যের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

4. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

শ্রেণি	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60
পরিসংখ্যা	8	3	6	12	2	7

5. আমি পৃথাদের স্কুলের 75 জন শিক্ষার্থীদের নিম্নলিখিত প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

প্রাপ্ত নম্বর	30	40	50	60	70	80
ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	12	18	21	15	6	3

ছক কাগজে অনুভূমিক ও উলম্বরেখা বরাবর সুবিধামতো মাপ নিয়ে (20,0), (30,12), (40,18), (50,21), (60,15), (70,6), (80,3) ও (90,0) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি ও যোগ করে পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

6. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি

শ্রেণি	0-5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
পরিসংখ্যা	4	10	24	12	20	8

7. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ অঙ্কন করে পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

চাঁদার পরিমাণ (টাকা)	20	25	30	35	40	45	50
সদস্য সংখ্যা	20	26	16	10	4	18	6

8. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

শিশুসংখ্যা	0	1	2	3	4	5
পরিবার সংখ্যা	120	85	50	25	15	5

সংকেত: প্রথমে রাশিতথ্যকে শ্রেণি বহির্ভূত পদ্ধতি অনুসারে শ্রেণি সীমানাসহ নীচের মতো পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করে নেব।

শিশুসংখ্যা:	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6
পরিবার সংখ্যা	120	85	50	25	15	5

9. বীরসিংহ গ্রামের বিদ্যাসাগর প্রাথমিক বিদ্যালয়ে 32 জন শিক্ষক/শিক্ষিকাদের বয়স নীচের ছকে লিখলাম।

বয়স (বছর)	25–31	31–37	37–43	43–49	49–55
শিক্ষক/শিক্ষিকার সংখ্যা	10	13	05	03	01

আমি উপরের তথ্যটির আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজের মাধ্যমে লৈখিক উপস্থাপন করি।

10. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

শ্রেণি	75–80	80–85	85–90	90–100	100–105
পরিসংখ্যা	12	18	22	10	8

11. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকটির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

শ্রেণি	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50
পরিসংখ্যা	8	3	6	12	4

12. আমাদের গ্রামে সকল নারীদের স্বাক্ষর করার বিশেষ ব্যবস্থা নেওয়া হবে। তাই আমরা নীচের তথ্যটি সংগ্রহ করেছি।

বয়স	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
স্বাক্ষরহীনের সংখ্যা	40	90	100	60	160

আমি উপরের তথ্যটির পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

13. গত মাসে আমাদের কলকাতা ফুটবল-লিগে দলগুলির দেওয়া গোলের পরিসংখ্যা নীচে লিখেছি।

স্কোর	0	1	2	3	4	5	6
পরিসংখ্যা	15	20	12	8	6	3	1

উপরের রাশিতথ্য উপস্থাপনের জন্য একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করি।

14. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.)

(i) একটি আয়তলেখর প্রতিটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমানুপাতী হবে

(a) ওই শ্রেণির মধ্যবিন্দুর সাথে

(b) ওই শ্রেণির শ্রেণি দৈর্ঘ্যের সাথে

(c) ওই শ্রেণির পরিসংখ্যার সাথে

(d) ওই শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার সাথে

(ii) একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হয় শ্রেণির পরিসংখ্যা এবং

(a) শ্রেণির উচ্চ সীমানা দ্বারা

(b) শ্রেণির নিম্ন সীমানা দ্বারা

(c) শ্রেণির মধ্যমান দ্বারা

(d) শ্রেণির যেকোনো মান দ্বারা

(iii) আয়তলেখ অঙ্কনের ক্ষেত্রে শ্রেণি সীমানা নেওয়া হয়

(a) y-অক্ষ বরাবর

(b) x-অক্ষ বরাবর

(c) x-অক্ষ এবং y-অক্ষ উভয় বরাবর

(d) x-অক্ষ ও y-অক্ষের মধ্যে

(iv) আয়তলেখ অঙ্কনের ক্ষেত্রে প্রতিটি শ্রেণির আয়তক্ষেত্রের ভূমি হয়

(a) পরিসংখ্যা

(b) শ্রেণি সীমানা

(c) প্রসার

(d) শ্রেণি দৈর্ঘ্য

(v) একটি আয়তলেখ বিন্যস্ত তথ্যের লৈখিক প্রকাশ যার শ্রেণি-সীমানা এবং পরিসংখ্যা নেওয়া হয় যথাক্রমে

(a) উল্লম্ব ও অনুভূমিক অক্ষ বরাবর

(b) কেবলমাত্র উল্লম্ব অক্ষ বরাবর

(c) কেবলমাত্র অনুভূমিক অক্ষ বরাবর

(d) অনুভূমিক এবং উল্লম্ব অক্ষ বরাবর

12 ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য
(THEOREMS ON AREA)

1 আমাদের বাড়ির মেঝেতে আয়তক্ষেত্রাকার টালি বসানো হয়েছে। এখনও 18টি সমান মাপের টালি অতিরিক্ত হিসাবে পড়ে আছে। আমরা ঠিক করেছি ওই 18টি টালি আমাদের বাগানের পেয়ারা গাছের গোড়ার চারদিকে লাগিয়ে দেবো। কিন্তু ওই 18টি সমান মাপের আয়তক্ষেত্রাকার টালিগুলি দিয়ে গাছের গোড়ার কতটা জায়গা ভরাট করতে পারব? প্রথমে 1টি টালি কতটা জায়গা জুড়ে থাকবে হিসাব করি। অর্থাৎ, 1টি আয়তক্ষেত্রাকার টালির ক্ষেত্রফল হিসাব করি।

মেপে দেখছি, আয়তক্ষেত্রাকার টালির দৈর্ঘ্য 15 সেমি. এবং প্রস্থ 10 সেমি.।

$\therefore$ 1 টি টালির ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

= 15 সেমি. $\times$ 10 সেমি.

= 150 বর্গ সেমি.

যেহেতু, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ (এটি একটি স্বতঃসিদ্ধ)

$\therefore$ 18 টি একই মাপের আয়তক্ষেত্রাকার টালি দিয়ে (150 $\times$ 18) বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি. জায়গা ভরাট করতে পারব।

কিন্তু যদি টালিটির আকার আয়তক্ষেত্রাকার না হয়ে নীচের ছবির মতো হতো তাহলে কি ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যেত?

তখনও টালিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যেত কিন্তু কঠিন হতো।

ক্ষেত্রফল বলতে কী বুঝি?

ক্ষেত্রফল হলো কোনো ক্ষেত্রের পরিমাপ (Magnitude or measure)। এই পরিমাপটি কোনো একক (Unit) সমেত প্রকাশ করা হয়। যেমন 150 বর্গ সেমি. কোনো ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

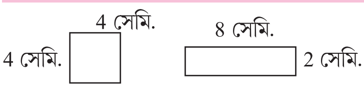
— এই সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= নীল অংশের ক্ষেত্রফল + লাল অংশের ক্ষেত্রফল।

যদি প্রতিটি টালির মাপ (size) ও আকার (shape) একই রকম হয় অর্থাৎ প্রতিটি টালিকে একটির উপর অপরটি বসিয়ে দিলে সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় তাহলে কি ওদের ক্ষেত্রফল সমান হবে?

যদি দুটি সামতলিক ক্ষেত্রের আকার ও মাপ সমান হয় অর্থাৎ সর্বসম হয়, সেক্ষেত্রে তাদের ক্ষেত্রফলও সমান হবে।

কিন্তু যদি দুটি সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হয়, তবে কি সামতলিক ক্ষেত্রদুটি সর্বসম হবে?



এই সামতলিক ক্ষেত্রদুটির ক্ষেত্রফল সমান, কিন্তু এরা সর্বসম নয়। অর্থাৎ একটির উপর অপরটি বসিয়ে দিলে সম্পূর্ণভাবে মিলে যাবে না।

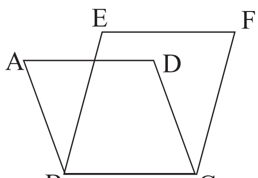
আমরা কোনো সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের কী কী ধর্ম পেলাম লিখি।

(i) A ও B দুটি সামতলিক ক্ষেত্র সর্বসম হলে A -এর ক্ষেত্রফল = B -এর ক্ষেত্রফল হবে ।

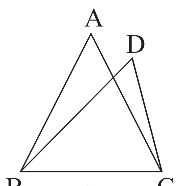
(ii) একটি সামতলিক ক্ষেত্রকে দুটি আলাদা আলাদা (যদি একটি ক্ষেত্র অপরটির ক্ষেত্রের কোনও জায়গা না নেয়) অংশ A ও B তে বিভক্ত করলে,

সমগ্র সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = A অংশের ক্ষেত্রফল + B অংশের ক্ষেত্রফল।

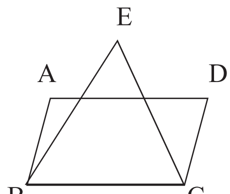
নানান মাপের ও আকারের টালির ক্ষেত্রফলের ধারণা পাওয়ার জন্য আমার দাদা খাতায় অনেকগুলি বহুভুজাকার চিত্র আঁকল। সে আঁকল



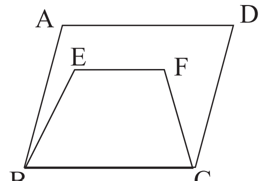
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

আমি দাদার আঁকা চিত্রগুলির মধ্যে মিল খুঁজি

(i) নং চিত্রে দেখছি, ABCD ও EBCF দুটি সামান্তরিক যাদের একই ভূমি BC। কিন্তু A, D, F ও E একই সরলরেখায় নেই । অর্থাৎ সমরেখ নয়।

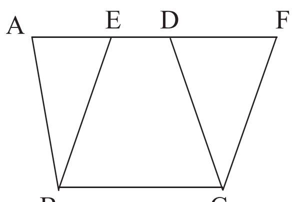
আবার (ii) নং চিত্রে, ΔABC ও ΔDBC -এর একই ভূমি [ ]

(iii) নং চিত্রে [ ] ও [ ] -এর একই ভূমি [ ], কিন্তু A, E, D সমরেখ নয়।

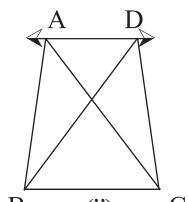
(iv) নং চিত্রের সামান্তরিক ABCD এবং ট্রাপিজিয়াম EBCF-এর একই ভূমি [ ]

কিন্তু E, F, D, A সমরেখ নয়।

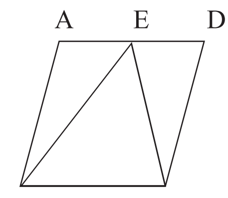
আমি দাদার আঁকা চিত্রগুলি অন্যভাবে আঁকি



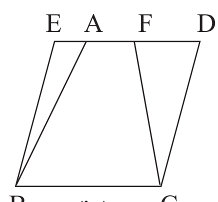
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

আমি বোনের আঁকা (i) নং ছবিতে দেখছি,

ABCD এবং EBCF সামান্তরিক দুটির একই ভূমি BC, কিন্তু BC সাধারণ ভূমির উপরের দিকের শীর্ষ বিন্দুগুলি A, D, E ও F, AF সরলরেখায় অবস্থিত এবং AF ∥ BC

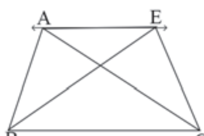
অর্থাৎ বলতে পারি ABCD এবং EBCF সামান্তরিক দুটি **একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল BC ও AF**-এর মধ্যে অবস্থিত।

বাকি ছবিগুলি দেখি ও ছকে লিখি।

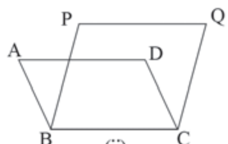
ছবি	সামতলিক চিত্র	সাধারণ ভূমি	সাধারণ ভূমির উপরের দিকের শীর্ষবিন্দুগুলি কোন রেখায় অবস্থিত ও ভূমির সঙ্গে রেখার সম্পর্ক	সিদ্ধান্ত
(ii) নং	Δ ABC ও Δ DBC	BC	BC-এর উপরের দিকের শীর্ষবিন্দু A ও D এবং AD ।। BC	Δ ABC ও Δ DBC একইভূমি BC ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগল BC ও AD-এর মধ্যে অবস্থিত।
(ii) নং			BC-এর উপরের দিকের শীর্ষবিন্দুগুলি A, E ও D এবং A, E ও D বিন্দুগুলি একই সরলরেখা AD-তে অবস্থিত এবং AD ।। BC	নিজে লিখি
(ii) নং	নিজে লিখি	নিজে লিখি	নিজে লিখি	নিজে লিখি

বুঝেছি, দুটি সামাতলিক চিত্র **একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের** মধ্যে অবস্থিত বলা হবে যদি তাদের একটি সাধারণ ভূমি থাকে এবং এদের ভূমির উপরের দিকের শীর্ষবিন্দুগুলি ভূমির সমান্তরাল একটি সরলরেখায় অবস্থিত থাকে।

আমার বন্ধু রিয়া আমাদের আঁকা সামতলিক চিত্রগুলি দেখে সে তার খাতায় অনেকগুলি চিত্র আঁকল।



(i)



(ii)

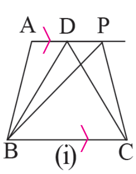
আমি রিয়ার আঁকা চিত্রগুলি দেখি ও কোন সামতলিক চিত্রগুলি একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত লিখি।

দেখছি,(i) নং চিত্র, Δ ABC ও Δ EBC একই ভূমি BC এবং **একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল BC এবং AE-এর মধ্যে অবস্থিত।**

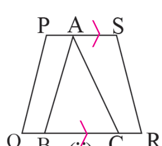
কিন্তু (ii) নং চিত্রে, সামান্তরিক ABCD এবং সামান্তরিক PBCQ একই ভূমি BC-এর উপর অবস্থিত, কিন্তু একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত নয়।

2 নীচের সামতলিক চিত্রগুলির কোন কোন সামতলিক চিত্রগুলি একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে আছে লিখি এবং সেক্ষেত্রে তাদের ভূমি ও সমান্তরাল সরলরেখাযুগল লিখি।

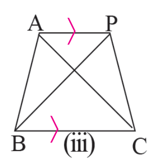
(নিজে করি)



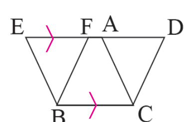
(i)



(ii)



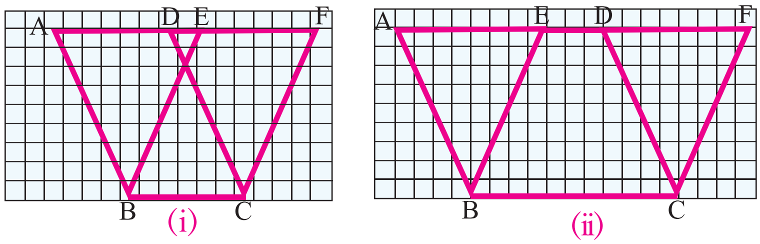
(iii)



(iv)

হাতেকলমে

দাদা ছক কাগজে একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক আঁকল।



(i) নং ছবির সামান্তরিক আকারে ক্ষেত্র দুটির ক্ষেত্রফল (ছক কাগজের ঘর গুনে) নির্ণয় করে তুলনা করি।

ছক কাগজের ঘর গুনে দেখছি,

ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\square$ বর্গ একক (প্রায়)

EBCF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\square$ বর্গ একক (প্রায়)

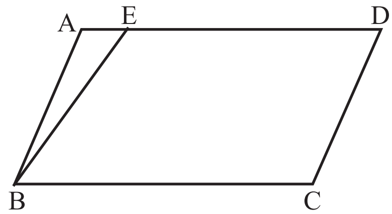
$\therefore$ ছক কাগজের ঘর গুনে পেলাম ABCD ও EBCF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রদুটির ক্ষেত্রফল সমান।

আমি একই ভাবে ছক কাগজের (ii) নং ছবির সামান্তরিক দুটির ক্ষেত্রফল পেলাম $\square$ বর্গ একক। [নিজে করি]

হাতেকলমে পেলাম একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

হাতেকলমে আমি ও রিয়া কিন্তু অন্যরকমভাবে হাতেকলমে যাচাই করলাম।

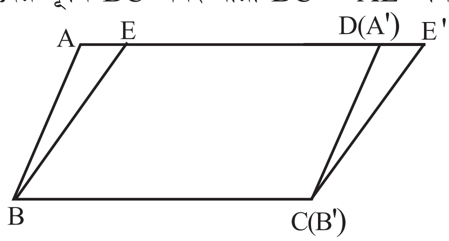
(i) প্রথমে একটি মোটা আর্টপেপারে একটি সামান্তরিক ABCD আঁকলাম এবং একটি সরলরেখাংশ BE অঙ্কন করলাম।



(ii) এবার ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে ΔABE-এর সর্বসম একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ΔA'B'E' এঁকে কেটে নিলাম।

(iii) এবার A'B'E' ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি ABCD সামান্তরিকের সঙ্গে পাশের ছবির মতো এমনভাবে আটকালাম যাতে DC-এর সঙ্গে A'B' সমাপতিত হয়।

দেখছি, দুটি সামান্তরিক ABCD ও EBCE' পেলাম যাদের ভূমি BC এবং যারা BC ও AE' সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত।



হাতেকলমে এদের ক্ষেত্রফল হিসাব করি

ΔABE ≅ ΔA'B'E'

$\therefore$ ΔABE = ΔA'B'E'

$\therefore$ ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ΔABE-এর ক্ষেত্রফল + চতুর্ভুজ EBCD-এর ক্ষেত্রফল

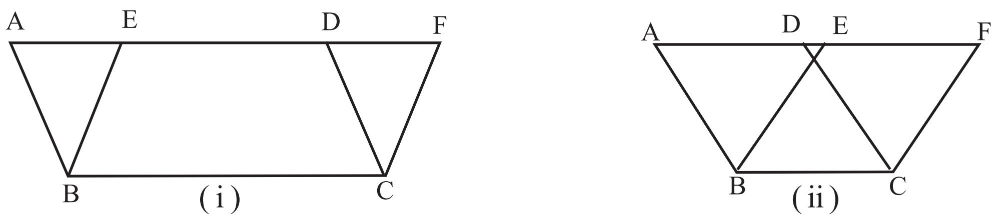
= Δ A'B'E'-এর ক্ষেত্রফল + চতুর্ভুজ EBCD-এর ক্ষেত্রফল

= EBCE' সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$\therefore$ হাতেকলমে কাগজ কেটে পেলাম, একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,

উপপাদ্য 23 যে সকল সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত, তাদের ক্ষেত্রফল সমান’।



প্রদত্ত : সামান্তরিক ABCD ও সামান্তরিক EBCF একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগল BC ও AF-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে: ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = EBCF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল; অর্থাৎ, সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র ABCD = সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র EBCF

প্রমাণ : সামান্তরিক ABCD-এর AB || DC এবং AF ভেদক,

$\therefore$ $\angle$BAE = অনুরূপ $\angle$CDF..............(i)

আবার সামান্তরিক EBCF-এর EB || FC এবং AF ভেদক,

$\therefore$ $\angle$AEB = অনুরূপ $\angle$DFC ....(ii)

ΔABE ও ΔDCF-এর মধ্যে,

$\angle$BAE = $\angle$CDF [(i) থেকে পেলাম]

AB = DC [$\because$ ABCD সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

$\angle$AEB = $\angle$DFC [(ii) থেকে পাই]

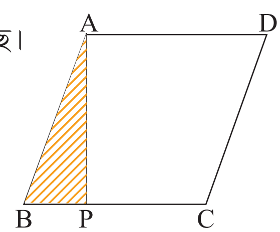
$\therefore$ ΔABC $\cong$ ΔDCF (সর্বসমতার A-S-A শর্তানুসারে)

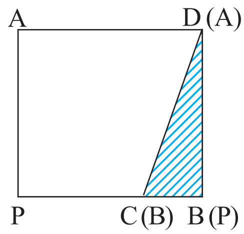
$\therefore$ ΔABE = ΔDCF

চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCF – ABE ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র = চতুর্ভুজাকার ক্ষেত্র ABCF – DCF ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র
সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র EBCF = সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র ABCD (প্রমাণিত)

3 সজল দুটি সামান্তরিক PQRS ও MQRN এঁকেছে যাদের ভূমি QR এবং যারা একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগল PN ও QR-এর মধ্যে অবস্থিত। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, সামান্তরিক PQRS আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = সামান্তরিক MQRN আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

রিয়া একটি আর্টপেপারে ABCD সামান্তরিক এঁকে কেটে নিয়েছে। কিন্তু আমার ভাই কাগজ ভাঁজ করে ABCD সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের A বিন্দু থেকে BC-এর উপর AP লম্ব তৈরি করল যা BC-কে P বিন্দুতে ছেদ করল।





আমি ABP ত্রিভুজাকারক্ষেত্র কেটে নিলাম এবং পাশের ছবির মতো এমনভাবে আটকে দিলাম যাতে DC বাহুর সাঙ্গে AB বাহু সমাপতিত হয়।
APBD আয়তক্ষেত্র পেলাম।

দেখছি, সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র APBD-এর ক্ষেত্রফল

= দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= AD × AP

= BC × AP = ভূমি × AP

BC, ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্রের ভূমি। কিন্তু AP-কে সামান্তরিকের কী বলা হয়?

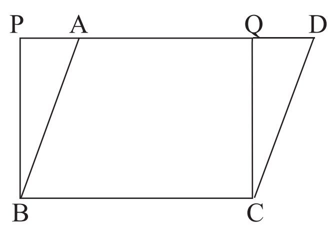
AP, সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD-এর **উচ্চতা**

বুঝেছি, সামান্তরিকের একটি বাহুকে ভূমি ধরলে তার বিপরীত বাহুর যেকোন বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যই হলো সামান্তরিকের উচ্চতা।

পেলাম, ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

আমি অন্য যে-কোনো সামান্তরিক আঁকলাম ও একইভাবে ভাঁজ করে ও কেটে নিয়ে হাতেকলমে প্রমাণ করলাম যে, সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

অনুসিদ্ধান্ত : 1 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা



প্রদত্ত : ধরি ABCD একটি সামান্তরিক

প্রামাণ্য : ABCD সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

অঙ্কন : BC কে ভূমি করে BC ও AD সমান্তরালযুগলের মধ্যে আয়তাকার চিত্র PBCQ অঙ্কন করলাম যা DA-কে এবং DA-এর বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে Q ও P বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : সামান্তরিক ABCD ও আয়তক্ষেত্রাকার চিত্র PBCQ একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরালযুগল BC ও PD-এর মধ্যে অবস্থিত।

ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র PBCQ-এর ক্ষেত্রফল

= দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= BC × PB

= ভূমি × উচ্চতা

[PB, BC ভূমির সাপেক্ষে ABCD সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্রের উচ্চতা]

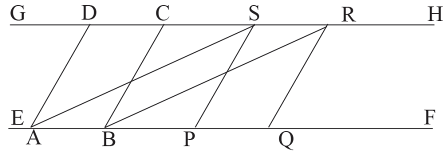
∴ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

প্রয়োগ : 1 যে সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ভূমির দৈর্ঘ্য 10 সেমি., কিন্তু উচ্চতা 6 সেমি. তার ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 10 সেমি. × 6 সেমি. ☐ বর্গসেমি.। যদি সামান্তরিকের ভূমির দৈর্ঘ্য 15 সেমি. এবং উচ্চতা 8.2 সেমি. হতো, সেক্ষেত্রে সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কী হতো হিসাব করে লিখি। [নিজে লিখি]

অনুসিদ্ধান্ত : 2 রসিদ দুটি সমান্তরাল সরলরেখাংশের মধ্যে অনেকগুলি সামান্তরিক এঁকেছে যাদের ভূমির দৈর্ঘ্য সমান। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

প্রদত্ত : ABCD ও PQRS সামান্তরিক দুটি সমান সমান ভূমি AB ও PQ -এর উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাংশ EF ও GH-এর মধ্যে অবস্থিত।



প্রমাণ করতে হবে যে : ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = PQRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

অঙ্কন : A,S ও B,R যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : ABRS চতুর্ভুজে AB=SR (∵ PQ = SR এবং AB = PQ)

এবং AB || SR (∵ EF || GH)

∴ ABRS একটি সামান্তরিক।

ABCD ও ABRS সামান্তরিক দুটি একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাংশযুগল AB ও DR-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ABRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

আবার PQRS এবং ABRS সামান্তরিক দুটি একই ভূমি SR এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাংশ যুগল SR ও AQ-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ PQRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ABRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

সুতরাং ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= PQRS সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রযোগ : 2 পৃথা AB রেখাংশের বিপরীত পার্শ্বে ABCD ও ABEF সামান্তরিক এমনভাবে এঁকেছে যে D, A ও F বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়। আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, DCEF একটি সামান্তরিক এবং ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + ABEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = DCEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

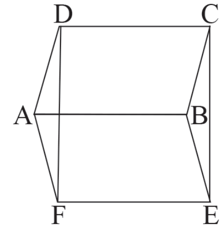
প্রদত্ত : ABCD ও ABEF সামান্তরিক দুটি AB ভূমির উপর অবস্থিত এবং ভূমি AB -এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে : (i) DCEF একটি সামান্তরিক

(ii) ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + ABEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = DCEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিকের AB ও DC বিপরীত বাহু।

∴ AB || DC এবং AB = DC ....(i)



আবার, ABEF সামান্তরিকের AB ও FE বিপরীত বাহু।

$\therefore$ AB || FE এবং AB = FE ....(ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পেলাম, DC || FE এবং DC = FE

$\therefore$ DCEF একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত)

সুতরাং, DF = CE

Δ ADF ও Δ BCE তে, AD = BC, AF = BE এবং DF = CE

সুতরাং Δ ADF ≅ ΔBCE (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে) $\therefore$ Δ ADF = Δ BCE

DAFEC বহুভুজ আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – Δ BCE

= DAFEC বহুভুজ আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – ΔADF

$\therefore$ ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + ABEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= DCEF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। (প্রমাণিত)

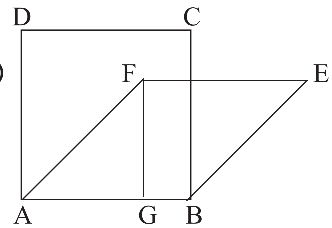
প্রয়োগ : 3 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের চেয়ে বেশি।

প্রদত্ত : ABCD বর্গক্ষেত্র ও ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের একই ভূমি AB.

প্রমাণ করতে হবে যে : ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল > ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

অঙ্কন : F বিন্দু থেকে AB -এর উপর FG লম্ব টানলাম। FG রম্বসের উচ্চতা।

প্রমাণ : বর্গক্ষেত্র ABCD -এর ক্ষেত্রফল = AB.AB এবং ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB.FG



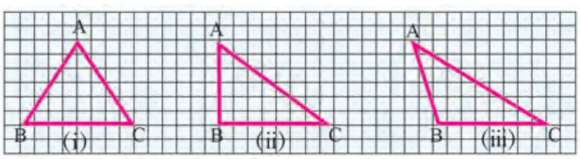
Δ FGA-এর, ∠FGA = 1 সমকোণ

$\therefore$ অতিভুজ AF > FG এবং AF = AB ($\because$ রম্বসের বাহু)

সুতরাং, AB > FG

$\therefore$ AB. AB > AB.FG

$\therefore$ ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল > ABEF রম্বস আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।



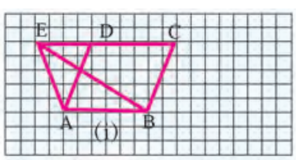
আমরা যখন বিভিন্ন ধরনের সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের মধ্যে কী সম্পর্ক আছে তা কখনো হাতে কলমে, কখনো ছক কাগজে এঁকে, আবার কখনো যুক্তিসহ প্রমাণ করছিলাম, তখন আমার দাদা ও আমার বন্ধু তিথি ছক কাগজে অনেকগুলি ত্রিভুজ এঁকেছে।

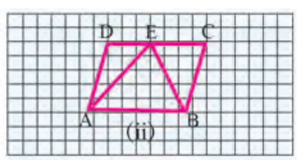
আমি ছক কাগজের ঘর গুনে হাতেকলমে ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল মাপি।

ছক কাগজে ঘর গুনে দেখছি (i) নং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 21 বর্গ একক (প্রায়)

ছক কাগজের ঘর গুনে (ii) নং ও (iii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে ☐ ও ☐ পেলাম। (নিজে ঘর গুনে লিখি)

যদি একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক থাকে, সেক্ষেত্রে তাদের ক্ষেত্রফলের মধ্যে কোনো সম্পর্ক থাকবে কি? ছক কাগজে এঁকে যাচাই করি।





ছক কাগজের ঘর গুনে পেলাম,

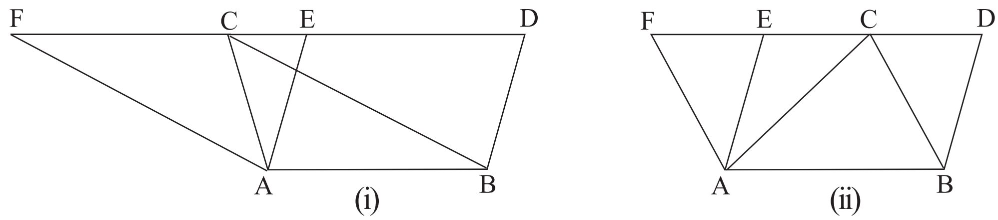
(i) নং ছবির ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 13 বর্গ একক (প্রায়)

(ii) নং ছবির সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 26 বর্গ একক (প্রায়)

ছক কাগজের (ii) নং ছবির ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পেলাম ☐ বর্গ একক এবং সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ☐ বর্গ একক।

দেখছি, 'একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।' (নিজে করি)

উপপাদ্য : 24 এবার আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি, ' ত্রিভুজ ও কোনো সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।'



প্রদত্ত : ΔABC ও সামান্তরিক ABDE একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাংশযুগল AB ও CD-এর মধ্যে (i) নং ছবির ক্ষেত্রে বা AB ও ED-এর মধ্যে (ii) নং ছবির ক্ষেত্রে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABDE অর্থাৎ ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABDE সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

অঙ্কন : A বিন্দুদিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা বর্ধিত DC বা DE কে F বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমাণ : $\therefore$ ABCF চতুর্ভুজের

AB ∥ FC (প্রদত্ত)

AF ∥ BC (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore$ ABCF একটি সামান্তরিক ।

সামান্তরিক ABDE ও সামান্তরিক ABCF একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাংশযুগল AB ও FD -এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ ABDE সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCF সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

আবার, সামান্তরিক ABCF -এর কর্ণ AC

$\Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABCF

$= \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABDE

($\because$ সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে এবং দুটি সর্বসম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান)

$\therefore$ ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ABDE সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

B বিন্দু দিয়ে AC -এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করে উপপাদ্যটি নিজে প্রমাণ করি।

নিজে করি— 12.1

1. কোনো ত্রিভুজ ও আয়তক্ষেত্র একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।
2. কোনো ত্রিভুজ ও কোনো সামান্তরিক সমান সমান ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

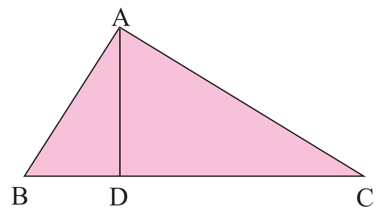
রিয়া অনেকগুলি ছোটো-বড়ো রঙিন ত্রিভুজাকার পিচবোর্ডের মডেল তৈরি করেছে।

কিন্তু ছক কাগজের সাহায্য ছাড়া আমরা এই ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কীভাবে নির্ণয় করব?

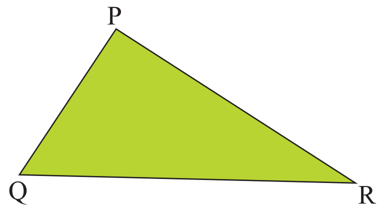
আমি রিয়ার আঁকা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল ছক কাগজ ছাড়া অন্য পদ্ধতিতে মাপার চেষ্টা করি।

হাতেকলমে

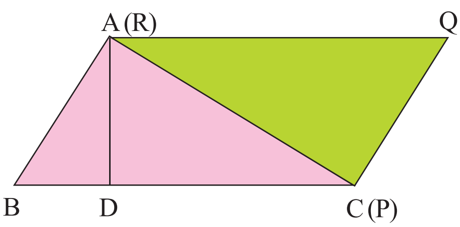
1. প্রথমে কাগজ ভাঁজ করে (i) নং ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ভূমি BC-এর উপর A বিন্দু থেকে লম্ব AD অঙ্কন করলাম যা BC -কে D বিন্দুতে ছেদ করল। অর্থাৎ ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের উচ্চতা AD নিলাম। A শীর্ষবিন্দু বরাবর BC বাহুকে এমনভাবে ভাঁজ করলাম, যাতে B বিন্দুটি BC বাহু বরাবর এবং BC বাহুর উপরে থাকে। ভাঁজ খুলে হাতে কলমে BC-এর উপর লম্ব পেলাম।



2. ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের আর একটি সবুজ রঙের ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র PQR তৈরি করলাম ও কেটে নিলাম।



3. পাশের ছবির মতো Δ ABC ও Δ PQR একসঙ্গে একটি বড়ো পিচবোর্ডে আটকে দিলাম যাতে ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের AC বাহু ও PQR ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের PR বাহু সমাপতিত হয় এবং AC বাহুর যে পাশে Q বিন্দু আছে তার বিপরীত পাশে B বিন্দু থাকে।



দেখছি, ABCQ একটি সামান্তরিক আকারের ক্ষেত্র পেয়েছি।

$\therefore$ ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ABCQ সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

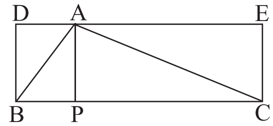
$= \frac{1}{2}$ BC $\times$ AD

$= \frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা [BC বাহুর সাপেক্ষে AD উচ্চতা]

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

আমি অন্য ত্রিভুজ এঁকে ও কেটে একইভাবে হাতে কলমে যাচাই করে পেলাম ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা (নিজে করি)

অনুসিদ্ধান্ত : 3 আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে,কোনো ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা



প্রদত্ত : ধরি ABC একটি ত্রিভুজ যার ভূমি BC এবং $AP \perp BC$.

প্রমাণ করতে হবে যে : $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AP$

অঙ্কন : BC কে ভূমি করে এমন একটি আয়তক্ষেত্র DBCE অঙ্কন করলাম যাতে D, A ও E সমরেখ হয়।

প্রমাণ : Δ ABC ও আয়তক্ষেত্র DBCE একই ভূমি BC ও একই সমান্তরাল সরলরেখাংশ BC ও DE -এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র DBCE $= \frac{1}{2} \times BC \times DB = \frac{1}{2} \times BC \times AP$ [$\because$ APBD একটি সামান্তরিক]

$= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা [AP, BC বাহুর সাপেক্ষে উচ্চতা]

প্রয়োগ: 4 রিয়ার আঁকা নীল রঙের ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য 7 সেমি., কিন্তু উচ্চতা 6 সেমি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

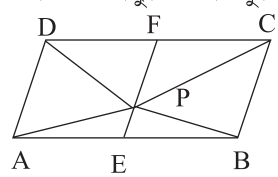
ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 7$ সেমি. $\times 6$ সেমি. $= 21$ বর্গ সেমি.

প্রয়োগ: 5 ABCD সামান্তরিকের ভিতর P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ করি যে, APD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + BPC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ সামান্তরিক ABCD আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রদত্ত : ABCD সামান্তরিকের ভিতর P যেকোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে : APD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + BPC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

অঙ্কন : P বিন্দু দিয়ে AD বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত করি যা AB বাহুকে E বিন্দুতে এবং DC বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ : AEFD চতুর্ভুজে $AD \parallel EF$ এবং $AE \parallel DF$;

সুতরাং, AEFD একটি সামান্তরিক।

ΔAPD ও সামান্তরিক AEFD একই ভূমি AD ও একই সমান্তরালযুগল AD ও EF -এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং APD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ AEFD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

ΔBPC ও সামান্তরিক BEFC একইভূমি BC ও একই সমান্তরালযুগল BC ও EF -এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং, BPC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ BEFC সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

APD ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + BPC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

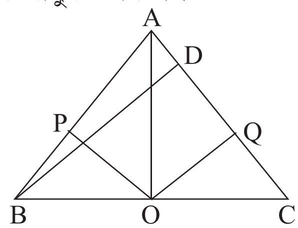
$= \frac{1}{2}$ (AEFD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + BEFC সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল)

$= \frac{1}{2} \times$ ABCD সামান্তরিক আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রয়োগ : 6 ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AB = AC ; BC বাহুর উপর O যেকোন একটি বিন্দু। O বিন্দু থেকে AB ও AC বাহুর লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে OP এবং OQ; B বিন্দু থেকে AC বাহুর লম্ব দূরত্ব BD; প্রমাণ করি যে, OP + OQ = BD

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর O যেকোন একটি বিন্দু এবং AB = AC ; O বিন্দু থেকে OP ও OQ যথাক্রমে AB ও AC বাহুর উপর লম্ব । B বিন্দু থেকে AC বাহুর উপর লম্ব BD

প্রমাণ করতে হবে যে : OP + OQ = BD.



অঙ্কন : A, O যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : AOB ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ AB .OP

AOC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ AC. OQ

AOB ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AOC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}AB.OP + \frac{1}{2}AC.\ OQ$

ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$AC. OP + $\frac{1}{2}$AC. OQ [$\because$AB = AC]

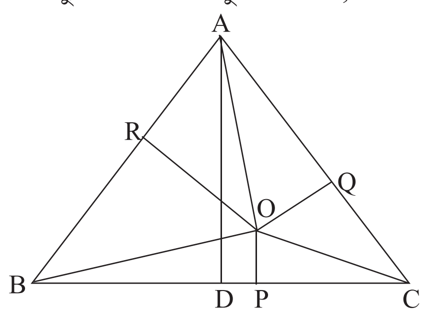
$\frac{1}{2}AC.\ BD = \frac{1}{2}AC.\ (OP + OQ)$

$\therefore$ OP + OQ = BD (প্রমাণিত)

প্রয়োগ : **7** ABC সমবাহু ত্রিভুজের ভিতর O যেকোন একটি বিন্দু। O বিন্দু থেকে BC, AC এবং AB বাহুর উপর লম্ব যথাক্রমে OP, OQ এবং OR; প্রমাণ করি যে, ত্রিভুজটির উচ্চতা = OP + OQ + OR.

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজের ভিতর O যেকোন একটি বিন্দু। O বিন্দু থেকে OP, OQ এবং OR যথাক্রমে BC, CA এবং AB বাহুর উপর লম্ব। A বিন্দু থেকে AD, BC বাহুর উপর লম্ব। সুতরাং AD, ABC ত্রিভুজের উচ্চতা

প্রমাণ করতে হবে যে : OP + OQ + OR = AD



অঙ্কন : O, A ; O, B এবং O, C যুক্ত করলাম।

প্রমাণ : BOC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2}$ BC. OP

COA ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ CA. OQ

AOB ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$AB. OR

BOC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + COA ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল +

AOB ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}BC.\ OP + \frac{1}{2}CA.\ OQ + \frac{1}{2}AB.OR$

ABC ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}BC.\ OP + \frac{1}{2}BC.OQ + \frac{1}{2}BC.OR$

($\because$ BC = CA = AB)

$\frac{1}{2}BC.\ AD = \frac{1}{2}BC\ (OP+OQ + OR)$

$\therefore$ OP + OQ + OR = AD

সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি উচ্চতাই সমান। $\therefore$ত্রিভুজটির উচ্চতা = OP + OQ + OR