06

संततता तथा अवकलनीयता
(Continuity and Differentiability)

6.01 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्व कक्षा में हम फलन की सीमा का अध्ययन कर चुके हैं। यहाँ हम सीमा की सहायता से संतत फलनों का अध्ययन करेंगे। यदि फलन का किसी दिए अन्तराल में लेखा चित्र (Graph) खींचने पर वक्र कहीं पर टूटा हुआ नहीं हो अर्थात् दिए अन्तराल में x में अल्प परिवर्तन से $f(x)$ में भी अल्प परिवर्तन हो तब फलन, इस अन्तराल में संतत कहलाता है। स्पष्ट है कि ऐसे फलनों के लेखा चित्रों को बिना पेन्सिल को ऊपर उठाए बनाया जा सकता है। किन्तु संतत फलन की यह परिभाषा अकगणितीय होने के साथ-साथ उन फलनों के लिए भी महत्वहीन हो जाती है, जिनके लेखाचित्र न हो। अतः हमें संतत फलन की गणितीय परिभाषा की आवश्यकता होती है जिसे कोशी (Cauchy) द्वारा निम्न प्रकार परिभाषित किया है-

6.02 सांतत्य की कोशी परिभाषा (Cauchy's definition of continuity)

कोई फलन $f(x)$, इसके प्रान्त D के किसी बिन्दु a पर संतत कहलाता है यदि किसी स्वैच्छ सुक्ष्म धनात्मक संख्या $\in$, जो कि कितनी भी छोटी क्यों न हो, के संगत एक धनात्मक संख्या δ ($\in$ पर निर्भर) इस प्रकार विद्यमान है ताकि

$$|f(x)-f(a)|<\in \text{ जबकि } |x-a|<\delta$$

अर्थात् दूसरे शब्दों में, फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D के किसी बिन्दु a पर संतत कहलाता है यदि प्रत्येक $\in>0$ के लिए अन्तराल $(a-\delta, a+\delta)$ के प्रत्येक बिन्दु के लिए $f(x)$ तथा $f(a)$ का संख्यात्मक अन्तर $\in$ से कम किया जा सके।

6.03 सांतत्य की वैकल्पिक परिभाषा (Alternate definition of continuity)

फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D के किसी बिन्दु a पर संतत होता है यदि और केवल यदि $\lim_{x\to a} f(x)$ विद्यमान हो तथा यह $f(a)$ के बराबर हो अर्थात्

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

या

$$f(a+0) = f(a-0) = f(a)$$

अर्थात् a पर $f(x)$ की दक्षिण (बायीं) सीमा $= a$ पर $f(x)$ की वाम (बायीं) सीमा $= a$ पर $f(x)$ का मान

6.04 एक बिन्दु पर बायीं तथा दायीं ओर से सांतत्य (Continuity at a point from left and right)

कोई फलन $f(x)$ अपने प्रांत के किसी बिन्दु a पर

(i) बायीं ओर से संतत कहलाता है यदि

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

अर्थात्

$$f(a-0) = f(a)$$

(ii) दायीं ओर से संतत कहलाता है यदि

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

अर्थात्

$$f(a+0) = f(a)$$

6.05 विवृत्त अन्तराल में संतत फलन (Continuous function in an open interval)

फलन $f(x)$, विवृत्त अन्तराल (a, b) में संतत कहलाता है यदि वह उस अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर संतत हो।

6.06 संवृत्त अन्तराल में संतत फलन (Continuous function in a closed interval)

फलन $f(x)$, संवृत्त अन्तराल $[a, b]$ में संतत कहलाता है यदि वह

(i) बिन्दु a पर दायीं ओर से संतत है,

(ii) बिन्दु b पर बायीं ओर से संतत है तथा

(iii) विवृत्त अन्तराल (a, b) में संतत हो।

6.07 संतत फलन (Continuous function)

यदि कोई फलन अपने प्रान्त के प्रत्येक बिन्दु पर संतत है, तो वह संतत फलन कहलाता है। कुछ संतत फलनों के उदाहरण निम्न है-

(i) तत्समक फलन $f(x) = x$,

(ii) अचर फलन $f(x) = c$, जहाँ c अचर है,

(iii) बहुपद फलन $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$,

(iv) त्रिकोणमितीय फलन $f(x) = \sin x, \cos x$

(v) चरघातांकीय फलन $f(x) = a^x, a > 0$

(vi) लघुगणकीय फलन $f(x) = \log_e x$

(vii) निरपेक्ष मान फलन $f(x) = |x|, x + |x|, x - |x|, x|x|$

6.08 असंतत फलन (Discontinuous function)

कोई फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D में असंतत कहलाता है। यदि वह उस प्रान्त के कम से कम एक बिन्दु पर संतत नहीं हो। यदि फलन किसी अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर असंतत हो, तो फलन दिए गए अन्तराल में पूर्णरूपेण असंतत कहलाता है।

असंतत फलनों के कुछ उदाहरण निम्न हैं-

(i) $f(x) = [x] =$ अधिकतम पूर्णांक जो कि x से कम या बराबर है, सभी पूर्णांकों पर असंतत है।

(ii) $f(x) = x - [x]$, प्रत्येक पूर्णांक पर असंतत है।

(iii) $f(x) = \tan x, \sec x, x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$ पर असंतत है।

(iv) $f(x) = \cot x, \operatorname{cosec} x, x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ पर असंतत है।

(v) $f(x) = \sin\frac{1}{x}, \cos\frac{1}{x}, x = 0$ पर असंतत है।

(vi) $f(x) = e^{1/x}, x = 0$ पर असंतत है।

(vii) $f(x) = \frac{1}{x}, x = 0$ पर असंतत है।

6.09 संतत फलनों के गुणधर्म (Properties of continuous functions)

(i) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अपने प्रांत D में कोई दो संतत फलन हैं तो $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), cf(x)$ भी प्रांत D में संतत होंगे। इसी प्रकार $\frac{f(x)}{g(x)}$ उन बिन्दुओं पर संतत होगा, जहाँ $g(x) \neq 0, \quad \forall \; x \in D$.

(ii) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अपने-अपने प्रांत में दो संतत फलन है तो इनका संयुक्त फलन $(g \circ f)(x)$ भी प्रांत D मे संतत फलन होगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x}, & x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases}$

की बिन्दु $x=0$ पर सांतत्य की जाँच कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{यदि } x<0\\ x, & \text{यदि } x\geq 0\end{cases}$$

तब दिए गए फलन को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

$$f(x)=\begin{cases}0\ , & x>0\\ 2\ , & x<0\\ 1\ , & x=0\end{cases}$$

$x=0$ पर संततता

फलन की परिभाषा से $f(0)=1$

$\therefore$ $$f(0-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)=2$$

$$f(0+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)=0$$

$\therefore$ $$f(0)\neq f(0-0)\neq f(0+0)$$

अतः फलन $f(x)$, $x=0$ पर संतत नहीं है।

उदाहरण-2. फलन $f(x)=|x|+|x-1|$ का $x=0$ तथा $x=1$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हल: फलन $f(x)$ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, & \text{यदि } x\leq 0\\ 1, & \text{यदि } 0<x<1\\ 2x-1, & \text{यदि } x\geq 1\end{cases}$$

$x=0$ पर संततता

यहाँ $$f(0)=1-2(0)=1$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-2x)$$

$$=\lim_{h\to 0}\{1-2(0-h)\}=1$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1$$

अतः $$f(0-0)=f(0+0)=f(0)$$

फलतः फलन $f(x)$, $x=0$ पर संतत है।

$x=1$ पर संततता

फलन की परिभाषा से $f(1)=2(1)-1=1$

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 1=1$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(2x-1)$$

$$=\lim_{x\to1^+}[2(1+h)-1]=1$$

अतः $$f(1-0)=f(1+0)=f(1)$$

फलतः फलन $f(x)$, $x=1$ पर संतत है।

उदाहरण-3. प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(x)$, जो निम्न प्रकार परिभाषित है

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} & ; \ x\neq 0\\ 0 & ; \ x=0\end{cases}$$

$x=0$ पर संतत नहीं हैं।

हलः फलन की परिभाषा से $$f(0)=0$$

$x=0$ पर दायीं सीमा, $$f(0+0)=\lim_{h\to0} f(0+h)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^{1/(0+h)}}{1+e^{1/(0+h)}}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{e^{-1/h}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

$x=0$ पर बायीं सीमा, $$f(0-0)=\lim_{h\to0} f(0-h)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^{1/(0-h)}}{1+e^{1/(0-h)}}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^{-1/h}}{1+e^{-1/h}}=\frac{0}{1+0}=0$$

अतः $f(0-0)\neq f(0+0)$

फलतः फलन $f(x)$, $x=0$ पर संतत नहीं है।

उदाहरण-4. फलन $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \quad x<1\\ x & ; \ 1\le x<2\\ \dfrac{x^3}{4} & ; \quad x\ge 2\end{cases}$

की $x=2$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हलः फलन की परिभाषा से $f(2)=\dfrac{2^3}{4}=2$

$x=2$ पर $f(x)$ की दायीं सीमा, $$f(2+0)=\lim_{h\to0} f(2+h)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^3}{4}$$

$$=\frac{(2+0)^3}{4}=2$$

$x = 2$ पर $f(x)$ की बायीं सीमा, $\quad f(2-0) = \lim_{h \to 0} f(2-h)$

$$= \lim_{h \to 0}(2-h) = 2$$

उपरोक्त से, $f(2-0) = f(2+0) = f(2) = 2$

अतः फलन $f(x)$, $x = 2$ पर संतत है।

उदाहरण-5. यदि निम्न फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(cx)}{x\sin x} & ; \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

बिन्दु $x = 0$ पर संतत है तो c का मान ज्ञात कीजिए।

हलः फलन की परिभाषा से $f(0) = \dfrac{1}{2}$ (1)

$x = 0$ पर फलन $f(x)$ की सीमा ज्ञात करने पर,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(cx)}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2(cx/2)}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(c^2/2)\left(\dfrac{\sin(cx/2)}{cx/2}\right)^2}{(\sin x/x)}$$

$$= \frac{(c^2/2)\cdot 1^2}{1} = \frac{c^2}{2} \qquad (2)$$

$\because \quad f(x)$ बिन्दु $x = 0$ पर संतत है अतः

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$\Rightarrow \quad \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 1$$

उदाहरण-6. यदि फलन $f(x) = \begin{cases} 3 & ; \quad x \leq 4 \\ ax + b & ; \quad 4 < x < 6 \\ 7 & ; \quad x \geq 6 \end{cases}$

तब a तथा b के मान ज्ञात कीजिए जिससे कि फलन $f(x)$, अन्तराल [4, 6] में संतत हो।

हल: दिया है कि फलन $f(x)$, संवृत्त अन्तराल [4, 6] में संतत है।

$x=4$ पर फलन $f(x)$ की दायीं सीमा,

$$f(4+0)=\lim_{h\to 0} f(4+h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\{a(4+h)+b\}$$

$$=4a+b \qquad (1)$$

तथा $$f(4)=3 \qquad (2)$$

$x=6$ पर फलन की बायीं सीमा,

$$f(6-0)=\lim_{h\to 0} f(6-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\{a(6-h)+b\}$$

$$=6a+b \qquad (3)$$

तथा $$f(6)=7 \qquad (4)$$

$\because$ फलन $f(x)$ संवृत्त अन्तराल [4,6] के बायें अन्तिम बिन्दु $x=4$ पर संतत है अतः $f(4+0)=f(4)$

$\Rightarrow$ $$4a+b=3 \qquad (5)$$

इसी प्रकार फलन $f(x)$, अन्तराल [4, 6] के दायें अन्तिम बिन्दु $x=6$ पर संतत है अतः $f(6-0)=f(6)$

$\Rightarrow$ $$6a+b=7 \qquad (6)$$

समीकरणों (5) व (6) को हल करने पर

$$a=2,\ b=-5$$

जो कि a तथा b के अभीष्ट मान है।

उदाहरण-7. फलन $f(x)=\begin{cases} x^m \sin(1/x) & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$

के लिए m पर वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए ताकि $f(x)$, बिन्दु $x=0$ पर संतत हो।

हल: फलन की परिभाषा से $f(0)=0$

$$f(0-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}(0-h)^m \sin\left(1/(0-h)\right)$$

$$=(-1)^{m+1}\lim_{h\to 0} h^m \sin\left(1/h\right)$$

$$=(-1)^{m+1}(0)^m \times (-1 \text{ व } 1 \text{ के मध्य एक परिमित राशि})$$

$$=0, \text{ यदि } m>0$$

इसी प्रकार $f(0+0)=0$, यदि $m>0$

उपरोक्त से $f(0-0)=f(0+0)=f(0)=0$, यदि $m>0$

अतः फलन $f(x)$, $x=0$ पर संतत तभी होगा जबकि $m>0$

उदाहरण-8. निम्न फलन $f(x)=\begin{cases} \sin x/x+\cos x & ; \quad x\neq 0 \\ 2 & ; \quad x=0 \end{cases}$

का बिन्दु $x=0$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हल: फलन की परिभाषा से $f(0) = 2$

$$f(0-0) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\sin(-h)}{(-h)} + \cos(-h) \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\sin h}{h} + \cos h \right\} = 1 + 1 = 2$$

तथा $$f(0+0) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\sin h}{h} + \cos h \right\} = \{1+1\} = 2$$

अतः $$f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 2$$

अतः फलन $f(x)$, $x = 0$ पर संतत है।

प्रश्नमाला 6.1

1. निम्न फलनों की सांतत्य का परीक्षण कीजिए

(a) $f(x) = \begin{cases} x\{1 + (1/3)\sin(\log x^2)\} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर।

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर।

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 + x & ; \quad x \leq 3 \\ 7 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$

$x = 3$ पर।

(d) $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \quad \dfrac{-\pi}{2} < x \leq 0 \\ \tan x & ; \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$x = 0$ पर।

(e) $f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर।

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)} . \text{cosec}(x-a) & ; \quad x \neq a \\ 0 & ; \quad x = a \end{cases}$

$x = a$ पर।

(g) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{a}-a, x<a & ; \quad x<a \\ 0 & ; \quad x=a \\ a-\dfrac{a^3}{x^2} & ; \quad x>a\end{cases}$$

$x=a$ पर।

2. फलन $f(x)=x-[x]$ की $x=3$ पर संततता का परीक्षण कीजिए।

3. यदि निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2-16x+20}{(x-2)^2} & ; \quad x\neq 2 \\ k & ; \quad x=2\end{cases}$$

बिन्दु $x=2$ पर संतत है तब k का मान ज्ञात कीजिए।

4. निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & ; \quad -1\le x<0 \\ 4x-3 & ; \quad 0<x\le 1 \\ 5x^2-4x & ; \quad 1<x\le 2\end{cases}$$

की अन्तराल $[-1, 2]$ में सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

6.10 अवकलनीयता (Differentiability)

पूर्व कक्षा में हमने फलनों की सीमा के संदर्भ में सहजानुभूत बोध तथा प्रथम सिद्धान्त से अवकलन ज्ञात करने का अध्ययन किया था। यहाँ हम एक विशेष सीमा प्रक्रिया के प्रयोग से अवकलन ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे। यदि वक्र का समीकरण $y=f(x)$ है तब फलन $f(x)$ इस वक्र के किसी बिन्दु $x=a$ पर अवकलनीय कहलाता है यदि वक्र के इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींचीं जा सके। यदि बिन्दु $x=a$ पर वक्र टूटा हुआ हो (Break) या इस बिन्दु पर वक्र अपनी दिशा बदल रहा हो तब फलन $f(x)$ इस बिन्दु $x=a$ पर अवकलनीय नहीं होगा। गणितीय रूप में अवकलनीयता का अध्ययन हम निम्न प्रकार करेगें।

1. एक वास्तविक फलन $f:(a,b)\to R$ बिन्दु $c\in(a,b)$ पर अवकलनीय कहलाता है यदि $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ परिमित रूप से विद्यमान हो। यह सीमा फलन f का बिन्दु c पर अवकलज कहलाती है तथा इसे $f'(c)$ से व्यक्त करते हैं।

2. फलन f बिन्दु c पर अवकलनीय होता है यदि प्रत्येक दिए हुए $\in>0$ के संगत $\exists\delta>0$ ताकि

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<\in \text{ जबकि } |x-c|<\delta$$

अर्थात् $\Rightarrow f'(c)-\in\ <\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\ <\ f'(c)+\in$

6.11 फलन का बायाँ अवकलज (Left hand derivative of a function)

कोई फलन $f(x)$ अपने प्रान्त के किसी बिन्दु c पर बायीं तरफ से अवकलनीय कहलाता है, यदि सीमा $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c-h)-f(c)}{-h}, h>0$ का मान विद्यमान एवं परिमित हो। सीमा के इस मान को संकेत में हम $LDf(c)$ या $Lf'(c)$ या $f'(c-0)$ से व्यक्त करते हैं तथा इसे $f(x)$ का बिन्दु c पर बायां अवकलज या वाम पक्षीय अवकलज कहते हैं।

6.12 फलन का दायाँ अवकलज (Right hand derivative of a function)

कोई फलन $f(x)$ अपने प्रान्त के किसी बिन्दु c पर दायीं तरफ से अवकलनीय कहलाता है। यदि सीमा $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}, h>0$ का मान विद्यमान एवं परिमित हो। सीमा के इस मान को संकेत में हम $RDf(c)$ या $Rf'(c)$ या $f'(c+0)$ से व्यक्त करते हैं तथा इसे $f(x)$ का बिन्दु c पर दायाँ अवकलज या दक्षिण पक्षीय अवकलज कहते हैं।

6.13 अवकलनीय फलन (Differentiable function)

कोई फलन अपने प्रान्त के किसी बिन्दु c पर अवकलनीय कहलाता है यदि बिन्दु c पर इसके बायें तथा दायें अवकलज, परिमित रूप से विद्यमान हो तथा समान हो अर्थात्

$$f'(c-0)=f'(c+0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

टिप्पणी: निम्न स्थितियों में, फलन $f(x)$ बिन्दु c पर अवकलनीय नहीं होगा, यदि

(i) $f'(c-0)\neq f'(c+0)$

(ii) $f'(c-0)$ तथा $f'(c+0)$ में से कोई एक या दोनों अपरिमित हो।

(iii) $f'(c-0)$ तथा $f'(c+0)$ में से कोई एक या दोनों विद्यमान नहीं हो।

6.14 अन्तराल में अवकलनीयता (Differentiability in an interval)

1. फलन $f(x)$ विवृत्त अन्तराल (a, b) में अवकलनीय कहलाता है यदि $f(x)$ इस अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय हो।
2. फलन $f(x)$ संवृत्त अन्तराल (a, b) में अवकलनीय कहलाता है यदि
   (i) $f'(c)$ विद्यमान है जबकि $c\in(a,b)$
   (ii) बिन्दु a पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज विद्यमान हो।
   (iii) बिन्दु b पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज विद्यमान हो।

6.15 कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some important results)

(i) दिए अन्तराल के किसी बिन्दु c पर अवकलनीय फलन आवश्यक रूप से संतत होता है परन्तु इस अन्तराल में संतत फलन का अवकलनीय होना आवश्यक नहीं है। स्पष्ट है कि यदि कोई फलन संतत नहीं है तो वह निश्चित रूप से अवकलनीय भी नहीं होगा।

टिप्पणी: किसी फलन की किसी बिन्दु पर अवकलनीयता का परीक्षण करने से पूर्व उस बिन्दु पर इस फलन की संततता का परीक्षण किया जाना चाहिए। फलन के संतत होने पर ही उसकी अवकलनीयता का परीक्षण करें।

(ii) प्रत्येक बहुपदीय, चरघातांकीय तथा अचर फलन, वास्तविक संख्याओं पर सदैव अवकलनीय होते हैं।

(iii) लघुगणकीय फलन, त्रिकोणमितीय फलन, अपने प्रान्त में अवकलनीय होते हैं।

(iv) दो अवकलनीय फलनों का योग, अन्तर, गुणनफल, भागफल (जबकि हर शून्य नहीं हो) तथा संयुक्त फलन, सदैव अवकलनीय ही होते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-9. यदि निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(\dfrac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

$x=0$ पर संतत है तो इसकी बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल: $x=0$ पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज,

$$f'(0-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-h)^2 \left(\frac{e^{-1/h} - e^{-(-1/h)}}{e^{-1/h} + e^{-(-1/h)}} \right) - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -h \left(\frac{e^{-2/h} - 1}{e^{-2/h} + 1} \right)$$

$$= 0 \times \left(\frac{0-1}{0+1} \right) = 0$$

तथा $x = 0$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(h)^2 \left(\frac{e^{1/h} - e^{-1/h}}{e^{1/h} + e^{-1/h}} \right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h \left(\frac{1 - e^{-2/h}}{1 + e^{-2/h}} \right)$$

$$= 0 \times \left(\frac{1-0}{1+0} \right) = 0$$

अतः $f'(0-0) = f'(0+0)$

फलतः फलन $f(x), x = 0$ पर अवकलनीय है।

उदाहरण-10. यदि निम्न फलन

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + \frac{1}{3}\sin(\log x^2)\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

सर्वत्र संतत है तो इसकी बिन्दु $x = 0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल: $x = 0$ पर $f(x)$, का दायाँ अवकलज

$$f'(0+0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(1 + 1/3.\sin(\log h^2)\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \{1 + 1/3.\sin(\log h^2)\}$$

यह सीमा विद्यमान नहीं है। क्योंकि $\lim_{h \to 0} \sin(\log h^2), -1$ तथा 1 के मध्य दोलन करती है अतः $\lim_{h \to 0} \{1 + 1/3.\sin(\log h^2)\}$, $2/3$ तथा $4/3$ के मध्य दोलन करेगी।

फलतः फलन $f'(0+0)$ का अस्तित्व नहीं है। अतः फलन $f(x), x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण-11. m के किन मानों के लिए फलन

$$f(x)=\begin{cases} x^m \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय है तथा $f'(x)$ संतत है।

हल: $x=0$ का अवकलनीयता

$x=0$ पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज,

$$f'(0-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-h)^m \sin\frac{1}{(-h)}-0}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-1)^m h^{m-1}\sin\frac{1}{h} \qquad (1)$$

$x=0$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(0+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^m \sin\frac{1}{h}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}h^{m-1}\sin\frac{1}{h} \qquad (2)$$

यदि $f(x), x=0$ पर अवकलनीय है तब $f'(0-0)=f'(0+0)$, जो कि समीकरण (1) व (2) से तभी सम्भव है जबकि $m-1>0$ या $m>1$

अतः दिया गया फलन $f(x), x=0$ पर अवकलनीय होगा यदि $m>1$

$x=0$ पर $f'(x)$ की सांत्यता

दिए हुए फलन के लिए

$$f'(x),=mx^{m-1}\sin(1/x)-x^{m-2}\cos(1/x)\neq 0$$

$$f'(0)=0$$

सूक्ष्म रूप से $f'(x), x=0$ पर संतत है यदि $m>2$

अतः $f'(x)$, की मूल बिन्दु पर सांतत्यता का प्रतिबन्ध $m>2$ है।

उदाहरण-12. यदि फलन $f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|,\ \forall\ x\in R$ के बिन्दुओं $x=1,\ 2,\ 3$ पर संतत है तो इन बिन्दुओं पर इसकी अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल: दिए गए फलन $f(x)$ को हम निम्न प्रकार लिख सकते है

$$f(x)=\begin{cases} 14-6x, & \text{यदि} \quad x\le 1 \\ 12-4x, & \text{यदि} \quad 1<x\le 2 \\ 4, & \text{यदि} \quad 2<x\le 3 \\ 6x-14, & \text{यदि} \quad x>3 \end{cases}$$

$x = 1$ पर अवकलनीयता

$x = 1$ पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज,

$$f'(1-0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h) - f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\{14-6(1-h)\} - \{14-6(1)\}}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(6h)}{-h} = -6 \qquad (1)$$

$x = 1$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(1+0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\{12-4(1+h)\} - \{14-6(1)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h} = -4 \qquad (2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$f'(1-0) \neq f'(1+0)$$

अतः फलन $f(x)$, $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है। इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि फलन $f(x)$, $x = 2$, $x = 3$ पर भी अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण-13. निम्न फलन

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \sin 1/x, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

की बिन्दु $x = 0$ पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

हलः $x = 0$ पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज,

$$f'(0-0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/(-h)^2} \cdot \sin(1/(-h)) - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(1/h)}{he^{1/h^2}} \qquad (1)$$

अब,

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(1/h)}{h\left[1 + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{\lfloor 2\, h^4} + \ldots\right]}$$

$$= (-1 \text{ एवं } 1 \text{ के मध्य परिमित राशि}) / \lim_{h\to 0}\left\{h + \frac{1}{h} + \frac{1}{\lfloor 2} \cdot \frac{1}{h^3} + \ldots\right\} = 0 \qquad (2)$$

$x=0$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(0+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{1/h^2}\cdot\sin(1/h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 1/h}{he^{-1/h^2}}$$

$= 0$ (उपर्युक्तानुसार) (3)

अतः $$f'(0-0)=f'(0+0)=0$$

फलतः फलन $f(x), x=0$ पर अवकलनीय है।

उदाहरण-14. क्या फलन $f(x)=|x-2|$, बिन्दु $x=2$ पर अवकलनीय है?

हल: $x=2$ पर $f(x)$, का बायाँ अवकलज,

$$f'(2-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|2-h-2|-0}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{|-h|}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{-h}=\lim_{h\to 0}(-1)=-1 \quad (1)$$

$x=2$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(2+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|2+h-2|-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}(1)=1 \quad (2)$$

समीकरण (1) व (2) से

अतः $f(x)$ बिन्दु $x=2$ पर अवकलनीय नहीं है।

प्रश्नमाला 6.2

1. सिद्ध कीजिए की निम्न फलन x के प्रत्येक मान के लिए अवकलनीय हैं

   (i) तत्समक फलन $f(x)=x$ (ii) अचर फलन $f(x)=c$, जहाँ c अचर है

   (iii) $f(x)=e^x$ (iv) $f(x)=\sin x$.

2. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=|x|$ बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।
3. फलन $f(x)=|x-1|+|x|$, की बिन्दुओं $x=0, 1$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।
4. फलन $f(x)=|x-1|+|x-2|$, की अन्तराल $[0, 2]$ में अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।
5. निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases} x\tan^{-1}x & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

की बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

6. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{2} & ; \quad x\le 0\\ \dfrac{x-2x^2}{2} & ; \quad x>0\end{cases}$

की बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

7. सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases}x^m\cos(1/x) & ; \quad x\ne 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

(i) बिन्दु $x=0$ पर संतत है यदि $m>0$

(ii) बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय है यदि $m>1$

8. निम्न फलन की $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{1/x^2}} & ; \quad x\ne 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

9. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & ; \quad x\ne 0\\ 1 & ; \quad x=0\end{cases}$

की बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

10. फलन $f(x)=\begin{cases}1+\sin x & ; \quad 0<x<\pi/2\\ 2+(x-\pi/2)^2 & ; \quad x\ge \pi/2\end{cases}$

की बिन्दु $x=\pi/2$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

11. m तथा n के मान ज्ञात कीजिए जबकि फलन

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+m, & \text{जब} \quad x\le 1\\ nx+2, & \text{जब} \quad x>1\end{cases}$$

प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय है।

विविध प्रश्नमाला–6

1. यदि $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}, x=3$ पर संतत है तब $f(3)$ का मान होगा

(क) 6 (ख) 3 (ग) 1 (घ) 0.

2. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x} & ; \quad x\ne 0\\ m & ; \quad x=0\end{cases}$, $x=0$ पर संतत है तब m का मान होगा

(क) 3 (ख) $1/3$ (ग) 1 (घ) 0.

3. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+mx)-\log(1-nx)}{x} & ; \quad x\ne 0\\ k & ; \quad x=0\end{cases}$, बिन्दु $x=0$ पर संतत है तब k का मान होगा

(क) o (ख) $m+n$ (ग) $m-n$ (घ) $m\cdot n$.

4. ; fn $f(x)=\begin{cases} x+\lambda & ; \quad x<3 \\ 4 & ; \quad x=3 \\ 3x-5 & ; \quad x>3 \end{cases}$, बिन्दु $x=3$ पर संतत है तब λ का मान है

(क) 4 (ख) 3 (ग) 2 (घ) 1.

5. यदि $f(x)=\cot x, x=\dfrac{n\pi}{2}$ पर असंतत है तब

(क) $n \in Z$ (ख) $n \in N$ (ग) $n/2 \in Z$ (घ) केवल $n=0$.

6. फलन $f(x)=x|x|$ के उन बिन्दुओं का समुच्चय, जिन पर वह अवकलनीय है

(क) $(0, \infty)$ (ख) $(-\infty, \infty)$ (ग) $(-\infty, 0)$ (घ) $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$

7. निम्न फलनों में से कौनसा, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है-

(क) $x|x|$ (ख) $\tan x$ (ग) e^{-x} (घ) $x+|x|$

8. फलन $f(x)=\begin{cases} 1+x, & \text{जब} \quad x \le 2 \\ 5-x, & \text{जब} \quad x>2 \end{cases}$, के लिए $f(x)$ का $x=2$ पर बायें अवकलज का मान है-

(क) –1 (ख) 1 (ग) –2 (घ) 2.

9. फलन $f(x)=[x]$ अवकलनीय नहीं है-

(क) प्रत्येक पूर्णांक पर (ख) प्रत्येक परिमेय संख्या पर (ग) मूल बिन्दु पर (घ) सर्वत्र।

10. फलन $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x}, & \text{जब } x \ne 0 \\ 0, & \text{जब } x=0 \end{cases}$, बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय है तब $x=0$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज का मान है

(क) –1 (ख) 1 (ग) 0 (घ) अपरिमित।

11. फलन $f(x)=|\sin x|+|\cos x|+|x|, \ \forall \ x \in R$ की सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

12. यदि फलन $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(m+1)x+\sin x}{x} & ; \quad 0<0 \\ 1/2 & ; \quad x=0 \\ \dfrac{x^{3/2}+1}{2} & ; \quad x>0 \end{cases}$

बिन्दु $x=0$ पर संतत है तब m का मान ज्ञात कीजिए।

13. m तथा n का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्न फलन संतत हो-

$$f(x)=\begin{cases} x^2+mx+n & ; \quad 0 \le x<2 \\ 4x-1 & ; \quad 2 \le x \le 4 \\ mx^2+17n & ; \quad 4<x \le 6 \end{cases}$$

14. फलन $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{\sin x} & ; \quad x \ne 0 \\ 1 & ; \quad x=0 \end{cases}$, के लिए बिन्दु $x=0$ पर सातंत्य का परीक्षण कीजिए।

15. फलन $f(x)=\begin{cases} |x-3| & ; \quad x\ge 1 \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{13}{4} & ; \quad x<1 \end{cases}$, के लिए बिन्दु $x = 1, 3$ पर सातंत्य का परीक्षण कीजिए।

16. यदि $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(a+1)x+\sin x}{x}, & \text{यदि} \quad x<0 \\ c, & \text{यदि} \quad x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx\sqrt{x}}, & \text{यदि} \quad x>0 \end{cases}$,

बिन्दु $x=0$ पर संतत है तब a, b तथा c के मान ज्ञात कीजिए।

17. फलन $f(x)=\dfrac{|3x-4|}{3x-4}$ के लिए $x=\dfrac{4}{3}$ पर संततता का परीक्षण कीजिए।

18. अन्तराल $[-1, 2]$ में फलन $f(x)=|x|+|x-1|$ के संतत होने का परीक्षण कीजिए।

19. यदि फलन $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$, बिन्दु $x=0$ पर संतत है तब $f(0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

20. फलन $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{1/x}-1}{e^{-1/x}+1}, & \text{जबकि} \quad x\ne 0 \\ 1 & \text{जबकि} \quad x=0 \end{cases}$, की बिन्दु $x=0$ पर $f(x)$ के सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

21. फलन $f(x)=\sin x, x$ के किन मानों के लिए अवकलनीय हैं।

22. फलन $f(x)=\begin{cases} x^2\sin x & ; \quad x\ne 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$, की $x\in R$ के लिए अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए तथा $f'(0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. फलन $f(x)=\begin{cases} (x-a)^2\sin\left(\dfrac{1}{x-a}\right) & ; \quad x\ne a \\ 0 & ; \quad x=a \end{cases}$,

की बिन्दु $x=a$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

24. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ; \quad x\ge 1 \\ 1-x & ; \quad x<1 \end{cases}$,

बिन्दु $x=1$ पर अवकलनीय नहीं हैं।

25. फलन $f(x)=\begin{cases} -x & ; \quad x\le 0 \\ x & ; \quad x>0 \end{cases}$,

की बिन्दु $x=0$ अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

26. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\log_e\cos x}{\log_e(1+x^2)} & ; \quad x\ne 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$

बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय है।

27. फलन $f(x)=|x-2|+2|x-3|$ की अन्तराल $[1, 3]$ में अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

28. यदि फलन $f(x)=x^3, x=2$ पर अवकलनीय है तब $f'(2)$ ज्ञात कीजिए।

29. सिद्ध कीजिए कि महत्तम मान फलन $f(x)=[x]$, बिन्दु $x=2$ पर अवकलनीय नहीं है।

30. फलन $f(x)=\begin{cases} x-1 & ; \quad x<2 \\ 2x-3 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$ तब $f'(2-0)$ ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **सांतत्य की कोशी परिभाषा**

कोई फलन $f(x)$, अपने प्रान्त के बिन्दु a पर संतत कहलाता है यदि प्रत्येक स्वैच्छ सूक्ष्म धनात्मक संख्या $\in$ के संगत एक धनात्मक संख्या δ ($\in$ पर निर्भर) इस प्रकार विद्यमान हो ताकि $|f(x)-f(a)|<\in$ जबकि $|x-a|<\delta$

2. **बिन्दु पर सांतत्य फलन की वैकल्पिक परिभाषा**

कोई फलन $f(x)$, अपने प्रान्त के बिन्दु a पर संतत कहलाता है, यदि $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

अर्थात् $\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

या $\quad f(a-0)=f(a+0)=f(a)$

अर्थात् a पर $f(x)$ की बायीं सीमा $=a$ पर $f(x)$ की दायीं सीमा $=a$ पर $f(x)$ का मान

3. **प्रान्त में संतत फलन**

कोई फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D में संतत कहलाता है यदि $f(x)$, D के प्रत्येक बिन्दु पर संतत हो।

4. **असांतत्य फलन**

(i) कोई फलन $f(x)$, बिन्दु a पर असंतत कहलाता है यदि $f(x)$ इस बिन्दु पर संतत नहीं हो।

(ii) फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D में असंतत कहलाता है यदि $f(x)$, D के कम से कम एक बिन्दु पर असंतत हो।

5. **सातंत्य के गुणधर्म**

(i) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ किसी प्रान्त D में संतत फलन है तब $f(x)\pm g(x)$ तथा $f(x).g(x)$ तथा $c\cdot f(x)$, जहाँ c अचर है, भी प्रान्त D में संतत फलन होंगे तथा $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, D के उन बिन्दुओं पर संतत होगा जहाँ $g(x)\neq 0$

(ii) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अपने-अपने प्रान्त D एवं E में कोई दो संतत फलन है तब उनके संयुक्त फलन $(gof)(x)$ भी प्रांत D में संतत फलन होगा।

6. **अवकलनीयता**

कोई फलन $f(x)$ बिन्दु $x=c$ पर अवकलनीय होगा, यदि बिन्दु $x=c$ पर इसके बायाँ तथा दायाँ अवकलज विद्यमान एवं परिमित हो तथा समान हो अर्थात् $f'(c-0)=f'(c+0)$

या $\quad \lim_{h\to 0}\dfrac{f(c-h)-f(c)}{-h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

7. **बिन्दु पर फलन का अवकलनीय न होना:**

फलन $f(x)$, बिन्दु c पर अवकलनीय नहीं होगा यदि

(i) $f'(c-0)\neq f'(c+0)$

या

(ii) $f'(c-0)$ तथा $f'(c+0)$ में से कोई एक या दोनों अपरिमित हो

या

(iii) $f'(c-0)$ या $f'(c+0)$ में से कोई एक या दोनों विद्यमान नहीं है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 6.1

1. (a) संतत ; (b) असंतत ; (c) संतत ; (d) असंतत ; (e) असंतत ; (f) असंतत ; (g) संतत

2. असंतत 3. $k = 7$ 4. असंतत

प्रश्नमाला 6.2

3. अवकलनीय नहीं 4. अवकलनीय नहीं 5. अवकलनीय नहीं 6. अवकलनीय नहीं

7. अवकलनीय नहीं 8. अवकलनीय नहीं 9. अवकलनीय नहीं 10. अवकलनीय नहीं

11. $m = 3, n = 5$

विविध प्रश्नमाला–6

1. (क) 2. (क) 3. (ख) 4. (घ) 5. (ग) 6. (ख) 7. (घ)

8. (ख) 9. (क) 10. (ख) 11. R में सर्वत्र संतत 12. $m = \frac{-3}{2}$

13. $m = 2, n = -1$ 14. संतत 15. संतत 16. $a = -3/2, c = 1/2$ तथा $b \in R$

17. असंतत 18. $[-1, 2]$ में संतत 19. $1/6$ 20. दायीं तरफ से संतत (अर्थात् असंतत)

21. R 22. प्रत्येक $x \in R$ के लिए अवकलनीय तथा $f'(0) = 0$ 23. अवकलनीय नहीं

25. अवकलनीय नहीं 27. $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं 28. 12 30. 1