अध्याय **10**

सीधा एवं व्युत्क्रम समानुपात
(DIRECT AND INDIRECT PROPORTION)

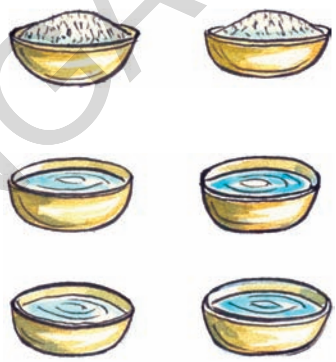
SCERT TELANGANA

10.0 परिचय

चलिए अब दी गई स्थितियों का अवलोकन करेंगे।

2 कप चावल पकाने के लिए गोपी 4 कप पानी का उपयोग करता है। गोपी के घर मेहमान आने पर उसे आज 6 कप चावल पकाना है उसके लिए उसे कितने कप पानी की आवश्यकता होगी?

क्या आप उसकी सहायता करेंगे?



हमारे दैनंदिन जीवन में हम इसी प्रकार की कई स्थितियों का सामना करते हैं जहाँ एक राशि में परिवर्तन होने पर दूसरी राशि में परिवर्तन होता है। उदाहरणार्थ

(i) यदि आपके विद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या में वृद्धि होती है तो आवश्यक मध्यान्ह भोजन की मात्रा क्या होगी? क्या अधिक मध्यान्ह भोजन की आवश्यकता हो?

(ii) यदि हम बैंक में अधिक रकम जमा करें तो उस पर प्राप्त ब्याज के बारे में आप क्या कह सकते हो? नि:संदेह प्राप्त ब्याज भी अधिक होगा।

(iii) यदि खरीदी गई वस्तुओं की संख्या कम की गई तो कुल व्यय (मूल्य) क्या होगा? स्पष्ट है कि कुल मूल्य भी कम होगा।

(iv) यदि 40 चाय पैकेट का भार 1.6 कि.ग्रा. हो तो 20 चाथ पैकेट का भार क्या होगा? साफ है कि 20 चाय पैकेट का भार कम होगा।

इन सभी उदाहरणों में, हम यह देखने हैं कि एक राशि में परिवर्तन से दूसरी राशि में परिवर्तन होता है।

यह कीजिए :

ऐसी ही और पाँच स्थितियाँ लिखिए जिनमें एक राशि में परिवर्तन से दूसरी राशि में परिवर्तन होता है।

गोपी द्वारा आवश्यक पानी की मात्रा की गणना हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं? यह ज्ञात करने के लिए, हम कुछ भिन्न पद्धतियों को चर्चा करेंगे।

10.1 सीधा अनुपात

वन महोत्सव के उपलक्ष्य पर इको टीम के कप्तान ने वृक्षारोपण करवाने का निर्णय लिया। प्रत्येक कक्षा के इको क्लब के सदस्य की संख्या नीचे दी गई है।

कक्षा	VI	VII	VIII	IX	X
इको विद्यार्थियों की संख्या	5	7	10	12	15

प्रत्येक विद्यार्थी को दो पौधे लगाने हैं। प्रत्येक कक्षा द्वारा वृक्षारोपण के लिए आवश्यक पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

कक्षा	VI	VII	VIII	IX	X
इको विद्यार्थियों की संख्या	5	7	10	12	15
आवश्यक पौधों की संख्या	10	14	20	24	30

आवश्यक पौधों की संख्या के बारे में आप क्या कह सकते हैं? विद्यार्थियों की संख्या एवं आवश्यक पौधों की संख्या में आप क्या परिवर्तन देखते हैं? या तो दोनों में वृद्धि होती है या दोनों में कमी।

$$\frac{\text{आवश्यक पौधों की संख्या}}{\text{छात्रों की संख्या}} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{20}{10} = \ldots\ldots = \frac{2}{1} = 2$$ जो एक स्थिरांक है और अनुपात का स्थिरांक कहलाता है।

अनपात समान है अतः हम इस परिवर्तन को सीधा अनुपात कहते हैं यदि x और y कोई दो राशियों इस प्रकार हैं कि दोनों में वृद्धि या कमी एक साथ होती है और $\frac{x}{y}$ स्थिर रहता है (माना k), तब हम यह कह सकते हैं कि x तथा y सीधे अनुपात में हैं। इसे $x \propto y$ लिखते हैं और x सीधे अनुपात में है y को ऐसे पढ़ा जाता है।

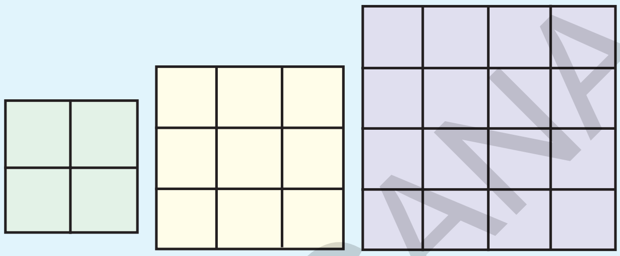
$\therefore \frac{x}{y} = \text{k} \Rightarrow x = ky$ जहाँ k अनुपातिकता स्थिराक है।

यदि y_1 और y_2 क्रमशः x_1 and x_2 से संबंधित y के मूल्य हैं तो $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

यह कीजिए

1. तीन उदाहरण दीजिए जहाँ आप सीधा अनुपात देखते हैं।
2. माना 2, 3, 4 और 5 से.मी. भुजा वाले विभिन्न वर्ग हैं। इन वर्गों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और निम्न तालिका भरीए।

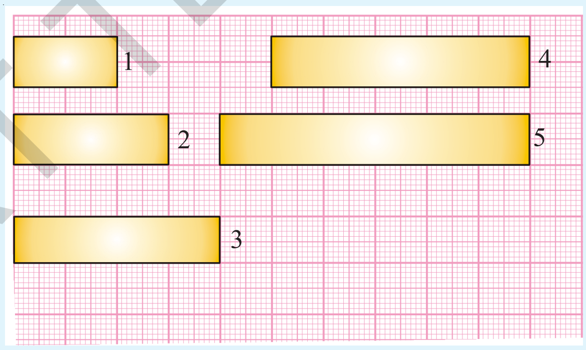
भुजा (से.मी.)	क्षेत्रफल (वर्ग से.मी.)
2	
3	
4	
5	



आप क्या देखते हैं? यदि भुजा में परिवर्तन होता है तो क्या आप क्षेत्रफल में परिवर्तन देखते हैं? दी गई भुजा के लिए वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या यह अनुपात समान होगा ?

$\therefore$ यह परिवर्तन एक सीधा अनुपात नहीं है।

3. एक आलेख पर, समान चौड़ाई वाले आयत बनाए गए है। प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कर तालिका पूर्ण करें।



आयत	1	2	3	4	5
लंबाई (से.मी.)					
क्षेत्रफल (वर्ग से.मी.)					

क्या क्षेत्रफल आयत की लंबाई के सीधे अनुपात में है?

4. एक आलेख पत्र लेकर उस पर समान लम्बाई एवं भिन्न चौड़ाई के आयत बनाइए। प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप चौड़ाई एवं क्षेत्रफल के बारे में क्या निष्कर्ष निकालेंगे ?

SCERT TELANGANA

उदाहरण 1: समान आकार के 65 चाय पैकेट का मूल्य यदि रु. 2600 है तो ऐसे 75 चाय पैकेट का मूल्य क्या होगा?

हल : हमें ज्ञात है कि यदि चाय पैकेट की संख्या में वृद्धि होती है तो मूल्य भी बढ़ेगा। अतः चाय पैकेट का मूल्य उसकी संख्या के सीधा समानुपात में है।

चाय पैकेट की संख्या (x)	65	75
मूल्य (y)	2600	?

अतः $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ यहाँ $x_1 = 65$ $y_1 = 2600$ $x_2 = 75$ $y_2 = ?$

प्रतिस्थापित करने पर $\frac{65}{2600} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 2600}{65} =$ रु.3000

अतः ऐसे 75 पैकेट का मूल्य रु.3000 है।

उदाहरण 2: एक रेलवे स्टेशन पर कार पार्किंग की दर निम्न है।

घण्टे (x)	दर (y)
चार घण्टे तक	₹ 60
आठ घण्टे तक	₹ 100
12 घण्टे तक	₹ 140
24 घण्टे तक	₹ 180

जाँच कीजिए कि पार्किंग की दर एवं पार्किंग समय सीधे अनुपात में हैं या नहीं।

हल : हम देख सकते हैं कि दोनों राशियों में धीरे-धीरे वृद्धि हो रही है।

क्या यह सीधे अनुपात में है? $\frac{x}{y}$ का मूल्य क्या है?

यदि यह स्थिर है, तो सीधा अनुपात है। यदि नहीं तो सीधे अनुपात में नहीं है। यहाँ जाँच करें।

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{60}, \frac{8}{100}, \frac{12}{140}, \frac{24}{180}$$

आप देख सकते हैं कि यह अनुपात समान नहीं हैं। अतः यह राशियों सीधे अनुपात में नहीं हैं।

उदाहरण 3: 8 मीटर ऊँचाई वाला एक खम्बो की परछाई 10 मी हैं तो समान परिस्थितियों ने 40 मी. लम्बाई वाली परछाई के वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिये?

SCERT TELANGANA

हल: खम्बे की ऊँचाई के साथ-साथ परछाई की लंबाई भी समानुपात में बदलती है।

अत: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ यहाँ $x_1 = 8$ मी. $y_1 = 10$मी. $x_2 = ?$ और $y_2 = 40$मी.

प्रतिस्थापित करने पर $\frac{8}{10} = \frac{x_2}{40} \Rightarrow x_2 = \frac{8 \times 40}{10} = 32$ मीटर

अत: वृक्ष की ऊँचाई 32 मीटर है।

उदाहरण 4: 50 लीटर आयतन वाली एक टंकी को पाइप द्वारा भरने के लिए 5 घण्टे लगते हैं। तो 75 लीटर आयतन को भरने के लिए कितने समय की आवश्यकता होगी?

हल: टंकी में पानी का आयतन $\propto$ टंकी भरने के लिए आवश्यक समय

अत: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ यहाँ $x_1 = 50\,l$ $y_1 = 5$ घण्टे $x_2 = 75\,l$ और $y_2 = ?$

$\frac{50}{5} = \frac{75}{x} \Rightarrow x = \frac{75 \times 5}{50} = \frac{\cancel{375}^{15}}{\cancel{50}_{2}} = 7\frac{1}{2}$ घण्टे

अत: 75 l आयतन की टंकी भरने के लिए आवश्यक समय है $7\frac{1}{2}$ घण्टे।

उदाहरण 5: यदि 20 मीटर कपड़े का मूल्य रु.1600 हैं तो 24.5 मीटर कपड़े का मूल्य क्या होगा?

हल : कपड़े का मूल्य उसकी लम्बाई के सीधे समानुपात में है। अत: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ जहाँ $x_1 = 20$ मीटर

$y_1 =$ रु.1600, $x_2 = 24.5$ मीटर और $y_2 = ?$

प्रतिस्थापित करने पर $\frac{20}{1600} = \frac{24.5}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{1600 \times 24.5}{20} =$ रु.1960

अत: 24.5 मी कपड़े का मूल्य रु.1960

यह कीजिए

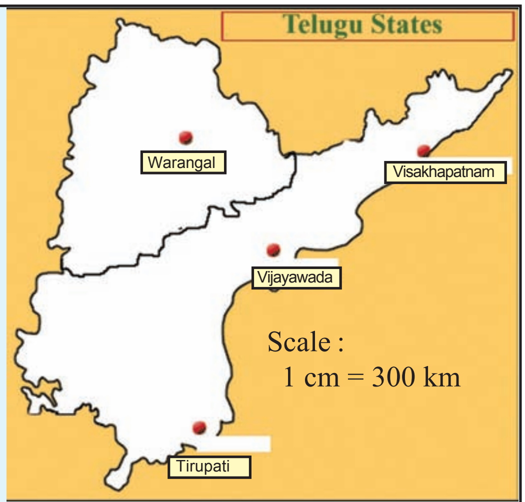
दिए गए मानचित्र में दूरी मापिए एवं उसके उपयोग से निम्न की सही दूरी ज्ञान कीजिए।

(i) विजयवाड़ा और विशाखपट्टणम

(ii) तिरुपति और वरंगल

जहाँ मानचित्र का पैमाना है।

1 से.मी.= 300 कि.मी. पैमाने को परिवर्तीत करने पर 1 से.मी. 1 : 30000000 प्राप्त होगा।



SCERT TELANGANA

अभ्यास - 10.1

1. एक विशेष प्रकार के 5 मीटर कपड़े का मूल्य ₹ 210 है। तो उसी प्रकार के कपड़े का मूल्य ज्ञात कीजिए यदि लंबाई (i) 2 मी. (ii) 4 मी. (iii) 10 मी.(iv) 13 मी है।

2. तालिका पूर्ण कीजिए।

सेबों की संख्या	1	4	7	12	20
सेबों का मूल्य (₹)	8	....	....	....	....

3. 48 थैले धान का मूल्य ₹ 16,800 है तो 36 थैले धान का मूल्य ज्ञात कीजिए।

4. 4 सदस्यों वाले परिवार का मासिक खर्च ₹ 2,800 है तो 3 सदस्यों वाले परिवार का मासिक व्यय ज्ञात कीजिए।

5. 28 मी. लंबी जहाज के मस्तूल की ऊँचाई 12 मी. है। यदि इसी प्रकार के मस्तूल की ऊँचाई 9 मी. हो तो जहाज की लंबाई ज्ञात कीजिए।

6. एक 5 मी 60 से.मी. ऊँचाई वाले ऊर्ध्व खम्बे की परछाई 3मी 20 से.मी. है। उसी समय
   (i) 10 मी 50 से.मी. ऊँचाई वाले अन्य खम्बे द्वारा बनी परछाई की लम्बाई।
   (ii) खम्बे की ऊँचाई जिसकी छाया 5 मी. लम्बी है ज्ञात कीजिए।

7. एक सामान से भरा ट्रक 25 मिनट में 14 कि.मी. दूरी तय करता है। यदि वेग अपरिवर्तित रहे तो 5 घण्टे में वह कितनी दूरी तय करेगा?

8. मोटे कागज़ के 12 पन्नों का भार 40 ग्राम है तो उसी प्रकार के कितने पन्नों का भार $16\frac{2}{3}$ किलोग्राम होगा?

9. एक रेलगाड़ी 75 कि.मी/घण्टे के समवेग से गति कर रही है।
   (i) 20 में रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी क्या होगी?
   (ii) 250 कि.मी. की दूरी तय करने में लगा समय ज्ञात कीजिए।

10. एक माइक्रोचिप के नक्शे का पैमाना 40:1 है। नक्शे की लंबाई 18 से.मी. है तो माइक्रोचिप की सही लम्बाई ज्ञात कीजिए।

परियोजना कार्य

1. भारत का मानचित्र लीजिए। उपर्युक्त नोट कीजिए। किन्हीं दो शहरों के मध्य मानचित्र दूरी पैमाने की सहायता से ज्ञात कीजिए। उनके मध्य सही दूरी की गणना कीजिए।

2. 5 व्यक्तियों के लिए हलवा बनाने के लिए आवश्यक सामग्री निम्न है: रवा (या) सूजी = 250 ग्राम, शक्कर = 300 ग्राम, घी = 200 ग्राम, पानी = 500 मि.ली.
   अनुपात की धारणा का उपयोग कर आपकी कक्षा के लिए हलवा बनाने में आवश्यक सामग्री की मात्रा में होने वाले परिवर्तन का अनुमान लगाइए।

SCERT TELANGANA

10.2 व्युत्क्रम अनुपात (Inverse Proportion) :

एक पार्सल कम्पनी के पास पहुँचाने के लिए कुछ पार्सल हैं। यदि कम्पनी 36 व्यक्तियों को इस कार्य के लिए रखती हैं तो 12 दिनों का समय लगता है। यदि केवल 18 व्यक्ति हैं तो 24 दिनों में यह कार्य पूरा होगा। आप देख सकते हैं कि यदि व्यक्तियों की संख्या आधी हो तो समय दुगुना लगता है। यदि कम्पनी 72 व्यक्तियों को रखती है तो क्या समय आधा होगा?

हाँ, निश्चित ही। निम्न तालिका को देखें।

÷2 ÷4 ×2 ×3

व्यक्तियों की संख्या	36	18	9	72	108
समय	12	24	48	6	4

×2 ×4 ÷2 ÷3

एक ही दिन में पार्सल पहुँचाने के लिए एक कम्पनी को कितने व्यक्तियों को रखना चाहिए?

यदि एक राशि बढ़ती हैं तो दूसरी राशि में उसी अनुपात में कमी होती है और विपरीत इसे व्युत्क्रम अनुपात कहते हैं। उक्त उदाहरण में, कार्यरत व्यक्तियों की संख्या और दिनों की संख्या एक दूसरे के व्युत्क्रम अनुपात में है।

सांकेतिक रूप में

$$\text{आवश्यक दिनों की संख्या} \propto \frac{1}{\text{काम पर लगाये गये लोगों की संख्या}}$$

यदि x और y व्युत्क्रम अनुपात में है तो $x \propto \frac{1}{y}$

$x = \frac{k}{y}$ जहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है।

$xy = k$.

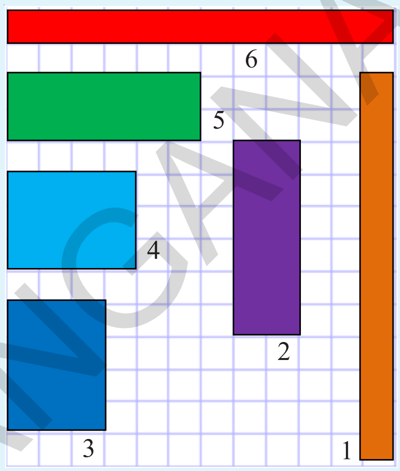
यदि y_1 और y_2 क्रमशः x_1 और x_2 के संगत y के मूल्य हैं तो $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k), या $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

SCERT TELANGANA

यह कीजिए

1. दैनिक जीवन की किन्ही तीन परिस्थितियाँ को लिखिए जहाँ आप व्युत्क्रम अनुपात देखते हैं।
2. एक वर्गाकर कागज पर भिन्न-भिन्न परिमाण वाले आयत 12 संलग्न वर्ग उपयोग कर बनाने हैं। बनाने वाले प्रत्येक आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए। निम्न सारिणी में मूल्य नोट करें।

आयत क्रमांक	लम्बाई (से.मी.)	चौड़ाई (से.मी.)	क्षेत्रफल (वर्ग से.मी.)
1	L1……	B1……	……....
2	L2……	B2……	……....
3	L3……	B3……	……....
4	L4……	B4……	……....
5	L5……	B5……	……....
6	L6……	B6……	……....



आप क्या देखते हैं? जैसे-जैसे लम्बाई में वृद्धि होती है, चौड़ाई घटती है और व्युत्क्रम (क्षेत्रफल स्थिर है)।

क्या लम्बाई और चौड़ाई एक दूसरे के व्युत्क्रम अनुपात में हैं?

उदाहरण 6: यदि 36 मजदूर एक दीवार 12 दिनों में बना सकते हैं तो 16 मजदूरों द्वारा उसी दीवार को बनाने में कितना समय लगेगा?

हल : यदि मजदूरों की संख्या घटती है, तो दीवार बनाने में लगे समय में उसी अनुपात में वृद्धि होगी।

स्पष्ट रूप से मज़दूरों की संख्या दिनों की संख्या के व्युत्क्रम अनुपात में है।

अत: यहाँ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ जहाँ $x_1 = 36$ मजदूर

$y_1 = 12$ दिन $x_2 = 16$ मजदूर $y_2 = ?$ दिन

मज़दूरों की संख्या	दिनों की संख्या
↓ 36	12 ↑
16	y_2

> क्यूंकि मज़दूरों की संख्या कम हो रही है $36 \div x = 16 \Rightarrow x = \frac{36}{16}$
>
> अत: दिनों की संख्या उसी अनुपात में बढ़ेगी ।
>
> अर्थात् $x \times 12 = \frac{36}{16} \times 12$
>
> $= 27$ दिन

प्रतिस्थापित करने पर, $\frac{36}{16} = \frac{y_2}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{12 \times 36}{16} = 27$ दिन

अत: 16 मज़दूरों द्वारा उसी दीवार को बनाने में 27 दिन लगेंगे।

SCERT TELANGANA

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

क्या हम कह सकते हैं कि प्रत्येक परिवर्तन एक अनुपात है?

एक पुस्तक में 100 पृष्ठ हैं। पुस्तक में पढ़े हुए पृष्ठों की संख्या और शेष रह गए पृष्ठों की संख्या में क्या अंतर है?

पढ़े हुए पृष्ठों की संख्या	(x)10	20	30	50	70
शेष पृष्ठ (y)	90	80	70	50	30

(यहाँ पर तब शेष पन्नों की संख्या क्या रह जाती है) (जब पढ़े हुए पृष्ठों की संख्या बढ़ती है)? क्या इसमें व्युत्क्रम है? समझाइए।

अभ्यास - 10.2

1. निम्न तालिका का निरीक्षण कीजिए और ज्ञात कीजिए कि कौन-से चर युग्म (यहाँ x और y) व्युत्क्रम अनुपात में हैं।

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

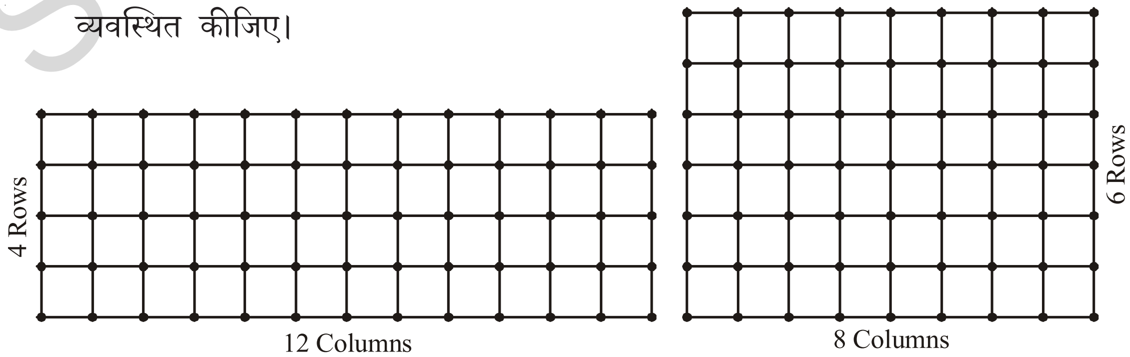
(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	25

2. एक विद्यालय पुस्तकें खरीदने के लिए ₹ 6000 खर्च करना चाहता है। दिए गए दत्तों का उपयोग कर निम्न सारिणी भरिए।

प्रत्येक पुस्तक का मूल्य (रु.)	40	50		75	
पुस्तकों की संख्या (खरीदी जानेवाली)	150		100		75

3. एक वर्गाकार कागज़ लेकर उस पर नीचे दिए अनुसार 48 वर्गों को अलग-अलग पंक्तियों में व्यवस्थित कीजिए।



SCERT TELANGANA

पंक्तियों की संख्या (R)	2	3	4	6	8
स्तंभों की संख्या (C)	---	---	12	8	---

आप क्या देखते हैं? जैसे-जैसे R में वृद्धि होती है, C घटता है।

(i) क्या $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$?

(ii) क्या $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$?

(iii) क्या R और C एक दूसरे से व्युत्क्रम अनुपात में है?

(iv) यह प्रयोग 36 वर्गों के साथ कीजिए।

कक्षा परियोजना

आपकी कक्षा में एक सप्ताह तक उपस्थित एवं अनुपस्थित छात्रों की संख्या की तालिका बनाइए। आपके मित्रों के साथ चर्चा कीजिए और निरीक्षणों को आपकी नोट बुक में लिखिए।

सप्ताह का दिन	उपस्थित छात्रों की संख्या (x)	अनुपस्थित छात्रों की संख्या (y)	$x.y$
सोमवार			
मंगलवार			
बुधवार			
गुरुवार			
शुक्रवार			
शनिवार			

चलिए कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 7: एक छात्रावास में 100 विद्यार्थियों का 40 दिनों के लिए राशन उपलब्ध है। यदि चार दिनों के पश्चात और 20 विद्यार्थी प्रवेश लेते हैं तो वह कितने दिनों तक चलेगा?

हल : विद्यार्थियों की संख्या में वृद्धि होने पर उसी अनुपात में राशन कम दिनों तक चलेगा। अतः यह व्युत्क्रम अनुपात में है।

	राशन उपलब्धि के दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या
	40	100
चार दिनों पश्चात	36 ↓	↑ 100
	x	120

अब प्रश्न यह है कि यदि 100 विद्यार्थियों का 36 दिनों के लिए राशन उपलब्ध है तो 120 विद्यार्थियों के लिए कितने दिन चलेगा?

SCERT TELANGANA

$$\frac{36}{x} = \frac{120}{100}$$

$$x = \frac{\overset{3}{\cancel{36}} \times 10\cancel{0}}{\cancel{12}\cancel{0}} = 30 \; days$$

चूंकि विद्यार्थियों की संख्या में वृद्धि हो रही है

$100 \times x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{100}$

उसी अनुपात में दिनों की संख्या में कमी होगी

अर्थात् $36 \div x$

$= 36 \div \frac{120}{100}$

$\Rightarrow 36 \times \frac{100}{120} = 30$ days

उदाहरण 8: 60 कि.मी./घण्टे की गति से एक कार अपनी मंजिल तक पहुँचने में 4 घण्टे का समय लेती है। यदि वह कार 80 कि.मी./घण्टे की गति से गमन करती है तो उसे कितना समय लगेगा?

हल : गति बढ़ने पर लगे समय में समान अनुपात में कमी होती है। अत: समय और कार की गति व्युत्क्रम अनुपात में हैं। (समान दूरी के लिए)

विधि 1

गति ↓	समय ↑
60	4
80	x

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4}$$

$60 \times 4 = 80 \times x$

$$x = \frac{60 \times 4}{80} = 3 \text{ hr.}$$

(या)

विधि II

गति ($x \times$)	समय ($\div x$)
60	4
80	y

$60 \times x = 80$ and $4 \div x = y$

$$x = \frac{80}{60}$$

$$4 \div \frac{80}{60} = y$$

$$y = \frac{4 \times 60}{80} = 3 \; hr.$$

उदाहरण 9: 1 टंकी को 1 घण्टा 20 मिनट में भरने के लिए 6 पम्पों की आवश्यकता है। इसी प्रकार के 5 पम्पों की सहायता से टंकी भरने में कितने समय की आवश्यकता होगी?

हल : माना टंकी भरने के लिए आवश्यक समय = x मिनट इस प्रकार, निम्न तालिका प्राप्त होती है।

पम्पों की संख्या	6	5
समय (मिनट)	80	x

जितनी कम पम्पों की संख्या उतना ही अधिक समय टंकी को भरने में लगेगा।

तो यह व्युत्क्रम अनुपात का एक उदाहरण है।

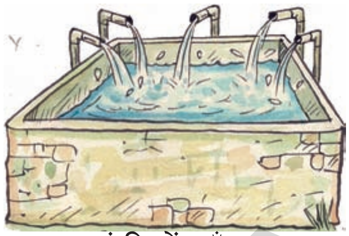
SCERT TELANGANA

अत: $80 \times 6 = x \times 5$ $[x_1 y_1 = x_2 y_2]$

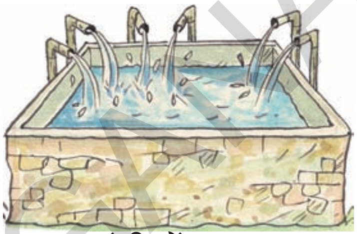
(या) $\frac{80 \times 6}{5} = x$

(या) $x = 96$ मिनट

इस प्रकार 5 पम्पों की सहायता से टंकी भरने में लगा समय 96 मिनट या 1 घण्टा 36 मिनट है।



एक टंकी में पाँच पाइप



एक टंकी में छः पाइप

अभ्यास - 10.3

1. ₹ 8 प्रति किलोग्राम की दर से 5 किलो आलू खरीदने के लिए सिरी के पास रकम है। यदि आलू का मूल्य ₹10 प्रति किलो हो जाए तो उसी रकम में वह कितने आलू खरीद सकती है?
2. 500 व्यक्तियों के लिए 70 दिनों के भोजन की व्यवस्था एक कैम्प में है। यदि और 200 व्यक्ति कैम्प में शामिल होते हैं तो कितने दिनों तक की भोजन की व्यवस्था हो सकती है?
3. 36 लोग एक काम को 12 दिनों में पूरा करते हैं तो 9 व्यक्ति उसी काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे?
4. एक साइकिल चालक 28 कि.मी. की दूरी 2 घण्टों में तय करता है तो उसके द्वारा 56 कि.मी. की दूरी तय करने में लगा समय ज्ञात कीजिए।
5. एक जहाज द्वारा 10 घण्टों में एक निश्चित दूरी 16 मील प्रति घण्टे की गति से तय की जाती है। उसकी गति में कितनी वृद्धि करनी चाहिए कि उसी दूरी को तय करने में उसे केवल 8 घण्टे का समय लगे? (एक नौचालन मील समुद्री दूरी मापने की इकाई है)
6. एक टंकी को $1\frac{1}{2}$ घण्टे में पूरा भरने के लिए पाँच पम्पों की आवश्यकता है। टंकी को आधे घण्टे में भरने के लिए उसी प्रकार के कितने पम्पों की आवश्यकता होगी?
7. यदि 15 आदमी एक दीवार को 48 घण्टों में बाँध सकते हैं तो उसी काम को 30 घण्टों में पूरा करने के लिए कितने लोगों की जरूरत पड़ेगी?
8. एक विद्यालय में प्रतिदिन 45 मिनट अवधि के 8 कालांश होते हैं। यदि विद्यालय में 6 कालांश प्रतिदिन कर दिये जायें तो प्रत्येक कालांश की अवधि क्या हो जाएगी? (माना कि विद्यालय का समय समान है)

SCERT TELANGANA

9. यदि z, x के समानुपात एवं y के व्युत्क्रम अनुपात में परिवर्तिन होता है तो Z में होने वाली प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए। यदि x में 12% वृद्धि और y में 20% कमी हो।

10. यदि $x + 1$ आदमी एक काम को $x + 1$ दिनों में पूरा करते हैं तो $(x + 2)$ आदमी उसी काम में कितने दिनों में पूरा करेंगे?

11. 24 मीटर की निश्चित परिमिति के दिए गए आयत में यदि लंम्बाई 1 मी. से बढ़ाई जाए तो चौड़ाई और क्षेत्रफल में संगत परिवर्तन होगा। लंबाई के साथ चौड़ाई एवं क्षेत्रफल में होने वाली परिवर्तन अवलोकनार्थ निम्न तालिका का उपयोग कीजिए।
आप क्या देखते है? अपना निरीक्षण आपकी कॉपी में लिखिए।

लंबाई (से.मी.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
चौड़ाई (से.मी.)	11	10	....	....	....	....	....	......	.....
क्षेत्रफल (वर्ग से.मी.)	11	20	....	....	....	....	....	......	......

10.3 गुणित समानुपात (Compound Proportion) :

कभी-कभी किसी समानुपात की राशि में परिवर्तन अन्य दो या अधिक राशियों के परिवर्तन पर निर्भर करता है।

तब हम प्रथम राशि के समानुपात को अन्य दो राशियों के गुणित समानुपात के बराबर कर सकते हैं।

(i) एक राशि अन्य दो राशियों के साथ सीधे समानुपात में हो सकती है।

(ii) एक राशी दूसरी राशियों से व्युत्क्रम समानुपात में हो सकती है।

(iii) एक राशि दोनों राशियों में से एक के साथ सीधे समानुपात में और शेष से व्युत्क्रम समानुपात में हो सकती है।

उदाहरण 10: 35 विद्यार्थियों के 24 दिनों के मेस का खर्च ₹ 6300 होता है। बताओ कि 25 विद्यार्थियों का 18 दिनों के लिए मेस का खर्च क्या होगा?

हल : यहाँ तीन राशियाँ हैं अर्थात् मेस खर्च, विद्यार्थियों की संख्या और दिनों की संख्या।

मेस खर्च रु.	विद्यार्थियों की संख्या	दिनों की संख्या
6300	35	24
? (x)	25	18
$6300 : x$	$35:25 = 7:5$	$24:18 = 4:3$

विद्यार्थियों की संख्या और मेस के खर्च सीधे समानुपात में है।

मेस खर्च $\propto$ विद्यार्थियों की संख्या

$6300 : x = 7:5$

SCERT TELANGANA

मेस खर्च दिनों की संख्या के साथ व्युत्क्रम अनुपात में है।

मेस खर्च $\propto$ दिनों की संख्या

$6300 : x = 4 : 3$

मेस खर्च दोनों राशियों पर निर्भर करता है अर्थात् विद्यार्थियों की संख्या और दिनों की संख्या। अतः हम इन दो राशियों का गुणित समानुपात लेंगे।

मेस खर्च $\propto$ विद्यार्थियों की संख्या का अनुपात और दिनों की संख्या के अनुपात का गुणित समानुपात।

$6300 : x =$ $7 : 5$ का गुणित समानुपात और $4 : 3$

$6300 : x = 7 \times 4 : 5 \times 3$

$6300 : x = 28 : 15$

मध्य राशियों का गुणनफल = अंत्य राशियों का गुणनफल

$28 \times x = 15 \times 6300$

$$x = \frac{15 \times 6300}{28}$$

$x =$ रु.3375.

अतः मेस खर्च होगा रु.3375.

उदाहरण 11: 24 लोग 6 घण्टे प्रतिदिन काम करके किसी काम को14 दिनों में पूरा करते हैं। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रतिदिन 7 घण्टे काम करेगा तो उसी काम को 8 दिनों में पूरा करने में कितने लोगों की आवश्यकता होगी?

हल : यहाँ तीन राशियाँ हैं - लोगों की संख्या, प्रतिदिन घण्टे, दिनों की संख्या।

लोगों की संख्या	**प्रतिदिन घण्टे**	**दिनों की संख्या**
24	6	14
? (x)	7	8
$24 : x$	$6 : 7$	$14 : 8 = 7 : 4$

लोगों की संख्या प्रतिदिन के घण्टों के व्युत्क्रम समानुपात में है।

$$\text{लोगों की संख्या} \propto \frac{1}{\text{दिन में घंटों की संख्या}}$$

SCERT TELANGANA

$24 : x = 6 : 7$ का व्युत्क्रम अनुपात अर्थात् $7 : 6$

$\Rightarrow 24 : x$ सीधे समानुपात में है $7 : 6$ के

पुनः दिनों की संख्या लोगों की संख्या के व्युत्क्रम अनुपाती है।

लोगों की संख्या $\propto \dfrac{1}{\text{दिनों की संख्या}}$

$24 : x = 7 : 4$ का व्युत्क्रम अनुपात अर्थात् $4 : 7$

चूंकि लोगों की संख्या दो चर राशियों पर निर्भर करती है अर्थात् दिनों की संख्या और प्रतिदिन घण्टों की संख्या। अतः,

लोगों की संख्या $\propto$ प्रतिदिन घण्टों की संख्या का व्युत्क्रम समानुपात और दिनों की संख्या के व्युत्क्रम समानुपात का गुणित समानुपात

$24 : x = 7 : 6$ और $4 : 7$ का गुणित अनुपात

$24 : x = 7 \times 4 : 6 \times 7$

$24 : x = 4 : 6$

$24 : x = 2 : 3$

मध्य राशियों का गुणनफल = अन्य राशियों का गुणनफल

$2 \times x = 24 \times 3$

$x = 36$

अतः आवश्यक लोगों की संख्या = 36.

वैकल्पिक विधि

$$\frac{24}{x} = \frac{7}{6} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2 \times x = 24 \times 3$$

$$x = \frac{72}{2} = 36$$

उदाहरण 12: 180 मी. लंबी दीवार को 12 पेंटर 3 दिनों में रंग देते हैं। तो 200 मी. लंबी दीवार को 5 दिनों में रंग ने के लिए कितने पेंटर की आवश्यकता होगी?

हल : पेंटर की संख्या दीवार की लंबाई के सीधे समानुपाती एवं दिनों की संख्या के व्युत्क्रम अनुपाती है।

पेंटर की संख्या	दीवार की लम्बाई (मी.)	दिनों की संख्या
12	180	3
x	200	5
$12 : x$	$180 : 200 = 9 : 10$	$3 : 5$

पेंटर की संख्या α दीवार की लम्बाई

$12 : x = 9 : 10$ ---- (1) और

पेंटर की संख्या $\alpha \dfrac{1}{\text{दिन की संख्या}}$

SCERT TELANGANA

$12 : x = 3 : 5$ की व्युत्क्रम समानुपात

$12 : x = 5 : 3$ ---- (2)

(1) और (2) द्वारा

$12 : x = 9 : 10$ और $5 : 3$ का गुणित समानुपात

$12 : x = (9 : 10) \times (5 : 3)$

$12 : x = 9 \times 5 : 10 \times 3$

$12 : x = 45 : 30 = 3 : 2$

$12 : x = 3 : 2$ (अन्त्य राशियों का गुणनफल = मध्यराशियों का गुणनफल)

$3 \times x = 12 \times 2$

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

पेंटर की आवश्यक संख्या $= 8$

वैकल्पिक विधि

$$\frac{12}{x} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$$

$$12 \times 2 = 3 \times x$$

$$x = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \times 2}{\cancel{3}} = 8$$

अभ्यास - 10.4

1. 8 सदस्यों का 20 दिनों के लिए चावल का मूल्य ₹ 480 है। 12 सदस्यों का 15 दिनों के लिए चावल का मूल्य क्या होगा?

2. 10 आदमी 75 कि.मी. लंबी सड़क 5 दिनों में बनाते हैं तो बताओ कि 15 आदमी 45 कि.मी. लम्बी सड़क कितने दिन में बनाएंगे?

3. 24 लोग 8 घण्टे प्रतिदिन काम करके-किसी काम को 15 दिनों में पूरा करते हैं। तो बताइए कि 20 लोग 9 घण्टे प्रतिदिन काम करके, उस काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे?

4. 175 लोग 3150 मी. लम्बी नहर 36 दिनों में खोद सकते हैं तो 3900 मी. लम्बी नहर को 24 दिनों में खोदने के लिए कितने आदमी चाहिए?

5. 6 घण्टे प्रतिदिन टाइप करने पर 14 टाइपिस्ट 12 दिनों में किसी पुस्तक की हस्तलिपि पूरा करते हैं तो बताइए कि 4 टाइपिस्ट प्रतिदिन 7 घण्टे कार्य करें तो उसी काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे?

SCERT TELANGANA

हमने क्या सीखा

- यदि x और y सीधे समानुपात में हैं तो दोनों राशियाँ समान अनुपात में परिवर्तित होती है।

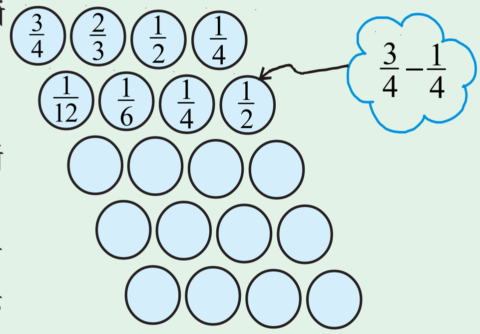
  अर्थात् यदि $\frac{x}{y} = k$ या $x = ky$. हम $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ या $x_1 : y_2 = x_2 : y_1$ [जहाँ y_1, y_2 क्रमशः x_1 और x_2 के संगत y के मूल्य हैं] लिये सकते हैं।
- दो राशियाँ x और y व्युत्क्रम अनुपात में कही जाती है यदि उसमें $xy = k$ प्रकार का संबंध हो जहाँ k स्थिर है।

  यदि y_1, y_2 क्रमशः x_1 और x_2 के संगत मूल्य है y के तब $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k),

  या $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.
- यदि एक राशि में वृद्धि (कमी) से दूसरी राशि में कमी (वृद्धि)समान अनुपात में होती है तो हम कह सकते हैं कि यह परिवर्तन व्युत्क्रम अनुपात में है। प्रथम राशि का अनुपात $(x_1 : x_2)$ दूसरी राशि के व्युत्क्रम अनुपात $(y_1 : y_2)$ के समान होता है। दोनों अनुपात समान है। अतः हम कह सकते हैं कि व्युत्क्रम परिवर्तन एक समानुपात है और इसे व्युत्क्रम समानुपात कहते हैं।
- कभी-कभी किसी समानुपात की राशि में परिवर्तन अन्य दो या अधिक राशियों के परिवर्तन पर निर्भर करता है। तब हम प्रथम राशि के अनुपात को अन्य दो राशियों के गुणित समानुपात के बराबर कर सकते हैं।

डिफी के भिन्न (Diffy with fractions)

इस क्रियाकलाप की प्रक्रिया डिफी कहलाती है। संख्याओं के क्रमगत अंतर को लेकर यह प्रक्रिया बनी है। यह गतिविधि हमें घटाव (व्यवकलन) कौशल में वृद्धि का अभ्यास कराती है।



निर्देश :

सोपान 1: वृत्तों को दिखाए अनुसार बनाइए और पहली पंक्ति में किन्हीं चार भिन्नों को लिखिए।

सोपान 2: दूसरी पंक्ति के पहले तीन वृत्तों में, उनके ऊपर के दायें और बायें वृत्तों के भिन्नों के अंतर लिखिए और पंक्ति के अंतिम वृत्त में ऊपर वाली पंक्ति के पहले और अंतिम वृत्त का अंतर लिखिए, जैसा कि प्रश्न में दिखाया गया है। दोनों को घटाते समय ध्यान रहे कि बड़े भिन्न में से छोटे भिन्न को घटाना है। यही सभी पंक्तियों के वृत्तों के साथ कीजिए।

सोपान 3: पहले सोपान को पुनःदोहराइए। आप बंद कर सकते हैं यदि किसी पंक्ति का मान शून्य प्राप्त करते हैं।

सोपान 4 : सोपान 1, 2 और 3 को कई बार दोहराइए और प्रत्येक बार आरंभ करते समय अलग-अलग भिन्न लें।

पहली पंक्ति में $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$ रखकर पुनः उपर्युक्त क्रिया दोहराइए।

SCERT TELANGANA