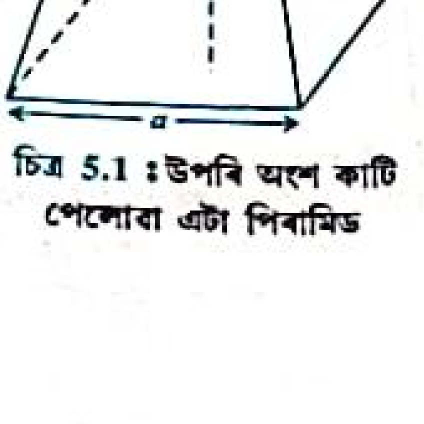
পঞ্চম অধ্যায়

ইউক্লিডৰ জ্যামিতিৰ পৰিচয়
(Introduction to Euclid's Geometry)

5.1 অৱতাৰণা (Introduction) :

জ্যামিতি (Geometry) শব্দটো গ্ৰীক ভাষাৰ শব্দ 'geo' অৰ্থাৎ পৃথিৱী (Earth) আৰু 'metrein' অৰ্থাৎ মাপ (to measure)ৰ পৰা লোৱা হৈছে। ভাব হয়, জ্যামিতিৰ সৃষ্টি হৈছিল মূলতঃ মাটিৰ জোখমাখ লʼবলৈহে। ইজিপ্ত, বেবিলনীয়, চীন, ভাৰত, গ্ৰীক, ইনকাচ আদি প্ৰতিটো প্ৰাচীন সভ্যতাত গণিতৰ এই বিভাগটোৰ বিভিন্ন ৰূপত অধ্যয়ন চলিছিল। এই সভ্যতাসমূহৰ জনসাধাৰণ বিভিন্ন ব্যৱহাৰিক সমস্যাৰ সন্মুখীন হৈছিল আৰু তাৰ সমাধানৰ হেতু জ্যামিতি বিভিন্ন ৰূপত বিকশিত হৈছিল।

উদাহৰণস্বৰূপে, নীল নদীৰ পানীয়ে যেতিয়াই পাৰ বাগৰে, ই ভিন ভিন মালিকৰ ওচৰা-ওচৰিকৈ থকা পথাৰৰ মাজৰ সীমাও উটুৱাই লৈ যায়। এনে বানৰ পাছতে এই সীমাবোৰ পুনৰ নিৰ্ধাৰণ কৰিবলগীয়া হয়। এই উদ্দেশ্যে, সৰল ক্ষেত্ৰ-কালি নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আৰু সৰল নিৰ্মাণ কাৰ্য সমাপন কৰিবলৈ ইজিপ্তৰ অধিবাসীসকলে বহুতো জ্যামিতিক কৌশল আৰু নিয়ম উলিয়াই লৈছিল। শস্য ভাণ্ডাৰৰ আয়তন নিৰ্ণয় আৰু নলা আৰু পিৰামিড় নিৰ্মাণতো তেওঁলোকে জ্যামিতিৰ জ্ঞান ব্যৱহাৰ কৰিছিল। উপৰি অংশ কাটি পেলোৱা এটা পিৰামিডৰ (চিত্ৰ 5.1 চোৱা) আয়তন উলিওৱাৰ নিৰ্ভুল সূত্ৰসমূহো তেওঁলোকে জানিছিল।



চিত্ৰ 5.1 : উপৰি অংশ কাটি পেলোৱা এটা পিৰামিড

তোমালোকে জানা যে, পিৰামিড এটা গোটা বস্তু যাৰ ভূমি ত্ৰিভুজ, চতুৰ্ভুজ, বৰ্গ বা বহুভুজ আকৃতিৰ আৰু ইয়াৰ কাষৰ পৃষ্ঠ ত্ৰিভুজাকৃতিৰ আৰু এটা শীৰ্ষবিন্দুলৈ অভিসাৰী।

ভাৰত উপ-মহাদেশৰ মহেঞ্জোদাৰো আৰু হৰপ্পাৰ খননকাৰ্যসমূহতো সিন্ধু উপত্যকাৰ সভ্যতাত (প্ৰায় 3000 খ্ৰীঃ পূঃ) বিস্তৃতভাৱে জ্যামিতি ব্যৱহাৰ হোৱা পৰিলক্ষিত হয়। নগৰসমূহ যথেষ্ট উন্নত আৰু সুন্দৰভাৱে পৰিকল্পিত আছিল। উদাহৰণস্বৰূপে, পথবোৰ পৰস্পৰ সমান্তৰাল আৰু মাটিৰ তলত নৰ্দমাৰ ব্যৱস্থা আছিল। ঘৰবোৰত বিভিন্ন আকৃতিৰ বহুতো কোঠা আছিল। ইয়াৰ দ্বাৰা অনুমান কৰিব পাৰি যে নগৰখনৰ বাসিন্দাসকল জোখমাখ আৰু ব্যৱহাৰিক অংকশাস্ত্ৰত যথেষ্ট পাৰ্গত আছিল। নিৰ্মাণত ব্যৱহৃত ইটাবোৰ সুন্দৰভাৱে ভাটিত জ্বলোৱা আৰু তাৰ দীঘ, প্ৰস্থ আৰু ডাঠৰ অনুপাত 4 : 2 : 1 পোৱা গৈছিল।

প্ৰাচীন ভাৰতত শুল্বসূত্ৰসমূহ (800 খ্ৰীঃ পূঃ ৰ পৰা 500 খ্ৰীঃ পূ) জ্যামিতিক নিৰ্মাণকাৰ্যৰ হাতপুথি হিচাপে ব্যৱহৃত হৈছিল। বেদী আৰু বৈদিক যাগ-যজ্ঞৰ ভেটি নিৰ্মাণ কাৰ্যৰ পৰাই বৈদিক যুগৰ জ্যামিতিৰ সূত্ৰপাত হৈছিল। পবিত্ৰ হোমযজ্ঞৰ সুফল লাভ কৰিবলৈ হ'লে তাৰ ভেটি নিৰ্মাণ সুনিৰ্দিষ্ট আকাৰ আৰু ক্ষেত্ৰফল সম্পৰ্কীয় পৰামৰ্শাৱলীৰ মতে কৰিব লগা হৈছিল। ঘৰুৱা কাৰ্যৰ বাবে বৰ্গ আৰু বৃত্তাকাৰ ভেটি নিৰ্মাণ কৰাৰ পৰিবৰ্তে ৰাজহুৱা পূজা-অৰ্চনাত আয়ত, ত্ৰিভুজ, ট্ৰেপিজিয়ামৰ যুটীয়া আকৃতিৰ ভেটি নিৰ্মাণ কৰিব লাগিছিল। শ্ৰীয়ন্ত্ৰ (অথৰ্ববেদত উল্লেখিত) নটা পৰস্পৰ ছেদী সমদ্বিবাহু ত্ৰিভুজৰ সমষ্টি। এই ত্ৰিভুজকেইটা এনেদৰে সজোৱা হৈছে যে সিহঁতে 43 টা সহযোগী ত্ৰিভুজ সৃষ্টি কৰে। এই নিৰ্মাণ কাৰ্যত উপযুক্ত জ্যামিতি ব্যৱহাৰ কৰিছিল যদিও তাৰ অন্তৰালত থকা নীতি তেওঁলোকে ব্যাখ্যা কৰা নাছিল।

এই উদাহৰণসমূহৰ পৰা ইয়াকে বুজিব পাৰি যে পৃথিৱীৰ প্ৰায় সকলো ঠাইতে জ্যামিতিৰ বিকাশ আৰু ব্যৱহাৰ হৈছিল। কিন্তু এই কাৰ্য কোনো প্ৰণালীবদ্ধ পদ্ধতিৰে কৰা হোৱা নাছিল। আমোদজনক কথাটো হ'ল এই জ্যামিতিৰ বিকাশসমূহৰ বাতৰি প্ৰাচীন কালত এটা প্ৰজন্মৰ পৰা অন্য প্ৰজন্মলৈ মুখেৰে, তাল গছৰ পাতত লিখি বা আন কিবা মাধ্যমেৰে প্ৰেৰণ কৰা হৈছিল। দেখা যায় যে ভাৰত আৰু বেবিলনীয়াৰ দৰে বেবিলনীয়াৰ নিচিনা আন সভ্যতাতো জ্যামিতি এক প্ৰায়োগিকমুখী বিষয় হৈ আছিল। ইজিপ্তসকলে বিকাশ কৰা জ্যামিতি মূলতঃ ফলাফলৰ উক্তিৰে গঠিত আছিল। তাত কোনো পদ্ধতি সম্পৰ্কীয় সাধাৰণ নিয়ম নাছিল। বাস্তৱিকতেতে বেবিলন আৰু ইজিপ্তৰ লোকসকলে ঘাইকৈ প্ৰায়োগিক দিশত জ্যামিতি ব্যৱহাৰ কৰিছিল আৰু ইয়াক এক প্ৰণালীবদ্ধ বিজ্ঞান কৰি গঢ়ি তুলিবলৈ বিশেষ একো কৰা নাছিল। কিন্তু গ্ৰীচৰ দৰে সভ্যতাত কিছুমান নিৰ্মাণকাৰ্যই কিয় কাম কৰিছিল তাৰ যুক্তিৰ ওপৰত গুৰুত্ব প্ৰদান কৰিছিল। নিগমনাত্মক যুক্তিৰ সহায়ত আৱিষ্কৃত উক্তিসমূহৰ সত্যতা প্ৰতিষ্ঠা কৰোতে গ্ৰীকসকলে অধিক মনোযোগ দিছিল। (পৰিশিষ্ট-1 চোৱা)

সকলোৱে অৱগত হোৱাকৈ প্ৰথম প্ৰমাণ দাঙি ধৰাৰ কৃতিত্ব এজন গ্ৰীক গণিতজ্ঞ থেলেচক প্ৰদান কৰা হয়। থেলেচৰ এই প্ৰমাণটো আছিল— এটা বৃত্তৰ ব্যাসে বৃত্তটোক দুটা সমান ভাগত

ভাগ কৰে। থেলেচৰ এজন বিখ্যাত ছাত্ৰ হ'ল 'পাইথাগোৰাচ' (572 খ্ৰীঃপূঃ) যাৰ বিষয়ে তোমালোকে সকলোৱে শুনিছা নিশ্চয়। 'পাইথাগোৰাচ' আৰু তেখেতৰ সহকৰ্মীসকলে বহুতো জ্যামিতিৰ ধৰ্ম আবিষ্কাৰ কৰিছিল আৰু বহুলভাৱে জ্যামিতিৰ সূত্ৰসমূহৰ বিকাশ সাধন কৰিছিল। এই প্ৰক্ৰিয়া খ্ৰীঃ পূঃ 300 লৈ চলি আছিল। সেই সময়তে ইজিপ্তৰ আলেকজেণ্ড্ৰিয়াত 'ইউক্লিড' নামৰ গণিতৰ শিক্ষক এজনে তেতিয়ালৈকে জনাজাত হোৱা সকলো কৰ্ম গোটাই লৈ তাক তেখেতৰ বিখ্যাত গ্ৰন্থ 'এলিমেণ্টচ' (Elements)অত প্ৰণালীবদ্ধভাৱে সন্নিবিষ্ট কৰিছিল। তেখেতে 'এলিমেণ্টচ'খন 13 টা খণ্ডত বিভক্ত কৰি প্ৰতিটো খণ্ডকে একোখন পুথি হিচাপে নামকৰণ কৰিছিল। এই পুথিসমূহে সমগ্ৰ বিশ্বৰ নবপ্ৰজন্মক জ্যামিতিৰ বিষয়বস্তু হৃদয়ংগম কৰাত প্ৰেৰণা যোগাই আহিছে।

এই অধ্যায়ত আমি ইউক্লিডৰ জ্যামিতিৰ বিশ্লেষণ সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম আৰু তাক বৰ্তমানৰ জ্যামিতিৰ লগত যোগসূত্ৰৰে বন্ধাৰ চেষ্টা কৰিম।

5.2 ইউক্লিডৰ সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য (Euclid's Defi Postulates) :

ইউক্লিডৰ সময়ৰ গ্ৰীক গণিতজ্ঞসকলে জ্যামিতিক তেওঁলোকে বস বিমূৰ্ত আহিঁকপে ধাৰণা কৰিছিল। বিন্দু, ৰেখা, সমতল (বা পিঠি) চাৰিওফালে দেখা পোৱা বস্তুৰ পৰা লাভ কৰিছিল। চাৰিওকাষৰ ক্ষে অধ্যয়ন কৰি গোটা বস্তুৰ এটা বিমূৰ্ত জ্যামিতিৰ ধাৰণা উদ্ভাৱন কৰিছিল আকৃতি আৰু অৱস্থান আছে আৰু ইয়াক স্থানান্তৰ কৰিব পাৰি। ইয়াৰ ক্ষেত্ৰখনৰ এটা অংশৰ পৰা আনটো অংশ পৃথক কৰে আৰু ইহঁতৰ পৃষ্ঠৰ কাষ হ'ল বক্ৰ বা সৰলৰেখা। এই ৰেখাবোৰ বিন্দুত মিলিত

গোটা বস্তুৰ পৰা বিন্দুলৈ থকা তিনিটা চাপ (গোটা বস্তু → পৃষ্ঠ — বিবেচনা কৰা। প্ৰতিটো চাপতে আমি এটাকৈ পৰিসৰ হেৰুৱাও যাক এটা গোটা বস্তুৰ তিনিটা মাত্ৰা আছে। অৰ্থাৎ গোটা বস্তু ত্ৰিমাত্ৰিক, পৃ এক আৰু বিন্দুৰ মাত্ৰা নাই।

ইউক্লিডে এই উক্তিকেইটাক সংজ্ঞা হিচাপে সংক্ষিপ্ত ৰূপ দিয়ে।

সংজ্ঞাত এলিমেণ্টচৰ প্ৰথম পুথিত ব্যাখ্যা কৰিছে। তলত ইয়াৰ কেইটামান দিয়া হ'ল—

1. এটা বিন্দুৰ কোনো অংশ নাই।
2. এডাল ৰেখা হ'ল প্ৰস্থহীন দীঘ।
3. ৰেখাৰ মূৰ দুটা হ'ল বিন্দু।
4. এডাল সৰলৰেখা হ'ল এডাল ৰেখা যি তাৰ বিন্দুসমূহৰ সৈতে সমভাৱে বিৰাজমান।
5. এখন পৃষ্ঠৰ মাথোঁ দীঘ আৰু প্ৰস্থ আছে।
6. এখন পৃষ্ঠৰ কাষবোৰ হ'ল একোডাল ৰেখা।
7. এখন সমতল হ'ল এখন তল যি তাৰ সৰল ৰেখাবোৰৰ লগত সমভাৱে বিৰাজমান।

যদি তোমালোকে এই সংজ্ঞাবোৰ সুক্ষ্মভাৱে পৰ্যবেক্ষণ কৰা তেন্তে দেখিবা যে কিছুমান শব্দ যেনে— অংশ (part), প্ৰস্থ (breadth), দীঘ (length), সমভাৱে (equaly) আদিৰ আৰু অধিক পৰিষ্কাৰ ব্যাখ্যাৰ প্ৰয়োজন। উদাহৰণস্বৰূপে, তেখেতৰ বিন্দুৰ সংজ্ঞালৈ মন কৰা। এই সংজ্ঞাত 'এটা অংশ' কথাটোৰো সংজ্ঞাৰ আৱশ্যক। ধৰা হ'ল, তোমালোকে সংজ্ঞা দিলা যে 'এটা অংশ' হ'ল যি 'ক্ষেত্ৰ' আগুৰি থাকে, তেতিয়া আকৌ ক্ষেত্ৰৰ সংজ্ঞাৰ প্ৰয়োজন। সেইবাবে কিবা এটা সংজ্ঞা দিওঁতে আন বহুতো শব্দৰ সংজ্ঞা দিয়াৰ প্ৰয়োজন আহি পৰে আৰু সীমাহীনভাৱে তোমালোকে এক সংজ্ঞাৰ শৃংখল পাবা। এনে কাৰণতে গণিতজ্ঞসকলে জ্যামিতিৰ কিছু পদ সংজ্ঞাহীনভাৱে ৰখাত ঐক্যমত প্ৰকাশ কৰে। যি কি নহওঁক, ওপৰৰ সংজ্ঞাই যিয়েই নুবুজাওক, এটা বিন্দুৰ জ্যামিতিক ধাৰণাৰ বাবে আমাৰ এক স্বতঃস্ফূৰ্ত উপলব্ধি আছে। সেইবাবে, যদিও ফুটটোৰো কিছু মাত্ৰা আছে তথাপি বিন্দু এটাক এটা 'ফুট'ৰে বুজাও।

2 নং সংজ্ঞাটোতো আমি একেই সমস্যাৰ সন্মুখীন হৈছোঁ কিয়নো ইয়াতো প্ৰস্থ আৰু দীঘ দুটা সংজ্ঞাহীন শব্দ ব্যৱহাৰ কৰিছোঁ। এই কাৰণতে অধ্যয়নৰ বাবে প্ৰস্তুত কৰা যিকোনো এক বিষয়ত কিছুমান শব্দ সংজ্ঞাহীনভাৱে ৰাখি দিয়া হয়। সেইবাবে, জ্যামিতিত এটা বিন্দু, এডাল ৰেখা আৰু এখন সমতল (ইউক্লিডৰ মতে সমতল পৃষ্ঠ)ক অসংজ্ঞাবদ্ধ পদৰূপে বিবেচনা কৰা হয়। একমাত্ৰ কথাটো হ'ল আমি এই পদসমূহক অন্তদৃষ্টিৰে উপস্থাপন কৰিব পাৰো বা 'ভৌতিক আৰ্হি'ৰ সহায়ত তাক ব্যাখ্যা কৰিব পাৰোঁ।

তেখেতৰ সংজ্ঞাৰ আঁত ধৰি, ইউক্লিডে কিছুমান ধৰ্মক সত্যৰূপে ধাৰণা কৰিছিল যাৰ প্ৰমাণ নিষ্প্ৰয়োজন। আচল অৰ্থত এই ধাৰণাকেইটা 'প্ৰত্যক্ষভাৱে চিৰসত্য'। তেওঁ এইবোৰক দুটা ভাগত ভাগ কৰিছিল— স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য। তেওঁ 'স্বীকাৰ্য' পদটো ব্যৱহাৰ কৰিছিল জ্যামিতিৰ বিশেষ সত্য ধাৰণাসমূহৰ ক্ষেত্ৰত। 'সাধাৰণ ধাৰণা' (বা স্বতঃসিদ্ধ) শব্দটো তেখেতে গণিতৰ সকলো ক্ষেত্ৰতে ধাৰণাৰ অৰ্থত ব্যৱহাৰ কৰিছিল, ই জ্যামিতিৰ লগত বিশেষভাৱে জড়িত নাছিল।

স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্যৰ বিষয়ে সবিশেষ পৰিশিষ্ট-1 ত চোৱা।

তলত ইউক্লিডৰ কিছুমান স্বতঃসিদ্ধ দিয়া হ'ল যিবোৰ অৱশ্যে তেওঁৰ ক্ৰমমতে নহয়—

(1) একেটা বস্তুৰ লগত সমান বস্তুবোৰৰ এটা আনটোৰ লগত সমান।
(2) সমান সমান বস্তুৰ লগত একে সমান বস্তু যোগ কৰিলে যোগফলবোৰ সমান হ'ব।
(3) সমান সমান বস্তুৰ পৰা একে পৰিমাণ বিয়োগ কৰিলে বিয়োগফলবোৰ সমান হ'ব।
(4) যিবোৰ বস্তু এটা আনটোৰ লগত সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যায়, সেইবোৰ পৰস্পৰ সমান।
(5) সম্পূৰ্ণ বস্তু এটা তাৰ অংশতকৈ ডাঙৰ।
(6) একে বস্তুৰ দুগুণবোৰ পৰস্পৰ সমান।
(7) একে বস্তুৰ আধাবোৰ পৰস্পৰ সমান।

এই 'সাধাৰণ ধাৰণা'সমূহ কোনো এক প্ৰকাৰৰ মান (magnitude)ৰ প্ৰথম ধাৰণাটো সমতলৰ আকাৰবোৰত প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে যদি এটা ত্ৰিভুজৰ কালি এটা আয়তৰ কালিৰ সৈতে সমান আৰু আয়তটোৰ কালি বৰ্গ এটাৰ কালিৰ সমান, তেন্তে ত্ৰিভুজটোৰ কালি বৰ্গটোৰ কালিৰো সমান।

একেজাতীয় মানৰ তুলনা আৰু যোগ কৰিব পাৰি কিন্তু ভিন্নজাতীয় মান তুলনা কৰিব নোৱাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, এডাল ৰেখা এটা আয়তৰ লগত যোগ কৰিব নোৱাৰি, একেদৰে এটা কোণ এটা পঞ্চভুজৰ লগত তুলনা কৰিব নোৱাৰি।

4 নং স্বতঃসিদ্ধটোৱে এইটোকে কয় যে যদি দুটা বস্তু সমৰূপ (অৰ্থাৎ সম্পূৰ্ণৰূপে একে হয়) তেন্তে সিহঁত সমান। আন কথাত প্ৰতিটো বস্তুৱেই নিজৰ লগত সমান। এইটো 'ছুপাৰপজিচন' (Superposition) নীতিৰ ব্যাখ্যা। 5 নং স্বতঃসিদ্ধটোৱে আমাক 'আনতকৈ ডাঙৰ' (বা বৃহত্তৰ) শব্দৰ সংজ্ঞা দিয়ে। উদাহৰণস্বৰূপে যদি এটা ৰাশি B, আন এটা ৰাশি A ৰ অংশ হয়, তেন্তে Aক B আৰু আন তৃতীয় এটা ৰাশি C ৰ সমষ্টিৰূপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। প্ৰতীকেৰে $A > B$ ৰ অৰ্থ হ'ল আমি এটা C পাম যাতে $A = B + C$.

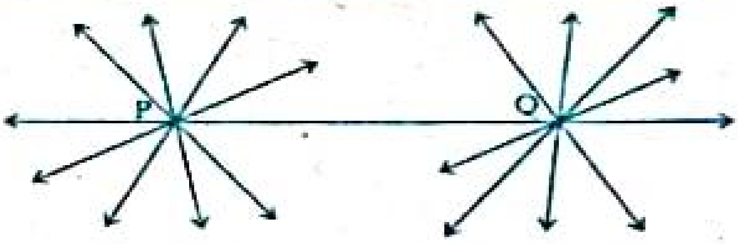
এতিয়া আমি ইউক্লিডৰ 5 টা স্বীকাৰ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। সেইকেইটা হ'ল—

স্বীকাৰ্য 1 : *এডাল সৰল ৰেখা এটা বিন্দুৰ পৰা আন যিকোনো এটা বিন্দুলৈ টানিব পাৰি।*

মন কৰা, এই স্বীকাৰ্যই আমাক কৈছে যে অতি কমেও এডাল সৰলৰেখা দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, কিন্তু ই কোৱা নাই যে এই ক্ষেত্ৰত এনেকুৱা আৰু ৰেখা থাকিব নোৱাৰে। যি কি নহওক, তেওঁৰ কৰ্মৰাজিত ইউক্লিডে কোনো উল্লেখ নকৰাকৈয়ে প্ৰায়েই ধৰি লৈছে দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু সংযোগ কৰি মাথোঁ এডাল ৰেখা পোৱা যায়। আমি এই ফলটো তলৰ স্বীকাৰ্যটোৰ ৰূপত উল্লেখ কৰিব পাৰো—

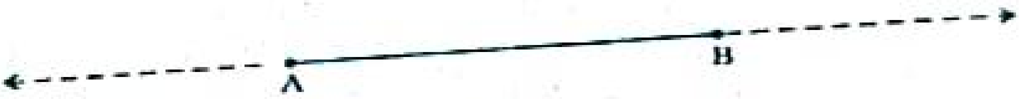
স্বীকাৰ্য 5.1 : প্ৰদত্ত দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে একক সৰলৰেখাহে পাব পাৰি।

P বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা কিমান ৰেখা Q ৰ মাজেৰেও যায়? (চিত্ৰ 5.4 চোৱা)। মাথোঁ এডাল, সেয়া হ'ল PQ। একেদৰে Qৰ মাজৰে যোৱা কিমান ৰেখা P মাজেৰেও যায়? মাথোঁ এডাল, সেয়া PQ। সেয়ে ওপৰৰ উক্তিটো স্ব-প্ৰামাণিক আৰু ফলত ইয়াক স্বতঃসিদ্ধ বুলি ধৰা হয়।



চিত্ৰ 5.4

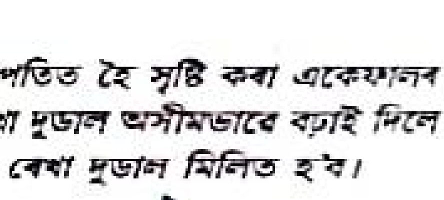
স্বীকাৰ্য 2 : *এডাল সীমিত ৰেখা (ৰেখাখণ্ড) অসীমলৈ বঢ়াই দিব পাৰি।*
মন কৰা যে আমি আজিকালি কোৱা ৰেখাখণ্ড শব্দটো ইউক্লিডে সীমিত ৰেখা বুলি কৈছিল। সেইবাবে বৰ্তমান সময়ত ব্যৱহৃত শব্দ মতে দ্বিতীয় স্বীকাৰ্যটোৰ বক্তব্য হ'ল,
এডাল ৰেখাখণ্ড দুই মূৰে বৃদ্ধি কৰি ৰেখা পাব পাৰি (চিত্ৰ 5.5)।



চিত্ৰ 5.5

স্বীকাৰ্য 3 : *এটা বৃত্ত যিকোনো কেন্দ্ৰ আৰু যিকোনো ব্যাসাৰ্ধ লৈ আঁকিব পাৰি।*
স্বীকাৰ্য 4 : *সকলো সমকোণ পৰস্পৰ সমান।*
স্বীকাৰ্য 5 : *যদি এডাল ৰেখা আন দুডাল ৰেখাৰ ওপৰত আপতিত হৈ সৃষ্টি কৰা একেফালৰ অন্তঃকোণ দুটা একেলগে দুই সমকোণতকৈ সৰু হয় তেন্তে ৰেখা দুডাল অসীমভাৱে বঢ়াই দিলে যিফালৰ অন্তঃকোণৰ সমষ্টি দুই সমকোণতকৈ কম সেইফালে ৰেখা দুডাল মিলিত হ'ব।*

উদাহৰণ স্বৰূপে, চিত্ৰ 5.6 ত PQ ৰেখাডাল AB আৰু CD ৰেখাৰ ওপৰত এনেদৰে আপতিত হৈছে যাতে PQ ৰ বাঁওফালৰ অন্তঃকোণ 1 আৰু 2 ৰ সমষ্টি 180° তকৈ কম। সেয়ে শেষত AB আৰু CD য়ে PQৰ বাঁওফালে পৰস্পৰ ছেদ কৰিবইগে।



চিত্ৰ 5.6

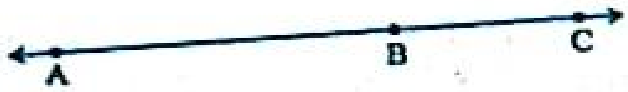
এতিয়া দেখা যায় যে স্বীকাৰ্য 5 বাকীকেইটাতকৈ অধিক জটিল। আনহাতে, স্বীকাৰ্য 1ৰ পৰা 4 লৈ এইকেইটা ইমান সহজ আৰু স্পষ্ট যে এইকেটাক 'স্ব-প্ৰামাণিক সত্য' বুলি ধৰা হয়। কিন্তু ইহঁতক প্ৰমাণ কৰিব নোৱাৰি। সেইবাবে এই উক্তিকেইটা প্ৰমাণহীনভাৱে গ্ৰহণ কৰা হৈছে (পৰিশিষ্ট 1 চোৱা)। স্বীকাৰ্য 5 ৰ জটিলতাৰ প্ৰতি লক্ষ্য ৰাখি পৰবৰ্তী অনুচ্ছেদত ইয়াৰ প্ৰতি বিশেষ মনোযোগ দিয়া হৈছে।

আজিকালি স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য শব্দ দুটা পাৰস্পৰিক সাল-সলনি কৰি আৰু একেটা অৰ্থতে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। প্ৰকৃততে স্বীকাৰ্য এটা ক্ৰিয়াপদ। যেতিয়া আমি কওঁ যে আমি 'স্বীকাৰ্য কৰোঁহক' তেতিয়া আমি বুজো যে আমি কিছুমান উক্তি কৰিম যি বিশ্ব ব্ৰহ্মাণ্ডত পৰিলক্ষিত হোৱা সংঘটনৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত। ইয়াৰ সত্যতা বা সত্যাপন পাছতহে পৰীক্ষা কৰা হয়। যদি উক্তিটো সত্য বুলি প্ৰমাণিত হয় তাক স্বীকাৰ্য বুলি গ্ৰহণ কৰা হয়।

স্বতঃসিদ্ধ বিলাকৰ এটা প্ৰণালীক সংগত (পৰিশিষ্ট 1 চোৱা) বোলা হয় যদিহে এই স্বতঃসিদ্ধসমূহৰ পৰা এটাও উক্তি পোৱাটো অসম্ভৱ যি আন স্বতঃসিদ্ধ বা ইতিমধ্যে প্ৰমাণিত উক্তিৰ বিৰোধিতা কৰে। সেয়ে যেতিয়াই স্বতঃসিদ্ধৰ এটা প্ৰণালীৰ কথা কোৱা হয়, তেতিয়াই এই প্ৰণালীটো যে সংগত সেইটো নিশ্চিত কৰাটো প্ৰয়োজন।

ইউক্লিডে তেখেতৰ স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য প্ৰকাশ কৰাৰ পাছত এইবোৰৰ প্ৰয়োগেৰে আন আন ফলাফল প্ৰমাণ কৰি গৈছে। তাৰ পাছত এই ফলাফলবোৰ ব্যৱহাৰ কৰি নিগমনাত্মক যুক্তিৰে আৰু কিছুমান ফলাফল প্ৰমাণ কৰি গৈছে। এইদৰে স্বীকাৰ্য প্ৰয়োগেৰে প্ৰমাণিত উক্তিসমূহক প্ৰতিজ্ঞা বা উপপাদ্য বোলা হয়। স্বীকাৰ্য স্বতঃসিদ্ধ, সংজ্ঞা আৰু ইতিমধ্যে প্ৰমাণিত উপপাদ্যৰ সহায়ত ইউক্লিডে 465 টা প্ৰতিজ্ঞা একে যুক্তিপূৰ্ণ শৃংখলতে প্ৰতিষ্ঠাপন কৰি গৈছে। জ্যামিতিৰ পৰৱৰ্তী অধ্যায় কেইটামানত কিছুমান উপপাদ্যৰ প্ৰমাণত এই স্বীকাৰ্যবোৰ ব্যৱহাৰ কৰিবা। তলৰ উদাহৰণসমূহত ইউক্লিডে কিদৰে তেওঁৰ স্বতঃসিদ্ধ আৰু স্বীকাৰ্য কিছুমান ফলাফলৰ প্ৰমাণত প্ৰয়োগ কৰিছিল তাক আলোচনা কৰোঁহক।

উদাহৰণ 1 : যদি A, B আৰু C এডাল ৰেখাৰ ওপৰৰ তিনিটা বিন্দু আৰু B, A আৰু Cৰ মধ্যৱৰ্তী বিন্দু তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে AB + BC = AC (চিত্ৰ 5.7 চোৱা)।



চিত্ৰ 5.7

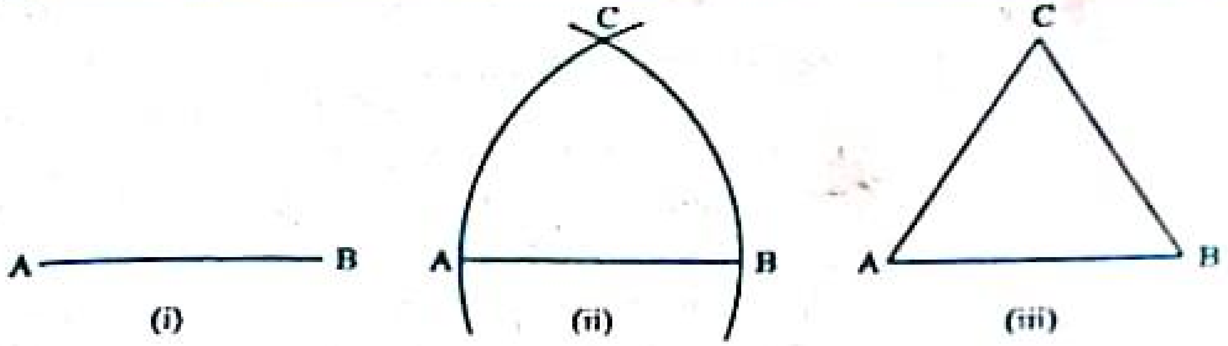
সমাধান : চিত্ৰত AC, AB + BC ৰ সৈতে মিলি গৈছে। ইউক্লিডৰ স্বতঃসিদ্ধ (4) ৰ মতেও যিবোৰ বস্তুৰ এটা আনটোৰ লগত সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যায় সেইবোৰ সমান। সেইবাবে

$$AB + BC = AC$$

মন কৰিবা, এই সমাধানত ধৰি লোৱা হৈছে যে দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে একক ৰেখাহে পাৰ পাৰি।

উদাহৰণ 2 : প্ৰমাণ কৰা যে যিকোনো প্ৰদত্ত ৰেখাখণ্ডৰ ওপৰত এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ অংকন কৰিব পাৰি।

সমাধান : ওপৰৰ উক্তিত যিকোনো দৈৰ্ঘ্যৰ এক ৰেখাখণ্ড দিয়া আছে, ধৰা ই AB। [চিত্ৰ 5.8(i) চোৱা]



চিত্ৰ 5.8

ইয়াত তোমালোকে কিছু অংকন কৰিব লাগিব। ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্য 3 ৰ মতে তোমালোকে A বিন্দুক কেন্দ্ৰ ধৰি AB ব্যাসাৰ্ধ লৈ আৰু B বিন্দুক কেন্দ্ৰ ধৰি BA ব্যাসাৰ্ধ লৈ বৃত্ত অংকন কৰিব পাৰা [চিত্ৰ 5.8(ii) চোৱা]। দুয়োটা বৃত্তই পৰস্পৰ C বিন্দুত (ধৰোঁহক) মিলিত হৈছে। এতিয়া AC আৰু BC সংযোগ কৰা যাতে ΔABC পোৱা [চিত্ৰ 5.8(iii) চোৱা]। এতিয়া তোমালোকে প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে ত্ৰিভুজটো সমবাহু অৰ্থাৎ $AB = AC = BC$।

এতিয়া, $AB = AC$, কাৰণ ইহঁত একে বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ। ....(1)

সেইদৰে $AB = BC$ (একে বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ) ....(2)

এতিয়া এই দুয়োটা তথ্য আৰু ইউক্লিডৰ স্বতঃসিদ্ধ মতে, একে বস্তুৰ লগত সমান বস্তুবোৰ পৰস্পৰ সমান। সেয়ে, $AB = AC = BC$। গতিকে ΔABC এটা সমবাহু ত্ৰিভুজ।

মন কৰা, ইয়াত ইউক্লিডে ক'তো উল্লেখ নকৰাকৈ ধৰিছে যে A আৰু B বিন্দুক কেন্দ্ৰ কৰি অঁকা বৃত্ত দুটাই পৰস্পৰ এটা বিন্দুত মিলিত হ'ব।

এতিয়া আমি এটা উপপাদ্য প্ৰমাণ কৰিম যিটো সঘনাই আন ফলাফলতো ব্যৱহাৰ হয়।

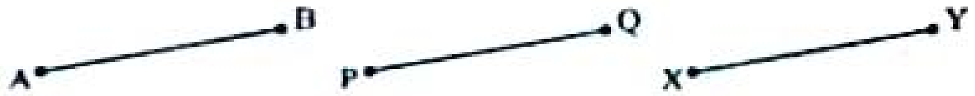
উপপাদ্য 5.1 : *দুডাল নিৰ্দিষ্ট ৰেখাৰ এটাতকৈ বেছি সাধাৰণ বিন্দু থাকিব নোৱাৰে।*

প্ৰমাণ : ইয়াত আমি দুডাল প্ৰদত্ত ৰেখা l আৰু m লওঁ। আমি দেখুৱাব লাগে যে ইহঁতৰ এটাহে সাধাৰণ বিন্দু আছে।

এতিয়াৰ বাবে ধৰা হওঁক, ৰেখা দুডাল দুটা ভিন্ন বিন্দুত কটাকটি কৰিছে আৰু বিন্দুকেইটা P, Q এনে ক্ষেত্ৰত তোমালোকে দুডাল ৰেখা পালা যি দুটা বিন্দু P আৰু Q ৰ মাজেৰে যায়। কিন্তু আমাৰ এই ধাৰণাটোৱে এটা স্বতঃসিদ্ধক বিৰোধিতা কৰিছে যাৰ মতে দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে এডালহে ৰেখা যাব পাৰে। গতিকে দুডাল ৰেখা দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে যাব পাৰে বোলা আমাৰ প্ৰাৰম্ভিক ধাৰণাটো ভুল।

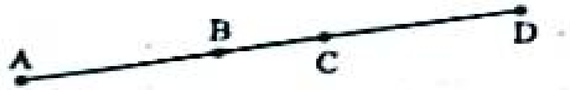
অনুশীলনী : 5.1

1. তলৰ কোনবোৰ উক্তি সত্য আৰু কোনবোৰ অসত্য। তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে কাৰণ দেখুওৱা।
   (i) এটা বিন্দুৰ মাজেৰে মাথোঁ এডাল ৰেখাহে পাৰ পাৰি।
   (ii) দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে অসীম সংখ্যক ৰেখা পাৰ পাৰি।
   (iii) এডাল সীমিত ৰেখাখণ্ডক অসীমভাৱে দুই মূৰে বৃদ্ধি কৰিব পাৰি।
   (iv) যদি দুটা বৃত্ত সমান, তেন্তে সিহঁতৰ ব্যাসাৰ্ধও সমান।
   (v) চিত্ৰ 5.9 ত যদি $AB = PQ$ আৰু $PQ = XY$, তেন্তে $AB = XY$)



চিত্ৰ 5.9

2. তলৰ প্ৰতিটো পদৰ সংজ্ঞা দিয়া। তাত কিবা আন পদ আছে নেকি যাৰ প্ৰথমে সংজ্ঞা দিয়াৰ প্ৰয়োজন? সেইবোৰ কি আৰু তুমি কেনেকৈ সেইবোৰ সংজ্ঞা দিবা?
   (i) সমান্তৰাল ৰেখা (ii) লম্ব ৰেখা (iii) ৰেখাখণ্ড
   (iv) এটা বৃত্তৰ ব্যাসাৰ্ধ (v) বৰ্গ।
3. তলত দিয়া স্বীকাৰ্য দুটা বিবেচনা কৰা :
   (i) প্ৰদত্ত দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু A আৰু B ৰ বাবে তৃতীয় এটা বিন্দু C পোৱা যায় যি A আৰু B ৰ মাজত অৱস্থিত।
   (ii) একে ৰেখাত নাথাকিবলৈ হ'লে অতি কমেও তিনিটা বিন্দু থাকে।
   এই স্বীকাৰ্য দুটাত কিবা সংজ্ঞাহীন পদ আছেনে? এই দুটা স্বীকাৰ্য সংগত নে? সিহঁতে ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্য মানি লয়নে? ব্যাখ্যা কৰা।
4. যদি এটা বিন্দু C, দুটা বিন্দু A আৰু B ৰ মাজত থাকে যাতে $AC = BC$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, $AC = \frac{1}{2}AB$। চিত্ৰসহ ব্যাখ্যা কৰা।
5. 4 নং প্ৰশ্নত C বিন্দুক AB ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দু বোলে। প্ৰমাণ কৰা যে, যিকোনো ৰেখাখণ্ডৰ এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে মধ্যবিন্দু থাকে।
6. চিত্ৰ 5.10 ত, যদি $AC = BD$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $AB = CD$



চিত্ৰ 5.10

7. ইউক্লিডৰ স্বতঃসিদ্ধ তালিকাৰ স্বতঃসিদ্ধ 5 ক কিয় 'চিৰসত্য' বুলি বিবেচনা কৰা হয়? (মন কৰা যে প্ৰশ্নটো স্বীকাৰ্য 5 ৰ বিষয়ে নহয়)।

5.3 ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ সমতুল্য ভাষ্য (Equivalent Versions of Euclid's Fith Postulate) :

ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো গণিতৰ ইতিহাসত যথেষ্ট তাৎপৰ্যপূৰ্ণ। অনুচ্ছেদ 5.2 ৰ পৰা পুনৰ ইয়াক মনত পেলোৱা। ইয়াৰ পৰা বুজিব পাৰি যে যদি আপতিত ৰেখাৰ একে ফালৰ অন্তৰ্বৰ্তী কোণৰ সমষ্টি 180° হয়, তেন্তে ৰেখা দুডালে পৰস্পৰ ছেদ নকৰে। এই স্বীকাৰ্যৰ বহুতো সমতুল্য ভাষ্য পোৱা যায়। তাৰে এটা হ'ল 'প্লেফেয়াৰৰ স্বতঃসিদ্ধ' (Playfair's Axiom) [1729 চনত স্কটলেণ্ডৰ গণিতজ্ঞ জন প্লেফেয়াৰে আগবঢ়াইছিল], সেয়া হ'ল—

'প্ৰতিডাল ৰেখা l আৰু l ৰ ওপৰত নথকা প্ৰতিটো বিন্দু P ৰ বাবে এডাল একক ৰেখা m পোৱা যায় যি l ৰ সমান্তৰাল আৰু P ৰ মাজেৰে যায়'।

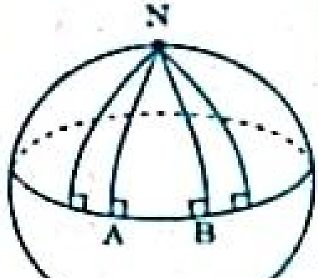
চিত্ৰ 5.11 ত তোমালোকে দেখিবা যে P ৰ মাজেৰে যোৱা সকলো ৰেখাৰ মাজত মাত্ৰ m ৰেখাডালহে l ৰ সমান্তৰাল।

চিত্ৰ 5.11

এই উক্তিটো তলত দিয়া ধৰণেও দিব পাৰি—

'দুডাল ভিন্ন পৰস্পৰক কটাকটি কৰা ৰেখা কেতিয়াও একেডাল ৰেখাৰ সমান্তৰাল হ'ব নোৱাৰে'।

ইউক্লিডে তেওঁৰ প্ৰথম 28 টা উপপাদ্য প্ৰমাণ কৰিবলৈ তেওঁৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো ব্যৱহাৰ কৰা নাছিল। তেওঁকে ধৰি ভালেমান গণিতজ্ঞই বিশ্বাস কৰিছিল যে পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো বাস্তৱিকতে এটা উপপাদ্য যাৰ প্ৰমাণ প্ৰথম চাৰিটা স্বীকাৰ্য আৰু আন আন স্বতঃসিদ্ধ প্ৰয়োগ কৰি দেখুৱাব পাৰি। কিন্তু উপপাদ্য হিচাপে পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো প্ৰমাণ কৰাৰ সকলো প্ৰচেষ্টাই বিফল হৈছিল। কিন্তু এই প্ৰচেষ্টাসমূহে আন বহুতো জ্যামিতিক তথ্যৰ উদ্ভাৱনৰ দৰে এক বৃহৎ সাফল্যৰ ফালে আগুৱাই নিছিল। এই জ্যামিতিক তথ্যসমূহ ইউক্লিডীয় জ্যামিতিৰ পৰা যথেষ্ট পৃথক আছিল। এইবোৰক 'অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি' বোলা হয়। তেওঁলোকৰ সৃষ্টিক চিন্তাৰ ইতিহাসৰ এটা উল্লেখযোগ্য ঘটনা হিচাপে গণ্য কৰা হয়, কাৰণ তাৰ আগলৈকে সকলোৱে ভাবিছিল— ইউক্লিডৰ জ্যামিতিয়েই একমাত্ৰ জ্যামিতি আৰু বিশ্বব্ৰহ্মাণ্ড নিজেই ইউক্লিডীয়ান। আজিকালি আমি বাস কৰা ব্ৰহ্মাণ্ডৰ জ্যামিতি অ-ইউক্লিডীয়



চিত্ৰ 5.12

বুলি প্ৰদৰ্শিত হৈছে। বাস্তৱিকতে ইয়াক 'গোলকীয় জ্যামিতি' (Spherical Geometry) বোলে। গোলকীয় জ্যামিতিত ৰেখাবোৰ সৰলৰেখা নহয়। সিহঁত বৃহৎ বৃত্তৰ অংশহে (বৃহৎ বৃত্ত হ'ল গোলকক কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যোৱা এখন সমতলে কাটিলে পোৱা বৃত্ত)।

চিত্ৰ 5.12 ত AN আৰু BN (দুয়োডাল এক বৃহৎ বৃত্তৰ অংশ) দুয়োডাল ৰেখা একে ৰেখা AB ৰ ওপৰত লম্ব। কিন্তু সিহঁত পৰস্পৰ মিলিত হৈছে, যদিও AB ৰেখাৰ একেফালৰ কোণৰ সমষ্টি 180° তকৈ কম নহয় (অৰ্থাৎ ইয়াত $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$)। আকৌ মন কৰা যে ANB ত্ৰিভুজৰ কোণৰ সমষ্টি 180° তকৈ ডাঙৰ যিহেতু $\angle A + \angle B = 180^\circ$। সেয়েহে ইউক্লিডৰ জ্যামিতিৰ অস্তিত্ব কেৱল সমতলৰ আকাৰ বিলাকতহে থাকে। বক্ৰপৃষ্ঠত ইয়াৰ স্থিতি লোপ পায়।

আমি এতিয়া এটা উদাহৰণ লওঁ—

উদাহৰণ 3 : তলৰ উক্তিটো লোৱাহঁক—

এযোৰ সৰলৰেখা পাব পাৰি যাতে সিহঁতে সকলো স্থানতে পৰস্পৰ সমদূৰত্বত থাকে। এই উক্তিটো ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ প্ৰত্যক্ষ ফল হয়নে? ব্যাখ্যা কৰা।

সমাধান : যিকোনো এডাল ৰেখা l আৰু ইয়াৰ ওপৰত নথকা এটা বিন্দু P লোৱা হ'ল। এতিয়া প্লেফেয়াৰৰ স্বতঃসিদ্ধ মতে (যি পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ সমতুল্য) আমি জানো যে P ৰ মাজেৰে যোৱা এডাল একক ৰেখা m পোৱা যায়, যিডাল l ৰ সমান্তৰাল হয়।

এতিয়া , ৰেখা এডালৰ পৰা বিন্দু এটাৰ দূৰত্ব হ'ল বিন্দুটোৰ পৰা ৰেখাডাললৈ টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য। এই দূৰত্ব m ৰ যিকোনো বিন্দুৰ পৰা l লৈ আৰু l ৰ যিকোনো বিন্দুৰ পৰা m লৈ সদায় একে। সেয়ে, ৰেখা দুডাল সকলো স্থানতে সমদূৰত্বত অৱস্থান কৰে।

মন্তব্য : পৰৱৰ্তী কেইটামান অধ্যায়ত যি জ্যামিতিৰ পাঠ পঢ়িবলৈ পাবা সেয়া ইউক্লিডৰ জ্যামিতি। কিন্তু আমি ব্যৱহাৰ কৰা স্বতঃসিদ্ধ আৰু উপপাদ্য বিলাক ইউক্লিডৰবোৰৰ পৰা বেলেগ বেলেগ হ'ব পাৰে।

অনুশীলনী : 5.2

1. ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যটো সহজে বোধগম্য হোৱাকৈ তুমি কেনেকৈ পুনৰ লিখিবা?
2. ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যই সমান্তৰাল ৰেখাৰ অৱস্থিতি সূচায়নে? ব্যাখ্যা কৰা।

5.4 সাৰাংশ (Summary) :

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাকেইটা পঢ়িলা—

1. যদিও ইউক্লিডে বিন্দু, ৰেখা আৰু সমতলৰ সংজ্ঞা দিছিল তথাপি বিভিন্ন গণিতজ্ঞই সেয়া মানি নল'লে। সেয়ে এই পদকেইটা অসংজ্ঞাবদ্ধ ৰূপে বিবেচনা কৰা হয়।
2. স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকাৰ্যসমূহ কিছুমান ধাৰণা যিবোৰ স্পষ্টৰূপে চিৰসত্য উক্তি। ইয়াৰ প্ৰমাণ

দিয়া নহয়।

3. উপপাদ্যবোৰ হ'ল কিছুমান উক্তি যাক সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ, ইতিপূৰ্বে প্ৰমাণিত উক্তি আৰু নিৰ্গমনাত্মক যুক্তিৰে প্ৰমাণ কৰা হয়।

4. ইউক্লিডৰ কিছুমান স্বতঃসিদ্ধ আছিল :

(1) একে বস্তুৰ লগত সমান বস্তুবোৰৰ এটা আনটোৰ লগত সমান।

(2) সমান সমান বস্তুৰ লগত সমান বস্তু যোগ কৰিলে সমষ্টিবোৰ সমান হ'ব।

(3) সমান সমান বস্তুৰ পৰা সমান বস্তু বিয়োগ কৰিলে ভাগশেষবোৰ সমান হ'ব।

(4) যিবোৰ বস্তুৰ এটা আনটোৰ লগত সম্পূৰ্ণৰূপে মিলি যায়, সেইবোৰ পৰস্পৰ সমান।

(5) এটা গোটা বস্তু তাৰ অংশতকৈ ডাঙৰ।

(6) একে বস্তুৰ দুগুণবোৰ পৰস্পৰ সমান।

(7) একে বস্তুৰ আধাবোৰ পৰস্পৰ সমান।

5. ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্যবোৰ আছিল :

স্বীকাৰ্য 1 : এডাল সৰলৰেখা এটা বিন্দুৰ পৰা আন যিকোনো এটা বিন্দুলৈ টানিব পাৰি.

স্বীকাৰ্য 2 : এডাল সীমিত ৰেখা (ৰেখাখণ্ড) অসীমভাৱে বঢ়াই দিব পাৰি।

স্বীকাৰ্য 3 : এটা বৃত্ত যিকোনো কেন্দ্ৰ আৰু যিকোনো ব্যাসাৰ্ধ লৈ আঁকিব পাৰি।

স্বীকাৰ্য 4 : সকলো সমকোণ পৰস্পৰ সমান।

স্বীকাৰ্য 5 : যদি এডাল ৰেখা আন দুডাল ৰেখাৰ ওপৰত আপতিত হয় আৰু ই সৃষ্টি কৰা একেফালৰ অন্তঃকোণ দুটা একেলগে লৈ দুই সমকোণতকৈ কম হয়, তেন্তে ৰেখা দুডাল অসীমভাৱে বঢ়াই দিলে যি ফালৰ অন্তঃকোণৰ সমষ্টি দুই সমকোণতকৈ কম সেইফালে ৰেখা দুডাল মিলিত হ'ব।

6. ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ দুটা সমতুল্য উক্তি :

(i) প্ৰতিডাল ৰেখা l আৰু ইয়াৰ ওপৰত নথকা প্ৰতিটো বিন্দু P ৰ বাবে এডাল একক ৰেখা m পোৱা যায় যি P বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু l ৰ সমান্তৰাল।

(ii) দুডাল নিৰ্দিষ্ট কটাকটি কৰা ৰেখা একেডাল ৰেখাৰ সমান্তৰাল হ'ব নোৱাৰে।

7. ইউক্লিডৰ প্ৰথম 4 টা স্বীকাৰ্য প্ৰয়োগ কৰি পঞ্চম স্বীকাৰ্যৰ প্ৰমাণ কৰাৰ সকলো প্ৰচেষ্টা বিফল হৈছিল। কিন্তু তাৰ যোগেদি আন বহুতো জ্যামিতিৰ সৃষ্টি হ'ল যাক অ'-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি (Non-Euclidean Geometry) বুলি কোৱা হয়।