પ્રકરણ 13

લક્ષ અને વિકલન

13.1 વિહંગાવલોકન

13.1.1 વિધેયનું લક્ષ :

ધારો કે વિધેય f એ કોઈક પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત છે. પ્રદેશને આપણે અંતરાલ I તરીકે લઈશું. આપણે I ના સભ્ય 'a' આગળ વિધેય f ના લક્ષની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કરીશું.

વિધેય f ની a ની ડાબી બાજુની કિંમતો માટે $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ એ વિધેય f ની $x = a$ આગળ અપેક્ષિત કિંમત છે તેમ કહીશું. આ કિમતને f નું a આગળનું ડાબી બાજુનું લક્ષ કહે છે.

વિધેય f ની a ની જમણી બાજુની કિંમતો માટે $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ એ વિધેય f ની $x = a$ આગળ અપેક્ષિત કિંમત છે તેમ કહીશું. આ કિંમતને f નું a આગળનું જમણી બાજુનું લક્ષ કહે છે.

જો જમણી અને ડાબી બાજુના લક્ષ સમાન હોય, તો આપણે આ સામાન્ય કિંમતને f નું $x = a$ આગળનું લક્ષ કહીશું અને તેને સંકેતમાં $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ વડે દર્શાવીશું.

લક્ષના કેટલાક ગુણધર્મો

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ અને $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય તેવાં બે વિધેયો f અને g છે.

(i) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(iii) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા α માટે

$$\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x)$$

(iv) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = [\lim\limits_{x \to a} f(x)] \left[\lim\limits_{x \to a} g(x)\right]$

(v) $g(x) \neq 0$ માટે $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, $\left(\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$

બહુપદી વિધેય અને સંમેય વિધેયનાં લક્ષ

જો f એ બહુપદી વિધેય હોય, તો $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે અને તે $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ દ્વારા મળે છે.

એક અગત્યનું લક્ષ

ખૂબ જ ઉપયોગી અને હવે પછી આવતાં પરિણામોમાં ઉપયોગી થાય તેવું એક અગત્યનું લક્ષ નીચે પ્રમાણે છે :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, a \in R^+, n \in R$$

નોંધ : ઉપરની અભિવ્યક્તિ 'a' ધન હોય ત્યારે તે કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા 'n' માટે માન્ય છે.

ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં લક્ષ

ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં લક્ષ મેળવવા માટે આપણે નીચે આપેલાં લક્ષનો ઉપયોગ કરીશું :

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ (iii) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

13.1.2 વિકલિત : જો f વાસ્તવિક વિધેય હોય તથા $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ નું ... (1)

અસ્તિત્વ હોય, તો f એ x આગળ વિકલનીય છે. આ લક્ષને f નો x આગળનો વિકલિત કહે છે અને તેને $f'(x)$ અથવા $\frac{d}{dx} f(x)$ વડે દર્શાવાય છે.

વિધેયોના વિકલિતનું બીજગણિત : વિકલિતની વ્યાખ્યામાં લક્ષનો સીધો જ સમાવેશ થતો હોવાથી, આપણે અપેક્ષા રાખીએ કે, નીચે આપેલા વિકલનના નિયમો એ લક્ષના નિયમોને ખૂબ નજીકથી અનુસરશે.

ધારોકે f અને g તેમના સામાન્ય પ્રદેશમાં વિકલનીય હોય તેવા વિધેય છે.

(i) બે વિધેયના સરવાળાનું વિકલિત એ તેમના વિકલિતોના સરવાળા જેટલું હોય છે.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

(ii) બે વિધેયના તફાવતનું વિકલિત એ તેમના વિકલિતોના તફાવત જેટલું હોય છે.

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

(iii) બે વિધેયના ગુણાકારનું વિકલિત એ નીચેના ગુણાકારના વિકલિતના નિયમ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે.

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) \cdot g(x) + f(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} g(x)\right)$$

આ નિયમને આપણે બે વિધાનોના ગુણાકારના લિબનિટ્ઝના નિયમ તરીકે ઓળખીશું.

(iv) જ્યારે છેદ શૂન્યેતર હોય ત્યારે, બે વિધેયના ભાગાકારના વિકલિતનો નિયમ નીચેના ભાગાકારના નિયમ દ્વારા દર્શાવાય છે :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) \cdot g(x) - f(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} g(x)\right)}{(g(x))^2}$$

13.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{2(2x-3)}{x^3-3x^2+2x}\right]$ શોધો.

ઉકેલ :
$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{2(2x-3)}{x^3-3x^2+2x}\right] = \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{2(2x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right]$$
$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{x(x-1)-2(2x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right]$$
$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-5x+6}{x(x-1)(x-2)}\right]$$
$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right]$$
$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{x-3}{x(x-1)}\right] \qquad [x-2\neq 0]$$
$$= \frac{-1}{2}$$

ઉદાહરણ 2 : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

ઉકેલ : $y = 2 + x$ લેતાં, જેમ $x\to 0$ તેમ $y\to 2$.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{y\to 2}\frac{y^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}}{y-2}$$
$$= \frac{1}{2}(2)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ઉદાહરણ 3 : $\lim_{x\to 3}\frac{x^n-3^n}{x-3}=108$. થાય તેવો ધન પૂર્ણાંક n શોધો.

ઉકેલ :
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^n-3^n}{x-3} = n(3)^{n-1}$$

માટે, $n(3)^{n-1} = 108 = 4\,(27) = 4(3)^{4-1}$

બંને તરફ સરખાવતા $n = 4$

ઉદાહરણ 4 : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$ શોધો.

ઉકેલ : $y=\frac{\pi}{2}-x$ લઈએ, તો જેમ $x\to\frac{\pi}{2}$ તેમ $y\to 0$.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x) = \lim_{y\to 0}\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]$$

$$= \lim_{y \to 0} (cosec\ y - cot\ y)$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{sin\ y} - \frac{cos\ y}{sin\ y} \right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{1 - cos\ y}{sin\ y} \right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{2\ sin^2 \frac{y}{2}}{2\ sin \frac{y}{2}\ cos \frac{y}{2}}$$ $\left(sin^2 \frac{y}{2} = \frac{1 - cos\ y}{2}\right.$, $\left. sin\ y = 2 sin \frac{y}{2} cos \frac{y}{2} \text{ હોવાથી} \right)$

$$= \lim_{\frac{y}{2} \to 0} tan \frac{y}{2}$$

$$= 0$$

ઉદાહરણ 5 : $\lim_{x \to 0} \frac{sin\ (2 + x) - sin(2 - x)}{x}$ શોધો.

ઉકેલ : $$\lim_{x \to 0} \frac{sin\ (2 + x) - sin(2 - x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 cos \frac{(2 + x + 2 - x)}{2}\ sin \frac{(2 + x - 2 + x)}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 cos\ 2\ sin\ x}{x}$$

$$= 2 cos\ 2 \lim_{x \to 0} \frac{sin\ x}{x} = 2 cos\ 2$$ $\left(\lim_{x \to 0} \frac{sin\ x}{x} = 1 \text{ હોવાથી} \right)$

ઉદાહરણ 6 a અને b શૂન્યેતર અચળ હોય તો વિધેય $f(x) = ax + b$ નું પ્રથમ સિદ્ધાંતથી વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પરથી,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (x + h) - f\ (x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a\ (x + h) + b - (ax + b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

ઉદાહરણ 7 : શૂન્યેતર અચળ a, b અને c માટે વિધેય $f(x) = ax^2 + bx + c$ નું વિકલિત પ્રથમ સિદ્ધાંતથી શોધો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પરથી,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{bh+ah^2+2axh}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} ah+2ax+b$$

$$= 2ax+b$$

ઉદાહરણ 8 : વિધેય $f(x) = x^3$ નું વિકલિત પ્રથમ સિદ્ધાંતથી શોધો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પરથી,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+h^3+3xh(x+h)-x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(h^2+3x(x+h)) = 3x^2$$

ઉદાહરણ 9 : $f(x) = \frac{1}{x}$ નું વિકલિત પ્રથમ સિદ્ધાંતથી શોધો. $x \neq 0$

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પરથી,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h)x} = \frac{-1}{x^2}.$$

ઉદાહરણ 10 : $f(x) = \sin x$ નું વિકલિત પ્રથમ સિદ્ધાંતથી શોધો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પરથી,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\frac{(2x+h)}{2} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

ઉદાહરણ 11 : ધન પૂર્ણાંક n માટે $f(x) = x^n$ નું વિકલિત પ્રથમ સિદ્ધાંતથી શોધો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પરથી,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, $(x + h)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} h + \ldots + {}^nC_n h^n$

આમ,
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\,(nx^{n-1} + {}^nC_2\, x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1})}{h} = nx^{n-1}.$$

ઉદાહરણ 12 : $2x^4 + x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : $y = 2x^4 + x$ લો.

x ના વિશે બંને તરફ વિકલન કરતાં, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^4) + \frac{d}{dx}(x)$

$$= 2 \times 4x^{4-1} + 1x^0$$

$$= 8x^3 + 1$$

આથી,
$$\frac{d}{dx}(2x^4 + x) = 8x^3 + 1.$$

ઉદાહરણ 13 : $x^2 \cos x$ નું વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : $y = x^2 \cos x$ લો

x ના વિશે બંને તરફ વિકલન કરતાં, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \cos x)$

$$= x^2 \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2(-\sin x) + \cos x\,(2x)$$

$$= 2x\cos x - x^2 \sin x$$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 14 : $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં નોંધીશું કે,

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = (2\sin x - 1)(\sin x + 1)$$
$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = (2\sin x - 1)(\sin x - 1)$$

આથી,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \qquad (2\sin x - 1 \neq 0 \text{ હોવાથી})$$

$$= \frac{1+\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6} - 1} = -3$$

ઉદાહરણ 15 : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$ મેળવો.

ઉકેલ : $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x\left(4\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

ઉદાહરણ 16 : $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}}$ શોધો.

ઉકેલ :

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}}{\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{a+2x-3x}{\left(\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(a-x)\left(\sqrt{3a+x} + 2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3a+x} + 2\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(a-x)\left[\sqrt{3a+x} + 2\sqrt{x}\right]}{\left(\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}\right)(3a+x-4x)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(a-x)\left(\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}\right)3(a-x)}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3 \times 2\sqrt{3a}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

ઉદાહરણ 17 : $\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{\cos cx - 1}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin\left(\frac{(a+b)}{2}x\right) \sin \frac{(a-b)x}{2}}{2 \sin^2\left(\frac{cx}{2}\right)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin \frac{(a+b)x}{2} \cdot \sin \frac{(a-b)x}{2}}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 \frac{cx}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2} \cdot \left(\frac{2}{a+b}\right)} \cdot \frac{\sin \frac{(a-b)x}{2}}{\frac{(a-b)x}{2} \cdot \frac{2}{a-b}} \cdot \frac{\left(\frac{cx}{2}\right)^2 \times \frac{4}{c^2}}{\sin^2 \frac{cx}{2}}$$

$$= \left(\frac{a+b}{2} \times \frac{a-b}{2} \times \frac{4}{c^2}\right) = \frac{a^2-b^2}{c^2}$$

ઉદાહરણ 18 : $\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 \sin(a+h) - a^2 \sin a}{h}$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 \sin(a+h) - a^2 \sin a}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a^2+h^2+2ah)[\sin a \cos h + \cos a \sin h] - a^2 \sin a}{h}$$

$$= \left[\lim_{h \to 0}\left[\frac{a^2 \sin a(\cos h - 1)}{h} + \frac{a^2 \cos a \sin h}{h} + (h+2a)(\sin a \cos h + \cos a \sin h)\right]\right]$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[\frac{a^2 \sin a\left(-2\sin^2 \frac{h}{2}\right)}{\frac{h^2}{2}} \cdot \frac{h}{2}\right] + \lim_{h \to 0} \frac{a^2 \cos a \sin h}{h} + \lim_{h \to 0}(h+2a)\sin(a+h)$$

$$= a^2 \sin a \times 0 + a^2 \cos a (1) + 2a \sin a$$

$$= a^2 \cos a + 2a \sin a$$

ઉદાહરણ 19 : પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $f(x) = tan\,(ax + b)$ નું વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પરથી, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{tan\big(a\,(x+h)+b\big) - tan\,(ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{sin\,(ax+ah+b)}{cos\,(ax+ah+b)} - \dfrac{sin\,(ax+b)}{cos\,(ax+b)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sin\,(ax+ah+b)\,cos\,(ax+b) - sin\,(ax+b)\,cos\,(ax+ah+b)}{h\,cos\,(ax+b)\,cos\,(ax+ah+b)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a\,sin\,(ah)}{a\cdot h\,cos\,(ax+b)\,cos\,(ax+ah+b)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a}{cos\,(ax+b)\,cos\,(ax+ah+b)} \lim_{ah\to 0} \frac{sin\,ah}{ah}$$ [જેમ $h \to 0$ તેમ $ah \to 0$]

$$= \frac{a}{cos^2\,(ax+b)} = a\,sec^2\,(ax+b).$$

બીજી રીત :

$$= \lim_{h\to 0} \frac{tan\,(ax+ah+b) - tan\,(ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{tan\big[(ax+ah+b-ax-b\big]}{h} \times (1 + tan\,(ax+ah+b)\,tan\,(ax+b)$$

$$= \big((1+tan^2\,(ax+b)\big) \lim_{h\to 0} \frac{tan\,ah}{ah}$$

$$= a\,sec^2\,(ax+b)$$

ઉદાહરણ 20 : પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $f(x) = \sqrt{sin\,x}$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પરથી, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{sin\,(x+h)} - \sqrt{sin\,x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{sin\,(x+h)} - \sqrt{sin\,x}\right)\left(\sqrt{sin\,(x+h)} + \sqrt{sin\,x}\right)}{h\left(\sqrt{sin\,(x+h)} + \sqrt{sin\,x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h\left(\sqrt{\sin(x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}\left(\sqrt{\sin(x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{2}\cot x\sqrt{\sin x}$$

ઉદાહરણ 21 : $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ નું વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$ લો તથા x ના વિશે બંને તરફ વિકલન કરો.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$= \frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1+\sin x)(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 22 થી 28 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 22 : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(1+\cos x)}$

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) –1

ઉકેલ : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x \to 0} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

સાચો જવાબ (B) છે.

અથવા $= \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x}}{1+\cos x} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

ઉદાહરણ 23 : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

(A) 0 (B) −1 (C) 1 (D) અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{y \to 0} \left[\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)} \right]$ $\left(\frac{\pi}{2} - x = y \text{ લેતાં}\right)$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1-\cos y}{\sin y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}$$

$$= \lim_{y \to 0} \tan\frac{y}{2} = 0$$

સાચો જવાબ (A) છે.

બીજી રીત :

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = 0$$

ઉદાહરણ 24 : $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

(A) 1 (B) −1 (C) 0 (D) અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : જમણી બાજુનું લક્ષ $= \lim_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$

અને ડાબી બાજુનું લક્ષ $= \lim_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$

સાચો જવાબ (D) છે.

ઉદાહરણ 25 : [.] મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય હોય, તો $\lim_{x\to 1}[x-1]$

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : જમણી બાજુનું લક્ષ = $\lim_{x\to 1^+}[x-1]=0$

અને ડાબી બાજુનું લક્ષ = $\lim_{x\to 1^-}[x-1]=-1$

સાચો જવાબ (D) છે.

ઉદાહરણ 26 : $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ = ...

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} x=0$ અને $-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1$, સેન્ડવિચ પ્રમેય પરથી,

$$\lim_{x\to 0} x\, sin\frac{1}{x} = 0$$

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 27 : $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$, = ...

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,(n+1)}{2n^2}$

સાચો જવાબ (C) છે.

નોંધ : શ્રેણી લક્ષ અભ્યાસક્રમમાં નથી.

ઉદાહરણ 28 : જો $f(x) = x\, sinx$, તો $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = ...

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $f'(x) = x\, cosx + sinx$

તેથી, $$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} = 1$$

સાચો જવાબ (B) છે.

સ્વાધ્યાય 13.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

નીચેનાં પ્રશ્ન ક્રમાંક 1 થી 28 ના ઉત્તર મેળવો :

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ **2.** $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$ **3.** $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}{x}$ **5.** $\lim_{x\to 1}\frac{(1+x)^6-1}{(1+x)^2-1}$ **6.** $\lim_{x\to a}\frac{(2+x)^{\frac{5}{2}}-(a+2)^{\frac{5}{2}}}{x-a}$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 2}}$

9. $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^4 - 4}{x^2 + 3\sqrt{2}x - 8}$

10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 2x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^3} - \sqrt{1 - x^3}}{x^2}$

12. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 27}{x^5 + 243}$

13. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \left(\dfrac{8x - 3}{2x - 1} - \dfrac{4x^2 + 1}{4x^2 - 1} \right)$

14. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80$, $n \in$ **N,** હોય, તો 'n' શોધો.

15. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 4x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos mx}{1 - \cos nx}$

20. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{1 - \cos 6x}}{\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{3} - x \right)}$

21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$

22. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + 3x}{2x + \tan 3x}$

24. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

25. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cot^2 x - 3}{\operatorname{cosec} x - 2}$

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - 2 \sin 3x + \sin 5x}{x}$

28. જો $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to k} \dfrac{x^3 - k^3}{x^2 - k^2}$ હોય, તો k શોધો.

પ્રશ્ન ક્રમાંક 29 થી 42માં આપેલા પ્રત્યેક વિધેયનું x ને વિશે વિકલન કરો :

29. $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + 1}{x}$

30. $\left(x + \dfrac{1}{x} \right)^3$

31. $(3x + 5)(1 + \tan x)$

32. $(\sec x - 1)(\sec x + 1)$

33. $\dfrac{3x + 4}{5x^2 - 7x + 9}$

34. $\dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$

35. $\dfrac{x^2 \cos \frac{\pi}{4}}{\sin x}$

36. $(ax^2 + \cot x)(p + q \cos x)$

37. $\dfrac{a + b \sin x}{c + d \cos x}$

38. $(\sin x + \cos x)^2$

39. $(2x - 7)^2 (3x + 5)^3$

40. $x^2 \sin x + \cos 2x$

41. $\sin^3 x \cos^3 x$

42. $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

વિસ્તૃત પ્રકારના પ્રશ્નો

વિકલનના પ્રથમ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરી પ્રશ્ન ક્રમાંક 43 થી 46 આપેલા વિધેયનું 'x' વિશે વિકલિત શોધો :

43. $\cos(x^2+1)$ **44.** $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **45.** $x^{\frac{2}{3}}$ **46.** $x\cos x$

પ્રશ્ન ક્રમાંક 47 થી 53 વાળા પ્રશ્નોમાં લક્ષ શોધો :

47. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(x+y)\sec(x+y)-x\sec x}{y}$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x+\sin 2\alpha x)}{\cos 2\beta x-\cos 2\alpha x}\cdot x$

49. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan^3 x-\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ **50.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$

51. દર્શાવો કે $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-4|}{x-4}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

52. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x} & x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 3 & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ અને જો $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, તો kનું મૂલ્ય શોધો.

53. $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\le -1\\ cx^2 & x>-1\end{cases}$ અને જો $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય, તો '$c$' શોધો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 54 થી 76 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

54. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=$ ....

(A) 1 (B) 2 (C) –1 (D) –2

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{1-\cos x}=$ ....

(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{-3}{2}$ (D) 1

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=$ ....

(A) n (B) 1 (C) $-n$ (D) 0

57. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=$ ....

(A) 1 (B) $\dfrac{m}{n}$ (C) $-\dfrac{m}{n}$ (D) $\dfrac{m^2}{n^2}$

58. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 6\theta}=$ ....

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) –1

59. $\lim_{x\to 0}\frac{cosec\,x - cot\,x}{x}$ = ...

(A) $\frac{-1}{2}$ (B) –1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

60. $\lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$ = ...

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) –1

61. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{sec^2x-2}{tan\,x-1}$ = ...

(A) 3 (B) 1 (C) 0 (D) 2

62. $\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(2x-3)}{2x^2+x-3}$ = ...

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{-1}{10}$ (C) 1 (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

63. [.] મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય હોય અને જો $f(x) = \begin{cases}\frac{sin[x]}{[x]}, & [x]\neq 0\\ 0 & ,[x]=0\end{cases}$,

તો $\lim_{x\to 0} f(x)$ = ...

(A) 1 (B) 0 (C) –1 (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

64. $\lim_{x\to 0}\frac{|sin\,x|}{x}$ = ...

(A) 1 (B) –1 (C) અસ્તિત્વ નથી. (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

65. જો $f(x) = \begin{cases}x^2-1, & 0<x<2\\ 2x+3, & 2\leq x<3\end{cases}$ હોય અને $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ તથા $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

જેનાં બીજ હોય, તેવું દ્વિઘાત સમીકરણ .... છે.

(A) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (B) $x^2 - 7x + 8 = 0$ (C) $x^2 - 14x + 49 = 0$ (D) $x^2 - 10x + 21 = 0$

66. $\lim_{x\to 0}\frac{tan\,2x - x}{3x - sin\,x}$ = ...

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

67. જો $f(x) = x - [x]$; $x \in \mathbf{R}$, હોય, તો $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ = ...

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) 0 (D) –1

68. જો $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ હોય, તો $x = 1$ આગળ $\frac{dy}{dx}$ = ...

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) 0

69. જો $f(x) = \dfrac{x-4}{2\sqrt{x}}$ હોય, તો $f'(1) =$ ....

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) 1 (D) 0

70. જો $y = \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$, હોય તો $\dfrac{dy}{dx} =$ ....

(A) $\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$ (B) $\dfrac{-4x}{x^2-1}$ (C) $\dfrac{1-x^2}{4x}$ (D) $\dfrac{4x}{x^2-1}$

71. જો $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ હોય, તો $x = 0$ માટે $\dfrac{dy}{dx} =$ ....

(A) -2 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) અસ્તિત્વ નથી.

72. જો $y = \dfrac{\sin(x+9)}{\cos x}$ હોય, તો $x = 0$ માટે $\dfrac{dy}{dx} =$ ....

(A) $\cos 9$ (B) $\sin 9$ (C) 0 (D) 1

73. જો $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^{100}}{100}$ હોય, તો $f'(1) =$ ....

(A) $\frac{1}{100}$ (B) 100 (C) અસ્તિત્વ નથી. (D) 0

74. કોઈક અચળ 'a' માટે જો $f(x) = \dfrac{x^n - a^n}{x-a}$ હોય, તો $f'(a) =$ ....

(A) 1 (B) 0 (C) અસ્તિત્વ નથી. (D) $\frac{1}{2}$

75. જો $f(x) = x^{100} + x^{99} + ... + x + 1$ હોય, તો $f'(1) =$ ....

(A) 5050 (B) 5049 (C) 5051 (D) 50051

76. જો $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 ... - x^{99} + x^{100}$ હોય, તો $f'(1) =$ ....

(A) 150 (B) -50 (C) -150 (D) 50

નીચેનાં ક્રમાંક 77 થી 80 વાળા વિધાન સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

77. જો $f(x) = \dfrac{\tan x}{x-\pi}$ હોય, તો $\lim_{x\to\pi} f(x) =$ ....

78. જો $\lim_{x\to 0}\left(\sin mx \cot\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) = 2$ હોય, તો $m =$ ....

79. જો $y = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ...$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} =$ ....

80. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x}{[x]} =$ ....