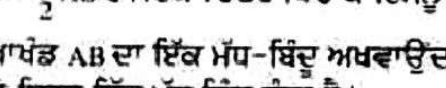
ਅਭਿਆਸ 5.1

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਝੂਠ ਹਨ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕਾਰਨ ਦਿਉ।
   (i) ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।
   (ii) ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਅਸੰਖ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ।
   (iii) ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਰੇਖਾ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਵਧਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।
   (iv) ਜੇ ਦੋ ਚੱਕਰ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ
   (v) ਚਿੱਤਰ 5.9 ਵਿੱਚ, ਜੇ AB = PQ ਅਤੇ PQ = XY ਹੈ, ਤਾਂ AB = XY ਹੋਵੇਗਾ।

ਚਿੱਤਰ 5.9

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿਉ। ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਲਈ ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਪਦ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਉਹ ਕਿਹੜੇ ਹਨ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋਗੇ ?
   (i) ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ (ii) ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ (iii) ਰੇਖਾ ਖੰਡ
   (iv) ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ (v) ਵਰਗ
3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :
   (i) ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤੀਸਰਾ ਬਿੰਦੂ C ਅਜਿਹੀ ਜਗ੍ਹਾ 'ਤੇ ਹੈ ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (ii) ਇੱਥੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅਜਿਹੇ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸ਼ਬਦ ਹਨ ? ਕੀ ਇਹ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਅਵਰੋਧੀ ਹਨ ? ਕੀ ਇਹ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ? ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
4. ਜੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ C ਅਜਿਹਾ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ AC = BC ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AC = \frac{1}{2}AB$ ਹੈ। ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚ ਕੇ ਇਸਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
5. ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4 ਵਿੱਚ, C ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦਾ ਇੱਕ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਇੱਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
6. ਚਿੱਤਰ 5.10 ਵਿੱਚ, ਜੇ AC = BD ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB = CD ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.10

7. ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਕਥਨ 5 ਇੱਕ ਸਰਬਵਿਆਪੀ ਸੱਚ ਕਿਉਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ? (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਪੰਜਵੀਂ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।)

ਆਪਣੀਆਂ ਇਹਨਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਤੋਂ ਆਰੰਭ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਸੱਚੇ ਕਥਨ ਮੰਨਣ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ। ਇਹ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 'ਸਪਸ਼ਟ : ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੱਚ' ਸਨ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ। ਇਹ ਵਰਗ ਸਨ : **ਸਵੈ ਸਿੱਧ (axioms)** ਅਤੇ **ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (postulates)**। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਮੂਲ ਅਧਾਰ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਹਨਾਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜੋ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਮਾਇਤੀ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸਨ। ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ, ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ [ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ (axioms) ਕਿਹਾ ਗਿਆ] ਉਹ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਸਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੰਤਰ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਅਤੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੇਵਲ ਜਮਾਇਤੀ ਨਾਲ ਹੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੰਬੰਧ ਨਹੀਂ ਸੀ। ਕਥਨ ਅਤੇ ਮੂਲ ਅਧਾਰਾਂ ਦੀ ਹੋਰ ਜਾਣਕਾਰੀ ਲਈ ਅੰਤਿਕਾ 1 ਨੂੰ ਦੇਖੋ।

ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਕੁਝ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ, ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ :

(1) ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜੋ ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(2) ਜੇ ਬਰਾਬਰਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜੀਏ, ਤਾਂ ਜੋੜਫਲ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(3) ਜੇ ਬਰਾਬਰਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਈਏ, ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਫਿਰ ਬਰਾਬਰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

(4) ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜੋ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(5) ਪੂਰਣ ਆਪਣੇ ਭਾਗ ਤੋ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(6) ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(7) ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਅੱਧੇ-ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

Amarpreet Singh
Math Master.
Date. JALANDHAR.

CH-5

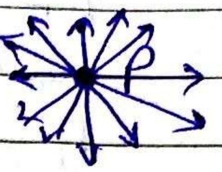
9th ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਜਮਾਇਤੀ ਦੀ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ

Ex. 5.1

(1) Ans. = (I) ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

= ਗਲਤ ਹੈ।

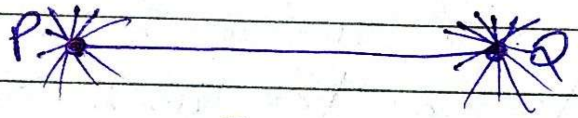
ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਣਗਿਣਤ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।



(II) ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਅਸੀਮ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ।

= ਗਲਤ ਹੈ।

ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 5.1 ਅਨੁਸਾਰ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੀ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।



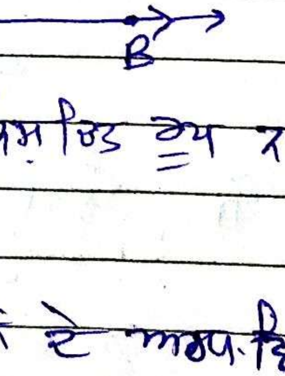
(III) ਇੱਕ ਸਾਂਤ ਰੇਖਾ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਵਧਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

= ਸੱਚ ਹੈ।

ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਮੁੱਢ ਧਾਰਨਾ-2 ਅਨੁਸਾਰ, ਇੱਕ ਸਾਂਤ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਵਧਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

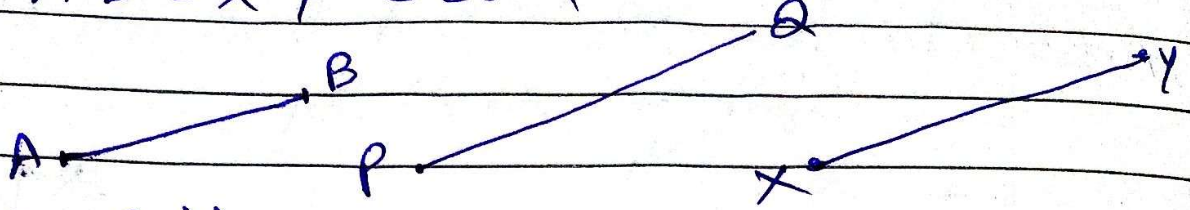
(IV) ਜੇ ਦੋ ਚੱਕਰ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਧ-ਵਿਆਸ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

= ਸੱਚ ਹੈ।



ਦੋ ਚੱਕਰ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਣਾ ਕੇ ਦੇਖੋ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਪੂਰਾ ਢੱਕ ਲੈਣਗੇ।
ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹੈ।

(V) ਜੇ AB = PQ ਅਤੇ PQ = XY ਹੈ ਤਾਂ AB = XY ਹੋਵੇਗਾ।

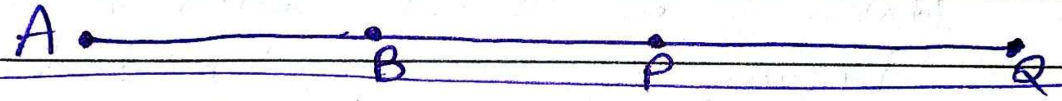


= ਸਹੀ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ AB = PQ, PQ = XY

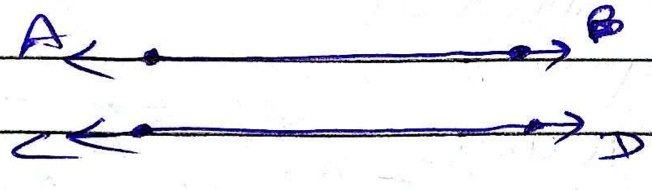
∴ AB = XY ਕਿਉਂਕਿ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਕਥਨ ਅਨੁਸਾਰ, ਉਹ ਵਸਤੂਆਂ ਜੋ ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ ਸਵੈ ਸਿੱਧ-① ਅਨੁਸਾਰ ਦੋ ਵੱਖ ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।



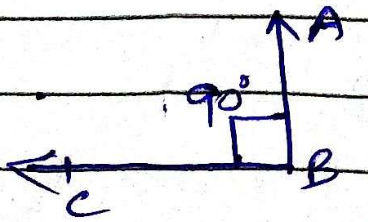
② (I) ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ = Parallel Line = ||

ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ ਹੋਵੇ। ਜੋ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਮਿਲ ਕੱਟਦੀਆਂ ਨਾ ਹੋਣ।



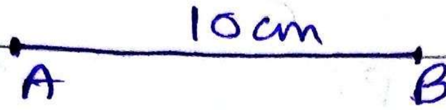
(II) ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ = Perpendicular Lines

ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ (90°) ਹੋਵੇ।



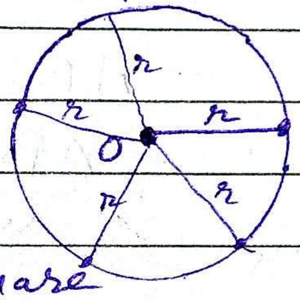
(III) ਰੇਖਾ ਖੰਡ = Line segment

= ਜਿਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਲੰਬਾਈ ਹੋਵੇ ਉਸਨੂੰ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



(IV) ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ = Radius of circle

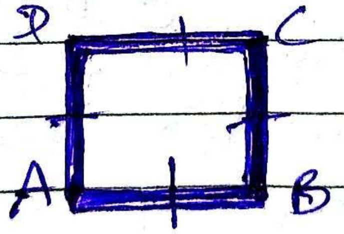
= ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



r = radius = ਅਰਧ ਵਿਆਸ

(V) ਵਰਗ :- Square

= ਵਰਗ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸਦੀਆਂ ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

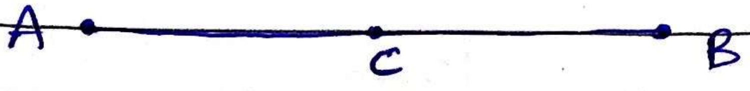


---

(3) = ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੂਚਨਾਵਾਂ (I) ਅਤੇ (II) ਤੋਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਕੇ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਇੱਕ ਸਰਿਖੀ ਨਹੀਂ ਹੋਣੀਆਂ। ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਕੋਈ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਣਾ ਅਸੰਭਵ ਹੈ।

(4) ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $AC = BC$

ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $AC = \frac{1}{2}AB$



$AC = BC$ ——— (1)

ਯੂਕਲਿਡ ਅਨੁਸਾਰ, ਜੇ ਬਰਾਬਰਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੀਏ ਤਾਂ ਜੋੜਫਲ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

∴ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ AC ਜੋੜੋ :-

$AC + AC = AC + BC$

$2AC = AB$ [$\because AC + BC = AB$ ਹੈ]

$AC = \frac{1}{2}AB$

ਇਹ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(5.)

ਰੇਖਾ AB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ C ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਈ ਇਸਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ D ਹੈ।

ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ C ਲਈ :-	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ D ਲਈ :-
$AC = CB$	$AD = DB$
$AC + AC = AC + CB$	$AD + AD = AD + DB$
$2AC = AB$ [$\because AC + CB = AB$]	$2AD = AB$ [$\because AD + DB = AB$]
$AC = \frac{1}{2}AB$ ——— (1)	$AD = \frac{1}{2}AB$ ——— (2)

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚੋਂ (1) ਨੂੰ ਘਟਾਓ:-

$AD - AC = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AB$

$AD - AC = 0 \Rightarrow CD = 0$ [$\because AD - AC = CD$]

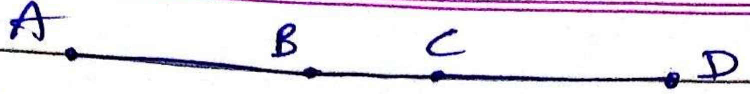
ਇਸ ਲਈ C ਅਤੇ D ਸੰਪਾਤੀ ਬਿੰਦੂ ਹੀ ਹਨ।

∴ ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦਾ ਇੱਕ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

Date. |
Page. |

V. Imp

(6) =



ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $AC = BD$ —— (1)

ਪਰ $AC = AB + BC$

$BD = BC + CD$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੋਂ :-

$AC = BD$

ਜਾਂ $AB + BC = BC + CD$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿਚੋਂ BC ਘਟਾਓ :-

$AB + \cancel{BC} - \cancel{BC} = \cancel{BC} + CD - \cancel{BC}$

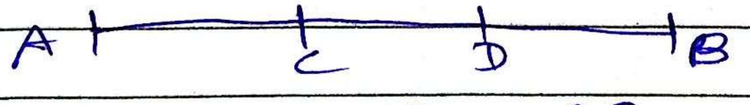
[∵ ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਅਨੁਸਾਰ, ਬਰਾਬਰ ਵਿਚੋਂ ਬਰਾਬਰ ਘਟਾਈਏ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ]

$AB = CD$

(7.) =

ਯੂਕਲਿਡ ਦਾ ਕਥਨ 5 ਹੈ :-
ਪੂਰਣ ਆਪਣੇ ਭਾਗ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਹੈ।



$AC + CD + DB = AB$

ਇਥੋਂ ਪਤਾ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਭਾਗ ਮਿਲਕੇ ਹੀ AB ਨੂੰ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

∴ AB ਸਾਰੇ ਭਾਗਾਂ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ।

ਇਹ ਕਥਨ ਹਰ ਥਾਂ, ਹਰੇਕ ਸੰਸਾਰ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੱਚ ਹੈ।