அலகு II நெறிமுறைசார் சிக்கல் தீர்வு

பாடம் 8

சுழற்சியும், தற்சுழற்சியும்

6SH76C

கற்றலின் நோக்கங்கள் :

இந்தப்பாடப்பகுதியைக்கற்றபின்,மாணவர்கள்

- நெறிமுறை நுட்பங்களில் பயன்படுத்தப்படும் மற்றும் மாற்றமிலி கருத்துருக்களை அறிந்து கொள்ளுதல்.
- சுழற்சி மற்றும் தற்சுழற்சி செயல்பாடுகளில் நெறிமுறை நுட்பங்களைப் பயன்படுத்துதல்.

ஒரே செயலைப் பலமுறை மீண்டும் மீண்டும் செய்வதின் மூலம், பல சிக்கல்களைத் தீர்க்க முடியும். சுழற்சியும், தற்சுழற்சியும் ஒரே செயலை மீண்டும் மீண்டும் செயல்படுத்துவதற்கான நெறிமுறை வடிவமைப்பு நுட்பங்களாகும். ஒரே செயலை மீண்டும் மீண்டும் செய்வதால் என்ன பயன்? செயல்படுத்தப்படும் செயல் ஒரே செயலாக இருந்தாலும், செயல்படுத்தப்படும் நிலை ஒரே நிலையன்று. ஒவ்வொருமுறையும் நாம் ஒரு செயலைச் செயல்படுத்தும்போதும், நிலை மாறிக்கொண்டேயிருக்கிறது. எனவே, ஒரே செயல்தான் மீண்டும் மீண்டும் செயல்படுத்தப்படுகிறது. ஆனால், அது வெவ்வேறு நிலைகளில் செயல்படுத்தப்படுகிறது. இந்த செயல்முறை இவ்வாறு தொடர்ந்து நடைபெறுவதின் விளைவாக நாம் விரும்புகிற உள்ளீடு – வெளியீட்டைப் பெறத்தக்க விதத்தில் நிலை மாறிக்கொண்டேயிருக்கும்.

சுழற்சி(iteration) :

சுழற்சியில், மடக்கின் நிபந்தனை மெய் என இருக்கும் வரை மடக்கின் உடற்பகுதி மீண்டும் மீண்டும் செயல்படுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு முறையும் மடக்கின் உடற்பகுதி செயல்படுத்தப்படும்போது, மாறிகளின் மதிப்பு மாறிக்கொண்டேயிருக்கும். இருப்பினும், மடக்கின் உடற்பகுதி செயல்படுத்தப்படும்போதும், மாறிகளுக்கிடையேயான ஒரு பண்பு மாறாமல் இருக்கும். மாறாத இந்த பண்பே மடக்கு மாற்றமிலி (Invariant) என்றழைக்கப்படுகிறது. நெறிமுறைகளை அமைப்பதற்கும், அதற்கான நிபந்தனைகளை அமைப்பதற்கும், விளக்குவதற்கும் மடக்கு மாற்றமிலி இன்றியமையாதது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

E. W. டிஜிக்ஸ்திரா, கணிப்பொறி அறிவியல் துறையின் மிகவும் செல்வாக்குமிக்க முன்னோடிகளில் ஒருவர். நிரலாக்க மொழி வடிவமைப்பு, இயக்க அமைப்பு மற்றும் நிரல் வடிவமைப்பு போன்ற பல்வேறு துறைகளில் தனது பங்களிப்பை வழங்கியுள்ளார். மென்பொருள் பொறியியல் (Software Engineering) துறையின் அடிப்படை நுட்பமான, "கட்டமைக்கப்பட்ட நிரலாக்கம்" (Strucutred Programming) என்பதை அறிமுகம் செய்துள்ளார். கணிப்பொறி அறிவியல் துறையில், இவரின் மிக உயர்ந்த சேவையை பாராட்டி,1972ம் ஆண்டில், ACM Turing விருது வழங்கப்பட்டது.

"வானியல் தொலைநோக்கிகளை மட்டுமே குறிப்பதல்ல என்பதைப் போல, கணிப்பொறி அறிவியல், கணிப்பொறிகளை மட்டுமே குறிப்பதல்ல" - E. W. டிஜிக்ஸ்திரா.

தற்சுழற்சி(Recursion):

தற்சுழற்சி, சுழற்சியோடு நெருங்கிய தொடர்புடைய மற்றொரு நெறிமுறை வடிவமைப்பு நுட்பமாகும். ஆனால், இது சுழற்சியைவிட பலம்வாய்ந்தது.கொடுக்கப்பட்ட

உள்ளீட்டின் ஒரு பகுதியைப் பயன்படுத்தி சிக்கலைத் தீர்த்து, அந்த தீர்விலிருந்து மூல சிக்கலுக்கான தீர்வை உருவாக்குவது "தற்சுழற்சி" நுட்பமாகும்.

8.1 மாற்றமிலி (Invariant)

எடுத்துக்காட்டு **8.1.**

தொடக்க நிலையில் (u, v) = (20, 15) என்று இருக்கும்போது, பின்வரும் மதிப்பிருத்தலில் செயல்படுத்தப்படுகிறது என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

```
-- before u, v = 20, 15
u, v = u + 5, v - 5
-- after   u, v = 25,10
```

மதிப்பிருத்தலின் முடிவில், (u, v = 20, 15) என இருக்கும். ஆனால், u + v என்ற செயல்கூறின் மதிப்பைப் பற்றி நீவீர் உற்றுநோக்குவது என்ன?

```
-- before
u + v = 20 + 15 = 35
-- after
u + v = 25 + 10 = 35
```

மதிப்பிருத்தலில் u+v யின் மதிப்பு மாற்றம் பெறவில்லை. u+v மதிப்பிருத்தல் என அழைக்கிறோம். இந்த மாறாக் கோவையை மதிப்பிருத்தலின் தொடக்கத்திலும் இறுதியிலும் முன்னும் பின்னும் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

```
-- before : u + v = 35
u, v = u + 5, v - 5
-- after: u+v = 35
```

u + v ஒரு மாற்றமிலி என்று அழைக்கலாம். u + v யின் மதிப்பு எப்போதும் 35 ஆகவே u + v = 35 என்பதும் ஒரு மாற்றமிலி எனக் கூறலாம். ஏனெனில், மதிப்பிருத்தலின் தொடக்கத்திலும், இறுதியிலும் அதன் மதிப்பு 'மெய்' என்றே இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு **8.2:**

தொடக்க நிலையில், (p, c = 10, 9) என்று எடுத்துக்கொண்டு, பின்வரும் மதிப்பிருத்தலை செயல்படுத்தினால், மதிப்பிருத்தலின் இறுதியின் (p, c) = (11, 10) என இருக்கும்.

```
-- before p, c = 10, 9
p, c := p + 1, c + 1
-- after p, c = 11, 10
```

மேற்காண் நெறிமுறையில் ஒரு மாற்றமிலியை கண்டுபிடிக்க முடிகிறதா? மதிப்பிருத்தலின் தொடக்கத்திலும், இறுதியிலும் p – c யின் மதிப்பு என்ன?

தொடக்கத்தில் p – c = 10 – 9 = 1

இறுதியில் p – c = 11 – 10 = 1

எனவே, p – c = 1 என்பது ஒரு மாற்றமிலி என்று காண்கிறோம்.

பொதுவாக, மாறிகளாலான ஒரு கோவை, மதிப்பிருத்தலின் தொடக்கத்திலும், இறுதியிலும் ஒரே மதிப்புடையதாக இருந்தால், அந்த கோவை மதிப்பிருத்தலின் மாற்றமிலி எனப்படும். p (u, v) என்பது u மற்றும் v என்ற மதிப்புகளையுடைய ஒரு கோவை என்க. பக்கு பதிலாக e1யையும், vக்கு பதிலாக e2வையும் ஒரே நேரத்தில் இடம் மாற்றம் செய்யும் போது கிடைக்கும் கோவையை p(u, v) [u, v := e1, e2] என்று எழுதுகிறோம். p(u, v) [u, v := e1, e2] = p(u, v) என்பது மெய்யெனில் p(u, v) என்பது u, v := e1, e2 என்ற மதிப்பிருத்தலின் மாற்றமிலி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு **8.3**

p - c என்பது p, c := p + 1, c +1 மாற்றமிலி என்பது காண்பி.

p (p, c) = p - c என்க.

எனில், p (p, c) [p, c := p + 1, c + 1]
= p - c [p, c := p + 1, c + 1]
= (p + 1) - (c + 1)
= p - c
= p (p, c)

(p - c) [p, c := p + 1, c + 1] = p - c என்பதால், p – c என்பது p, c := p + 1, c + 1. என்ற மதிப்பிருத்தலின் மாற்றமிலி.

எடுத்துக்காட்டு 8.4.

m, n := m + 3, n – 1 என்று மதிப்பிருத்தலின் m, n என்பவை இரண்டு மாறிகள் என்க. எனில், m+3n என்ற கோவை ஒரு மாற்றமிலியா என காண்க:

P (m, n) = m + 3n எனில்,

P (m, n) [m, n := m + 3, n – 1]
= m + 3n [m, n := m + 3, n – 1]
= (m + 3) + 3(n – 1)
= m + 3 + 3n – 3
= m + 3n
= P (m, n)

(m + 3n) [m, n := m + 3, n - 1] = m + 3n என்பதால் m +3n என்பது m, n := m + 3, n – 1 என்ற மதிப்பிருத்தலின் ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

8.2 மடக்கு மாற்றமிலி

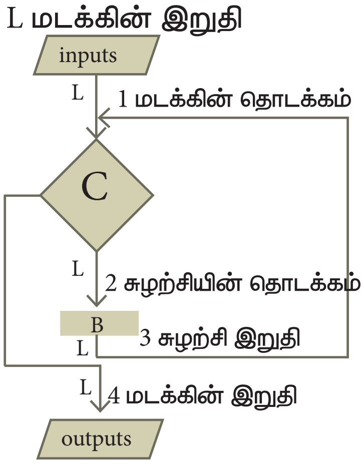
ஒரு மடக்கில், L என்பது மடக்கின் உடற்பகுதியாகிய Bயின் மாற்றமிலியானால், L "மடக்கு மாற்றமிலி" என்றழைக்கப்படுகிறது.

```
while C
        -- L
        B
        -- L
```

மடக்கு மாற்றமிலி, மடக்கின் உடற்பகுதிக்கு முன்பும், உடற்பகுதிக்குப் பின்பும், ஒவ்வொரு சுழற்சி மெய் என இருக்கிறது. L என்பது முதல் சுழற்சி தொடக்கத்தில் மெய் என இருப்பதால், மடக்கின் தொடக்கத்திலும் மெய்யாக இருக்கிறது. L கடைசி சுழற்சி முடிவிலும் மெய் என இருப்பதால், மடக்கு முடியும் போதும் மெய் என்றே இருக்கிறது. இவ்வாறு, L ஒரு மடக்கு மாற்றமிலியானால், கீழ்க்காணும் நெறிமுறையில் குறிக்கப்பட்டுள்ளபடியும், 8.1ஆவது பாய்வுபடத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளபடியும், நெறிமுறையின் நான்கு முக்கியமான இடங்களில் L மெய்யாக உள்ளது.

1. மடக்கின் தொடக்கத்தில் (அதாவது, மடக்கிற்கு முன்பு)
2. ஒவ்வொரு சுழற்சியின் தொடக்கத்தில் (அதாவது மடக்கின் உடற்பகுதிக்கு முன்பு)
3. ஒவ்வொரு சுழற்சியின் முடிவில் (அதாவது மடக்கின் உடற்பகுதிக்குப் பின்பு)
4. மடக்கின் இறுதியிலும் (அதாவது, மடக்கிற்குப் பின்பு)

```
1       -- L மடக்கின் தொடக்கம்
while
            C
2                   -- L சுழற்சி தொடக்கம்
   B
3                   -- L சுழற்சியின் தொடக்கம்
4       -- L மடக்கின் இறுதி
```



பாய்வுப்படம் 8.1 மடக்கு மாற்றமிலி மெய் என இருக்கும் இடங்கள்

ஒரு மடக்கை அமைக்க

1. மடக்கின் தொடக்கத்தில், மடக்கின் மாற்றமிலியை மெய் என அமைக்க வேண்டும்.
2. மடக்கின் உடற்பகுதியானது, மடக்கின் இறுதியை நோக்கி நகரும் வகையில், மாறிகளின் மதிப்பை மாற்ற வேண்டும். அதே நேரத்தில் மடக்கின் மாற்றமிலியை மாறாமல் பராமரிக்க வேண்டும்.
3. மடக்கு முடியும்போது, அதின் முடிவு நிபந்தனையும், மடக்கு மாற்றமிலியும் சேர்ந்து உள்ளீட்டு–வெளியீட்டு உறவை மெய்யாக்க வேண்டும்.

8.3 மாற்றமிலி –– எடுத்துக்காட்டுகள்

மடக்கு மாற்றமிலி ஒரு மடக்கின் நான்கு மிகமுக்கியமான இடங்களில் மெய்யாக இருக்கும். மடக்கு மாற்றமிலியைப் பயன்படுத்தி, நாம் ஒரு மடக்கை உருவாக்கலாம். மேலும், அந்த இடங்களில் மாறிகளின் சில பண்புகளையும் நாம் நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.5

a^n என்பதைக் கணக்கிட ஒரு சுழற்சி நெறிமுறையை வடிவமைக்கவும். அந்த நெறிமுறைக்கு power(a,n) என்று பெயரிடுவோம். எடுத்துக்காட்டாக,

power (10, 4) = 10000
power (5, 3) = 125
power (2, 5) = 32

power (a, n) என்ற நெறிமுறை a–யை ஒட்டுமொத்தமாக 'n' முறை பெருக்கி a^n ஐ கணக்கிடுகிறது.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\textbf{n times}}$$

அதன் விவரக்குறிப்பும், மடக்கு மாற்றமிலியும் குறிப்புரைகளாகக் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளன.

```
power (a, n)
-- inputs:    n ஒரு நேர்மறை எண்
-- outputs:   p = a^n
p, i := 1, 0
while i ≠ n
        -- மடக்கு மாற்றமிலி: p = a^i
p, i := p × a, i + 1
```


XI Std Computer Science Vol-1 TM Chapter 8 166-182.indd 108   4/11/2020 11:43:51 AM

power(2, 5) எவ்வாறு படிப்படியாகச் செயல்படுத்தப்படுகிறது என்பது அட்டவணை 8.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வரிசையும் ஒரு சுழற்சியின் முடிவில் p, i என்ற இரண்டு மாறிகளின் மதிப்பையும், அவை எவ்வாறு கணக்கிடப்பட்டன என்றும் காண்பிக்கிறது. $p=a^i$ என்பது மடக்கின் தொடக்கத்தில் மெய்யாக உள்ளது என்றும், ஒவ்வொரு வரிசையிலும் அது மெய்யாகவே இருக்கிறது என்றும் காணலாம். ஆகவே, இது ஒரு மடக்கு மாற்றமிலி எனப்படும்.

சுழற்சி	p	p x a	i	i+1	a^i
0	1		0		2^0
1	2	1x2	1	0 + 1	2^1
2	4	2x2	2	1 + 1	2^2
3	8	4x2	3	2 + 1	2^3
4	16	8x2	4	3 + 1	2^4
5	32	16x2	5	4+1	2^5

அட்டவணை 8.1 – power (2,5) ன் செயல்நிலை

மடக்கு முடியும்போது, $p = a^i$ என்பது மெய்யாகவே இருக்கிறது. மேலும், i = 5. எனவே, $p = a^5$ ஆக அமைந்துள்ளது. பொதுவாகச் சொல்வதானால், மடக்கு முடியும்போது $p = a^n$ எவ்வாறு, power (a, n) விவரக்குறிப்பை நிறைவுசெய்கிறது என்று நாம் சரிபார்த்துவிட்டோம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.6:

எடுத்துக்காட்டு 6:11யிலுள்ள சாக்லேட் பார் எடுத்துக்காட்டை நினைவுகொள்க. ஒரு முழு சாக்லேட்டைத் தனித்தனிச் சதுரங்களாக உடைப்பதற்கு எத்தனை வெட்டுக்கள் தேவை? எத்தனை துண்டுகள், எத்தனை வெட்டுக்கள் என்பதைக் குறிக்க முறையே p, c என்ற மாறிகளைப் பயன்படுத்தலாம். ஒவ்வொரு முறையும் வெட்டும்போதும், வெட்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒன்று கூடுகிறது, துண்டுகளின் எண்ணிக்கைம் ஒன்று கூடுகிறது. இதை ஒரு மதிப்பிருத்தலின் மூலம் குறப்பிடலாம்.

p, c := p + 1, c + 1

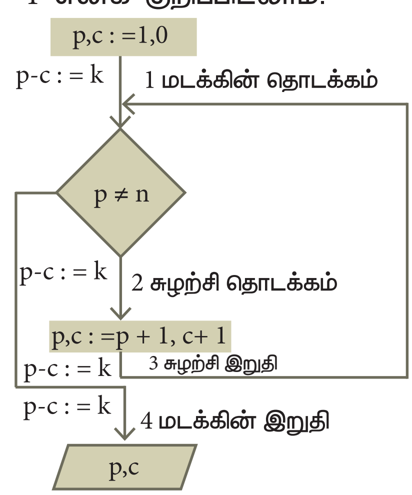
முழு சாக்லேட்டை வெட்டும் செயல்முறையை ஒரு மடக்கைக் கொண்டு விளக்கலாம். தொடங்கும்போது ஒரேவொரு துண்டு உள்ளது, ஒருமுறைகூட வெட்டப்படவில்லை. அதாவது, p = 1, c = 0 மொத்தத் தனித்தனி சதுரங்களின் எண்ணிக்கையை n என்று குறிப்பிடுவோம். துண்டுகளின் எண்ணிக்கை pம், தனித்தனி சதுரங்களின் எண்ணிக்கை nம் சமமாகும்போது மடக்கு முடிவடைகிறது.

```
p, c := 1 ,0
while p ≠ n
p, c := p + 1, c + 1
```

p – c என்பது, p, c := p + 1, c + 1 என்ற மதிப்பிருத்தலின் மாற்றமிலி என்று எடுத்துக்காட்டு 8.2இல் பார்த்தோம். p–c= k என்க. இதில் k ஒரு நிலையான மதிப்பு. நெறிமுறையில் எந்தெந்த இடங்களில் p – c = k என்பது மெய்யாக இருக்கிறது என்று கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நெறிமுறையிலும், பாய்வுப்படம் 8.2யிலும் காட்டப்படுள்ளது.

```
p , c := 1 , 0
1        -- p - c = k
while p ≠ n
2        -- p - c = k
p , c := p1+ , c1+
3        -- p - c = k
4        -- p - c = k , p = n
```

p – c = k என்ற மடக்கு மாற்றமிலி, மடக்கின் தொடக்கத்தில் (முதல் வரி) மெய்யாக இருக்கிறது. மேலும், மடக்கின் தொடக்கத்தில் p – c = 1. எனவே, k = 1 மடக்கு மாற்றமிலிலி p – c = 1 எனக் குறிப்பிடலாம்.



பாய்வுப்படம் 8.2: மடக்கு மாற்றிமிலி மெய்யாக இருக்கும் இடங்கள்

மடக்கு முடியும்போது (நான்காவது வரி), மடக்கு மாற்றிமிலி, p–c = 1, இன்னும்

மெய்யாகவே இருக்கிறது. மேலும், மடக்கின் நிபந்தனை $p \neq n$ என்பது பொய்யாக உள்ளது. எனவே, $p - c = 1$, $p = n$ இவைகளிலிருந்து

(1) $p - c = 1$ என்பது மடக்கு மாற்றமிலி

(2) $p = n$ என்பது மடக்கின் முடிவு

(3) $n - c = 1$ என்பது (1), (2)வது வரிகளிலிருந்து

(4) $c = n - 1$ என்பது (3)வது வரியிலிருந்து

மடக்கு முடியும்போது சதுரங்களின் எண்ணிக்கையைவிட வெட்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒன்று குறைவாக இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.7:

6 மரங்கள் சமதூரத்தில் இருக்கின்றன. ஒவ்வொரு மரத்திலும் ஒரு குருவிவீதம் 6 மரங்களில் மொத்தம் 6 குருவிகள் உட்கார்ந்திருக்கின்றன. ஒரு குருவி ஒரு மரத்திலிருந்து இன்னொரு மரத்துக்குப் பறந்துபோகும் அதே நேரத்தில் மற்றொரு குருவி முந்தைய குருவி எவ்வளவு தூரம் பறந்துபோனதோ அவ்வளவு தூரம் இன்னொரு மரத்திற்குப் பறந்துபோகிறது. ஆனால், இந்த குருவி முதலாவது குருவிக்கு எதிர்த்திசையில் பறந்துபோகிறது. அப்படியானால், எல்லாக் குருவிகளும் ஒரே மரத்தில் உட்காருவது சாத்தியமா?

மரங்களை 1முதல் 6வரை வரிசைப்படுத்துவோம். குருவிகள் உட்கார்ந்திருக்கின்ற மரங்களின் வரிசை எண், குருவிகளின் வரிசை எண் என்று வைத்துக்கொள்வோம். ஒரு ஜோடிக் குருவிகள் பறந்துபோவதை மடக்கின் ஒரு சுழற்சியாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஒரு குருவி i என்ற மரத்திலிருந்து $i + d$ க்குப் பறந்துபோகும்போது, இன்னொரு குருவி j என்றமரத்திலிருந்து $j - d$க்குப்பறந்துபோகிறது. இவ்வாறு, ஒவ்வொரு சுழற்சிக்கு வரிசை எண்களின் பின்பும், குருவிகளின் வரிசை எண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை S என்பது மாறாமல் அப்படியே இருக்கிறது. மேலும், ஒரு மடக்கு மாற்றமிலி மடக்கின் தொடக்கத்திலும், முடிவிலும் மெய்யாகவே உள்ளது.

மடக்கின் தொடக்கத்தில் மதிப்பு

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

மடக்கு முடியும்போதும், மடக்கு மாற்றமிலியின் மதிப்பு மாறாமல் அப்படியே இருக்கிறது. எனினும், மடக்கு முடியும்போது, எல்லாக் குருவிகளும் k என்ற ஒரே மரத்தில் இருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். அப்படியானால் $S = 6k$

$S = 21$,	மடக்கின் தொடக்கத்தில் மடக்கு மாற்றமிலி
$S = 6k$,	மடக்கின் முடிவில் மடக்கு மாற்றமிலி
$6k= 21$,	தொடக்கத்திலும், முடிவிலும் மடக்கு மாற்றமிலிக்கு ஒரே மதிப்பு இருக்கிறது

21, 6ன் பெருக்கம்

இது சாத்தியம் இல்லை. 21, 6ன் பெருக்கம் இல்லை. குருவிகளின் வரிசைஎண்களின் கடைசி மதிப்பு மடக்கு மாற்றமிலியில் சாத்தியமில்லை. ஆகையால், எல்லாக் குருவிகளும் ஒரே மரத்தில் வந்து சேருவது சாத்தியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு **8.8.**

எடுத்துக்காட்டு 6.3இல் கொடுக்கப்பட்ட குரோம்லேண்டில் பச்சோந்திகள் என்ற சிக்கலை எடுத்துக் கொள்வோம். அவைகளில் 13 சிவப்பு, 15 பச்சை மற்றும் 17 நீல நிற பச்சோந்திகள் உள்ளன. இவற்றில் வேறுபட்ட நிறங்களையுடைய இரண்டு பச்சோந்திகள் சந்திக்கும்போது, அவையிரண்டும் தங்கள் நிறத்தை மூன்றாவது நிறமாக மாற்றிக்கொள்ளுகின்றன (எடுத்துக்காட்டாக, சிவப்பு நிற பச்சோந்தியும், பச்சை நிற பச்சோந்தியும் சந்தித்தால், அவையிரண்டும் நீலநிற பச்சோந்தியாக மாறிவிடுகின்றன). எல்லாப் பச்சோந்திகளும் நீல நிறமாக மாறிவிடுமாறு அவைகள் சந்திக்க ஏற்பாடு செய்வது சாத்தியமா?

r, g மற்றும் bஎன்பது முறையே சிவப்பு, பச்சை, நீலநிற பச்சோந்திகளின் எண்ணிக்கை என்று வைத்துக்கொள்வோம். வேறு நிறங்களுடைய இரண்டு பச்சோந்திகளின் சந்திப்பைச் சுழற்ச்சி முறையில் குறிக்கலாம். ஒரு சந்திப்பு r, g, b யை $(r - 1, g - 1, b + 2)$ அல்லது $(r - 1, g + 2, b - 1)$ அல்லது $(r + 2, g - 1, b - 1)$ என்று மாற்றுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சிவப்புநிற பச்சோந்தியும், ஒரு பச்சைநிற பச்சோந்தியும் சந்திக்கின்றன என்று வைத்துக்கொள்வோம். அப்போது,

$$r, g, b := r - 1, g - 1, b + 2$$

XI Std Computer Science Vol-1 TM Chapter 8 166-182.indd 110 4/11/2020 11:43:52 AM

எந்த இரண்டு விதமான பச்சோந்திகளின் எண்ணிக்கையின் வேறுபாடும் மாறாது அல்லது மாறினாலும், 3 என்ற எண்ணிக்கையில் மாறும். இது ஒரு மாற்றமிலி.

$$r - 1 - (g - 1) = r - g$$
$$r - 1 - (b + 2) = (r - b) - 3$$
$$g - 1 - (b + 2) = (g - b) - 3$$

எல்லா மூன்று வகைகளைப் பொறுத்தவரையிலும் இது மெய்யாக உள்ளது. சுழற்சியின் தொடக்கத்தில், ஏதேனும் இரண்டு வகை பச்சோந்திகளின் எண்ணிக்கையிலுள்ள வேறுபாடு 3ன் மடங்காக இருந்தால், அதனை மூன்று மூன்றாக குறைத்து சுழற்ச்சியின் இறுதியில் 0 என மாற்றலாம்.

எனினும்,

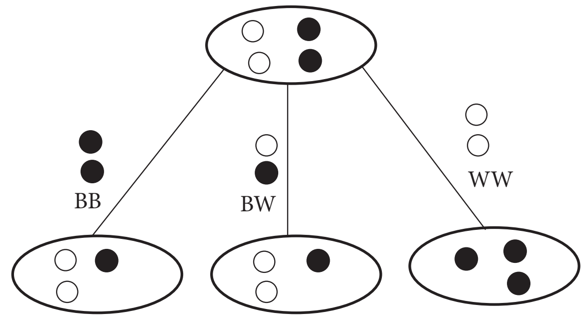
எந்த இரண்டு நிறங்களின் எண்ணிக்கைகளின் வேறுபாடும், 3ன் மடங்காக இல்லை. ஆகையால், எல்லாப்

$$r - g = 13 - 15 = -2$$
$$g - b = 15 - 17 = -2$$
$$b - r = 17 - 13 = 4$$

பச்சோந்திகளையும் ஒரே நிறத்திற்கு மாற்ற முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு **8.9.**

பந்துகளின் குடுவை : வெள்ளை மற்றும் கருப்பு நிறமுள்ள இரண்டு விதமான பந்துகள் நிரம்பிய ஒரு குடுவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து ஏதேனும் இரண்டு பந்துகளை எடுக்க வேண்டும். எடுக்கப்பட்ட இரண்டு பந்துகளும் வெள்ளை நிறமாயின், அவற்றை வெளியே எறிந்து விட்டு, ஒரு புதிய கருப்பு நிற பந்தை குடுவையின் உள்ள போட வேண்டும். (தேவையான அளவுக்குப் பந்துகள் கிடைக்கும் என்று வைத்துக்கொள்வோம்). இரண்டும் வெவ்வேறு நிறமென்றால், வெள்ளை நிறத்தைக் குடுவைக்குள் போட்டுவிட்டு, கருப்பு நிறத்தை எறிந்துவிடு. முதலில் எத்தனை வெள்ளை நிறப் பந்துகளும், கருப்புநிறப் பந்துகளும் இருந்தன என்று உனக்குத் தெரிந்தால், குடுவையில் இருக்கும் கடைசிப் பந்தின் நிறம் என்ன?



வரைபடம் 8.3: பந்துகளின் நிலை மாற்றங்கள்

w, b என்ற இரண்டு மாறிகள் குடுவையிலுள்ள வெள்ளை மற்றும் கருப்புநிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றன. ஒவ்வொரு சுழற்ச்சியிலும், குடுவையிலிருந்து வெளியே எடுக்கும் இரண்டு பந்துகளின் நிறத்தைப் பொறுத்து கருப்பு கருப்பு, கருப்பு வெள்ளை, வெள்ளை வெள்ளை என்று மாறுகின்றன: இது படம் 8.3இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நெறிமுறையில் இது விளக்கப்பட்டுள்ளது.

```
குடுவையில் குறைந்தது இரண்டு பந்துகள்
இருந்தால்
-- b , w
ஏதாவது இரண்டு பந்துகளை எடுக்கவும்
Case இரண்டும் கருப்பாக இருந்தால்  -- BB
இரண்டு பந்துகளையும் எறிந்துவிடு
ஒரு கருப்பு பந்தை குடுவையில் போடு
- - b = b' - 1, w = w', b + w = b' + w' - 1
Case இரண்டும் வெள்ளையாக இருந்தால்
--W W
இரண்டு பந்துகளையும் எறிந்துவிடு
ஒரு கருப்பு பந்தை குடுவையில் போடு
- - b = b' + 1, w = w' - 2, b + w = b' + w' - 1
else - - b w
கருப்பு நிற பந்தை எறிந்துவிடு
வெள்ளை நிற பந்தை குடுவையில்
போடு
- - b = b' - 1, w = w', b + w = b' + w' - 1
```

ஒவ்வொரு நிலையிலும் b, w, b + w எப்படி மாறுகின்றன என்று நெறிமுறையில் காட்டப்பட்டுள்ளது. b', w' ஆகியவை இரண்டு பந்துகளை எடுப்பதற்கு முன் மாறிகளின்

XI Std Computer Science Vol-1 TM Chapter 8 166-182.indd 111 4/11/2020 11:43:52 AM

மதிப்பாகும். w எப்படி மாறுகிறது என்று கவனிக்கவும். ஒன்று, அது மாறுவதில்லை அல்லது 2 குறைகிறது. தொடக்கத்தில் w ஒற்றை படையாக இருப்பின், கடைசி வரை ஒற்றைப் படையாகவே இருக்கும். இரட்டைப் படையாக இருப்பினும், கடைசி வரை இரட்டைப் படையாகவே இருக்கும். எனவே, சமநிலை மாறாது என்பதே இதன் பொருள். w யின் சமநிலை மாற்றமிலி.

தொடக்கத்தில் w இரட்டைப்படை என்று வைத்துக்கொள்வோம். முடிவிலும் w இரட்டைப்படையாகவே இருக்கும். மேலும், இப்போது ஒரேவொரு பந்துதான் மீதியிருக்கிறது, $w + b = 1$

1	$w + b = 1$	மடக்கின் இறுதி
2	$w = 0$ அல்லது $w = 1$	1 லிருந்து வரியிலிருந்து
3	w இரட்டைப்படை	மடக்கு மாற்றமிலி
4	$w = 0$	2,3 லிருந்து
5	$b = 1$	1,4 லிருந்து

கடைசிப் பந்து கருப்பாகத்தான் இருக்க வேண்டும். அதுபோல, தொடக்கத்தில் வெள்ளைப் பந்துகள் ஒற்றைப்படையாக இருந்தால், கடைசிப் பந்து வெள்ளையாக இருக்க வேண்டும்.

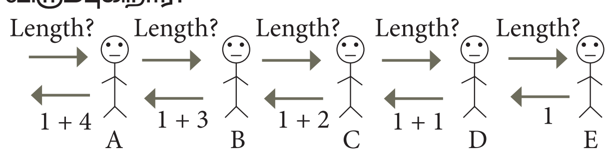
கேள்வி: கடைசியில் ஒரேவொரு பந்துதான் இருக்கிறது என்ற நிலையை நாம் எப்போதாவது அடைவோமா? ஆம், ஏனென்றால், ஒவ்வொரு படியிலும், b + w பந்துகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ஒன்று குறைந்து கொண்டே போகும். எனவே, படிப்படியாகக் குறைந்து, கடைசியில் அது 1 என்றாகிவிடும்.

8.4 தற்சுழற்சி (Recursion)

தற்சுழற்சி என்பது ஒரு நெறிமுறை வடிவமைப்பு நுட்பமாகும். இது கணிதத்தூண்டலோடு நெருங்கிய தொடர்புடையது. இது சுழற்சிக்கு இணையானது. ஆனால் அதைவிட அதிகப் பயனுள்ளது. தற்சுழற்சியைப் பயன்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்ட உள்ளீட்டின் பகுதிகளைக் கொண்டு ஒரு சிக்கலின் சான்றுருக்களை தீர்ப்பதின்மூலம், சிக்கலைக் கொடுக்கப்பட்ட உள்ளீட்டிற்காகத் தீர்க்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு **8.10.**

வாடிக்கையாளர்கள் ஒரு சேவைக்காக வரிசையில் காத்துக்கொண்டிருக்கிறார்கள். சேவைசெய்பவர் வரிசையில் எத்தனை பேர் காத்திருக்கிறார்கள் என்று தெரிந்துக்கொள்ள விரும்புகிறார்.



படம் 8.4 ஒரு வரிசையின் நீளம்

அவர் வரிசையின் நீளத்தைத் தானாகவே கணக்கிடுவதற்குப் பதிலாக, வரிசையில் முதலாவதாக நிற்கின்ற வாடிக்கையாளர் Aயிடம், வரிசையின் நீளம் என்ன? என்று கேட்கிறார். வாடிக்கையாளர் A, வாடிக்கையாளர் B யிடம், நீளம் என்ன? என்று கேட்கிறார். வாடிக்கையாளார் B வாடிக்கையாளர் C யிடம் கேட்கிறார். இப்படி ஒவ்வொருவரும் தனக்குப்பின் இருப்பவரிடம் கேட்கிறார்கள். வரிசையின் கடைசியில் இருக்கும் வாடிக்கையாளர் E என்று வைத்துக்கொள்வோம். அவரிடம் இந்த கேள்வியைக் கேட்கும்போது, அவர் தன்னிடம் கேட்ட D யிடம் "1" என்று பதிலளிக்கிறார். D,"1+1=2" என்று C க்குப் பதிலளிக்கிறார். C,"1+2=3" என்று B க்குப் பதிலளிக்கிறார். B,"1+3=4" என்று A க்குப் பதிலளிக்கிறார். A,"1+4=5" என்று தன்னிடம் கேட்ட சேவையாளருக்குப் பதிலளிக்கிறார்.

8.4.1 தற்சுழற்ச்சி முறை

எடுத்துக்காட்டு 8.10

தற்சுழற்சி முறையை விளக்குகிறது. A, B, C, D, E என்ற 5 வாடிக்கையாளர்களாலான வரிசையை [A, B, C, D, E] என்று குறிப்பிடுவோம். இப்போது [A, B, C, D, E] என்ற வரிசைமுறையின் நீளத்தைக் கணக்கிட வேண்டும். சிக்கலை தீர்க்கின்ற தீர்ப்பானுக்கு (solver), length என்று பெயரிடுவோம். இந்த length என்ற தீர்ப்பானுக்கு நாம் ஒரு வரிசையை உள்ளீடாகத் தந்தால், அது அந்த வரிசைமுறையின் நீளத்தை வெளியீடாகக் கொடுக்கும்.

length [A, B, C, D, E] = 5

length என்ற தீர்ப்பான் [A, B, C, D, E] என்ற வரிசையை அதன் முதல் வாடிக்கையாளர் என்றும், எஞ்சியுள்ள வரிசை என்றும், இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றது.

XI Std Computer Science Vol-1 TM Chapter 8 166-182.indd 112 4/11/2020 11:43:52 AM

முதல் (first) [A, B, C, D, E] = A

எஞ்சியுள்ளது (rest) [A, B, C, D, E] = [B, C, D, E]

ஒரு சிக்கலைத் தற்சுழற்சி முறையில் தீர்ப்பதற்கு, length என்ற தீர்ப்பான் [B, C, D, E] என்ற அளவு குறைக்கப்பட்ட வரிசையை வேறொரு துணைத்தீர்ப்பானுக்கு (Sub solver) உள்ளீடாகக் கடத்துகிறது. இந்த துணைத்தீர்ப்பான் length என்ற தீர்ப்பானின் மற்றொரு சான்றுரு. இந்த துணைத்தீர்ப்பான் [B, C, D, E] என்ற வரிசையின் நீளத்தை வெளியீடாகத் தருவதாகக் கருதிக் கொண்டு, அதனுடன் 1 ஐக் கூட்டி, அதை [A, B, C, D, E]யின் நீளம் என்று வெளியீடாகத் தருகிறது.

length [A, B, C, D, E] = 1 + length [B, C, D, E]

இப்படி ஒவ்வொரு தீர்ப்பானும்

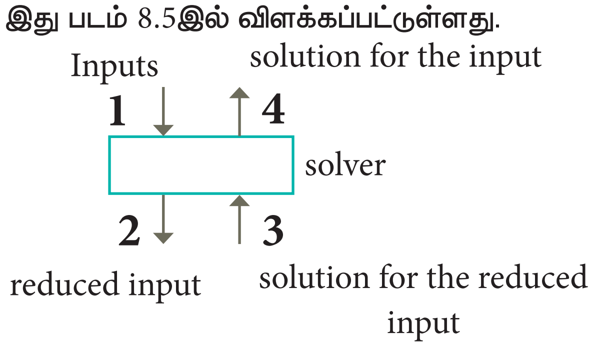
1 ஓர் உள்ளீட்டைப் பெறுகிறது

2 அளவு குறைக்கப்பட்ட ஓர் உள்ளீட்டைத் துணைத்தீர்ப்பானுக்குக் கடத்துகிறது.

3 அளவு குறைக்கப்பட்ட உள்ளீட்டிற்கானத் தீர்வை துணைத்தீர்ப்பானிடமிருந்து பெறுகிறது.

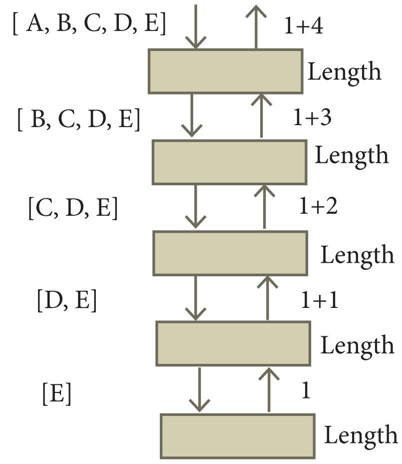
4 கொடுக்கப்பட்ட உள்ளீட்டிற்கான தீர்வை உருவாக்குகிறது.

இது படம் 8.5இல் விளக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 8.5 தற்சுழற்சி முறையின் தீர்ப்பானின் ஒரு சான்றுரு

எடுத்துக்காட்டு 8.10 இல் ஒவ்வொரு தீர்ப்பானும் பெற்றுக்கொள்ளும் உள்ளீட்டையும், உருவாக்கும் தீர்வையும், படம் 8.6 காண்பிக்கிறது. ஒவ்வொரு தீர்ப்பானும் தான் பெறும் உள்ளீட்டின் அளவில் 1யைக் குறைத்து, அதை ஒரு துணைத்தீர்ப்பானுக்குக் கடத்துகிறது. இவ்வாறு, 5 தீர்ப்பான்கள் தேவைப்படுகிறது. ஒரு தீர்ப்பான் பெறுகிற உள்ளீடு ஒரு தீர்வை நேரடியாக வெளியீடு செய்யும் அளவுக்கு மிகச் சிறியதாகும்வரை இப்படிக் கடத்துதல் தொடர்கிறது. கடைசித் தீர்ப்பான் (E)ஐ உள்ளீடாகப் பெறுகிறது. (E) போதுமான அளவுக்குச் சிறியதாக இருப்பதால், அதைப் பெறும் தீர்ப்பான் (E)யின் நீளம் 1 என்று உடனடியாக வெளியிடுகிறது. அத்துடன் அதன் தற்சுழற்ச்சி நின்றுவிடுகிறது.



படம் 8.6 : தற்சுழற்சிமுறையின் தீர்ப்பான்களும், துணைத்தீர்ப்பான்களும்

[A, B, C, D, E] என்ற நீளத்திற்கான தற்சுழற்சிமுறை படம் 8.7இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

1	length [A,B,C,D,E]
2	= 1 + length [B,C,D,E]
3	= 1 +1 + length [C,D,E]
4	= 1 + 1+ 1 + length [D,E]
5	= 1 + 1+ 1 + 1 + length [E]
6	= 1 + 1 + 1 + 1 +1
7	= 1 +1 +1 + 2
8	= 1 + 1 + 3
9	= 1 + 4
10	= 5

படம் 8.7 : ஒரு வரிசையின் நீளத்தைக் கணக்கிடுவதற்கான தற்சுழற்சிமுறை

8.4.2 தற்சுழற்சி முறையில் சிக்கலைத் தீர்த்தல்

ஒவ்வொரு தீர்ப்பானும் தான் பெறும் உள்ளீட்டின் அளவை சோதித்தறிய வேண்டும். அந்;த உள்ளீட்டின் அளவு போதுமான அளவுக்குச் சிறியதாக இருந்தால், தீர்ப்பான் சிக்கலுக்கான தீர்வை நேரடியாக வெளியிட வேண்டும். உள்ளீட்டின் அளவு போதுமான அளவுக்குச் சிறியதாக இல்லையென்றால், தீர்ப்பான் உள்ளீட்டின் அளவைக் குறைத்து, குறைக்கப்பட்ட உள்ளீட்டை வைத்து சிக்கலைத் தீர்க்குமாறு ஒரு துணைத்தீர்ப்பானை அழைக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டு 8.10க்கான தீர்ப்பானின் நெறிமுறையைப் பின்வருமாறு சொல்லலாம்.

XI Std Computer Science Vol-1 TM Chapter 8 166-182.indd 113 4/11/2020 11:43:52 AM

வரிசையின் நீளம் = $\begin{cases} 1 \text{ வரிசையில் ஒரேவொரு வாடிக்கையாளர் மட்டும் இருந்தால்} \\ 1 + \text{மீதமுள்ள நீளம் – மற்றபடி} \end{cases}$

தற்சுழற்சி முறையில் ஒரு சிக்கலைத் தீர்ப்பதற்கு, தீர்ப்பான் சிக்கலை துணைச் சிக்கல்களாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு துணைச்சிக்கலைத் தீர்ப்பதற்கும், ஒரு துணைத்தீர்ப்பானை அழைக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு துணைத்தீர்ப்பானும் தீர்ப்பானுடைய இன்னொரு சான்றுருவேயாகும். துணைச்சிக்கலுக்காக இடப்படும் உள்ளீட்டின் அளவு மூலச் சிக்கலுக்கான உள்ளீட்டின் அளவைவிடச் சிறியதாக இருக்க வேண்டும். ஒரு தீர்ப்பான் இன்னொரு துணைத்தீர்ப்பானை அழைக்கும்போது, அது தற்சுழற்சி அழைப்பு என்று வழங்கப்படுகிறது. தற்சுழற்சியாக அழைக்கப்படும் துணைத்தீர்ப்பான் தான் பெறும் துணைச்சிக்கலுக்கான தீர்வை வெளியிடுகிறது என்று தீர்ப்பான் அனுமானிப்பதற்கு தற்சுழற்சி அனுமதிக்கிறது. அதன்பின் துணைச்சிக்கலின் தீர்விலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலுக்கான தீர்வை தீர்ப்பான் அமைக்கிறது.

துணைத்தீர்ப்பான்கள் சிக்கல்களை மேலும் சிறிய அளவிலான துணைச்சிக்கல்களாகக் குறைத்துக் கொண்டே போகும்போது, இறுதியாக, தற்சுழற்சியின் தேவையில்லாமல் நேரடியாகவே தீர்த்துக்கொள்ளும் அளவுக்குச் துணைச்சிக்கல்கள் மிகச் சிறியவைகளாகிவிடுகின்றன. ஆகையால், ஒரு தற்சுழற்சித் தீர்ப்பானுக்கு இரண்டு (cases) நிலைகள் உள்ளன:

1. அடிப்படை நிலை (Base Case): நேரடியாகத் தீர்க்கும் அளவுக்குச் சிக்கலின் அளவு சிறியதாக இருக்கிறது. அப்பொழுது தீர்வை உடனடியாக வெளியீடு செய்யலாம். குறைந்தது ஓர் அடிப்படை நிலைமையாவது இருக்க வேண்டும்.

2. தற்சுழற்சிப் படிநிலை (Recursion step) : சிக்கலின் அளவு அந்த அளவுக்குச் சிறியதல்ல என்பது வரை, சிக்கலைத் துணைச் சிக்கல்களாகப் பகுக்க வேண்டும். அந்த துணைச்சிக்கல்கள் கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலின் அளவைவிட கண்டிப்பாகச் சிறியதாக இருக்க வேண்டும். பின்பு, துணைச்சிக்கலைத் தீர்க்க ஒரு துணைத்தீர்ப்பானை அழைக்க வேண்டும். அந்த துணைத்தீர்ப்பான் துணைச்சிக்கலுக்கான தீர்வை வெளியிடுவதாகக் கருதி, கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலுக்கானத் தீர்வை அமைக்க வேண்டும்..

தற்சுழற்சி முறையைப் பயன்படுத்திச் சிக்கலைத் தீர்க்கும் நுட்பத்தைப் பின்வரும் நெறிமுறை காண்பிக்கிறது.

solver (input)

if உள்ளீடு போதுமான அளவுக்கு சிறியதாக இருக்குமெனில்,

தீர்வை கட்டமைக்கவும்

else

சிறிதாக்கப்பட்ட உள்ளீட்டுக்கான துணைச் சிக்கல்களைக் கண்டுப்பிடிக்கவும்.

துணை சிக்கலின் தீர்வு = ஒவ்வொரு துணை சிக்கலின் தீர்ப்பான்.

துணைச் சிக்கல்களிலிருந்து, மூலச் சிக்கலுக்கான தீர்வைக் கட்டமைத்தல்.

தற்சுழற்சியைப் பயன்படுத்தி ஒரு சிக்கலைத் தீர்க்கும்போதெல்லாம், இந்த இரண்டு நிலைமைகளை நாம் உறுதிசெய்ய வேண்டும்:

(1) தற்சுழற்சிப் படியில், தற்சுழற்சி அழைப்புக்கான உள்ளீட்டின் அளவு கொடுக்கப்பட்ட உள்ளீட்டின் அளவைவிட கண்டிப்பாகச் சிறியதாக இருக்க வேண்டும்.

(2) குறைந்தது, ஓர் அடிப்படை நிலைமையாவது இருக்க வேண்டும்.

8.4.3 தற்சுழற்சி – எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 8.11.

ஒரு வரிசைமுறையின் நீளத்தைக் கணக்கிடுவதற்கு, தற்சுழற்சி நெறிமுறையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம். நீளம் (s)

length (s)

-- inputs : s

-- outputs : sன் நீளம்

if sல் ஒரு வாடிக்கையாளர் உள்ளார் எனில் -

- அடிப்படை நிலை

1

else

1 + length (tail (s)) - - தற்சுழற்சி படிநிலை

XI Std Computer Science Vol-1 TM Chapter 8 166-182.indd 114 4/11/2020 11:43:52 AM

எடுத்துக்காட்டு 8.12.

a^n யைக் கணக்கிட ஒரு தற்சுழற்சி நெறிமுறையை வடிவமைக்கவும்.

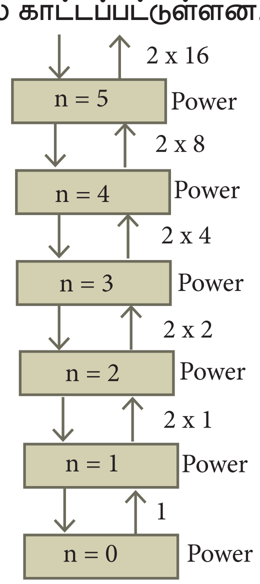
எடுத்துக்காட்டு 8.5ல், a^n யைக் கணக்கிட நாம் ஒரு சுழற்சி நெறிமுறையை அமைத்தோம். a^n ஐ தற்சுழற்சி முறையில் இவ்வாறு வரையறுக்கலாம்.

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ a \times a^{n-1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

இந்த தற்சுழற்சி வரையறையை, power (a, n) யைக் கணக்கிடுவதற்கான தற்சுழற்சி தீர்ப்பாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம். power (a, n)

```
power (a, n)
-- inputs : n is an integer, n ≥ 0
-- outputs : a^n
if n = 0 -- base case
1
else -- recursion step
a x power (a, n-1)
```

power (a, n) ஐக் கணக்கிடுவதற்கான தற்சுழற்சி முறையும், அதன் தீர்ப்பான்களும் படம் 8.8 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.



வரைபடம் *8.8: power (2, 5)*யைக் கணக்கிடுவதற்கான தற்சுழற்சி முறையும், அதன் தீர்ப்பான்களும்.

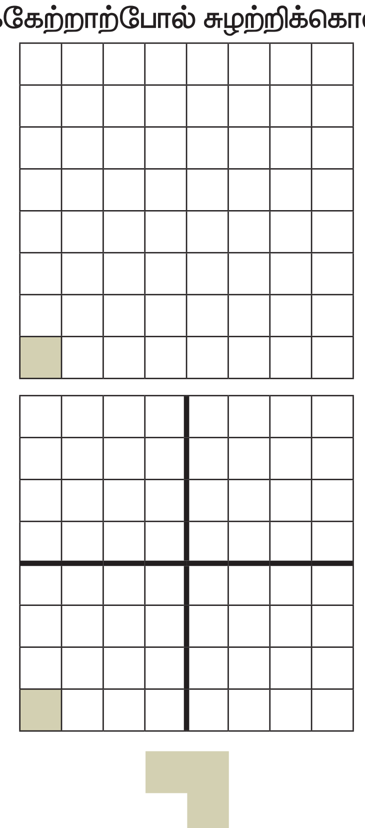
power (2, 5) யிலிருந்து வரக்கூடிய தற்சுழற்சி முறை வரைபடம் 8.9–ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

```
power (2,5)
= 2  X power (2,4)
= 2  X 2  X power(2,3)
= 2  X 2  X 2  X  power(2 ,2)
= 2  X 2  X 2  X  2 X  power (2,1)
= 2  X 2  X 2  X  2 X 2 X power (2,0)
= 2  X 2  X 2  X  2 X 2 X 1
= 2  X 2  X 2  X  2 X 2
= 2  X 2  X 2  X  4
= 2  X 2  X 8
= 2  X 16
= 32
```

வரைபடம் 8.9 power *(2, 5)*க்கான தற்சுழற்சி முறை

எடுத்துக்காட்டு 8.13.

மூலை மூடப்பட்ட பலகை என்பது $2^n x 2^n$ சதுரங்களாலானது. அதில் ஒரு மூலைச் சதுரம் ஒரு தனிச் சதுர ஓட்டினால் மூடப்பட்டிருக்கிறது. அடுத்தடுத்த மூன்று சதுரங்களைக்கொண்டு L வடிவத்தில் அமைக்கப்பட்ட ஓட்டுக்கு முக்கோண ஓடு என்று பெயர் (படம் 8.10ஐப் பார்க்கவும்). மூலை மூடப்பட்ட ஒரு பலகையை இந்த L வடிவ ஓடுகளைக்கொண்டு, ஒன்றின்மேல் ஒன்று வராதபடிக்கு, மூடவும். L வடிவ ஓடுகளைத் தேவைக்கேற்றாற்போல் சுழற்றிக்கொள்ளலாம்.

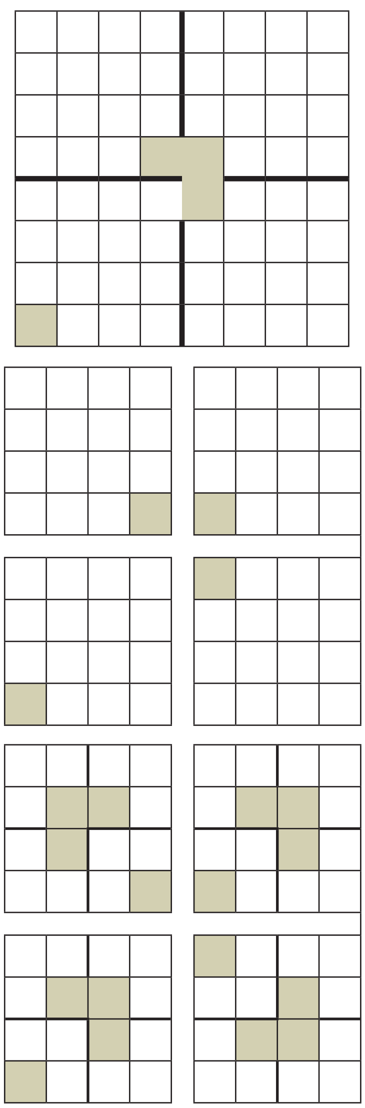


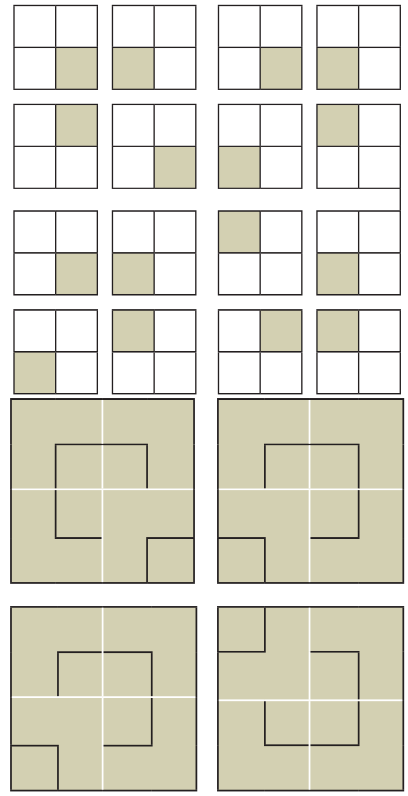
வரைபடம் *8.10* மூலை மூடப்பட்ட பலகையும், முக்கோண ஓடும்

சிக்கலின் அளவு n (2nx 2n) என்ற அளவிலான

XI Std Computer Science Vol-1 TM Chapter 8 166-182.indd 115 4/11/2020 11:43:52 AM

பலகை. தற்சுழற்சியைப் பயன்படுத்தி நாம் இந்த சிக்கலைத் தீர்க்கலாம். $n = 1$ என்பது அடிப்படை நிலைமை. இது 2 x 2 அளவிலான மூலை மூடப்பட்ட பலகை. நாம் இதை ஒரு முக்கோண ஓட்டைக்கொண்டு மூடி, சிக்கலைத் தீர்க்கலாம். தற்சுழற்சிப் படியில், 2^n x 2^n என்ற அளவிலான மூலை மூடப்பட்ட பலகையின் நடுவில் குறுக்காகவும் நெடுக்காகவும் கோடுகளை வரைந்து, அந்தப் பலகையை 4 துணைப்பலகைகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு துணைப்பலகையின் அளவு 2^{n-1} x 2^{n-1}. வரைபடம் 8.11இல் இடது பக்கப் பலகையில் காட்டப்பட்டுள்ளபடி மூலை மூடப்பட்ட துணைப்பலகையை மூடாதவாறு, ஒரு முக்கோண ஓட்டை முழுப் பலகையின் நடுவில் வைக்கவும். இப்போது ஒவ்வொரு துணைப்பலகையும் 2^{n-1} x 2^{n-1} என்ற அளவுகொண்ட மூலை மூடப்பட்ட நான்கு பலகைகளாக உள்ளன.





வரைபடம் *8.11* 2^3 x 2^3என்ற அளவிலான மூலை மூடப்பட்ட பலகையைத் தற்சுழற்சி முறையில் மூடுதல்

இப்போது கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலின் அளவைவிடச் சிறிய அளவிலான 4 துணைச்சிக்கல்களையும் உள்ளன. ஒவ்வொரு துணைச்சிக்கலையும் தற்சுழற்சி முறையில் நாம் தீர்க்கலாம்.

```
tile corner_covered board of size n
if n = 1 -- base case
        cover the 3 squared with one trioninoe
else -- recursion step
        divide board into 4 sub_boards of size
n - 1
        place a triominoe at centre of board,
          leaving out the corner_covered sub_
board
        tile each sub_board of size n - 1
```

2^3 x 2^3 என்ற அளவிலாலான மூலை மூடப்பட்ட பலகையைத் தற்சுழற்சி முறையில் மூடுவதின் விளைவு படம் -8.11ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

XI Std Computer Science Vol-1 TM Chapter 8 166-182.indd 116 4/11/2020 11:43:52 AM

நினைவில் கொள்க

- சுழற்சி இரண்டு படிகளைத் திரும்பத்திரும்பச் செய்கிறது. ஒன்று, அது ஒரு நிலைமையை மதிப்பிருத்துகிறது, இரண்டு, நிலைமை மெய் என இருக்கும்வரை, அது ஒரு கூற்றைச் செயல்படுத்துகிறது.
- மாறிகள் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு கோவையிலுள்ள ஒரு மாறிக்கு ஒன்றை மதிப்பிருத்திய பிறகும், அந்தக் கோவை மாறாமல் அப்படியே இருந்தால் அது மதிப்பிருத்தலின் மாற்றமிலி என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- மடக்கின் உடற்பகுதியிலுள்ள மாற்றமிலி மடக்கு மாற்றமிலி என்றழைக்கப்படுகிறது.
- மடக்கு மாற்றமிலி பின்வரும் இடங்களில் மெய்யாக இருக்கும்

அ. மடக்கின் தொடக்கத்தில் (அதாவது, மடக்கிற்குமுன்பு)

ஆ. ஒவ்வொரு சுழற்சியின் தொடக்கத்தில் (அதாவது மடக்கின் உடற்பகுதிக்கு முன்பு)

இ. ஒவ்வொரு சுழற்சியின் இறுதியில் (அதாவது மடக்கின் உடற்பகுதிக்குப் பின்பு)

உ. மடக்கின் முடிவில் (அதாவது, மடக்கிற்குப்பின்பு)

- ஒரு மடக்கு முடியும்போது, மடக்கு மாற்றமிலி மெய்யாக இருக்கும். மேலும், முடிவுறும் நிலைமையும் உண்மையாக இருக்கும்.
- தற்சுழற்சிக்குக் குறைந்தபட்சம் ஓர் அடிப்படை நிலையாவது இருக்க வேண்டும்.
- தற்சுழற்சி ஒரு சிக்கலைச் சிறிய அளவிலான துணைச்சிக்கல்களாக பிரிக்கிறது. சிக்கல்களுக்கு தற்சுழற்சி அழைப்பினால் தீர்வு கிடைக்கிறது என்று அனுமானிக்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட சிக்கலுக்குத் தீர்வை உருவாக்குகிறது.
- தற்சுழற்சியில், கொடுக்கப்பட்ட உள்ளீட்டின் அளவைவிட துணைச்சிக்கலின் அளவு கண்டிப்பாகச் சிறியதாக இருக்க வேண்டும்.

மதிப்பீடு

பகுதி அ

6SR37Z

1. மடக்கு மாற்றமிலி உண்மையாக இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை

அ. மடக்கின் தொடக்கத்தில்
ஆ. ஒவ்வொரு சுழற்சியின் தொடக்கத்தில்
இ. ஒவ்வொரு தற்சுழற்சியின் முடிவில்
ஈ. நெறிமுறையின் தொடக்கத்தில்

2. ஒரு சதுரங்கப்பலகையை டோமினோஸ் என்ற செவ்வகக் கட்டைகளைக் கொண்டு மூட விரும்புகிறோம். b என்பது டோமினோஸ் எத்தனை கருப்புக் கட்டங்களை மூடுகிறது என்பதையும், w என்பது டோமினோஸ் எத்தனை வெள்ளைக் கட்டங்களை மூடுகிறது என்பதையும் குறிக்கின்றன என்றால், பின்வரும் எந்த மாதிரியின்படி ஒரு டோமினோஸை வைக்கலாம்

அ. b := b + 2 ஆ. w := w + 2
இ. b, w : = b + 1, w +1 ஈ. b := w

3. m x a + n x b என்பது a, b := a + 8, b + 7 என்ற மதிப்பிருத்தலின் மாற்றமிலி என்றால், m, n வின் மதிப்புகள்

அ. m=8, n=7 ஆ. m=7, n=-8
இ. m=7, n=-8 ஈ. m=8, n=-7

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவைகளில் எது m, n : = m+2, n+3 என்ற மதிப்பிருத்தலின் மாற்றமிலி இல்லை?

அ. m mod 2 ஆ. n mod 3
இ. 3 x m – 2 x n ஈ. 2xm – 3 x n

5. ஃபிபோனாச்சி எண்ணைப் தற்சுழற்சியின்படி பின்வருமாறு வரையறுத்தால்

$$F(n)=\begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ F(n-1)+F(n-2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

(குறிப்பு : ஃபிபோனாச்சி எண் என்பது அதற்கு முந்தைய இரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தொகை. எடுத்துக்காட்டு: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...) இல்லையென்றால் F(4) யைமதிப்பிட எத்தனை F() பயன்படுத்தப்பட வேண்டும்?

அ. 3 ஆ. 4 இ. 9 ஈ. 8

6. தற்சுழற்சியின்பின்வரும்வரையறையைப் பயன்படுத்தி a^{10} யை மதிப்பிட எத்தனைமுறை பெருக்க வேண்டும்?

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ a \times a^{n-1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) 11 (b) 10 (c) 9 d) 8

பகுதி – ஆ

குறுவினாக்கள்

1. மாற்றமிலி என்றால் என்ன?
2. மடக்கு மாற்றமிலியை வரையறுக்கவும்.
3. மாற்றமிலியின் நிலைமையைச் சோதிப்பது மடக்கு மாற்றமிலியைப் பாதிக்குமா? ஏன்?
4. மடக்கு மாற்றமிலிக்கும், மடக்கு நிலைமைக்கும், உள்ளீட்டு வெளியீட்டு தொடர்புக்கும் என்ன உறவு?
5. தற்சுழற்சி முறையில் சிக்கலைத் தீர்ப்பது என்றால் என்ன?
6. இயல் எண்ணின் தொடர் பெருக்கத்தைத் தற்சுழற்ச்சி முறையில் வரையறுக்கவும்.

பகுதி – இ

சிறுவினாக்கள்

1. ஒரு மேஜையில் 7 குவளைகள் தலைகீழாக இருக்கின்றன. எந்த இரண்டு குவளைகளையும் நீங்கள் ஒரே நேரத்தில் திருப்புவதற்கு உங்களுக்கு அனுமதி உண்டு. எல்லாக குவளைகளும் நேராக இருக்கக்கூடிய நிலையை எட்டுவது சாத்தியமா? (குறிப்பு: தலைகீழாக இருக்கும் குவளைகளுடைய எண்ணிக்கையின் சமநிலை மாறாது).

2. தோற்றால் வெளியேறிவிட வேண்டும் என்ற நிபந்தனையுள்ள ஒரு விளையாட்டு போட்டியில் வரிசையாக போட்டிகள் நடக்கின்றன. ஒவ்வொரு போட்டியிலும் இரண்டு விளையாட்டு வீரர்கள் போட்டியிடுகிறார்கள் தோற்றவர் வெளியேறிவிட வேண்டும் (அதாவது, அதற்குப்பின் அவர் எந்தப் போட்டியிலும் பங்கெடுக்கமாட்டார்). வெற்றிபெற்றவர் தொடர்ந்து போட்டியில் பங்கெடுப்பார். எல்லா விளையாட்டு வீரர்களும் இவ்வாறு வெளியேற்றப்பட்டபின்,கடைசியில்எஞ்சியிருக்கும் வீரரே போட்டியில் வெற்றிபெற்றவர். ஒரு விளையாடடுப்போட்டியில் 1234 வீரர்கள் இருக்கிறார்கள் என்று வைத்துக்கொள்வோம். வெற்றிவீரரைத் தீர்மானிப்பதற்கு எத்தனை போட்டிகள் நடத்தப்பட வேண்டும்?

3. மன்னன் விக்கிரமாதித்தனிடம் இரண்டு மந்திர வாள்கள் இருக்கின்றன. ஒரு வாளை வைத்து அவனால் வேதாளத்தின் 19 தலைகளை வெட்டியெறிய முடியும். ஆனால், அதன்பின் வேதாளத்துக்கு 13 தலைகள் முளைக்கின்றன. இன்னொரு வாளை வைத்து 7 தலைகளை வெட்டியெறிய முடியும். ஆனால், அதற்குப்பின் 22 புதிய தலைகள் முளைக்கின்றன. எல்லாத் தலைகளையும் வெட்டிவிட்டால், வேதாளம் செத்துவிடும். வேதாளத்துக்கு ஆரம்பத்தில் 1000 தலைகள் இருந்தால், அது சாகிற வாய்ப்பு உண்டா? (குறிப்பு: தலை mod 3 –ன் எண்ணிக்கை மாறாது).

பகுதி – ஈ

நெடுவினாக்கள்

1. வழக்கமான நிறமுறைடய 8 x 8 அளவிலான ஒரு சதுரங்கப்பலகையை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள். குறுக்குவரிசை மற்றும் நேர்வரிசையின் எல்லாக் கட்டங்களுக்கும் வேறு நிறமிட்டு அவைகளின் நிறதை மாற்றிவிடுவோம். திரும்பத்திரும்ப வேறு நிறமிடலாம். இப்படிச் செய்வதால், கடைசியில் ஒரேவொரு கருப்புக் கட்டம் மட்டுமே வர வேண்டும் என்பதே இலக்கு. இந்த இலக்கை அடைய முடியாது என்று நிருப்பிக்கவும் (குறிப்பு : ஒரு குறுக்கு வரிசையில் அல்லது நேர்வரிசையில் என்ற கருப்புக் கட்டங்கள் இருந்தால். அது $|(8 – b) – b|$ என்று மாறுகிறது.

2. power தற்சுழற்சியை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ a \times a^{n-1} & \text{if } n \text{ is odd} \\ a^{n/2} \times a^{n/2} & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

இந்த வரையறையைப் பயன்படுத்தி தற்சுழற்சி நெறிமுறையை உருவாக்கவும். a^{10} யைக் கணக்கிட எத்தனை முறை பெருக்க வேண்டும்?

3. $2^n \times 2^n$ சதுர அளவைக் கொண்ட ஒரு சதுர மூலை மூடப்பட்ட அட்டையில், ஒரு மூளைச் சதுரம் ஒரு தனிச் சதுர ஒட்டினால் மூடப்பட்டிருக்கிறது. ஒன்றின்மேல் ஒன்று இல்லாமல் முக்கோண ஒட்டு அட்டையை மூட முடியும் என்பதை காண்பிக்க

XI Std Computer Science Vol-1 TM Chapter 8 166-182.indd 118 4/11/2020 11:43:53 AM