Name : ....

Roll No. : ....

नवीन पाठ्यक्रम / New Syllabus

कुल प्रश्नों की संख्या : 29]
Total No. of Questions : 29]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 11
[Total No. of Printed Pages : 11

K-202204/804–A

विषय : गणित
Subject : Mathematics

समय : 3 घण्टे]
Time : 3 hours]

[पूर्णांक : 100
[Maximum Marks : 100

सामान्य निर्देश : (*i*) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
(*ii*) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

General Instructions : (*i*) All questions are compulsory.
(*ii*) Use of calculator is not permitted.

निर्देश : (अ) प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक अतिलघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction : (A) Question Nos. 1 to 4 are very short answer type questions. Each question carries 1 mark.

प्रश्न-1 अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4} = 0$ की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए। [1]

Find the order and degree of differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4} = 0$.

प्रश्न-2 सदिश $\bar{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ की दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। [1]

Find direction cosines of vector $\bar{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$.

प्रश्न-3 $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

Find the value of $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$.

प्रश्न-4 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो $A - B$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, then find the value of $A - B$.

निर्देश : (ब) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (B) Question Nos. **5** to **12** are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

प्रश्न-5 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

Find the value of $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$.

प्रश्न-6 यदि $y = x^{\sin x}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $y = x^{\sin x}$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$.

प्रश्न-7 सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2.$$ [1+1=2]

Prove that

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2.$$

प्रश्न-8 यदि E और F इस प्रकार कि घटनाएँ हैं कि $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ और $P(E \cap F)= 0.2$, तो $P(E/F)$ तथा $P(F/E)$ ज्ञात कीजिए। [1+1=2]

Given that E and F are events such that $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ and $P(E \cap F)= = 0.2$, find $P(E/F)$ and $P(F/E)$.

प्रश्न-9 यदि $y = \sqrt{\cos x + y}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

If $y = \sqrt{\cos x + y}$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$.

प्रश्न-10 बिन्दुओं (–1, 0, 2) और (3, 4, 6) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। [1+1=2]

Find the vector equation of line which passes through the points (–1, 0, 2) and (3, 4, 6).

प्रश्न-11 $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [1+1=2]

Find the value of $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx$.

प्रश्न-12 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + xe^{-y}$ को हल कीजिए। [2]

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + xe^{-y}$.

निर्देश : (स) प्रश्न क्रमांक 13 से 23 तक दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 15, 20 एवं 21 में आंतरिक विकल्प हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (C) Question Nos. 13 to 23 are long answer type questions. Question Nos. 15, 20 and 21 have internal choice. Each question carries 4 marks.

प्रश्न-13 सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$. [4]

Prove that $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$.

प्रश्न-14 फलन $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ के लिए अंतराल [2, 4] में लैग्रांज के औसत मान प्रमेय को सत्यापित कीजिए। [4]

Verify Lagrange's mean value theorem for the function $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ in the interval [2, 4].

प्रश्न-15 एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंप द्वारा 900 घन सेमी. गैस प्रति सेकेण्ड भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए, जब त्रिज्या 15 सेमी. है। [4]

A balloon which always remains spherical is being inflated by pumping in 900 cubic cm of gas per second. Find the rate at which the radius of the balloon increases, when the radius is 15 cm.

अथवा

OR

ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम है।

Find the two numbers whose sum is 24 and whose product is as large as possible.

प्रश्न-16 $\int e^{3x} \cdot \cos 2x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

Find the value of $\int e^{3x} \cdot \cos 2x \, dx$.

प्रश्न-17 अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ को हल कीजिए। [4]

Solve the differential equation $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$.

प्रश्न-18 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण $\overline{a} = 3i + j - 2k$ तथा $\overline{b} = i - 3j + 4k$ हैं। [4]

Find the area of the parallelogram whose diagonals are $\overline{a} = 3i + j - 2k$ and $\overline{b} = i - 3j + 4k$.

प्रश्न-19 $i \cdot (j \times k) + j \cdot (i \times k) + k \cdot (i \times j)$ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

Find the value of $i \cdot (j \times k) + j \cdot (i \times k) + k \cdot (i \times j)$.

प्रश्न-20 यदि $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. [4]

If $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$, then prove that $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

अथवा

OR

$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

Write $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$ in the simplest form.

प्रश्न-21 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R \rightarrow R$, एकैकी तथा अच्छादक है। [4]

Prove that the function $f : R \rightarrow R$, given by $f(x) = 2x$ is one-one and onto.

अथवा

OR

यदि फलन $f : R \to R$ और $g : R \to R$ क्रमशः $f(x) = x^2 + 2$ और $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ द्वारा परिभाषित हो, $f \circ g$ और $g \circ f$ ज्ञात कीजिए।

If the function $f : R \to R$ be given by $f(x) = x^2 + 2$ and $g : R \to R$ be given by $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$, find $f \circ g$ and $g \circ f$.

प्रश्न-22 मोहन 75% प्रकरणों में तथा सोहन 80% प्रकरणों में सच बोलता है। उस घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जबकि मोहन सच तथा सोहन झूठ बोलता है। [4]

Mohan tells the truth in 75% cases while Sohan in 80% cases. Find the probability that Mohan tells the truth and Sohan tells lie to narrate an incident.

प्रश्न-23 एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्नानुसार है :

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

ज्ञात कीजिए (*i*) k, (*ii*) $P(X < 3)$, (*iii*) $P(X > 6)$. [4]

A random variable X has the following probability distribution :

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

Find (*i*) k, (*ii*) $P(X < 3)$, (*iii*) $P(X > 6)$.

निर्देश : (द) प्रश्न क्रमांक 24 से 29 तक दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 28 एवं 29 पर आंतरिक विकल्प का प्रावधान है। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (D) Question Nos. 24 to 29 are long answer type questions. Question Nos. 28 and 29 have internal choice. Each question carries 6 marks.

प्रश्न-24 $\int_0^{8a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{8a-x}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [6]

Find the value of $\int_0^{8a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{8a-x}}\,dx$.

प्रश्न-25 प्रारंभिक संक्रियाओं का प्रयोग करते हुए आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$ का A^{-1} ज्ञात कीजिए। [6]

Using elementary operation, find A^{-1} of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न-26 यदि $y = e^{m\cos^{-1}x}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0.$$ [6]

If $y = e^{m\cos^{-1}x}$, then prove that

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0.$$

प्रश्न-27 आलेख द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत $x + 2y \leqslant 10,\ \ 3x + y \leqslant 15$ और $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

$Z = 3x + 2y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। [6]

Find the maximum value of $Z = 3x + 2y$ by graphical method of solving linear programming problem under the following constraints :

$x + 2y \leqslant 10,\ \ 3x + y \leqslant 15$ and $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

प्रश्न-28 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (समाकलन विधि से)। [6]

Find the area bounded by the ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (by integration method).

अथवा

OR

$x = 0$ तथा $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area bounded by the curve $y = \cos x$ between $x = 0$ and $x = 2\pi$.

प्रश्न-29 दो सरल रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ तथा $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। [6]

Find the shortest distance between the two straight lines

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1} \text{ and } \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}.$$

अथवा

OR

दो समतलों $x + y + z = 1$ और $2x + 3y + 4z = 5$ के प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले तथा समतल $x - y + z = 0$ पर लम्बवत् समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of plane passing through the line of intersection of the two planes $x + y + z = 1$ and $2x + 3y + 4z = 5$, and perpendicular to the plane $x - y + z = 0$.

....