পৰিশিষ্ট-2

গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ পৰিচয়
(Introduction to Mathematical Modelling)

A2.1 অৱতাৰণা (Introduction) :

আগৰ শ্ৰেণীসমূহৰ পৰাই তোমালোকে তোমালোকৰ চৌপাশৰ বাস্তৱ পৃথিৱীখনৰ সৈতে সম্পৰ্কিত সমস্যাৱলীৰ সমাধান কৰি আহিছা। উদাহৰণ স্বৰূপে— তোমালোকে সূত্ৰৰ সহায়ত সৰল সুদৰ সমস্যা সমাধান কৰিছা। সূত্ৰ (বা সমীকৰণ) হ'ল সুদ আৰু ইয়াৰ সৈতে যুক্ত আন তিনিটা ৰাশি— মূলধন, সুদৰ হাৰ আৰু সময়ৰ এটা সম্পৰ্ক। এই সূত্ৰটো গণিতীয় আৰ্হিৰ এটা উদাহৰণ। গণিতীয় আৰ্হি হ'ল বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক অৱস্থাক বৰ্ণনা কৰিব পৰা একোটা গণিতীয় সম্পৰ্ক।

নানা প্ৰকাৰৰ বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাৰ সমাধানত গণিতীয় আৰ্হিৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। যেনে—

- উপগ্ৰহৰ উৎক্ষেপন কাৰ্যত।
- মৌচুমীৰ আগজাননী দিয়াৰ ক্ষেত্ৰত।
- যান বাহনৰ পৰা উদ্ভূত প্ৰদূষণ নিয়ন্ত্ৰণৰ ক্ষেত্ৰত।
- বৃহৎ মহানগৰীসমূহৰ যান-জঁট লাঘৱ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত।

এই অধ্যায়ত তোমালোকক গণিতীয় আৰ্হি গঠন প্ৰক্ৰিয়াৰ সৈতে পৰিচয় কৰোৱা হ'ব যাক গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ বোলা হয়। গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণত বাস্তৱ জগতৰ সমস্যা একোটা লোৱা হয় আৰু ইয়াক সমতুল্য গাণিতিক সমস্যাৰ ৰূপত লিখি উলিওৱা হয়। তাৰ পিছত গাণিতিক সমস্যাটোৰ সমাধান উলিয়াই পুনৰ বাস্তৱ জগতৰ পটভূমিত ব্যাখ্যা কৰা হয়। ইয়াৰ পিছত সমাধানটো বাস্তৱ জগতৰ পৰিপ্ৰেক্ষিতত কিমান দূৰ প্ৰযোজ্য হৈছে সেই বিষয়টো পৰীক্ষা কৰি চোৱা হয়। গতিকে, গাণিতিক আৰ্হি প্ৰকৰণৰ সৈতে জড়িত ঢাপকেইটা হ'ল— সূত্ৰায়ন (Formulation),

সমাধান (Solution), ব্যাখ্যা (Interpretation), আৰু বৈধতাৰ পৰীক্ষণ বা বৈধকৰণ (Validation)।

পৰিচ্ছেদ A2.2ত শব্দ নিৰ্ভৰ সমস্যাৰ (Word-problem) সমাধান কৰোতে তোমালোকে গ্ৰহণ কৰা পদ্ধতিৰ পিনে দৃষ্টি ৰাখি আমি আলোচনা আৰম্ভ কৰিম। ইয়াত, তোমালোকে পূৰ্বৰ শ্ৰেণীসমূহত সমাধান কৰি অহা ধৰণৰ কিছুমান শব্দনিৰ্ভৰ সমস্যাৰ আলোচনা আগবঢ়োৱা হ'ব। পৰবৰ্তী কালত আমি দেখিবলৈ পাম যে শব্দনিৰ্ভৰ সমস্যাৰ সমাধানত ব্যৱহৃত ঢাপ কিছুমান গাণিতিক আৰ্হি প্ৰকৰণতো ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

পৰবৰ্তী পৰিচ্ছেদত অৰ্থাৎ A2.3ত আমি কিছুমান সৰল আৰ্হিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

পৰিচ্ছেদ A2.4ত আমি আৰ্হি প্ৰকৰণৰ পদ্ধতি, ইয়াৰ সুবিধা আৰু কিছুমান সীমাবদ্ধতাৰ বিষয়ে সামগ্ৰীকভাৱে আলোচনা আগবঢ়াম।

A2.2 কথা প্ৰশ্নৰ পৰ্যালোচনা (Review of word-problems) :

উদাহৰণ 1 : মোৰ গাড়ীখনেৰে 48 লিটাৰ পেট্ৰ'লত মই 432 কিঃ মিঃ ভ্ৰমণ কৰিছিলো। গাড়ীখনেৰে 180 কিঃমিঃ দূৰৈত অৱস্থিত এখন ঠাইলৈ মই যাব বিচাৰো। মোক কিমান লিটাৰ পেট্ৰ'লৰ আৱশ্যক হ'ব?

সমাধান : সমস্যাটো সমাধানৰ ক্ষেত্ৰত জড়িত ঢাপবোৰ ক্ৰমানুসাৰে বাছি উলিওৱা হওক।

ঢাপ-1 : সূত্ৰায়ন (Formulation) : তোমালোকে জানা যে যিমানে অধিক দূৰলৈ আমি ভ্ৰমণ কৰো, সিমানে অধিক পেট্ৰ'লৰ প্ৰয়োজন হয়; অৰ্থাৎ পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণ আমি অতিক্ৰম কৰা দূৰত্বৰ সৈতে প্ৰত্যক্ষভাৱে পৰিবৰ্তনশীল অৰ্থাৎ বিচৰণশীল।

432 কিঃ মিঃ ভ্ৰমণৰ বাবে পেট্ৰ'ল লাগে = 48 লিটাৰ

180 কিঃ মিঃ ভ্ৰমণৰ বাবে পেট্ৰ'ল লাগে = ?

গাণিতিক বৰ্ণনা : ধৰা হওক—

x = মই ভ্ৰমণ কৰা দূৰত্ব

y = মোক প্ৰয়োজন হোৱা পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণ

x, yৰ সৈতে প্ৰত্যক্ষভাৱে বিচৰণশীল

গতিকে, $y = kx$, য'ত k এটা ধ্ৰুৱক

48 লিটাৰ পেট্ৰ'লেৰে মই 432 কিঃ মিঃ ভ্ৰমণ কৰিব পাৰো।

গতিকে, $y = 48$, $x = 432$

সেয়েহে, $k = \dfrac{y}{x} = \dfrac{48}{432} = \dfrac{1}{9}$

যিহেতু, $y = kx$

সেইবাবে $y = \frac{1}{9}x$ .....(1)

সমীকৰণ বা সূত্ৰ (1)য়ে প্ৰয়োজনীয় পেট্ৰ'ল আৰু ভ্ৰমণ কৰা দূৰত্বৰ মাজৰ সম্বন্ধটো বৰ্ণনা কৰে।

ঢাপ-2 : সমাধান (Solution) : 180 কিলোমিটাৰ দূৰত্ব ভ্ৰমণ কৰিবলৈ আৱশ্যক হোৱা পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণ আমি উলিয়াব বিচাৰোঁ। গতিকে, $x = 180$ ৰ বাবে আমি yৰ মান উলিয়াব লাগিব। (1)ত $x = 180$ বহুৱাই আমি পাওঁ—

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

ঢাপ-3 : ব্যাখ্যা (Interpretation) : যিহেতু $y = 20$, গতিকে, 180 কিলোমিটাৰ ভ্ৰমণ কৰিবলৈ আমাক 20 লিটাৰ পেট্ৰ'লৰ আৱশ্যক হ'ব।

তোমালোকৰ এনে অনুভৱ হয় নে যে সকলো পৰিস্থিতিতে তোমালোকে সূত্ৰ (1)ৰ ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ সমৰ্থ নহবও পাৰা?

উদাহৰণ স্বৰূপে, ধৰি লোৱা, 432 কিলোমিটাৰ পথছোৱা পাহাৰৰ মাজে মাজে আৰু 180 কিলোমিটাৰ পথছোৱা সমান সমতলভূমিৰে গৈছে। প্ৰথম পথছোৱাৰ বাবে গাড়ীখনে খৰগতিত পেট্ৰ'ল খৰছ কৰিব, গতিকে 180 কিলোমিটাৰ পথছোৱাৰ বাবে আমি একে হাৰ ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰো য'ত পেট্ৰ'ল মন্থৰ গতিত ব্যৱহাৰ হ'ব। গতিকে সূত্ৰটো প্ৰযোজ্য হ'ব যদি পেট্ৰ'ল খৰছৰ হাৰক প্ৰভাৱিত কৰা এনেধৰণৰ সকলো চৰ্তাৱলী উভয়ছোৱা পথৰ বাবে একে হয়। নাইবা, যদি এনে চৰ্তাৱলীৰ মাজত কোনো প্ৰভেদ থাকে, তেন্তে গাড়ীখনৰ বাবে আৱশ্যক হোৱা পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণৰ ওপৰত এই প্ৰভেদৰ প্ৰভাৱ অতি ক্ষুদ্ৰ হয়। মাত্ৰ এনে এক পৰিস্থিতিতহে ব্যৱহাৰ হোৱা পেট্ৰ'ল অতিক্ৰান্ত দূৰত্বৰ সৈতে প্ৰত্যক্ষভাৱে বিচৰণশীল হয়। সমস্যাটোৰ সমাধান আগবঢ়াওতে আমি এই কথাটো ধৰি লৈছিলো।

উদাহৰণ 2 : ধৰি লোৱা, সুধীৰে বছৰি 8% হাৰ সুদত 15000 টকা বিনিয়োগ কৰে। বিনিয়োগৰ জৰিয়তে হোৱা আয়ৰ পৰা তেওঁ 19000 টকা মূল্যৰ এটা কাপোৰ ধোৱা মেচিন কিনিব বিচাৰিলে। 15000 টকা তেওঁ কিমান সময়ৰ বাবে বিনিয়োগ কৰিব লাগিব যাতে কাপোৰ ধোৱা মেচিনটো ক্ৰয় কৰিব পৰাকৈ তেওঁৰ হাতত পৰ্যাপ্ত ধন জমা হয়?

সমাধান : ঢাপ-1 : সমস্যাটোৰ সূত্ৰায়ন (Formulation of the problem) : ইয়াত, আমি মূলধন আৰু সুদৰ হাৰ সম্পৰ্কে জানো। সুদখিনি হ'ল কাপোৰ ধোৱা মেচিনটো কিনিবলৈ সুধীৰক 15000 টকাৰ ওপৰঞ্চিভাৱে প্ৰয়োজন হোৱা ধনৰ পৰিমাণ। আমি উলিয়াব লাগিব বছৰৰ সংখ্যা।

গাণিতিক বৰ্ণনা :

সৰল সুদৰ সূত্ৰটো হ'ল

$$I = \frac{Pnr}{100}$$

য'ত, P = মূলধন

n = বছৰৰ সংখ্যা

r% = সুদৰ হাৰ

I = আৰ্জিত সুদ।

ইয়াত, মূলধন = 15,000 টকা

কাপোৰ ধোৱা মেচিনটো কিনিবলৈ সুধীৰক প্ৰয়োজন হোৱা টকাৰ পৰিমাণ = 19,000 টকা

গতিকে আৱশ্যকীয় সুদৰ পৰিমাণ = 19,000 টকা – 15,000 টকা = 4,000 টকা

15,000 টকা জমা ৰখা বছৰৰ সংখ্যা = n

বছৰি 8% হাৰে n বছৰৰ বাবে 15,000 টকাৰ ওপৰত সুদৰ পৰিমাণ = I

তেতিয়া $I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$

গতিকে I = 1200n .....(1)

হ'ল বছৰৰ সংখ্যা আৰু সুদৰ মাজত থকা সম্বন্ধটো, যদি 15000 টকা বছৰি 8% হাৰে বিনিয়োগ কৰা হয়। আৰ্জিত সুদৰ পৰিমাণ 4000 টকা হ'বলৈ প্ৰয়োজন হোৱা সময় উলিয়াব লাগে।

(1)ত I = 4000 বহুৱাই আমি পাওঁ—

4000 = 1200n .....(2)

ঢাপ-2 : সমস্যাটোৰ সমাধান : (2) সমীকৰণটো সমাধান কৰি পাওঁ—

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

ঢাপ-3 : ব্যাখ্যা : যিহেতু $n = 3\frac{1}{3}$ আৰু এবছৰৰ এক তৃতীয়াংশই 4 মাহ বুজায় গতিকে 3 বছৰ 4 মাহৰ পিছত সুধীৰে এটা কাপোৰ ধোৱা মেচিন কিনিব পাৰিব।

ওপৰৰ উদাহৰণটোত তোমালোকে আৰোপ কৰিবলগীয়া হোৱা পূৰ্ব চৰ্তটো কি অনুমান কৰিব পাৰিছানে? যিছোৱা সময়ৰ বাবে আমি সুদ নিৰ্ণয় কৰিছো সেই সময়ছোৱাৰ বাবে সুদৰ হাৰ একেই আছে বুলি আমি ধৰি লৈছো। অন্যথা, $I = \frac{Pnr}{100}$ সূত্ৰটো প্ৰযোজ্য নহ'লহেঁতেন। লগতে আমি ধৰি লৈছো যে সুধীৰে প্ৰয়োজনীয় টকাখিনি জোগাৰ কৰিবলৈ আৱশ্যক হোৱা সময়ছোৱাত

কাপোৰ ধোৱা মেচিনটোৰ মূল্য বঢ়া নাই।

উদাহৰণ 3 : যন্ত্ৰচালিত নাও এখনে নদীৰ উজনিমুৱা সোঁতত গতি কৰি ছয় ঘণ্টাত পাৰত থকা দুখন চহৰৰ মাজৰ দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰে। নাওখনে সেই একেখিনি দূৰত্ব ভটিয়নি সোঁতত অতিক্ৰম কৰিবলৈ পাঁচ ঘণ্টা সময় লয়। যদি সোঁতৰ গতিবেগ প্ৰতি ঘণ্টাত 2 কিঃ মিঃ তেন্তে স্থিৰ পানীত নাওখনৰ গতিবেগ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : ঢাপ-1 : সূত্ৰায়ন : নৈখনৰ গতিবেগ আৰু ঠাই দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিবলৈ আৱশ্যক হোৱা সময়ৰ পৰিমাণ আমি জানো। স্থিৰ পানীত নাওখনৰ গতিবেগ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

গাণিতিক বৰ্ণনা : নাওখনৰ গতিবেগ বুজাবলৈ x, অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব বুজাবলৈ y আৰু আৱশ্যক হোৱা সময় বুজাবলৈ আমি t লিখোঁহক। তেতিয়া,

$y = tx$ .....(1)

ধৰা হওক ঠাই দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব d

উজনিমুৱা সোঁতত নাওখনৰ গতিবেগ = স্থিৰ পানীত নাওখনৰ গতিবেগ – নৈখনৰ গতিবেগ কাৰণ নাওখনে নৈৰ সোঁতৰ বিপৰীতে গতি কৰিছে।

গতিকে, উজনিমুৱা সোঁতত নাওখনৰ গতিবেগ = প্ৰতি ঘণ্টাত $(x - 2)$ কিঃ মিঃ

উজনিমুৱা সোঁতত চহৰ দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিবলৈ নাওখনৰ 6 ঘণ্টাৰ প্ৰয়োজন হয়। গতিকে, (1)ৰ পৰা আমি পাওঁ

$d = 6(x - 2)$

ভটিয়নি সোঁতৰ ক্ষেত্ৰত নৈৰ গতিৰ সৈতে নাওৰ গতিৰ সমষ্টি লʼব লাগিব।

গতিকে ভটিয়নি সোঁতত নাওখনৰ গতিবেগ = $(x + 2)$ কিঃ মিঃ/প্ৰতি ঘণ্টাত

ভটিয়নি সোঁতৰ ক্ষেত্ৰত একেখিনি দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিবলৈ প্ৰয়োজনীয় সময় হʼল 5 ঘণ্টা।

গতিকে, $d = 5(x + 2)$ .....(3)

(2) আৰু (3)ৰ পৰা আমি পাওঁ—

$5(x + 2) = 6(x - 2)$ .....(4)

ঢাপ-2 : সমাধান নিৰ্ণয় :

সমীকৰণ (4)ৰ পৰা xৰ মান উলিয়াই আমি পাওঁ, $x = 22$

ঢাপ-3 : ব্যাখ্যা :

যিহেতু $x = 22$, গতিকে যন্ত্ৰচালিত নাওখনৰ স্থিৰ পানীত গতিবেগ 22 কিঃ মিঃ/প্ৰতি ঘণ্টাত

ওপৰোক্ত উদাহৰণটোৰ ক্ষেত্ৰত আমি জানো যে নৈখনৰ গতিবেগ সকলো ঠাইতে একে নহয়। নৈৰ পাৰৰ পিনে পানীৰ সোঁত কিছু ধীৰ আৰু নৈৰ মাজৰ পিনে কিছু খৰটকীয়া হয়। নাওখনে লক্ষ্যস্থান পোৱাৰ আগমুহূৰ্তত গতিবেগ কমাবলগীয়া হয় আৰু ই পাৰলৈ কাষ চাপি যায়।

গতিকে, নৈখনৰ পাৰৰ পিনে আৰু মাজত নাওখনৰ গতিবেগৰ অলপ পাৰ্থক্য আছে। যিহেতু নাওখন ক্ষুদ্ৰ সময়ৰ বাবেহে পাৰৰ কাষ চাপে নৈখনৰ গতিবেগৰ এই পাৰ্থক্যই গতিবেগক ক্ষুদ্ৰ সময়ৰ বাবেহে প্ৰভাৱিত কৰিব। গতিকে, নৈখনৰ গতিবেগৰ এই পাৰ্থক্যক আমি আওকাণ কৰিব পাৰোহক। নাওখনৰ গতিবেগৰ সৰুসুৰা তাৰতম্যকো আমি আওকাণ কৰিব পাৰোহক। ইয়াৰ উপৰি, নৈৰ গতিবেগৰ কথা নধৰিলেও নাওখনৰ তলি আৰু পানীৰ মাজৰ ঘৰ্ষণেও নাওখনৰ প্ৰকৃত গতিবেগক প্ৰভাৱিত কৰে। এই ধৰণৰ প্ৰভাৱো অতি তাকৰীয়া বুলি আমি ধৰি লওঁ। গতিকে, আমি ধৰি লৈছো যে—

1. নৈ আৰু নাও উভয়ৰে গতিবেগ সকলো সময়তে একেই থাকে।
2. নাও আৰু পানীৰ মাজৰ ঘৰ্ষণ তথা বায়ুৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘৰ্ষণৰ প্ৰভাৱ আওকাণ কৰিব পৰা হিৰ।

ওপৰোক্ত ধাৰণা বা অনুমান (assumption/hypothesis)ৰ ভিত্তিত আমি স্থিৰ পানীত নাওখনৰ গতিবেগ নিৰ্ণয় কৰিছো।

ওপৰৰ শব্দ-নিৰ্ভৰ সমস্যাসমূহৰ সমাধানৰ ক্ষেত্ৰত লক্ষ্য কৰাৰ নিচিনাকৈ এনেধৰণৰ প্ৰতিটো সমস্যা সমাধানত তিনিটাকৈ চাপ থাকে। সেইবোৰ হ'ল—

1. **সূত্ৰায়ন (Formulation) :** সমস্যাটো বিশ্লেষণ কৰি চোৱা যাওক আৰু ইয়াৰ সমাধানত কেনেধৰণৰ কাৰকৰ প্ৰভাৱ মুখ্য সেই কথাৰ প্ৰতি লক্ষ্য কৰোহঁক। এইবোৰ হ'ল প্ৰাসংগিক **কাৰক (Relevant factors)**। আমাৰ প্ৰথমটো উদাহৰণত, প্ৰাসংগিক কাৰকসমূহ আছিল অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব আৰু খৰছ হোৱা পেট্ৰ'লৰ পৰিমাণ। অন্যান্য কাৰক কিছুমান যেনে পথৰ অৱস্থা, গাড়ীচালকৰ গতিবেগ ইত্যাদি আমি আওকাণ কৰিছিলো। অন্যথা, সমস্যাটোৰ সমাধান অত্যন্ত কঠিন হ'লহেঁতেন। আমি আওকাণ কৰিব পৰা কাৰক সমূহক কোৱা হয় **অপ্ৰাসংগিক কাৰক (Irrelevant factors)**।

   ইয়াৰ পিছত আমি গাণিতিকভাৱে এক বা একাধিক গণিতীয় সমীকৰণৰ ৰূপত সমস্যাটো বৰ্ণনা কৰোহঁক।
2. **সমাধান :** প্ৰথম পদক্ষেপত পোৱা সমীকৰণসমূহক কোনো উপযুক্ত পদ্ধতিৰে সমাধান কৰি আমি সমস্যাটোৰ সমাধান নিৰ্ণয় কৰোহক।
3. **ব্যাখ্যা :** দ্বিতীয় পদক্ষেপত লাভ কৰা সমাধানটোৱে মূল শব্দ নিৰ্ভৰ সমস্যাটোৰ পটভূমিত কি বুজায় আমি তাক উপলব্ধি কৰিবলৈ চেষ্টা কৰোহক।

ইয়াত তোমালোকৰ বাবে কেইটামান অনুশীলনী আগবঢ়োৱা হ'ল। নিম্নোক্ত সমস্যাবলীৰ ক্ষেত্ৰত শব্দ নিৰ্ভৰ সমস্যা সমাধানত জড়িত পদক্ষেপ তিনিটা প্ৰয়োগ কৰাৰ জৰিয়তে এই পদক্ষেপকেইটাৰ বিষয়ে তোমালোকে আয়ত্ত কৰা জ্ঞানৰ পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা।

অনুশীলনী A2.1

নিম্নোক্ত সমস্যাবোৰৰ প্ৰতিটোৰ ক্ষেত্ৰতে উল্লেখ কৰি আহা 1, 2 আৰু 3 ঢাপ কেইটা প্ৰয়োগ কৰোতে লাভ কৰা প্ৰাসংগিক আৰু অপ্ৰাসংগিক কাৰকসমূহৰ বিষয়ে উল্লেখ কৰা

1. ধৰি লোৱা, এটা কোম্পানীৰ কিছু সময়ৰ বাবে এটা কম্পিউটাৰৰ প্ৰয়োজন হ'ল। কোম্পানীটোৱে মাহিলি 2000 টকাৰ বিনিময়ত কম্পিউটাৰ এটা ভাড়াতে ল'ব পাৰে নাইবা 25000 টকা দামত এটা কম্পিউটাৰ কিনি ল'ব পাৰে। যদি কোম্পানীটোৱে দীৰ্ঘ সময়ৰ বাবে কম্পিউটাৰটো ব্যৱহাৰ কৰিবলগীয়া হয় তেন্তে ভাড়াৰ দামত ইমান বেছি টকা ভৰিব লাগিব যে কম্পিউটাৰ এটা কিনি ল'লে তাতকৈ কম খৰচতে হ'ব। আনহাতে, যদি কোম্পানীটোৱে ঠিক এমাহৰ বাবেহে কম্পিউটাৰটো ব্যৱহাৰ কৰে, তেন্তে ইয়াক ভাড়াতে ল'লেহে খৰচ কম হ'ব। মাহৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা যি সংখ্যাতকৈ বেছি মাহৰ বাবে ভাড়া ল'লে কম্পিউটাৰ এটা কিনাদামতকৈ খৰচ অধিক হয়।
2. ধৰি লোৱা, এখন মটৰ গাড়ীয়ে এখন ঠাই Aৰ পৰা আন এখন ঠাই Bলৈ ঘণ্টাত 40 কিঃ মিঃ বেগেৰে ভ্ৰমণ কৰে। একে সময়তে আন এখন মটৰ গাড়ীয়ে ঠাই Bৰ পৰা Aলৈ ঘণ্টাত 30 কিঃ মিঃ বেগেৰে যাত্ৰা কৰে। যদি A আৰু Bৰ মাজৰ দূৰত্ব 100 কিঃ মিঃ হয় তেন্তে কিমান সময়ৰ অন্তত গাড়ী দুখন একেলগ হ'ব?
3. পৃথিৱীৰ পৰা চন্দ্ৰৰ দূৰত্ব প্ৰায় 3,84,000 কিঃ মিঃ আৰু পৃথিৱীৰ চাৰিওফালে ইয়াৰ কক্ষপথটো প্ৰায় বৃত্তাকাৰ। 24 ঘণ্টাত ই পৃথিৱীৰ চাৰিওফালে এপাক পৰিভ্ৰমণ কৰিলে, কক্ষপথত ইয়াৰ গতিবেগ নিৰ্ণয় কৰা। ($\pi = 3.14$ ল'বা)
4. এটা পৰিয়ালে 'ওৱাটাৰ হিটাৰ' ব্যৱহাৰ নকৰা মাহবোৰত বিদ্যুতৰ বাবে গড়ে 1000 টকাকৈ পৰিশোধ কৰে। 'ওৱাটাৰ হিটাৰ' ব্যৱহাৰ কৰা মাহবোৰত বিদ্যুতৰ বিল গড়ে 1240 টকা। প্ৰতি ঘণ্টাত 'ওৱাটাৰ হিটাৰ' ব্যৱহাৰৰ খৰছ 4.00 টকা। দৈনিক গড়ে কেই ঘণ্টাকৈ 'ওৱাটাৰ হিটাৰ' ব্যৱহাৰ হয় নিৰ্ণয় কৰা।

A2.3 কেইটামান গণিতীয় আৰ্হি (Some Mathematical Models) :

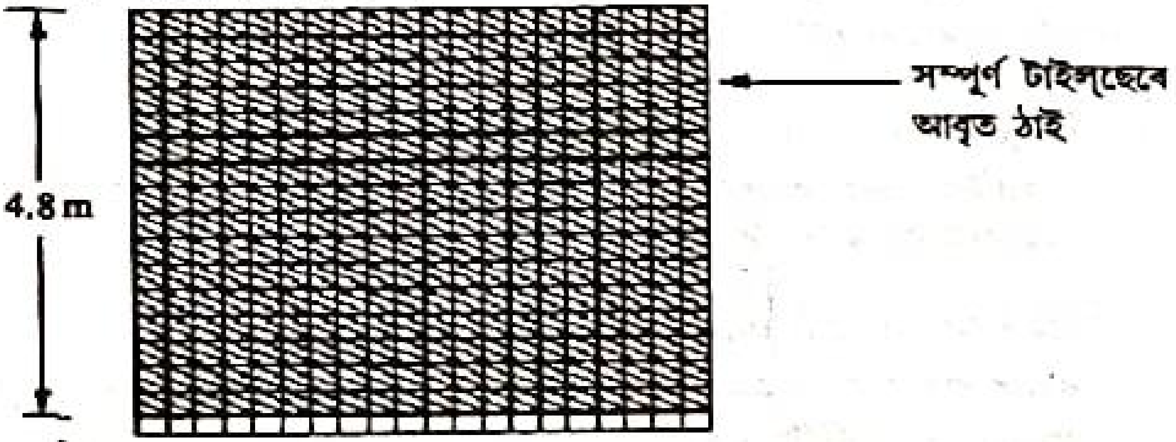
এই পৰ্যন্ত আমাৰ আলোচনাত কোনো নতুন বিষয় আলোচিত হোৱা নাই। এই পৰিচ্ছেদত ইতিমধ্যে আলোচনা কৰা তিনিটা ঢাপৰ সৈতে আন এটা ঢাপ সন্নিবিষ্ট কৰিব খুজিছো। এই ঢাপটোক কোৱা হয় বৈধকৰণ বা বিহিতকৰণ (Validation)। বৈধকৰণে কি বুজায়? আমি চাওঁহক। বাস্তব পৰিস্থিতিত এনে কোনো আৰ্হি আমি গ্ৰহণ কৰিব নোৱাৰো যিয়ে বাস্তৱৰ সৈতে খাপ নোখোৱা কোনো সমাধান দিয়ে। বাস্তৱ পৰিস্থিতিৰ সৈতে মিলাই সমাধান এটাৰ গ্ৰহণীয়তাক পৰীক্ষা কৰি চোৱা আৰু প্ৰয়োজন সাপেক্ষে গাণিতিক বৰ্ণনাৰ সালসলনি কৰা পদ্ধতিটোকেই কোৱা হয় বৈধকৰণ বা বিহিতকৰণ। আৰ্হি প্ৰণয়নৰ ক্ষেত্ৰত এইটো অতিশয় গুৰুত্বপূৰ্ণ ঢাপ। এই

পৰিচ্ছেদত আমি তোমালোকক এই ঢাপটোৰ সৈতে পৰিচয় কৰাম।

প্ৰথমে আমি এটা উদাহৰণ বিবেচনা কৰোঁহক য'ত বৈধকৰণৰ পিছত আমাৰ আৰ্হিটোৰ কোনো ধৰণৰ সালসলনি কৰিবলগীয়া নহয়।

উদাহৰণ 4 : ধৰা হওক, তোমাৰ কোঠালিটোৰ দীঘ 6 মিটাৰ আৰু প্ৰস্থ 5 মিটাৰ। কোঠালিৰ মজিয়াখন তুমি 30 ছেমি দীঘবিশিষ্ট বৰ্গীয় মোজেইক টাইল্‌ছৰ দ্বাৰা আবৃত কৰিব বিচাৰিছা। তোমাক কেইখন টাইল্‌ছৰ প্ৰয়োজন হ'ব? এটা গণিতীয় আৰ্হি তৈয়াৰ কৰি সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা।

সমাধান : সূত্ৰায়ন : সমস্যাটোৰ সমাধান পাবলৈ আমি কোঠালিটোৰ কালি আৰু 'টাইলছ' একোখনৰ কালি নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব। 'টাইলছ'ৰ দীঘ হ'ল 0.3 মিটাৰ। যিহেতু কোঠালিৰ দীঘ 6 মিটাৰ গতিকে কোঠালিৰ দীঘে দীঘে একোটা শাৰীত $\frac{6}{0.3} = 20$ খনকৈ টাইলছৰ প্ৰয়োজন হ'ব। আনহাতে, কোঠালিৰ প্ৰস্থ হ'ল 5 মিটাৰ আৰু $\frac{5}{0.3} = 16.67$। গতিকে একোটা স্তম্ভত আমি 16 খনকৈ টাইল্‌ছ বহুৱাব পাৰো। যিহেতু $16 \times 0.3 = 4.8$, $5 - 4.8 = 0.2$ মিটাৰ ঠাই প্ৰস্থৰ দিশত অনাবৃত থাকিব গতিকে এই ঠাইখিনি পূৰাবলৈ আমি অন্য 'টাইল্‌ছ'ৰ পৰা কাটি উলিয়াব লাগিব। মজিয়াৰ প্ৰস্থৰ অনাবৃত অংশৰ পৰিমাণ 0.2 মিটাৰ যিটো 'টাইল্‌ছ'ৰ দৈৰ্ঘ অৰ্থাৎ 0.3 মিটাৰৰ আধাতকৈ অধিক। গতিকে এখন 'টাইল'ক সমানে দুই খণ্ডত ভাঙি উভয় খনকে বাকী থকা অংশটো পূৰাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰো।



চিত্ৰ A2.1

গাণিতিক বৰ্ণনা : আমি পাওঁ—

টাইল্‌ছৰ মুঠ সংখ্যা = (দীঘে টাইল্‌ছৰ সংখ্যা) × (পথালিয়ে টাইল্‌ছৰ সংখ্যা) + অনাবৃত অংশৰ বাবে টাইল্‌ছৰ সংখ্যা .....(1)

সমাধান : ওপৰত উল্লেখ কৰাৰ দৰে, দীঘে টাইল্‌ছৰ সংখ্যা হ'ব 20 খন আৰু পথালিয়ে টাইল্‌ছৰ

সংখ্যা 16 খন। শেষৰ শাৰীটোৰ বাবে আমাক অতিৰিক্ত 20 খন টাইল্‌ছৰ প্ৰয়োজন হ'ব।

এই মানবোৰ (1)অত বহুৱাই আমি পাওঁ—

(20 × 16) + 20 = 320 + 20 = 340

ব্যাখ্যা : মজিয়াখন ঢাকিবলৈ মুঠ 340 খন টাইল্‌ছৰ প্ৰয়োজন হ'ব।

বৈধতাৰ পৰীক্ষণ : বাস্তৱ ক্ষেত্ৰত ৰাজ মিস্ত্ৰীয়ে টাইল্‌ছবোৰ সঠিক আকাৰত কাটি উলিয়াওতে নষ্ট হোৱা বাবে কেইখনমান অতিৰিক্ত টাইল্‌ছ তোমাক কিনিবলৈ ক'ব পাৰে। অৱশ্যে এই সংখ্যাটো ৰাজমিস্ত্ৰীৰ পাৰদৰ্শিতাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰিব। কিন্তু ইয়াৰ বাবে সমীকৰণ (1)ক পৰিবৰ্তন কৰাৰ কোনো প্ৰয়োজন নাই। এই সমীকৰণ তোমাক আৱশ্যকীয় টাইল্‌ছৰ সংখ্যা সম্পৰ্কে থূলমূল ধাৰণা দিব। গতিকে, আমি ইয়াতে সামৰিব পাৰোঁহক।

এতিয়া আমি অন্য এক পৰিস্থিতি বিবেচনা কৰি চাওঁহক।

উদাহৰণ 5 : 2000 চনত ৰাষ্ট্ৰসংঘৰ 191 খন ৰাষ্ট্ৰই এক ঘোষণা পত্ৰত স্বাক্ষৰ কৰিছিল। এই ঘোষণা পত্ৰৰ জৰিয়তে ৰাষ্ট্ৰসমূহে 2015 চনৰ ভিতৰত সফল হ'ব পৰাকৈ কিছুমান ক্ষেত্ৰত উন্নয়ণৰ লক্ষ্য নিৰ্দিষ্ট কৰি লৈছিল। এইবোৰক 'মিলেনিয়াম ডেভেলপ্‌মেণ্ট গোল্‌ছ' (Millenium development goals) অৰ্থাৎ 'সহস্ৰ বাৰ্ষিক উন্নয়নৰ লক্ষ্য' আখ্যা দিয়া হৈছে। এই লক্ষ্যসমূহৰ এটা হ'ল লিংগ সমতা স্থাপন। এই লক্ষ্যত উপনীত হ'ব পৰা গৈছেনে নেয়া নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে এটা সূচক হৈছে প্ৰাথমিক, মাধ্যমিক আৰু উচ্চ শিক্ষাত ল'ৰা-ছোৱালীৰ অংশগ্ৰহণৰ অনুপাত।

ঘোষণাপত্ৰখনৰ এক স্বাক্ষৰকাৰী ৰাষ্ট্ৰ হিচাপে ভাৰতেও এই অনুপাতৰ উন্নীতকৰণৰ বাবে দায়বদ্ধ। সাৰণী A2.1ত প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত নামভৰ্তি কৰা ছোৱালীৰ তথ্য শতাংশ হিচাপত দিয়া হৈছে।

সাৰণী A2.1

বৰ্ষ	নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

Source : Educational Statistics, Web page of Department of Education, GOI

* যে সূচায় যে তথ্যকেইটা অস্থায়ীভাৱে সন্নিবিষ্ট

এই তথ্যৰ সহায়ত প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত নামভৰ্তিকৃত ছোৱালীৰ অনুপাত কি হাৰে বৃদ্ধি পাইছে তাক গাণিতিকভাৱে বৰ্ণনা কৰা। লগতে, নামভৰ্তিকৃত ছোৱালীৰ সংখ্যা 50% চুকি পোৱা বছৰটো হিচাপ কৰি উলিওৱা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে সমস্যাটো এটা গাণিতিক সমস্যালৈ সলনি কৰা যাওক।

স্তৰ-1 ঃ সূত্ৰায়ন ঃ সাৰণীখনত 1991-92, 1992-93,...... ইত্যাদি বৰ্ষৰ বাবে নামভৰ্তিকৰণৰ হিচাপ দিয়া আছে। যিহেতু ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে শিক্ষাবৰ্ষৰ আৰম্ভণিতেই নামভৰ্তি কৰে, আমি বৰ্ষসমূহ 1991, 1992 ইত্যাদি ধৰণে ল'ব পাৰো। আমি ধৰি ল'ম যে সাৰণীখনত উল্লেখ কৰাৰ দৰে একে হাৰত প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত নামভৰ্তি কৰা ছোৱালীৰ শতাংশ বৃদ্ধি হৈ থাকে। গতিকে, কোনো নিৰ্দিষ্ট বৰ্ষৰ পৰিবৰ্তে বৰ্ষৰ মুঠ সংখ্যাহে দৰকাৰী। (সদৃশ পৰিস্থিতিৰ এক উদাহৰণ পোৱা যায় যেতিয়া 3 বছৰৰ বাবে বাৰ্ষিক 8% হাৰে 1500 টকাৰ সৰল সুত নিৰ্ণয় কৰিবলগীয়া হয়। ইয়াত 3 বছৰীয়া পৰ্যায়টো 1999ৰ পৰা 2002লৈ নে 2001ৰ পৰা 2004লৈ সেইটোৰ ওপৰত সুতৰ পৰিমাণ নিৰ্ভৰশীল নহয়। বিবেচনাধীন বছৰবোৰত সুতৰ হাৰহে গুৰুত্বপূৰ্ণ) লগতে ইয়াত, 1991ৰ পিছত অতিক্ৰান্ত হোৱা বছৰৰ সৈতে নামভৰ্তিকৰণৰ সংখ্যা তুলনা কৰি আমি দেখিম কি ধৰণে 1991 চনৰ পিছত নামভৰ্তিকৰণ বৃদ্ধি হৈছে। 1991ক আমি বৰ্ষ-0, 1992ক বৰ্ষ-1 লওহক, যিহেতু 1991ৰ পৰা 1992 পাওঁতে এবছৰ পাৰ হয়। সদৃশধৰণে, 1993ৰ বাবে বৰ্ষ-2, 1994ৰ বাবে বৰ্ষ-3 ইত্যাদি। গতিকে সাৰণী A2.1 ক এতিয়া সাৰণী A2.2ৰ দৰে লেখা যাব।

সাৰণী A2.2

বৰ্ষ	নামভৰ্তিকৰণ (% ত)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

নিম্নোক্ত সাৰণীসমূহত নামভৰ্তিকৰণৰ বৃদ্ধি আগবঢ়োৱা হ'ল :

সাৰণী A2.3

বৰ্ষ	নামভৰ্তিকৰণ (%ত)	বৃদ্ধি
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991ৰ পৰা 1992 এক বছৰৰ অন্তত নামভৰ্তিকৰণ 41.9%ৰ পৰা 42.6%লৈ 0.7% বৃদ্ধি হৈছে। দ্বিতীয় বৰ্ষৰ শেষত ই 42.6%ৰ পৰা 42.7%লৈ 0.1% বাঢ়িছে। ওপৰোক্ত সাৰণীৰ পৰা আমি বছৰৰ সংখ্যা আৰু শতাংশৰ মাজত এটা সুনিৰ্দিষ্ট সম্বন্ধ পাব নোৱাৰো। কিন্তু বৃদ্ধি কিছু পৰিমাণে সুস্থিৰভাৱে ঘটিছে। মাত্ৰ প্ৰথম বৰ্ষ আৰু দশম বৰ্ষৰ বৃদ্ধিত একেটাকৈ জাঁপ লক্ষ কৰা যায়। মানসমূহৰ মাধ্য অৰ্থাৎ গড় হ'ল—

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$$

আমি ধৰোঁ যে নামভৰ্তিকৰণ বছৰে 0.22 শতাংশ হাৰে নিয়মিতভাৱে বৃদ্ধি হৈছে।

গাণিতিক বৰ্ণনা :

আমি ধৰি লৈছো যে নামভৰ্তিকৰণ বছৰে 0.22 শতাংশ হাৰে নিয়মিতভাৱে বৃদ্ধি হৈছে।

গতিকে, প্ৰথম বৰ্ষত নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ (E.P.) $= 41.9 + 0.22$

দ্বিতীয় বৰ্ষ E.P. $= 41.9 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 2 \times 0.22$

তৃতীয় বৰ্ষ E.P. $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 3 \times 0.22$

গতিকে, nতম বৰ্ষত নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ $= 41.9 + n \times 0.22$

$= 41.9 + 0.22n \quad (n \geq 1)$ ....(1)

এতিয়া আমি বছৰৰ সংখ্যা উলিয়াব লাগিব যাতে নামভৰ্তিকৰণ 50% সমান হয়।

গতিকে, আমি তলৰ সমীকৰণ অথবা সূত্ৰৰ পৰা nৰ মান উলিয়াব লাগিব—

$$50 = 41.9 + 0.22n \quad ......(2)$$

চাপ-2 ঃ সমাধান ঃ

(2) সমীকৰণটো সমাধান কৰি, আমি পাওঁ—

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

চাপ-3 ঃ ব্যাখ্যা ঃ

যিহেতু বছৰৰ সংখ্যাটো এটা অখণ্ড সংখ্যা, আমি পৰৱৰ্তী অখণ্ড সংখ্যাটো অৰ্থাৎ 37ক nৰ মান হিচাপে ল'ম। গতিকে, নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ 50%ত উপনীত হোৱা বছৰটো হ'ল 1991 + 37 = 2028

শব্দ নিৰ্ভৰ সমস্যা একোটাত সাধাৰণতে আমি ইমানতে ক্ষান্ত থাকো। কিন্তু যিহেতু আমি বাস্তৱ জীৱন ভিত্তিক সমস্যাৰ আলোচনা কৰিছো গতিকে এই মান বাস্তৱ পৰিস্থিতিৰ সৈতে কিমানখিনি প্ৰযোজ্য হয় সেইটো চাব লাগিব।

চাপ-4 ঃ বৈধতাৰ পৰীক্ষণ (Validation)

(2) সূত্ৰটো বাস্তৱৰ সৈতে সংগতিপূৰ্ণ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰি চোৱা যাওক। ইতিমধ্যে জ্ঞাত বছৰবোৰৰ বাবে মানবোৰ সূত্ৰ (2)ৰ সহায়ত উলিয়াই চোৱা যাওঁক আৰু জ্ঞাত মানবোৰৰ সৈতে এই মানবোৰৰ পাৰ্থক্য উলিয়াই তুলনা কৰি চাওঁহক। মানবোৰ সাৰণী A2.4ত উল্লেখ কৰা হ'ল।

সাৰণী A2.4

বৰ্ষ	নাভৰ্তিকৰণ (%ত)	(2)ৰ দ্বাৰা প্ৰাপ্ত মান (%ত)	পাৰ্থক্য (%ত)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	– 0.06
9	43.7	43.88	– 0.18
10	44.1	44.10	0.00

দেখা গৈছে সূত্ৰ (2) ৰে প্ৰাপ্ত কিছু সংখ্যক মান প্ৰকৃত মানতকৈ প্ৰায় 0.3% আনকি 0.5% কম। ইয়ে প্ৰায় 3ৰ পৰা 5 পৰ্যন্ত বছৰৰ পাৰ্থক্য ঘটাব পাৰে যিহেতু দৰাচলতে বাৰ্ষিক বৃদ্ধিৰ পৰিমাণ 1%ৰ পৰা 2% পৰ্যন্তহে ঘটিছে। আমি এইখিনি পাৰ্থক্য গ্ৰহণীয় বুলি স্বীকাৰ কৰি ইয়াতে ইতি কৰিব পাৰোহক। এইক্ষেত্ৰত (2) হ'ল আমাৰ গাণিতিক আৰ্হি।

ধৰা যাওক, এই পাৰ্থক্য বা বিচ্যুতিখিনি যথেষ্ট বেছি বুলি আমি অনুভৱ কৰিলো, আৰু এই আৰ্হিটো উন্নত কৰপত পাবলৈ বিচাৰিলো। তেতিয়া আমি ঢাপ-1 অৰ্থাৎ সূত্ৰায়নলৈ উভতি যাব লাগিব আৰু সমীকৰণ (2)ৰ পৰিবৰ্তন ঘটাব লাগিব। আমি তাকেই কৰোহক।

ঢাপ-1 : পুনৰ্সূত্ৰায়ন (Reformulation) :

আমি এতিয়াও ধৰি লওঁ যে মানবোৰ নিয়মিত ৰূপত 0.22% কৈ বৃদ্ধি হৈ আছে, কিন্তু পাৰ্থক্য হ্ৰাস কৰিবলৈ আমি এটা শুদ্ধিকৰণ ৰাশিৰ (Correction factor) অৱতাৰণা কৰিম। ইয়াৰ বাবে আমি সকলো পাৰ্থক্যৰ মাধ্য উলিয়াম। সেয়া হ'ল—

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

আমি পাৰ্থক্যসমূহৰ মাধ্য লওঁ আৰু এই মানৰ দ্বাৰা আমাৰ সূত্ৰটো ত্ৰুটীমুক্ত কৰোহক

সংশোধিত গাণিতিক বৰ্ণনা (Revised Mathematical Description)

এতিয়া আমি (2) ত প্ৰদত্ত নামভৰ্তিকৰণ শতাংশৰ বাবে সূত্ৰটোত পাৰ্থক্যৰ মাধ্য সংযোগ কৰোহক। গতিকে, শুদ্ধ সূত্ৰটো হ'ল—

nতম বৰ্ষত নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশ $= 41.9 + 0.22n + 0.18$

$$= 42.08 + 0.22n,\ n \geq 1 \qquad .....(3)$$

আমি লগতে (2) সমীকৰণটোকো সঠিকভাৱে সজাম। nৰ নতুন সমীকৰণটো হ'ল—

$$50 = 42.08 + 0.22n \qquad .....(4)$$

ঢাপ-2 : বিকল্প সমাধান (Altered Solution)

nৰ বাবে সমীকৰণ (4)ক সমাধান কৰি আমি পাওঁ—

$$n = \frac{50-42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

ঢাপ-3 : ব্যাখ্যা (Interpretation) :

যিহেতু n = 36 প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত 50% ছোৱালীৰ নামভৰ্তিকৰণ হোৱা বছৰটো হ'ল 1991 + 36 = 2027

ঢাপ-4 : বৈধতাৰ পৰীক্ষণ (Validation) :

(4) নং সূত্ৰটোৰ সহায়ত লাভ কৰা মানবোৰ প্ৰকৃত মানৰ সৈতে আকৌ এবাৰ তুলনা কৰি চোৱা যাওক

সাৰণী A2.5ত এই তুলনা প্ৰদত্ত আছে

সাৰণী A2.5

বৰ্ষ	নামভৰ্তিকৰণ (%ত)	(2)ৰে প্ৰাপ্ত মানসমূহ	মানসমূহৰ অন্তৰফল	(4)ৰে প্ৰাপ্ত মানসমূহ	মানসমূহৰ অন্তৰফল
0	41.9	41.9	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

সাৰণীখনৰ পৰা দেখা যায় যে সূত্ৰ (2)ৰ সহায়ত প্ৰাপ্ত মানতকৈ সূত্ৰ (4)ৰ সহায়ত প্ৰাপ্ত বছৰেৰ মান প্ৰকৃত মানৰ বেছি নিকটৱৰ্তী। এই ক্ষেত্ৰত ত্ৰুটীৰ মাধ্য 0।

আমাৰ প্ৰক্ৰিয়াটো আমি ইয়াতে সামৰিম। গতিকে সূত্ৰ (4)য়েই হ'ল আমাৰ গাণিতিক বৰ্ণনা যিয়ে দুই নামভৰ্তিকৰণৰ ভিতৰত ছোৱালীৰ নামভৰ্তিকৰণৰ শতাংশৰ সৈতে বছৰৰ এক সম্বন্ধ স্থাপন কৰে। আমি এক গাণিতিক আৰ্হি তৈয়াৰ কৰিলো যিয়ে বৃদ্ধিৰ দিশটো তুলি ধৰিবলৈ সক্ষম।

ওপৰোক্ত পটভূমিত আমি অনুসৰণ কৰা পদ্ধতিটোৱেই হ'ল গণিতীয় আৰ্হিকৰণ পদ্ধতি। ইতিমধ্যে আমি লাভ কৰা গণিতীয় সঁজুলি বা কৌশলেৰেই আমি এক গণিতীয় আৰ্হি তৈয়াৰ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিছোঁহক।

আনৰ হাতত থকা তথ্যৰ পৰা পূৰ্বানুমান আগবঢ়াবলৈ উৎকৃষ্টতৰ গাণিতিক সঁজুলি বা কৌশল আছে। কিন্তু সেইবোৰৰ আলোচনা বৰ্তমানৰ পৰিসৰত সম্ভৱ নহয়। এই আৰ্হি তৈয়াৰ কৰাৰ ক্ষেত্ৰত আমাৰ উদ্দেশ্য আছিল তোমালোকক আৰ্হিকৰণ প্ৰক্ৰিয়া সম্পৰ্কে অৱগত কৰোৱাটোহে, নিখুঁত পূৰ্বানুমান আগবঢ়োৱাটো নহয়।

এতিয়া, তোমালোকে এই পৰ্যন্ত আমি আগবঢ়োৱা আলোচনাৰ পৰা যি বুজিছা সেয়া পৰীক্ষা কৰি চোৱাৰ উদ্দেশ্যে কিছুমান বাস্তৱ পৰিস্থিতিৰ আৰ্হি তৈয়াৰ কৰি চাব পাৰা। তোমালোকৰ প্ৰচেষ্টাৰ উদ্দেশ্যে এটা অনুশীলনী আগবঢ়োৱা হ'ল।

অনুশীলনী-A2.2

1. নিম্নোক্ত সাৰণীসমূহত অলিম্পিক খেলত 400 মিটাৰ দৌৰ প্ৰতিযোগিতা সন্নিৱিষ্ট হোৱাৰে পৰা সোণৰ পদক প্ৰাপ্তসকলে লোৱা সময় উল্লেখ কৰা হৈছে। বৰ্ষ আৰু প্ৰয়োজনীয় সময়ৰ সম্বন্ধসূচক এটা গণিতীয় আৰ্হি তৈয়াৰ কৰা। পৰৱৰ্তী অলিম্পিক সমূহত প্ৰয়োজন হ'বলগীয়া সময় সম্বন্ধে এই আৰ্হিৰ সহায়ত এক পূৰ্বানুমান আগবঢ়োৱা

সাৰণী A2.6

বৰ্ষ	সময় (ছেকেণ্ডত)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 আৰ্হি প্ৰকৰণ, ইয়াৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতাসমূহ (The Process of Modelling, its Advantage and Limitation) :

আলোচিত উদাহৰণসমূহৰ পৰা উন্মোচিত হোৱা গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণৰ তাৎপৰ্যসমূহ উল্লেখ কৰি আমি আমাৰ আলোচনা সামৰোহক। আগৰ পৰিচ্ছেদসমূহৰ পটভূমিত আমি এতিয়া আৰ্হি প্ৰকৰণত জড়িত ঢাপসমূহৰ ওপৰত সংক্ষিপ্ত আলোকপাত কৰিব পৰা হৈছোহক।

ঢাপ-1 : সূত্ৰায়ন (Formulation) :

A2.2 পৰিচ্ছেদত আলোচিত উদাহৰণ-1ৰ সূত্ৰায়ন পৰ্ব আৰু A2.3 ছেদত আলোচিত আৰ্হিৰ সূত্ৰায়ন পৰ্বৰ মাজত তোমালোকে পাৰ্থক্য মন কৰিছা নিশ্চয়। উদাহৰণ-1ত সকলো তথ্য তৎক্ষণিকভাৱে ব্যৱহাৰ্য ৰূপত দিয়া আছে। কিন্তু A2.3ৰ আৰ্হিটোত তেনেধৰণে দিয়া হোৱা নাই। তাৰ উপৰি, এটা গাণিতিক বৰ্ণনা আগবঢ়াবলৈ আমাক কিছু সময়ৰ প্ৰয়োজন হৈছিল। প্ৰথম সূত্ৰটো আমি পৰীক্ষা কৰি চাইছিলো আৰু দেখিছিলো যে ই আমি পোৱা দ্বিতীয় সূত্ৰটোৰ দৰে ভাল নাছিল। এয়া প্ৰায় সাধাৰণভাৱে সত্য ঘটনা অৰ্থাৎ যেতিয়া বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক পৰিস্থিতিৰ

আর্হি এটা তৈয়াৰ কৰা হয়, প্ৰথম আৰ্হিটো সচৰাচৰ সংশোধন কৰিবলগীয়া হয়। যেতিয়া আমি বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যা এটাৰ সমাধান আগবঢ়াবলৈ চেষ্টা চলাও, সূত্ৰায়ন পৰ্বত ভালেখিনি সময়ৰ আৱশ্যক হ'ব পাৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে, নিউটনৰ গতিসূত্ৰ তিনিটা গতি সম্পৰ্কীয় গাণিতিক বৰ্ণনা আৰু এইবোৰ প্ৰকাশ কৰিবলৈ যথেষ্ট সৰল। কিন্তু এই সূত্ৰ সমূহ আৱিষ্কাৰ কৰাৰ পূৰ্বে নিউটনে বহু তথ্য আৰু তেওঁৰ পূৰ্বসূৰীসকলৰ কাম-কাজসমূহ বিস্তৃতভাবে অধ্যয়ণ কৰিছিল। সূত্ৰায়নৰ সৈতে নিম্নোক্ত ঢাপবোৰ জড়িত থাকে—

(i) **সমস্যাটোৰ বৰ্ণনা (Stating the problem) :** প্ৰায়ে সমস্যাটো অস্পষ্টভাৱে বৰ্ণনা কৰা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, বহুল ভিত্তিত ল'ৰা আৰু ছোৱালীৰ নামভৰ্তিকৰণৰ ক্ষেত্ৰত সমতা স্থাপন কৰাটোৱেই হ'ল লক্ষ্য। ইয়াৰ অৰ্থ এনেভাৱে কৰিব পাৰি যে স্কুল যাবলৈ আৰম্ভ কৰা বয়সৰ মুঠ ল'ৰাৰ 50% ল'ৰা আৰু স্কুল যাবলৈ আৰম্ভ কৰা বয়সৰ মুঠ ছোৱালীৰ 50% ছোৱালীৰ নামভৰ্তি সুনিশ্চিত হ'ব লাগে। ইয়াৰ অৰ্থ অন্য ধৰণে এনেকৈও কৰিব পাৰি যে— স্কুল যাবলৈ আৰম্ভ কৰা বয়সৰ শিশুৰ 50% ছোৱালী হোৱাটো সুনিশ্চিত হ'ব লাগে। আমাৰ সমস্যাটোত আমি দ্বিতীয় অৰ্থটোহে ব্যৱহাৰ কৰিছো।

(ii) **প্ৰাসংগিক বিষয়সমূহৰ চিনাক্তকৰণ (Identifying the relevant factor) :** কোনবোৰ ৰাশি আৰু সম্পৰ্ক সমস্যাটোৰ বাবে গুৰুত্বপূৰ্ণ আৰু কোনবোৰ গুৰুত্বহীন তথা আওকাণ কৰিব পৰা বিধৰ সেইটো নিশ্চিত কৰা। উদাহৰণস্বৰূপে, প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ত নামভৰ্তিকৰণ সম্পৰ্কীয় আমাৰ সমস্যাটোত আগৰ বছৰত নামভৰ্তি হোৱা ছোৱালীৰ শতাংশই এই বছৰত নামভৰ্তি হোৱা ছোৱালীৰ সংখ্যাত প্ৰভাৱ পেলাব পাৰে। কাৰণ, স্কুলবোৰত যিমানে বেছি ছোৱালীয়ে নামভৰ্তি কৰিব, সিমানে বেছি সংখ্যক মাক-দেউতাকে অনুভৱ কৰিব যে তেওঁলোকেও তেওঁলোকৰ কন্যা সন্তানবোৰক স্কুলত নামভৰ্তি কৰোৱা উচিত। কিন্তু এই বিষয়টো আমি আওকাণ কৰিছো কাৰণ, এই কথাটো তেতিয়াহে গুৰুত্বপূৰ্ণ হ'ব পাৰে যেতিয়া, নামভৰ্তিকৰণে এক নিৰ্দিষ্ট শতাংশ অতিক্ৰম কৰে। ইয়াৰ উপৰি, এই বিষয়টো সন্নিবিষ্ট কৰাৰ ফলস্বৰূপে আমাৰ আৰ্হিটো অধিক জটিল হ'ব পাৰে।

(iii) **গাণিতিক বৰ্ণনা (Mathematical Description) :** এতিয়া, ধৰি লোৱা হওক, সমস্যাটো কি আৰু ইয়াৰ কোনবোৰ দিশ আনবোৰতকৈ অধিক গুৰুত্বপূৰ্ণ সেই সম্পৰ্কে আমি স্পষ্টভাৱে বুজি পালোহক। তেনেক্ষেত্ৰত বিভিন্ন দিশ সাঙুৰি এটা সমীকৰণ, এটা লেখ বা আন যিকোনো উপযুক্ত গাণিতিক বৰ্ণনাৰ ৰূপত আমি এটা সম্বন্ধ বিচাৰি উলিয়াব লাগিব। ই যদি এটা সমীকৰণ হয়, তেন্তে আমাৰ গাণিতিক সমীকৰণে এটা চলকৰ ৰূপত প্ৰতিটো গুৰুত্বপূৰ্ণ দিশক প্ৰতিনিধিত্ব কৰিবলৈ সমৰ্থ হ'ব লাগিব।

চাপ-2 : **সমাধান নিৰ্ণয় (Finding the solution) :**

গাণিতিক সূত্ৰায়নে কোনো সমাধান নিদিয়ে। সমস্যাটোৰ গাণিতিক ৰূপৰ আমি সমাধান উলিয়াব লাগিব। এইখিনিতে তোমাৰ গাণিতিক জ্ঞানৰ ব্যৱহাৰ প্ৰয়োজন হ'ব।

চাপ-3 : **সমাধানৰ ব্যাখ্যা (Interpretating the solution) :**

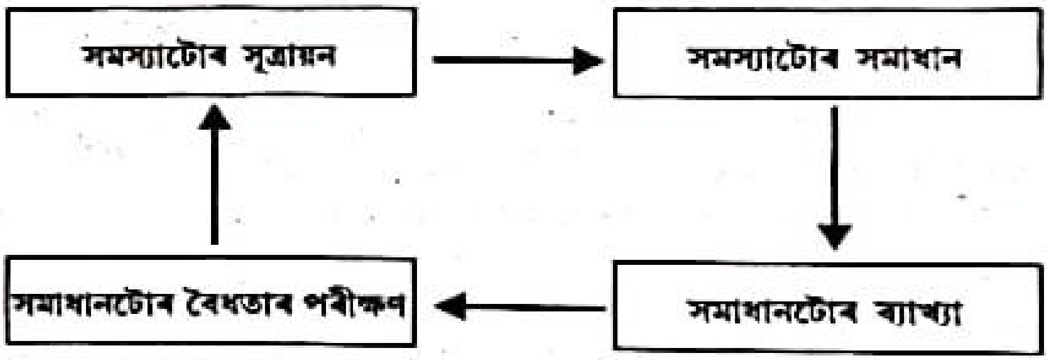
গাণিতিক সমাধান হ'ল আৰ্হিটোৰ চলকসমূহৰ কিছুমান মান। আমি বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাটোলৈ উভতি যাওঁ আৰু এই মানবোৰ সমস্যাটোত কি বুজায় চাওঁহক।

চাপ-4 : **সমাধানটোৰ বৈধতাৰ পৰীক্ষণ (Validating the solution) :**

A2.3ত দেখাৰ দৰে, সমাধানটো উলিওৱাৰ পিছত এই সমাধান বাস্তৱৰ সৈতে কিমান খাপ খায় সেইটো পৰীক্ষা কৰি চোৱাটো আৱশ্যক। যদি ই খাপ খোৱা ধৰণৰ হয় তেন্তে গাণিতিক আৰ্হিটো গ্ৰহণীয় হয়। যদি গাণিতিক সমাধানটো খাপ নোখোৱা বিধৰ হয় তেন্তে আমি সূত্ৰায়ন পৰ্বলৈ পুনৰ ঘূৰি যাব লাগে আৰু আৰ্হিটো উন্নততৰ ৰূপত সজাবলৈ চেষ্টা কৰিব লাগে।

পদ্ধতিটোৰ এই চাপটোৱেই হ'ল ভাষা-আশ্ৰয়ী সমস্যা আৰু গাণিতিক আৰ্হি প্ৰকৰণ সমস্যাৰ মাজৰ এটা ডাঙৰ পাৰ্থক্য। ভাষা-আশ্ৰয়ী সমস্যাত দেখিবলৈ নোপোৱা ই হ'ল আৰ্হিকৰণৰ সবাতোকৈ গুৰুত্বপূৰ্ণ চাপ। অৱশ্যে, কিছুমান বাস্তৱ জীৱনভিত্তিক সমস্যাৰ ক্ষেত্ৰত আমি সমাধানৰ বৈধতাৰ পৰীক্ষণ প্ৰয়োজনীয় নহ'বও পাৰে, কাৰণ, সমস্যাটো তেনেই সৰল আৰু আমি শুদ্ধ সমাধানটো পোনে পোনে লাভ কৰিব পাৰো।

A2.3 ত বিবেচনা কৰা প্ৰথম আৰ্হিটো এনেকুৱাই আছিল। গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণত জড়িত পৰ্ববোৰ যিটো ক্ৰমত অনুসৰণ কৰা হয় তাৰ এক সাৰাংশ পৰৱৰ্তী A2.2 চিত্ৰত প্ৰদৰ্শন কৰা হ'ল।



চিত্ৰ A2.2

গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণত জড়িত পৰ্যায়বোৰ অধ্যয়ন কৰাৰ পাছত এতিয়া আমি ইয়াৰ বিভিন্ন দিশৰ কেইটামান আলোচনা কৰোঁহক।

গণিতীয় আৰ্হিপ্ৰকৰণৰ লক্ষ্য হ'ল বাস্তৱ জগতভিত্তিক সমস্যাক গণিতীয় সমস্যালৈ পৰিবৰ্তন কৰি তাৰ পৰা কিছুমান প্ৰয়োজনীয় তথ্য লাভ কৰা। ই বিশেষভাৱে উপযোগী যেতিয়া অন্য উপায়েৰে— যেনে প্ৰত্যক্ষ পৰ্যবেক্ষণ বা পৰীক্ষাৰ জৰিয়তে অত্যন্ত ব্যয় সাপেক্ষ হয় অথবা একেবাৰে অসম্ভৱ হয়।

গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণৰ আমি কিয় আশ্ৰয় ল'ব লাগে সেই বিষয়টো তোমাৰ আচৰিত লাগিব পাৰে। আৰ্হি প্ৰকৰণৰ কেইটামান সুবিধাৰ প্ৰতি আমি মন কৰোহক। ধৰি লোৱা, তাজমহলৰ ক্ষয়ীভৱনত মথুৰা তেল শোধনাগাৰৰ নিৰ্গমন প্ৰক্ৰিয়াৰ প্ৰভাৱ সম্পৰ্কে আমি অধ্যয়ন কৰিব বিচাৰো। আমি তাজমহলত পোনে পোনে পৰীক্ষা নিৰীক্ষা চলাবলৈ নিবিচাৰিম কিয়নো সেয়া তাজমহলৰ বাবে নিৰাপদ নহ'ব পাৰে। অৱশ্যে আমি এটা স্কেলযুক্ত ভৌত আৰ্হি ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোহক, কিন্তু ইয়াৰ বাবে আমাক বিশেষ ধৰণৰ সুবিধাৰ প্ৰয়োজন হ'ব পাৰে, যিটো অত্যন্ত ব্যয়সাপেক্ষ। এনে ক্ষেত্ৰতে গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণে আমাক সহায় কৰিব পাৰে।

আকৌ ধৰি লোৱা, 5 বছৰৰ পিছত আমাক কিমানখন প্ৰাথমিক বিদ্যালয়ৰ প্ৰয়োজন হ'ব আমি জানিব খুজিছো। তেতিয়া এই সমস্যাৰ সমাধান আমি কেৱল গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণৰ জৰিয়তেহে কৰিব পাৰোহক। সদৃশভাৱে, বিজ্ঞানীসকলে বিভিন্ন পৰিঘটনাৰ অস্তিত্ব সম্পৰ্কে কেৱল আৰ্হি প্ৰকৰণৰ জৰিয়তেহে ব্যাখ্যা কৰিবলৈ সমৰ্থ হৈছে।

A2.3 ছেদত তোমালোকে দেখিছিলা যে আমি উন্নততৰ কৌশলৰ দ্বাৰা দ্বিতীয় উদাহৰণৰ সমাধানটো আৰু উন্নত কৰিব পাৰিলোহেঁতেন। কিন্তু গণিতিক কৌশল নথকাৰ বাবে আমি অধিক আগবাঢ়িব নোৱাৰিলো। বাস্তৱ জীৱনতো এনেকুৱা হ'ব পাৰে। উপযুক্ত গাণিতিক কৌশলৰ অভাৱত প্ৰায়ে আমি অতি আসন্ন মানতে সন্তুষ্ট থাকিবলগীয়া হওহক। উদাহৰণ স্বৰূপে, বতৰৰ আৰ্হি প্ৰকৰণত ব্যৱহৃত আৰ্হি সমীকৰণবোৰ ইমানেই জটিল যে সঠিক সমাধান পাব পৰাকৈ গাণিতিক কৌশল বিচাৰি পোৱা নাযায়।

তোমালোকৰ মনত প্ৰশ্ন হ'ব পাৰে এই বুলি যে আমাৰ আৰ্হি উন্নতকৰণৰ ক্ষেত্ৰত আমি কিমান দূৰলৈ চেষ্টা চলাব পাৰিমহক। সচৰাচৰ, ইয়াক উন্নতৰূপত সজাবলৈ আমি অন্যান্য কেতবোৰ বিষয় বিবেচনাৰ আওতালৈ আনিব লাগিব। যেতিয়া আমি এনে কৰো, আমাৰ গাণিতিক সমীকৰণৰ লৈতে কিছুমান অতিৰিক্ত চলক যুক্ত কৰোহক। তেতিয়া আমি ব্যৱহাৰৰ বাবে কষ্টসাধ্য এটা অত্যন্ত জটিল আৰ্হি পাব পাৰোহক। আৰ্হি এটা ব্যৱহাৰৰ বাবে যথেষ্ট সৰল হ'ব লাগে। এটা ভাল আৰ্হিয়ে দুটা বিষয়ৰ মাজত ভাৰসাম্য ৰক্ষা কৰে ঃ

1. শুদ্ধতা অৰ্থাৎ ই বাস্তৱৰ কিমান আসন্ন

2. ব্যৱহাৰৰ সুচলতা

উদাহৰণ স্বৰূপে, নিউটনৰ গতিসূত্ৰ কেইটা বৰ সৰল কিন্তু বহু ভৌতিক পৰিস্থিতিৰ আৰ্হি প্ৰকৰণত ই যথেষ্ট ক্ষমতাশালী।

তেন্তে, গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণেই সকলো সমস্যাৰ সমিধান বুলি ক'ব পাৰি নেকি? একেবাৰেই নহয়! ইয়াৰো সীমাবদ্ধতা আছে।

এইদৰে আমি মনত ৰখা উচিত যে আৰ্হি এটা বাস্তৱ জগত সম্পৰ্কীয় সমস্যাৰ কেৱল সৰলীকৃত ৰূপহে, দুয়োটা একে কথা নহয়। এয়া ঠিক এখন দেশৰ ভৌতিক লক্ষণসমূহ বৰ্ণনা কৰা মানচিত্ৰখন আৰু দেশখনৰ মাজত থকা পাৰ্থক্যৰ দৰে। আমি মানচিত্ৰখন চাই এখন ঠাইৰ সাগৰ পৃষ্ঠৰ পৰা উচ্চতা উলিয়াব পাৰো, কিন্তু ইয়াৰ পৰা মানুহৰ বৈশিষ্টসমূহ বুজিব নোৱাৰো। গতিকে, যি উদ্দেশ্য সাধনৰ অৰ্থে আৰ্হি এটা তৈয়াৰ কৰা হয় সেই উদ্দেশ্যতহে ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰা উচিত আৰু আৰ্হিটো তৈয়াৰ কৰা সময়ত যিবোৰ দিশ আওকাণ কৰা হৈছে সেই আটাবিোৰ কথা মনত ৰখা উচিত। আৰ্হি এটা য'ত প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি সেই সীমাৰ ভিতৰতহে আমি ইয়াক প্ৰয়োগ কৰা উচিত। পৰৱৰ্তী শ্ৰেণীসমূহত আমি এই দিশটোৰ ওপৰত অলপ বেছিকৈ আলোচনা আগবঢ়াম।

অনুশীলনী A2.3

1. তোমালোকে পাঠ্যপুথিসমূহত পাই অহা শব্দ-নিৰ্ভৰ সমস্যাবোৰৰ সমাধান পদ্ধতি আৰু গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণ পদ্ধতিৰ মাজত প্ৰভেদ কি?
2. ধৰি লোৱা, চাৰিটা পথৰ মিলনস্থলত যান-বাহনৰ অপেক্ষাৰ সময় তুমি নূন্যতম পৰ্যায়ত ৰাখিব বিচাৰিছো। তলত উল্লেখ কৰা বিষয়সমূহৰ কোনবোৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ আৰু কোনবোৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ নহয়?
   (i) পেট্ৰ'লৰ দাম
   (ii) চাৰিটা ভিন্ন পথেৰে আহি গোট খোৱা যান-বাহনৰ হাৰ।
   (iii) ধীৰ বেগী যান যেনে চাইকেল আৰু ৰিক্সা আৰু তীব্ৰ বেগী যান যেনে চাৰিচকীয়া 'কাৰ' আৰু মটৰ চাইকেলৰ অনুপাত।

A2.5 সাৰাংশ (Summary) :

এই পৰিশিষ্টটোত তোমালোকে নিম্নোক্ত বিষয়সমূহ অধ্যয়ন কৰিলাহক :

1. শব্দ-নিৰ্ভৰ সমস্যাবোৰৰ সমাধানত জড়িত ঢাপসমূহ।

2. কিছুমান গণিতীয় আৰ্হিৰ গঠন পদ্ধতি

3. গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণত জড়িত ঢাপসমূহ পৰৱৰ্তী বাকচটোত উল্লেখ কৰা ধৰণৰ :

> 1. **সূত্ৰায়ন :**
>   (i) সমস্যাটোৰ বৰ্ণনা
>   (ii) প্ৰাসংগিক কাৰকসমূহৰ চিনাক্তকৰণ
>   (iii) গাণিতিক বৰ্ণনা
> 2. সমাধান নিৰ্ণয়
> 3. বাস্তৱ জগতভিত্তিক সমস্যাৰ প্ৰসংগত সমাধানৰ ব্যাখ্যা
> 4. আৰ্হিটোৱে অধ্যয়ন চলিত সমস্যাটোক কিমান ভালদৰে প্ৰতিনিধিত্ব কৰিবলৈ সক্ষম হৈছে তাৰ বৈধতাৰ পৰীক্ষণ।

4. গণিতীয় আৰ্হি প্ৰকৰণৰ লক্ষ্য, সুবিধা আৰু সীমবদ্ধতা।

উত্তৰ/ইংগিত (Answers/Hints)

অনুশীলনী 1.1

1. হয়। $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ ইত্যাদি, হৰ q ক ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হিচাপেও ল'ব পাৰি।

2. 3 আৰু 4 ৰ মাজত অসীম সংখ্যক পৰিমেয় সংখ্যা থাকিব পাৰে। সিহঁতক পাব পৰাৰ এটা উপায় হ'ল

$3 = \frac{21}{6+1}$, $4 = \frac{28}{6+1}$। তেতিয়া ছয়টা সংখ্যা হ'ব

$\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$।

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$। গতিকে, পৰিমেয় সংখ্যা পাঁচটা হ'ল $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$।

4. (i) সত্য, কাৰণ পূৰ্ণ সংখ্যাবোৰৰ সংগ্ৰহটোত আটাইবোৰ পৰিমেয় সংখ্যা আছে।
   (ii) অসত্য, উদাহৰণস্বৰূপে -2 এটা পূৰ্ণ সংখ্যা নহয়।
   (iii) অসত্য, কাৰণ $\frac{1}{2}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা, কিন্তু এটা পূৰ্ণ সংখ্যা নহয়।

অনুশীলনী 1.2

1. (i) সত্য, যিহেতু বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংগ্ৰহটো পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাৰে গঠিত।
   (ii) অসত্য, কোনো ঋণাত্মক সংখ্যাই স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গমূল হ'ব নোৱাৰে।
   (iii) অসত্য, উদাহৰণ স্বৰূপে 2 বাস্তৱ কিন্তু অপৰিমেয় নহয়।

2. নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে $\sqrt{4} = 2$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

3. চিত্ৰ 1.8 ৰ পদ্ধতিটো কেবাবাৰো পুনৰাবৃত্তি কৰা। প্ৰথমে $\sqrt{4}$ উলিওৱা, আৰু পিছত $\sqrt{5}$।

অনুশীলনী 1.3

1. (i) 0.36, সীমিত (ii) $0.\overline{09}$, অসীমিত পুনৰাবৃত্ত
(iii) 4.125, সীমিত (iv) $0.\overline{230769}$, অসীমিত পুনৰাবৃত্ত
(v) $0.\overline{18}$, অসীমিত পুনৰাবৃত্ত (vi) 0.8225, সীমিত

2. $\frac{2}{7}=2\times\frac{1}{7}=0.\overline{285714}$ $\frac{3}{7}=3\times\frac{1}{7}=0.\overline{428571}$ $\frac{4}{7}=4\times\frac{1}{7}=0.\overline{571428}$
$\frac{5}{7}=5\times\frac{1}{7}=0.\overline{714285}$ $\frac{6}{7}=6\times\frac{1}{7}=0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [ধৰা $x = 0.666...$ গতিকে $10x = 6.666...$ বা, $10x = 6 + x$ বা $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]
(ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [ধৰা $x = 0.9999...$ গতিকে $10x = 9.999...$ বা, $10x = 9 + x$ বা, $x = 1$]

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণত কেবল 2 ৰ ঘাত নাইবা 5 ৰ ঘাত নাইবা দুয়োটাই আছে।

7. 0.01001000100001..., 0.202002000200002..., 0.003000300003...

8. 0.75075007500075000075..., 0.767076700767000767...,
0.808008000800008...

9. (i), আৰু (v) অপৰিমেয়; (ii), (iii) আৰু (iv) পৰিমেয়।

অনুশীলনী 1.4

1. 2.665 ৰ কাৰণে অনুচ্ছেদ 1.4 ৰ দৰে আগবাঢ়া।
2. উদাহৰণ 11 ৰ দৰে আগবঢ়া।

অনুশীলনী 1.5

1. (i) অপৰিমেয় (ii) পৰিমেয় (iii) পৰিমেয় (iv) অপৰিমেয়
(v) অপৰিমেয়

2. (i) $6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7+2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. ইয়াত কোনো বিৰোধ নাই। মনত ৰাখা যে যেতিয়া তুমি কোনো এটা দৈৰ্ঘ্য এডাল স্কেল নাইবা অইন কোনো উপায়েৰে জোখা, তুমি কেবল এটা আসন্ন পৰিমেয় মানহে পাবা।

গতিকে, তুমি উপলব্ধ কৰিব নোৱাৰিব পাৰা যে হয় c নাইবা d অপৰিমেয়।

4. চিত্ৰ 1.17 চোৱা

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

অনুশীলনী 1.6

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5

2. (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[(125)^{-\frac{1}{3}}=(5^3)^{-\frac{1}{3}}=5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{4}}$

অনুশীলনী 2.1

1. (i) আৰু (ii) এটা চলকযুক্ত বহুপদ (v) এটা তিনিটা চলকযুক্ত বহুপদ।
(iii) আৰু (iv) বহুপদ নহয়, কাৰণ ইয়াৰ প্ৰত্যেকতে চলকৰ সূচক এটা পূৰ্ণ সংখ্যা নহয়।

2. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35}-4$; $\sqrt{2}y^{100}$ (বেলেগ বেলেগ সূচকেৰে তুমি আৰু কিছুমান বহুপদ লিখিব পাৰা।)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) দ্বিঘাত (ii) ত্ৰিঘাত (iii) দ্বিঘাত (iv) ৰৈখিক
(v) ৰৈখিক (vi) দ্বিঘাত (vii) ত্ৰিঘাত

অনুশীলনী 2.2

1. (i) 3 (ii) -6 (iii) -3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3

3. (i) হয় (ii) নহয় (iii) হয় (iv) হয়
(v) হয় (vi) হয়
(vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ এটা শূন্য, কিন্তু $\frac{2}{\sqrt{3}}$ বহুপদটোৰ এটা শূন্য নহয়। (viii) নহয়।

4. (i) -5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$
(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

অনুশীলনী 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1 (iv) $-\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$ (v) $-\frac{27}{8}$

2. $5a$ 3. নহয়, যিহেতু ভাগশেষ শূন্য নহয়।

অনুশীলনী 2.4

1. $(x + 1)$, (i) ৰ এটা উৎপাদক, কিন্তু (ii), (iii) আৰু (iv)ৰ উৎপাদক নহয়।

2. (i) হয় (ii) নহয় (iii) হয়

3. (i) -2 (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x - 1)(4x - 1)$ (ii) $(x + 3)(2x + 1)$
   (iii) $(2x + 3)(3x - 2)$ (iv) $(x + 1)(3x - 4)$

5. (i) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$ (ii) $(x + 1)(x + 1)(x - 5)$
   (iii) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$ (iv) $(y - 1)(y + 1)(2y + 1)$

অনুশীলনী 2.5

1. (i) $x^2 + 14x + 40$ (ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$
   (iv) $y^4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x + y)(3x + y)$ (ii) $(2y - 1)(2y - 1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$
   (ii) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$
   (iii) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz$
   (iv) $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$
   (v) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$
   (vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$
   (ii) $\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)\left(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z\right)$

6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ (iv) $x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$ (ii) $(2a - b)(2a - b)(2a - b)$

(iii) $(3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$ (iv) $(4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$

(v) $\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y + 5z)(9y^2 + 25z^2 - 15yz)$

(ii) $(4m - 7n)(16m^2 + 49n^2 + 28mn)$

11. $(3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$

12. সোঁপক্ষক সৰল কৰা।

13. অভেদ VIII ত $x + y + z = 0$ বহুওৱা।

14. (i) –1260. ধৰা $a = -12$, $b = 7$, $c = 5$. ইয়াত $a + b + c = 0$. প্ৰশ্ন 13 ত দিয়া ফল ব্যৱহাৰ কৰা।

(ii) –16380

15. (i) এটা সম্ভাব্য উত্তৰ : দীঘ $= 5a - 3$, প্ৰস্থ $= 5a - 4$

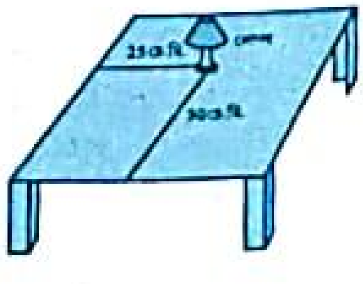
(ii) এটা সম্ভাব্য উত্তৰ : দীঘ $= 7y - 3$, প্ৰস্থ $= 5y + 4$

16. (i) এটা সম্ভাব্য উত্তৰ : 3, x আৰু $x - 4$

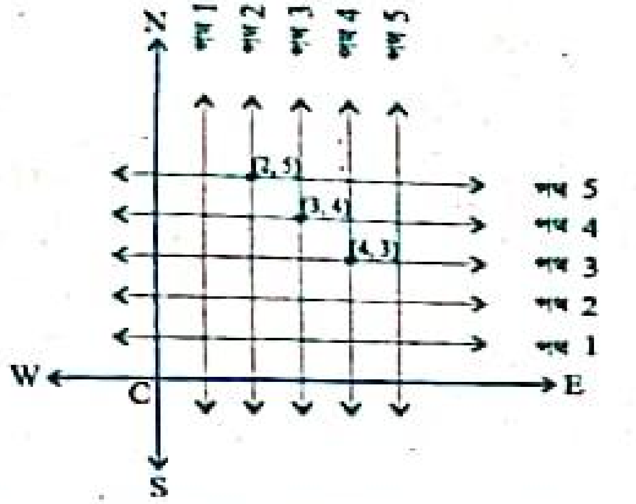
(ii) এটা সম্ভাব্য উত্তৰ : $4k$, $3y + 5$ আৰু $y - 1$

অনুশীলনী 3.1

1. লেম্পটোক এটা বিন্দু আৰু মেজখনক এখন সমতল হিচাপে বিবেচনা কৰা। মেজখনৰ যিকোনো দুটা লম্ব দাঁতি বাচা। দীঘল দাঁতিটোৰ পৰা লেম্পটোৰ দূৰত্ব জোখা। ধৰা ই 25 চে.মি.। আকৌ চুটি দাঁতিটোৰ পৰা লেম্পটোৰ দূৰত্বটো জুখি উলিওৱা। ধৰা ই 30 চে.মি.। এতিয়া লেম্পটোৰ অৱস্থানক তুমি নিৰ্দিষ্ট কৰা ক্ৰম সাপেক্ষে (30, 25) বা (25, 30) বুলি লিখিব পাৰা।



2. পথটোৰ পৰিকল্পনাটো তলৰ চিত্ৰত দেখুওৱা হৈছে—.

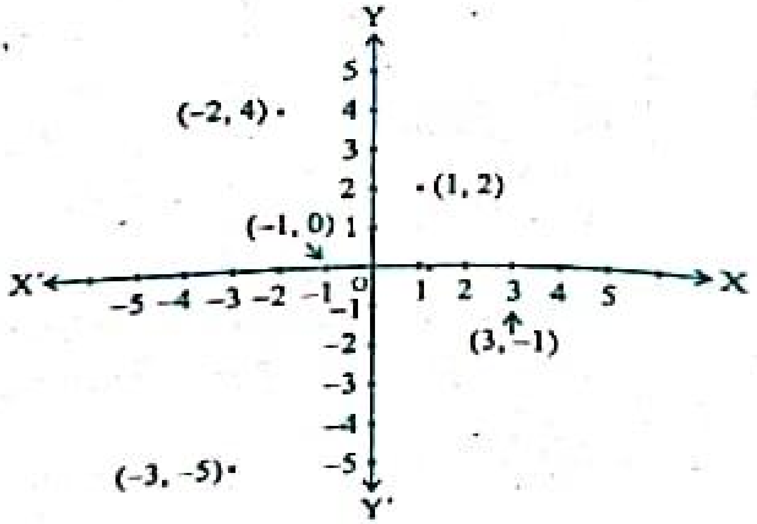


কটাকটি কৰা দুয়োটা পথকে ওপৰৰ চিত্ৰত চিহ্নিত কৰা হৈছে। আমি সিহঁতৰ অৱস্থান নিৰূপণ কৰাৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা দুডাল প্ৰাসংগিক ৰেখাৰ বাবেই সিহঁতক অদ্বিতীয়ভাবে পোৱা গৈছে।

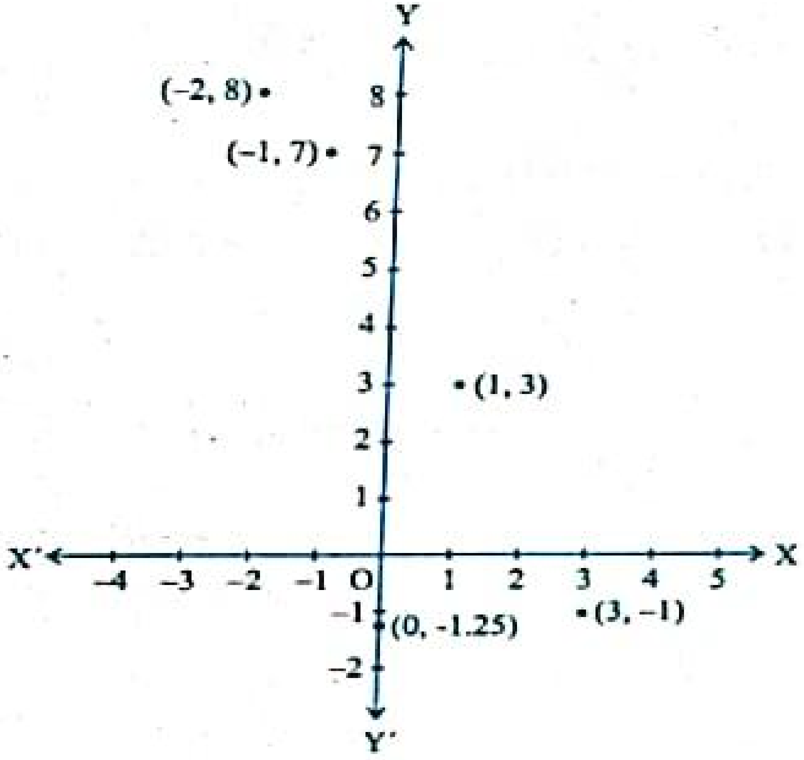
অনুশীলনী 3.2

1. (i) x - অক্ষ আৰু y - অক্ষ (ii) চোকবোৰ (iii) মূলবিন্দু
2. (i) (– 5, 2) (ii) (5, –5) (iii) E (iv) G
   (v) 6 (vi) – 3 (vii) (0, 5) (viii) (–3, 0)

1. (–2, 4) বিন্দুটো চোক II ত আছে , (3, –1) বিন্দুটো চোক IV ত আছে, (– 1, 0) বিন্দুটো ঋণাত্মক x - অক্ষত আছে, (1, 2) বিন্দুটো চোক I ত আছে আৰু (–3, –5) বিন্দুটো চোক III ত আছে। সংযুক্ত চিত্ৰত বিন্দুবোৰৰ অৱস্থান দৰ্শোৱা হৈছে। ৰ



2. কাষৰ চিত্ৰত বিন্দুবোৰৰ অৱস্থান ডটবিন্দুৰে দেখুওৱা হৈছে।



অনুশীলনী 4.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0;\ a = 2,\ b = 3,\ c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0;\ a = 1,\ b = \frac{-1}{5},\ c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0;\ a = -2,\ b = 3,\ c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0;\ a = 1,\ b = -3,\ c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0;\ a = 2,\ b = 5,\ c = 0$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0;\ a = 3,\ b = 0,\ c = 2$

(vii) $0.x + 1.y - 2 = 0;\ a = 0,\ b = 1,\ c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0;\ a = -2,\ b = 0,\ c = 5$

অনুশীলনী 4.2

1. (iii), কাৰণ x ৰ প্ৰতি মানৰ বাবেই y ৰ এটা অনুৰূপ মান আছে আৰু বিপৰীতভাৱেও ই সত্য।

2. (i) (0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, –1)

(ii) $(1, 9-\pi)$, (0, 9), $(-1, 9+\pi)$, $\left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

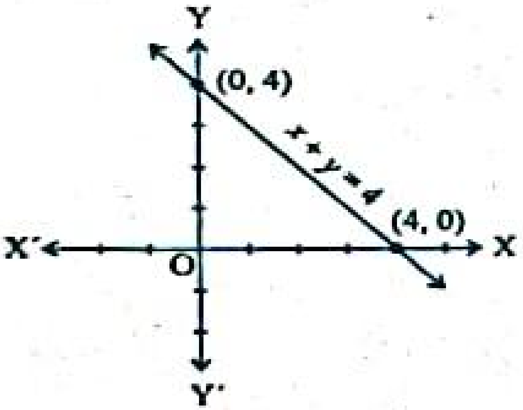
(iii) (0, 0), (4, 1), (– 4, 1), $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

3. (i) নহয় (ii) নহয় (iii) হয় (iv) নহয় (v) নহয়

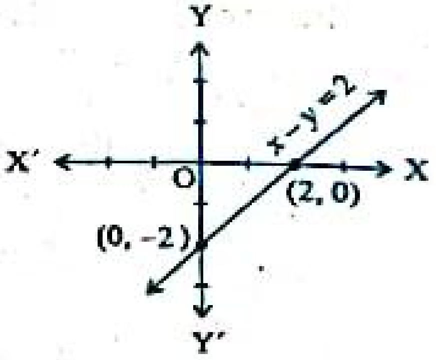
4. 7

অনুশীলনী 4.3

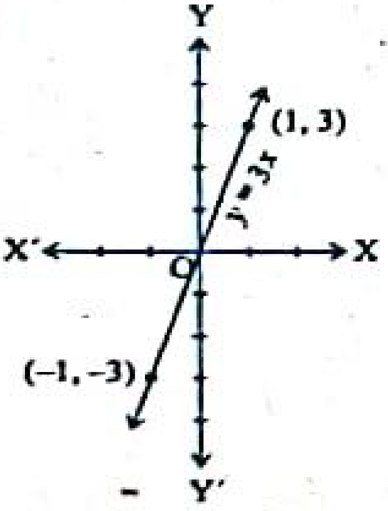
1. (i)



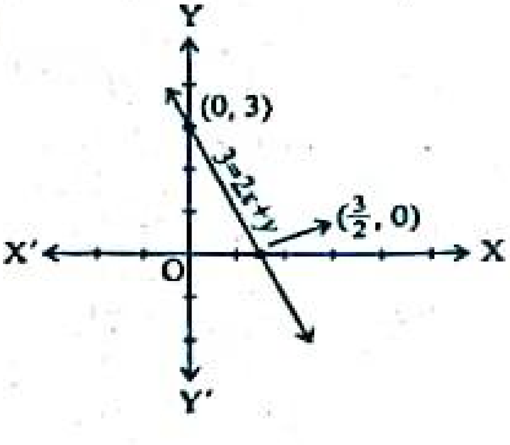
(ii)



(iii)



(iv)

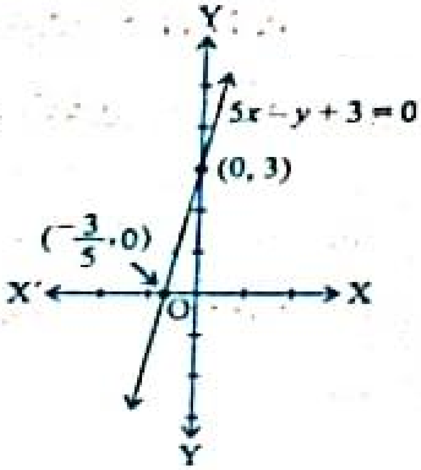


2. $7x - y = 0$ আৰু $x + y = 16$; অসীমভাৱে বহুত

[এটা বিন্দুৰ মাজেৰে অসংখ্য ৰেখা টানিব পাৰি]

3. $\frac{5}{3}$

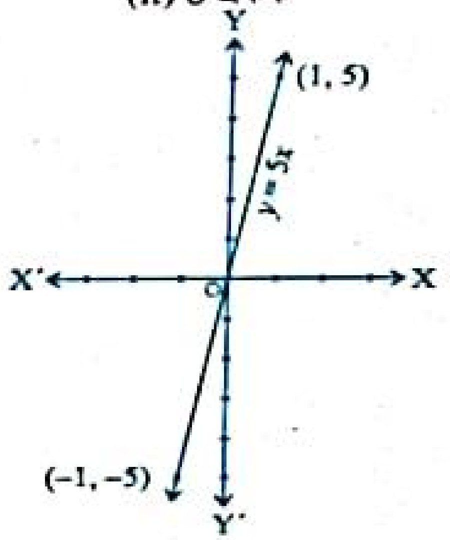
4. $5x - y + 3 = 0$



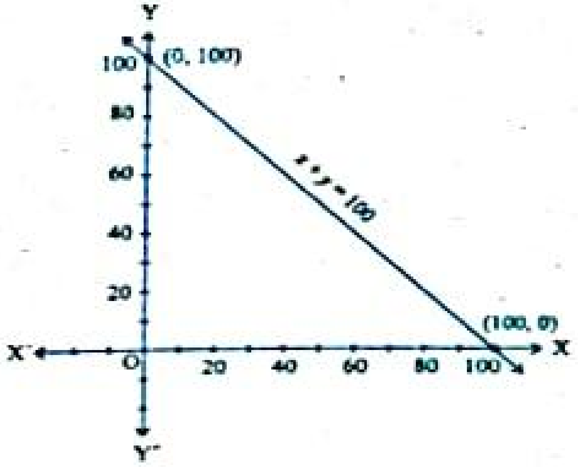
5. চিত্ৰ 4.6 ৰ ক্ষেত্ৰত $x + y = 0$ আৰু চিত্ৰ 4.7 ৰ ক্ষেত্ৰত $y = -x + 2$.

6. x অক দূৰত্ব আৰু y ক কাম কৰা হিচাপে ধৰি সমস্যাটোত সমীকৰণটো হ'ব $y = 5x$.

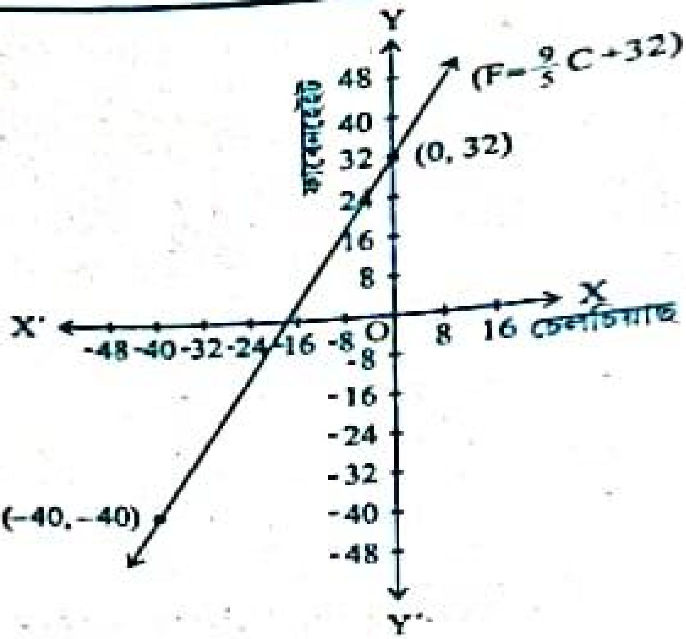
(i) 10 একক (ii) 0 একক



7. $x + y = 100$



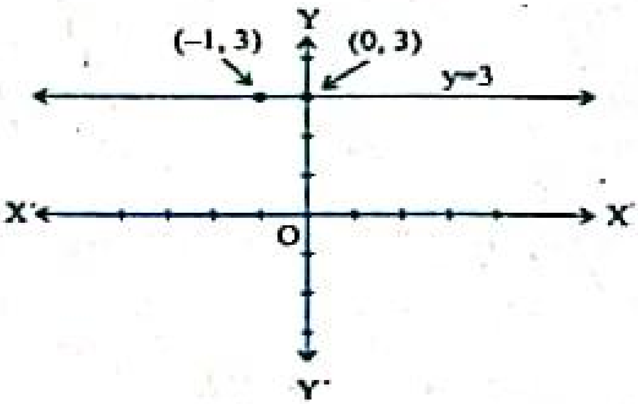
8. (i) কাষৰ চিত্ৰটো চোৱা
(ii) 86° F
(iii) 35° C
(iv) 32° F, −17.8° C (প্ৰায়)
(v) হয়, − 40° (F আৰু C দুয়োটাতে)



অনুশীলনী 4.4

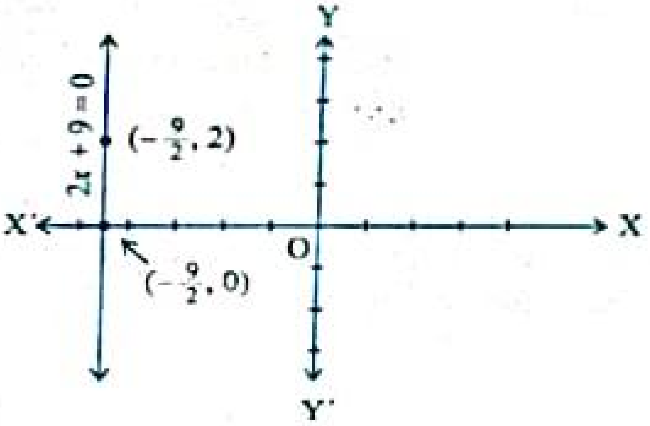
1. (i)

(ii)



2. (i)

(ii)



অনুশীলনী 5.1

1. (i) অসত্য। ছাত্রই চাক্ষুষভাৱে এইটো চাব পাৰিব।

(ii) অসত্য। ই স্বতঃসিদ্ধ 5.1 ক বিৰোধ কৰিব।

(iii) সত্য। (স্বীকাৰ্য 2)

(iv) সত্য। তুমি যদি এটা বৃত্তই আৱৰা ক্ষেত্ৰটোক আইনটোৰ ওপৰত জাপি দিয়া, তেন্তে ইহঁত মিলি যাব। গতিকে সিহঁতৰ কেন্দ্ৰ আৰু পৰিসীমাও মিলি যাব। সেয়ে সিহঁতৰ ব্যাসাৰ্ধও একেদৰে মিলিব।

(v) সত্য। ইউক্লিডৰ প্ৰথম স্বতঃসিদ্ধ।

3. বহুতো সংজ্ঞা নথকা বা অসংজ্ঞাবদ্ধ পদ আছে ছাত্ৰই যিবোৰৰ তালিকা প্ৰস্তুত কৰা উচিত। সেইবোৰ সংগত (consistent) কাৰণ সিহঁতে দুটা বিভিন্ন পৰিস্থিতিৰ সৈতে জড়িত (i)ৰ মতে A আৰু B দুটা বিন্দু দিয়া থাকিলে সিহঁতৰ মাজৰ ৰেখাটোত এটা বিন্দু C থাকিবই; (ii)ৰ মতে A আৰু B বিন্দু দিয়া থাকিলে, তুমি A আৰু B মাজেৰে যোৱা ৰেখাটোত নথকা এটা বিন্দু C ল'ব পাৰা।

এইবোৰ 'স্বীকাৰ্য' ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্যৰ পৰা পোৱা নাযায়, হ'লেও সিহঁতক স্বতঃসিদ্ধ 5.1ৰ পৰা পোৱা যায়।

4. $AC = BC$

গতিকে, $AC + AC = BC + AC$ (সমানক সমানৰ সৈতে যোগ কৰা হৈছে)

অৰ্থাৎ, $2AC = AB$ (BC + AC, ABৰ সৈতে মিলিছে)

সেয়ে, $AC = \frac{1}{2} AB$

5. এটা সাময়িক ধাৰণা কৰা যে ABৰ দুটা ভিন্ন মধ্যবিন্দু C আৰু D। এতিয়া দেখুওৱা যে C আৰু D বিন্দু দুটা বেলেগ নহয়।

6. AC = BD (দিয়া আছে) ....(1)
AC = AB + BC (B বিন্দুটো A আৰু Cৰ মাজত আছে) ....(2)
BD = BC + CD (C বিন্দুটো B আৰু Dৰ মাজত আছে।) ....(3)
(2) আৰু (3)ক (1)ত বহুৱাই পাবা
AB + BC = BC + CD
গতিকে, AB = CD (সমানৰ পৰা সমান বাদ দি)

7. যিহেতু এইটো পৃথিৱীৰ যিকোনো ঠাইতে যিকোনো বস্তুৰ ক্ষেত্ৰতেই সত্য, গতিকে ই এক বিশ্বজনীন সত্য।

অনুশীলনী 5.2

1. ছাত্ৰই আগবঢ়োৱা যিকোনো সূত্ৰৰ বৈধতাৰ বিষয়ে শ্ৰেণীত আলোচনা হোৱা উচিত।

2. যদি এডাল সৰলৰেখা *l* অইন দুডাল সৰলৰেখা *m* আৰু *n* ৰ ওপৰত এনেদৰে থাকে যাতে *l* ৰ একেফালে থকা অন্তঃস্থ কোণ দুটাৰ সমষ্টি দুই সমকোণ, তেন্তে ইউক্লিডৰ পঞ্চম স্বীকাৰ্য মতে ৰেখা দুটাই *l* ৰ এই ফালটোত লগ নালাগে। তাৰ পাছত তোমালোকে জানিছা যে *l* ৰেখাটোৰ বাকীফালে থকা অন্তঃস্থ কোণ দুটাৰ সমষ্টিও দুই সমকোণ। গতিকে সিহঁতে ৰেখাটোৰ অইনটো ফালতো লগ নালাগিব। গতিকে, *m* আৰু *n* ৰেখা দুটাই কেতিয়াও লগ নালাগে আৰু সেয়ে সিহঁত সমান্তৰাল।

অনুশীলনী 6.1

1. 30°, 250° 2. 126°
4. এটা বিন্দুত আটাইবোৰ কোণৰ সমষ্টি = 360°
5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ আৰু $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$.
6. 122°, 302°

অনুশীলনী 6.2

1. 130°, 130° 2. 126° 3. 126°, 36°, 54° 4. 60° 5. 50°, 77°
6. আপতন কোণ = প্ৰতিফলন কোণ। B বিন্দুত $BE \perp PQ$ আৰু C বিন্দুত $CF \perp RS$ টানা।

অনুশীলনী 6.3

1. 65° 2. 32°, 121° 3. 92° 4. 60° 5. 37°, 53°

6. ΔPQRৰ কোণকেইটাৰ সমষ্টি = ΔQTR ৰ কোণকেইটাৰ সমষ্টি আৰু
$\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$.

অনুশীলনী 7.1

1. সিহঁত সমান। 6. $\angle BAC = \angle DAE$

অনুশীলনী 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$

7. প্ৰতিটোৰেই 45°

অনুশীলনী 7.3

3. (ii) (i) ৰ পৰা $\angle ABM = \angle PQN$

অনুশীলনী 7.4

4. BD সংযোগ কৰা আৰু দেখুওৱা যে $\angle B > \angle D$।
AC সংযোগ কৰা আৰু দেখুওৱা যে $\angle A > \angle C$।

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$ ইত্যাদি।

অনুশীলনী 8.1

1. 36°, 60°, 108° আৰু 156°.

6. (i) ΔDAC আৰু ΔBCAৰ পৰা দেখুওৱা যে
$\angle DAC = \angle BCA$ আৰু $\angle ACD = \angle CAB$ ইত্যাদি।
(ii) উপপাদ্য 8.4 ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে $\angle BAC = \angle BCA$

অনুশীলনী 8.2

2. দেখুওৱা যে PQRS এটা সামান্তৰিক। আকৌ দেখুওৱা যে PQ ∥ AC আৰু PS ∥ BD।
গতিকে $\angle P = 90°$।

5. AECF এটা সামান্তৰিক। গতিকে AF ∥ CE ইত্যাদি।

অনুশীলনী 9.1

1. (i) ভূমি DC, DC আৰু AB সমান্তৰাল (iii) ভূমি QR, QR আৰু PS সমান্তৰাল।
   (v) ভূমি AD, AD আৰু BQ সমান্তৰাল।

অনুশীলনী 9.2

1. 12.8 চে.মি. 2. EG সংযোগ কৰা; উদাহৰণ 2 ৰ ফল ব্যৱহাৰ কৰা।

6. ΔAPQত ঘেঁহ আৰু বাকী দুটা ত্ৰিভূজত মাহ, নাইবা
   ΔAPQ ত মাহ আৰু বাকী দুটা ত্ৰিভূজত ঘেঁহ।

অনুশীলনী 9.3

4. $CM \perp AB$ আৰু $DN \perp AB$ টনা। দেখুওৱা যে $CM = DN$.

12. উদাহৰণ 4 চোৱা।

অনুশীলনী 9.4 (ঐচ্ছিক)

7. উদাহৰণ 3 ৰ ফল বাৰে বাৰে ব্যৱহাৰ কৰা।

অনুশীলনী 10.1

1. (i) অন্তঃস্থ (ii) বহিঃস্থ (iii) ব্যাস
   (iv) অৰ্ধবৃত্ত (v) জ্যাডাল (vi) তিনি

2. (i) সত্য (ii) অসত্য (iii) অসত্য
   (iv) সত্য (v) অসত্য (vi) সত্য

অনুশীলনী 10.2

1. সৰ্বসম বৃত্তৰ জ্যা বিবেচনা কৰি 10.1 ৰ সঠিক একেদৰে প্ৰমাণ কৰা।

2. ত্ৰিভুজ দুটাৰ সৰ্বসমতা দেখুৱাবলৈ সৰ্বসম স্বতঃসিদ্ধ SAS ব্যৱহাৰ কৰা।

অনুশীলনী 10.3

1. 0, 1, 2. দুই 2. উদাহৰণ 1ৰ দৰে আগবঢ়া।

3. বৃত্তবোৰৰ কেন্দ্ৰ O, O′ অক সাধাৰণ জ্যা AB ৰ মধ্যবিন্দু M ৰ সৈতে সংযোগ কৰা। পিছত দেখুওৱা যে
   $\angle OMA = 90^\circ$ আৰু $\angle O'MA = 90^\circ$।

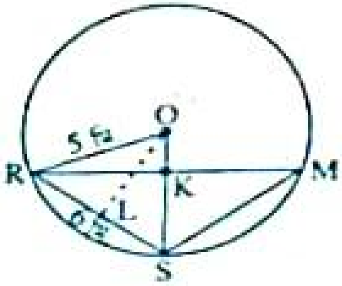
অনুশীলনী 10.4

1. 6 চে.মি.। প্ৰথমে দেখুওৱা যে কেন্দ্ৰবোৰৰ সংযোগী ৰেখাটো সৰু বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধৰ লম্ব আৰু পিছত দেখুওৱা যে সাধাৰণ জ্যাডাল সৰু বৃত্তটোৰ ব্যাস।

2. যদি O কেন্দ্ৰীয় বৃত্তৰ সমান জ্যা AB আৰু CD য়ে E বিন্দুত ছেদ কৰে, তেন্তে $OM \perp AB$ আৰু $ON \perp CD$ টানা আৰু OE সংযোগ কৰা। দেখুওৱা যে OME আৰু ONE সমকোণী ত্ৰিভুজ দুটা সৰ্বসম।

3. উদাহৰণ 2 ৰ দৰে আগবাঢ়া। 4. $OM \perp AD$ টানা।

5. ৰেচমা, চালমা আৰু মনদীপক যথাক্ৰমে R, S আৰু M ৰে সূচোৱা। ধৰা $KR = x$ মিঃ (চিত্ৰ চোৱা)



ΔORS ৰ কালি $= \frac{1}{2}x \times 5.$

আকৌ ΔORS ৰ কালি $= \frac{1}{2} RS \times OL = \frac{1}{2} \times 6 \times 4$

x উলিওৱা আৰু ইয়াৰ পৰা RM।

6. সমবাহু ত্ৰিভুজৰ ধৰ্ম আৰু পাইথাগোৰাছৰ উপপাদ্যও ব্যৱহাৰ কৰা।

অনুশীলনী 10.5

1. 45° 2. 150°, 30° 3. 10° 4. 80°

5. 110° 6. $\angle BCD = 80°$ আৰু $\angle ECD = 50°$

8. CD ৰ ওপৰত AM আৰু BN লম্ব টানা ($AB \parallel CD$ আৰু $AB < CD$)। দেখুওৱা যে $\Delta AMD \cong \Delta BNC$। ইয়াৰ পৰা $\angle C = \angle D$ আৰু সেয়ে, $\angle A + \angle C = 180°$।

অনুশীলনী 10.6 (ঐচ্ছিক)

2. ধৰা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ O। তেতিয়া দুয়োডাল জ্যাৰে লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুডাল একে হ'ব আৰু O ৰ মাজেৰে যাব। ধৰা r ব্যাসাৰ্ধ, তেন্তে $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6-x)^2$ য'ত 11 চে.মি. দৈৰ্ঘ্যৰ জ্যাডালৰ ওপৰত O ৰ পৰা টনা লম্বৰ দীঘ x। ইয়াৰ পৰা $x = 1$।

গতিকে, $r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ চে.মি.।

3. 3 চে.মি.।

4. ধৰা $\angle AOC = x$ আৰু $\angle DOE = y$। ধৰা $\angle AOD = z$। তেন্তে $\angle EOC = z$ আৰু $x + y + 2z = 360°$।

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90° - \frac{1}{2}z + z = 90° + \frac{1}{2}z$।

পুনৰ $\angle OEB = 90° + \frac{1}{2}z$

8. $\angle ABE = \angle ADE, \angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$।

গতিকে, $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF$

$$= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

$$= \frac{1}{2}(180° - \angle A)$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle A.$$

9. উদাহৰণ 10.2 ৰ প্ৰশ্ন 1 আৰু উপপাদ্য 10.8 ব্যৱহাৰ কৰা।

10. ধৰা $\angle A$ ৰ দ্বিখণ্ডকে ΔABC ৰ পৰিবৃত্তক D ত কাটে। DC আৰু DBক সংযোগ কৰা। তেন্তে

$\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ আৰু $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A.$

গতিকে, $\angle BCD = \angle DBC$ বা $DB = DC$.

গতিকে D বিন্দুটো BC ৰ লম্ব দ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত থাকিব।

অনুশীলনী 12.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $900\sqrt{3}$ চে.মি.^{2} 2. 1650000 টকা 3. $20\sqrt{2}$ মি.^{2}

4. $21\sqrt{11}$ চে.মি.^{2} 5. 9000 চে.মি.^{2} 6. $9\sqrt{15}$ চে.মি.^{2}

অনুশীলনী 12.2

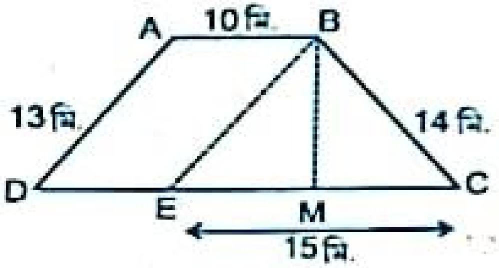
1. 65.5 মি^{2} (প্ৰায়) 2. 15.2 চে.মি.^{2} (প্ৰায়) 3. 19.4 চে.মি.^{2} (প্ৰায়)

4. 12 চে.মি. 5. 48 মি^{2} 6. $1000\sqrt{6}$ চে.মি.^{2}, $1000\sqrt{6}$ চে.মি.^{2}

7. ছাঁ I ৰ কালি = ছাঁ II ৰ কালি = 256 চে.মি.^{2} আৰু ছাঁ III ৰ কালি = 17.92 চে.মি.^{2}

8. 705.60 টকা

9. 196 মি:^{2} (চিত্ৰটো চোৱা। ΔBEC ৰ কালি উলিওৱা = 84 মি:^{2}। পিছত BM ৰ উচ্চতা উলিওৱা।)



অনুশীলনী 13.1

1. (i) 5.45 মি.^{2} (ii) 109 টকা

2. 555 টকা 3. 6 মি 4. 100 ইটা

5. (i) ঘনকাকৃতিৰ বাকচৰ পাৰ্শ্বীয় পৃষ্ঠকালি 40 চে.মি.^{2} বেছি।
(ii) আয়তীয় ঘনক আকৃতিৰ বাকচৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি 10 চে.মি.^{2} বেছি।

6. (i) 4250 চে.মি.^{2} গ্লাছ (ii) ফিটাৰ 320 চে.মি. [আটাইবোৰ দাঁতিৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা (12 টা দাঁতিত 4 দীঘ, 4 টা প্ৰস্থ আৰু 4 টা উন্নতি থাকে)]

7. 2184 টকা 8. 47 মি^{2}

অনুশীলনী 13.2

1. 2 চে.মি.. 2. 7.48 মি.^{2}

3. (i) 968 চে.মি.^{2} (ii) 1064.8 চে.মি.^{2} (iii) 2038.08 চে.মি.^{2}
[এটা পাইপৰ মুঠ পৃষ্ঠকালি = (অন্তঃ বক্র পৃষ্ঠকালি + বহিঃ বক্র পৃষ্ঠকালি + দুয়ো ভূমিৰ কালি)। প্ৰতিটো ভূমিয়ে $\pi(R^2 - r^2)$ কালিবিশিষ্ট এটা ৰিং, য'ত R = বহিঃ ব্যাসাৰ্ধ আৰু r = অন্তঃ ব্যাসাৰ্ধ].

4. 1584 মি.^{2} 5. 68.75 টকা 6. 1 মি.

7. (i) 110 মি.^{2} (ii) 4400 টকা 8. 4.4 মি.^{2}

9. (i) 59.4 মি^{2} (ii) 95.04 মি.^{2}

[ধৰা ব্যৱহৃত টীনৰ প্ৰকৃত কালি = x মি.^{2}। যিহেতু প্ৰকৃতভাৱে ব্যৱহৃত টীনৰ $\frac{1}{12}$ অংশ নষ্ট হ'ল, টেংকিটোত ব্যৱহৃত টীনৰ কালি = x ৰ $\frac{11}{12}$। ইয়ে বুজায় যে প্ৰকৃতভাৱে ব্যৱহৃত টীনৰ কালি = $\frac{12}{11} \times 87.12$ মি.^{2}]

10. 2200 ছে.মি..^{2}; চুঙাৰ উন্নতিক (30 + 2.5 + 2.5) ছে.মি.. হিচাপে গণ্য কৰা উচিত।

11. 7920 ছে.মি..^{2}

অনুশীলনী 13.3

1. 165 ছে.মি..^{2} 2. 1244.57 মি.^{2}
3. (i) 7 ছে.মি.. (ii) 462 ছে.মি.^{2}
4. (i) 26 মি. (ii) 137280 টকা
5. 63 মি. 6. 1155 টকা
7. 5500 ছে.মি.^{2} 8. 384.34 টকা (প্ৰায়)

অনুশীলনী 13.4

1. (i) 1386 ছে.মি.^{2} (ii) 394.24 ছে.মি.^{2} (iii) 2464 ছে.মি.^{2}
2. (i) 616 ছে.মি.^{2} (ii) 1386 ছে.মি.^{2} (iii) 38.5 মি^{2}
3. 942 ছে.মি.^{2} 4. 1 : 4 5. 27.72 টকা
6. 3.5 ছে.মি. 7. 1 : 16 8. 173.25 ছে.মি.^{2}
9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

অনুশীলনী 13.5

1. 180 ছে.মি.^{3} 2. 135000 লিটাৰ 3. 4.75 মি
4. 4320 টকা 5. 2 মি. 6. 3 দিন
7. 16000 8. 6 ছে.মি., 4 : 1 9. 4000 মি.^{3}

অনুশীলনী 13.6

1. 34.65 লিটাৰ
2. 3.432 কিঃগ্ৰাঃ [এটা পাইপৰ আয়তন = $\pi h \times (R^2 - r^2)$, য'ত R বহিঃ ব্যাসাৰ্ধ আৰু r অন্তঃ ব্যাসাৰ্ধ]
3. চুঙাটোৰ ধাৰকত্ব 85 ছে.মি.^{3} বেছি।
4. (i) 3 ছে.মি. (ii) 141.3 ছে.মি.^{3}
5. (i) 110 মি^{2} (ii) 1.75 মি (iii) 96.25 কিলোলিটাৰ
6. 0.4708 মি^{2}
7. কাঠৰ আয়তন = 5.28 ছে.মি.^{3}, গ্ৰেফাইটৰ আয়তন = 0.11 ছে.মি.^{3}.
8. চুপৰ 38500 ছে.মি.^{3} বা 38.5 লিটাৰ।

অনুশীলনী 13.7

1. (i) 204 চে.মি.^{3} (ii) 154 চে.মি.^{3}
2. (i) 1.232 লিটাৰ (ii) $\frac{11}{35}$ লিটাৰ
3. 10 চে.মি.
4. 8 চে.মি.
5. 38.5 কিলোলিটাৰ
6. (i) 48 চে.মি. (ii) 50 চে.মি. (iii) 2200 চে.মি.^{2}
7. 100π চে.মি.^{3}
8. 240π চে.মি.^{3}; 5 : 12
9. 86.625 মি^{3}, 99.825 মি^{2}

অনুশীলনী 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ চে.মি.^{3} (ii) 1.05 মি^{3} (প্ৰায়)
2. (i) $11498\frac{2}{3}$ চে.মি.^{3} (ii) 0.004851 মি^{3}
3. 345.39 গ্ৰাম (প্ৰায়)
4. $\frac{1}{64}$
5. 0.303 লিটাৰ (প্ৰায়)
6. 0.06348 মি^{3} (প্ৰায়)
7. $179\frac{2}{3}$ চে.মি.^{3}
8. (i) 249.48 মি^{2} (ii) 523.9 মি^{3} (প্ৰায়)
9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9
10. 22.46 মিঃমি^{3} (প্ৰায়)

অনুশীলনী 13.9 (ঐচ্ছিক)

1. 6275 টকা
2. 2784.32 টকা (প্ৰায়) [কপালী ৰং দিয়া খৰচ নিৰূপণ কৰোতে আশ্ৰয়টোত পিতাপি লোৱা গোলকৰ অংশটোক বাদ দিবলৈ নাপাহৰিবা]
3. 43.75%

অনুশীলনী 14.1

1. আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰ পৰা আমি সংগ্ৰহ কৰিব পৰা তথ্যৰ পাঁচটা উদাহৰণ—
   - (i) আমাৰ শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰৰ সংখ্যা।
   - (ii) আমাৰ স্কুলৰ ফেনবোৰৰ সংখ্যা।
   - (iii) যোৱা দুবছৰ ধৰি আমাৰ ঘৰৰ বিদ্যুৎ বিলবোৰ।
   - (iv) টেলিভিছন বা বাতৰি কাকতৰ পৰা পোৱা নিৰ্বাচনী ফলাফল।
   - (v) শৈক্ষিক সমীক্ষাৰ পৰা পোৱা সাক্ষৰতা হাৰৰ অংক।

   নকলেও মনত ৰাখিবা যে ইয়াত বহুতো বিভিন্ন ধৰণৰ উত্তৰ হ'ব পাৰে।

2. প্ৰাথমিক তথ্য : (i), (ii) আৰু (iii)
গৌণ তথ্য : (iv) আৰু (v)

অনুশীলনী 14.2

1.

তেজৰ বিভাগ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা
A	9
B	6
O	12
AB	3
মুঠ	30

বেছিভাগৰে – O , বিৰল – AB

2.

দূৰত্ব (কি.মি.)ত	দাগচিহ্ন	বাৰংবাৰতা
0 - 5	𝍸	5
5 - 10	𝍸 𝍸 I	11
10 - 15	𝍸 𝍸 I	11
15 - 20	𝍸 IIII	9
20 - 25	I	1
25 - 30	I	1
30 - 35	II	2
মুঠ		40

3. (i)

আপেক্ষিক আৰ্দ্ৰতা (% ত)	বাৰংবাৰতা
84 - 86	1
86 - 88	1
88 - 90	2
90 - 92	2
92 - 94	7
94 - 96	6
96 - 98	7
98 - 100	4
মুঠ	30

(ii) যিহেতু আপেক্ষিক আৰ্দ্ৰতা উচ্চ, তথ্যবোৰ বৰষুণৰ সেমেকা বতৰত গ্ৰহণ কৰা যেন লাগিছে।

(iii) পৰিসৰ = 99.2 – 84.9 = 14.3

4. (i)

উচ্চতা (চে.মি..ত)	বাৰংবাৰতা
150 - 155	12
155 - 160	9
160 - 165	14
165 - 170	10
170 - 175	5
মুঠ	50

(ii) ওপৰৰ তালিকাখনৰ পৰা ল'ব পৰা এটা সিদ্ধান্ত এই যে 50% তকৈ বেছি ছাত্ৰ 165 চে.মি.. তকৈ চাপৰ।

5. (i)

ছালফাৰ-ডাই-অক্সাইডৰ গাঢ়তা (ppm অত)	বাৰংবাৰতা
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2
মুঠ	30

(ii) ছালফাৰ ডায়'-অক্সাইডৰ গাঢ়তা 8 দিনৰ বাবে 0.11 ppm অতকৈ বেছি আছিল।

6.

মুণ্ডৰ সংখ্যা	বাৰংবাৰতা
0	6
1	10
2	9
3	5
মুঠ	30

7. (i)

অংক	বাৰম্বাৰতা
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
মুঠ	50

(ii) আটাইতকৈ সঘনাই ওলোৱা অংককেইটা 3 আৰু 9। আটাইতকৈ কম ওলোৱা অংক 0.

8. (i)

ঘণ্টাৰ সংখ্যা	বাৰম্বাৰতা
0 - 5	10
5 - 10	13
10 - 15	5
15 - 20	2
মুঠ	30

(ii) ল'ৰা-ছোৱালী- 2

9.

বেটাৰীৰ জীৱনকাল (বছৰত)	বাৰম্বাৰতা
2.0 - 2.5	2
2.5 - 3.0	6
3.0 - 3.5	14
3.5 - 4.0	11
4.0 - 4.5	4
4.5 - 5.0	3
মুঠ	40

অনুশীলনী 14.3

1. (ii) প্ৰজনন সম্পৰ্কীয় স্বাস্থ্য অৱস্থা

3. (ii) দল A

4. (ii) বাৰংবাৰতা বহুভুজ (iii) নহয়

5. (ii) 184

8.

বয়স (বছৰ)	বাৰংবাৰতা	প্ৰস্থ	আয়তৰ দীঘ
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1}\times 1=5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1}\times 1=3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2}\times 1=3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2}\times 1=6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3}\times 1=3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5}\times 1=2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2}\times 1=2$

এই দৈৰ্ঘ্যবোৰ ব্যৱহাৰ কৰি তুমি এতিয়া স্তম্ভলেখ আঁকিব পাৰা।

9. (i)

চিঠিৰ সংখ্যা	বাৰংবাৰতা	অন্তৰালৰ প্ৰস্থ	আয়তৰ দীঘ
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3}\times 2=4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2}\times 2=30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2}\times 2=44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4}\times 2=8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8}\times 2=1$

এতিয়া স্তম্ভলেখটো আঁকা।

(ii) 6 - 8

অনুশীলনী 14.4

1. মাধ্য = 2.8; মধ্যমা = 3; বহুলক = 3
2. মাধ্য = 54.8; মধ্যমা = 52; বহুলক = 52
3. $x = 62$ 4. 14
5. 60 জন কৰ্মীৰ গড় বেতন = 5083.33 টকা

অনুশীলনী 15.1

1. $\frac{24}{30}$ অৰ্থাৎ $\frac{4}{5}$ 2. (i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$ 3. $\frac{3}{20}$ 4. $\frac{9}{25}$

5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$ (iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$ 6. (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$ 8. $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0 11. $\frac{7}{11}$ 12. $\frac{1}{15}$ 13. $\frac{1}{10}$

অনুশীলনী A1.1

1. (i) সদায় মিছা। বছৰটোত 12 মাহ থাকে।
   (ii) দ্ব্যৰ্থক। এটা উল্লিখিত বছৰত এটা শুক্ৰবাৰত দেৱালী পৰিবও পাৰে, নপৰিবও পাৰে।
   (iii) দ্ব্যৰ্থক। বছৰটোৰ কোনোবা এটা সময়ত মাগদিৰ উত্তাপ 26° C হ'ব পাৰে।
   (iv) সদায় সত্য।
   (v) সদায় অসত্য। কুকুৰে উৰিব নোৱাৰে।
   (vi) দ্ব্যৰ্থক। লিপ-ইয়াৰত ফেব্ৰুৱাৰীত 29 দিন থাকে।
2. (i) অসত্য। চতুৰ্ভুজৰ অন্তঃকোনবোৰৰ সমষ্টি 360°।
   (ii) সত্য (iii) সত্য (iv) সত্য
   (v) অসত্য, উদাহৰণ স্বৰূপে 7 + 5 = 12, যিটো অযুগ্ম নহয়।
3. (i) 2 তকৈ ডাঙৰ আটাইবোৰ মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম।
   (ii) স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ দুগুন সদায় যুগ্ম।
   (iii) যিকোনো $x > 1$ৰ ক্ষেত্ৰত $3x + 1 > 4$।
   (iv) যিকোনো $x \geq 0$ৰ ক্ষেত্ৰত $x^3 \geq 0$।
   (v) সমবাহু ত্ৰিভুজৰ মধ্যমা এডাল এটা কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকো হয়।

অনুশীলনী A1.2

1. (i) মানৱ মেৰুদণ্ডী। (ii) নহয়, দীনেশে অইন কাৰোবাৰ দ্বাৰা চুলি কটাব পাৰিলেহেঁতেন। (iii) গুলাগৰ এখন বহল জিভা আছে। (iv) আমাৰ অভিমত যে নাওখন কাইলৈ চাফ কৰিব লাগিব। (v) নেজ থকা আটাইবোৰ জন্তুৱে কুকুৰ হোৱাৰ প্ৰয়োজন নাই। উদাহৰণ স্বৰূপে, ম'হ, বান্দৰ, মেকুৰী ইত্যাদি ধৰণৰ জন্তুৰ নেজ আছে, কিন্তু কুকুৰ নহয়।

2. তুমি B আৰু 8 ৰ ওপৰেৰে লুটিয়াব লাগিব। যদি অইনটো ফালত B ৰ এটা যুগ্ম সংখ্যা আছে, তেন্তে নিয়মটো ভংগ হ'ল। একেদৰে যদি অইনটো ফালত 8 ৰ এটা ব্যঞ্জনবৰ্ণ আছে, তেন্তে নিয়মটো ভংগ হ'ল।

অনুশীলনী A1.3

1. তিনিটা সম্ভৱপৰ অনুমান
(i) যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল যুগ্ম।
(ii) যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল 4 ৰে বিভাজ্য।
(iii) যিকোনো তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যাৰ পূৰণফল 6 ৰে বিভাজ্য।

2. লাইন 4 : $1331 = 11^3$; লাইন 5 : $14641 = 11^4$;
লাইন 4 আৰু লাইন 5 ৰ ক্ষেত্ৰত অনুমানটো খাটিছে;
নহয়, কাৰণ $11^5 \neq 15101051$।

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.

4. $111111^2 = 12345654321$;
$1111111^2 = 1234567654321$

5. ছাত্ৰৰ নিজৰ উত্তৰ। উদাহৰণ স্বৰূপে, ইউক্লিডৰ স্বীকাৰ্যবোৰ।

অনুশীলনী A1.4

1. (i) একে কোণ থকা কিন্তু বিভিন্ন বাহুৰে তুমি যিকোনো দুটা ত্ৰিভুজ দিব পাৰা।
(ii) এটা ৰম্বাচৰ বাহুবোৰ সমান কিন্তু এটা বৰ্গ নহ'বও পাৰে।
(iii) এটা আয়তৰ কোণবোৰ সমান কিন্তু এটা বৰ্গ নহ'বও পাৰে।
(iv) $a = 3$ আৰু $b = 4$ ৰ ক্ষেত্ৰত বিবৃতিটো সত্য নহয়।
(v) $n = 11$ৰ ক্ষেত্ৰত $2n^2 + 11 = 253$, যিটো এটা মৌলিক নহয়।
(vi) $n = 41$, ৰ ক্ষেত্ৰত $n^2 - n + 41$ সংখ্যাটো মৌলিক নহয়।

2. ছাত্ৰৰ নিজা উত্তৰ।

3. ধৰা x আৰু y দুটা অযুগ্ম সংখ্যা। তেন্তে $x = 2m + 1$ (কোনোবা স্বাভাৱিক সংখ্যা m ৰ ক্ষেত্ৰত) আৰু $y = 2n + 1$ (কোনোবা স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ ক্ষেত্ৰত) $x + y = 2(m + n + 1)$। গতিকে $x + y$, 2 ৰে বিভাজ্য আৰু যুগ্ম।

4. প্ৰশ্ন 3 চোৱা। $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$।
গতিকে xy, 2 ৰে বিভাজ্য নহয়, সেয়ে ই অযুগ্ম।

5. ধৰা $2n$, $2n + 2$ আৰু $2n + 4$ তিনিটা ক্ৰমিক যুগ্ম সংখ্যা।
তেন্তে সিহঁতৰ যোগফল $6(n + 1)$, যিটো 6 ৰে বিভাজ্য।

7. (i) ধৰা তোমাৰ মূল সংখ্যাটো n। তেন্তে আমি তলৰ প্ৰক্ৰিয়াবোৰ কৰিছো—

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n + 9 \rightarrow 2n + 9 + n = 3n + 9 \rightarrow \frac{3n+9}{3} = n + 3 \rightarrow n + 3 + 4$$

$= n + 7 \rightarrow n + 7 - n = 7$।

(ii) লক্ষ্য কৰা যে $7 \times 11 \times 13 = 1001$। যিকোনো তিনিটা অংক লোৱা, যেনে abc। তেন্তে $abc \times 1001 = abcabc$। গতিকে ছয় অংকীয় সংখ্যা $abcabc$ সদায় 7, 11 আৰু 13 ৰে বিভাজ্য হ'ব।

অনুশীলনী A2.1

1. **স্তেপ-1: বিধিবদ্ধকৰণ (Formulation) :**

প্ৰাসংগিক কাৰককেইটা হ'ল— কম্পিউটাৰ এটা ভাড়া কৰাৰ কাৰণে সময় কাল আৰু আমাক দিয়া দুবিধ খৰচ। আমি ধৰি লও যে কম্পিউটাৰ এটা কিনা নাইবা ভাড়া লোৱাৰ লোৱাৰ খৰচৰ ক্ষেত্ৰত কোনো তাৎপৰ্যপূৰ্ণ পৰিবৰ্তন নাই। গতিকে আমি এনে যিকোনো পৰিবৰ্তন এটাক অপ্ৰাসংগিক বুলিয়ে গণ্য কৰিম। আমি কম্পিউটাৰৰ আটাইবোৰ বিশেষ মাৰ্কা আৰু প্ৰজন্মকো একে বুলি গণ্য কৰিম, অৰ্থাৎ এই পাৰ্থক্যবোৰো অপ্ৰাসংগিক।

x মাহৰ বাবে কম্পিউটাৰটো ভাড়া কৰাৰ খৰচ $2000x$ টকা। যদি এইটো কম্পিউটাৰ এটা কিনা খৰচতকৈ বেছি হয়, আমি কম্পিউটাৰ এটা কিনিলেহে বেছি লাভৱান হ'ম। গতিকে সমীকৰণটো হ'ব—

$$2000\,x = 25000 \quad (1)$$

স্তেপ-2 : **বিধিবদ্ধকৰণ :** (1)ক সমাধা কৰি, $x = \dfrac{25000}{2000} = 12.5$

স্তেপ-3 : **বিশ্লেষণ :** যিহেতু 12.5 মাহ পিছত কম্পিউটাৰ এটা ভাড়া লোৱা খৰচ বেছি হয়, গতিকে যদি তুমি ইয়াক 12 মাহতকৈ বেছি ব্যৱহাৰ কৰিব লগা হয় তেন্তে কম্পিউটাৰ এটা কিনাটো বেছি সস্তা হ'ব।

2. স্টেপ-1 :**বিধিবদ্ধন :** আমি ধৰি ল'ম যে গাড়ীবোৰে এটা স্থিৰ গতিত ভ্ৰমণ কৰে। সেয়ে গতিৰ যিকোনো পৰিবৰ্তনক অপ্ৰাসংগিক বুলি গণ্য কৰা হ'ব। যদি গাড়ীবোৰে x ঘণ্টা পিছত লগ লাগে, প্ৰথম গাড়ীখনে A ৰ পৰা এটা দূৰত্ব $40x$ কিলোমিটাৰ ভ্ৰমণ কৰিব আৰু দ্বিতীয় গাড়ীখনে $30x$ কিলোমিটাৰ ভ্ৰমণ কৰিব যাতে ই A ৰ পৰা $(100 - 30x)$ কিঃমিঃ দূৰত্ব এটাত থাকিব। গতিকে সমীকৰণটো হ'ব

$40x = 100 - 30x$, অৰ্থাৎ $70x = 100$.

স্টেপ-2 :**সমাধান :** সমীকৰণটো সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$$x = \frac{100}{70}$$

স্টেপ-3 :**বিশ্লেষণ :** $\frac{100}{70}$ আসন্নভাৱে 1.4 ৰ সমান।

গতিকে গাড়ীবোৰ 1.4 ঘণ্টা পিছত লগ হ'ব।

3. স্টেপ-1 :**বিধিবদ্ধন :** চন্দ্ৰই পৃথিৱীক প্ৰদক্ষিণ কৰা গতি

$$= \frac{\text{কক্ষৰ দৈৰ্ঘ্য}}{\text{লোৱা সময়}}$$

স্টেপ-2 :**সমাধান :** যিহেতু কক্ষপথ প্ৰায় বৃত্তাকৃতিৰ, দৈৰ্ঘ্য হ'ব $2 \times \pi \times 384000$ কিঃমিঃ $= 2411520$ কিঃমিঃ প্ৰায়। চন্দ্ৰ কক্ষপথ এবাৰ সম্পূৰ্ণ কৰিবলৈ 24 ঘণ্টা লয়। গতিকে,

$$\text{গতি} = \frac{2411520}{24} = 100480 \text{ কি.মি./ঘণ্টা।}$$

স্টেপ-3 :**বিশ্লেষণ :** গতিবেগ হ'ব 100480 কি.মি./ঘণ্টা।

4. **বিধিবদ্ধন :** এটা মানি ল'ব পাৰো যে বিলখনত থকা পাৰ্থক্যটো কেৱল পানী উত্তাপকটো ব্যৱহাৰ কৰাৰ বাবে হৈছে।

ধৰা পানী-উত্তাপকটো ব্যৱহাৰ কৰা ঘণ্টাৰ গড় সংখ্যা $= x$

পানী-উত্তাপক ব্যৱহাৰৰ কৰাৰ ফলত প্ৰতি মাহে পাৰ্থক্য

$= (1240 - 1000)$ টকা $= 240$ টকা

এঘণ্টাৰ বাবে পানী-উত্তাপক ব্যৱহাৰৰ খৰচ $= 8$ টকা

গতিকে 30 দিনৰ বাবে পানী-উত্তাপক ব্যৱহাৰ কৰাৰ খৰচ $= 8 \times 30 \times x$

গতিকে, $240x = 240$

সমাধান : সমীকৰণটোৰ পৰা আমি পাওঁ $x = 1$

বিশ্লেষণ : যিহেতু $x = 1$, পানী উত্তাপকটো দিনে গড়ে 1 ঘণ্টাকৈ ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে।

অনুশীলনী A2.2

1. আমি ইয়াত কোনো বিশেষ সমাধানৰ কথা আলোচনা নকৰিম। আমি শেষ উদাহৰণটোত ব্যৱহাৰ কৰাৰ দৰে তোমালোকে একে পদ্ধতিয়ে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰিবা, অথবা তোমালোকে উপযুক্ত বিবেচনা কৰা যিকোনো পদ্ধতিয়ে ল'ব পাৰিবা।

অনুশীলনী A2.3

1. আমি ইতিমধ্যে উল্লেখ কৰিছো যে বিচ্ছিন্ন অংশটো বাস্তৱ জীৱনৰ পৰিস্থিতিত অতি বাহুল্য হ'ব পাৰে। তদুপৰি, কথা-প্ৰশ্নবোৰত আমি উত্তৰটোৰ বৈধতা পেচ নকৰো। ইয়াৰ বাহিৰেও কথা-প্ৰশ্নৰ এটা 'শুদ্ধ উত্তৰ' আছে। বাস্তৱ জীৱনৰ পৰিস্থিতিত এনেকুৱা এটা ক্ষেত্ৰ হোৱাৰ প্ৰয়োজন নাই।

2. প্ৰয়োজনীয় কাৰকবোৰ— (ii) আৰু (iii)। ইয়াত (i) এটা প্ৰয়োজনীয় কাৰক নহয়, যদিও বিক্ৰী হোৱা যান-বাহনবোৰৰ ওপৰত ইয়াৰ এটা প্ৰভাৱ থাকিব পাৰে।

প্ৰাকৃতিক দুৰ্যোগ ঃ ধুমুহাৰ সময়ত ল'বলগীয়া সাৱধানতা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ বাবে ঃ

- ঘৰৰ দুৱাৰ-খিৰিকি, ভেন্টিলেটৰ আদি বন্ধ কৰি ৰাখিবা।
- ওখ-ডাঙৰ গছৰ ওচৰৰপৰা আঁতৰত থাকিবা। কিয়নো সেইবোৰ উফৰি পৰিব পাৰে।
- ট্ৰেন্সফৰ্মাৰ, ওলমি থকা বৈদ্যুতিক তাঁৰ, বৈদ্যুতিক খুঁটা, ৰেৰ, অস্থায়ী চিলিং, ওলোমাই থোৱা টিউব বাল্ব আদিবোৰ গাৰ ওপৰত সৰি পৰাৰ আশংকা থাকে। গতিকে সেইবোৰৰপৰা আঁতৰত থাকিবা।
- উপকূলীয় অঞ্চলৰপৰা দূৰত থাকিবা।
- বতাহে উৰুৱাই অনা কঠিন বা চোকা বস্তু যাতে তোমাৰ গাত নপৰে, সেইবাবে ঘৰৰ ভিতৰত বা নিৰাপদ স্থানত আশ্ৰয় ল'বা।
- তোমাৰ ঘৰৰ বা বিদ্যালয়ৰ চৌপাশত যদি মৰি যোৱা গছ বা ডাঙৰ ডাল থাকে সেইবোৰ আঁতৰোৱাৰ ব্যৱস্থা কৰিবা।
- ধুমুহাৰ আগজাননী পাবলৈ নিয়মিত ৰেডিঅ' বা দূৰদৰ্শনৰ বাতৰি শুনিবলৈ বা চাবলৈ অভ্যাস কৰিবা।
- ধুমুহাৰ আগজাননী পালে আগতীয়াকৈ কেইদিনমানৰ খাদ্যবস্তু জমাই থ'বা যাতে ইয়াৰ নাটনি নহয়।
- তোমাৰ ঘৰৰ বা বিদ্যালয়ৰ বিদ্যুৎ সংযোগৰ মুখ্য ছুইচটো বন্ধ কৰি দিবা যাতে চৰ্ট-চাৰ্কিটৰপৰা ৰক্ষা পৰে।
- ধুমুহাৰ সম্ভাৱনা থাকিলে নাও বা পানী জাহাজত ভ্ৰমণ নকৰিবা।

বিদ্যালয় পৰ্যায়ৰ গণিতৰ লক্ষ্য/দৃষ্টি

- শিশুৱে গণিত উপভোগ কৰিবলৈ শিকে, ভয় কৰিবলৈ নহয়।
- শিশুৱে গণিত প্ৰয়োজনতহে শিকে ঃ গণিত সূত্ৰ আৰু যান্ত্ৰিক পদ্ধতিৰ উৰ্দ্ধত।
- শিশুৱে গণিতৰ মাধ্যমেৰে কথা পাতিবলৈ, মতামত বিনিময় কৰিবলৈ, আলোচনা কৰিবলৈ আৰু কাম কৰিবলৈ ভাল পায়।
- তেওঁলোকে গণিতৰ অৰ্থপূৰ্ণ সমস্যা উত্থাপন আৰু সমাধান কৰি আনক অবাক কৰে।
- বস্তুৰ সম্পৰ্ক বুজিবলৈ, গাঁথনি পৰ্যবেক্ষণ কৰিবলৈ, কাৰণ দৰ্শাবলৈ আৰু উক্তিৰ সত্যাসত্যৰ যুক্তি দিবলৈ শিশুৱে বিমূৰ্ত চিন্তাও কৰে।
- শিশুৱে গণিতৰ মৌলিক গাঁথনি ধৰিব পাৰে ঃ বিদ্যালয় পৰ্যায়ৰ গণিতৰ বুনিয়াদী বিষয়— পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি আৰু ত্ৰিকোণমিতি এই সকলোবোৰে বিমূৰ্ততা, গাঁথনি আৰু সাধাৰণীকৰণৰ কাৰণে পদ্ধতিৰ সন্ধান দিয়ে।
- শিক্ষকে প্ৰত্যেক শিশুৱে গণিত শিকিব পৰাকৈ তেওঁলোকক সম্পূৰ্ণ বিশ্বাসেৰে শ্ৰেণীত আত্মনিয়োগ কৰোৱায়।

— ৰাষ্ট্ৰীয় কাৰিকুলাম আধাৰ, ২০০৫

মাধ্যমিক শিক্ষা বিভাগ, অসম চৰকাৰ