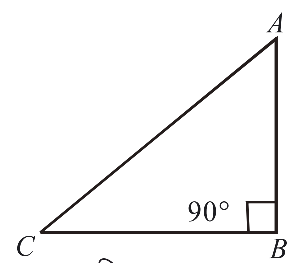
अध्याय

14

न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
(Trigonometric Ratios of Acute Angles)

14.01 समकोण त्रिभुज (Right Angled Triangle):

पूर्ववर्ती अध्यायों में हमनें पढ़ा है कि ऐसा त्रिभुज जिसमें एक कोण $90°$ का हो, वह समकोण त्रिभुज कहलाता है। चित्र 14.01 एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B$ एक समकोण है। समकोण के सम्मुख भुजा को कर्ण कहते हैं, अतः समकोण ΔABC में AC कर्ण है। किसी समकोण त्रिभुज के अन्य दो कोणों के संदर्भ में किसी कोण को बनाने वाली कर्ण के अतिरिक्त दूसरी भुजा आधार (base) अथवा आसन्न भुजा तथा इस कोण की सम्मुख भुजा लम्ब कहलाती है। चित्र 14.01 में $\angle C$ के लिए भुजा CB आधार तथा भुजा AB को लम्ब कहेंगे। इसी प्रकार $\angle A$ के लिए भुजा AB को आधार तथा भुजा BC को लम्ब कहेंगे। समकोण त्रिभुज में समकोण के अतिरिक्त अन्य कोण न्यून कोण होते हैं। समकोण त्रिभुज की भुजाओं में परस्पर संबंध के लिए **बौधायन सूत्र**



चित्र 14.01

"किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बना वर्ग का क्षेत्रफल त्रिभुज की शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है"

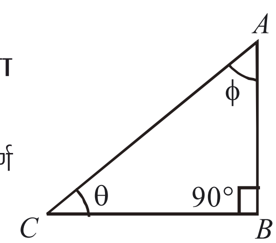
उपयोग में लिया जाता है। उपर्युक्त प्रमेय को संक्षेप में चित्र 14.01 के संदर्भ में इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

स्पष्ट है कि यदि AB, BC तथा AC में से कोई दो भुजाएँ दी गई हों तो तीसरी भुजा ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 1: किसी समकोण त्रिभुज ABC में कोण θ तथा ϕ के लिए भुजाओं के नाम बताईये।

हल : किसी त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है। अतः भुजा AC कर्ण है। अब कोण θ के लिए भुजा BC आधार तथा भुजा AB लम्ब है। इसी प्रकार कोण ϕ के लिए भुजा AB आधार तथा भुजा BC लम्ब है।



चित्र 14.02

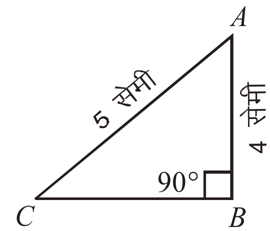
उदाहरण 2: किसी त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है। यदि भुजा $AB = 4$ सेमी तथा भुजा $AC = 5$ सेमी हो, तो भुजा BC ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार ΔABC का कच्चा चित्र बनाइये, जिसमें

$\angle B = 90°$

$AC = 5$ सेमी

$AB = 4$ सेमी



चित्र 14.03

अब बौधायन सूत्र से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

या $\quad (5)^2 = (4)^2 + BC^2$

या $\quad BC^2 = 25 - 16$

या $\quad BC^2 = 9$

अतः $\quad BC = 3$ सेमी

14.02 न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of an Acute Angle):

किसी समकोण त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं के अनुपात को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं।

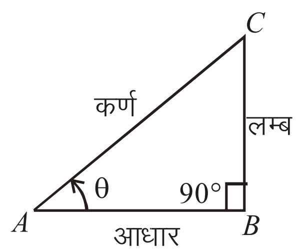
माना ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle ABC$ समकोण है, तथा $\angle CAB = \theta$ हो, तो

(i) $\dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \text{sine}\,\theta$ या ज्या θ ।

sine θ को संक्षेप में $\sin\theta$ या ज्या θ लिखा जाता है।

(ii) $\dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC} = \text{cosine}\,\theta$ या कोटिज्या θ ।

cosine θ को संक्षेप में $\cos\theta$ या कोज्या θ लिखा जाता है।



चित्र 14.04

(iii) $\dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \dfrac{BC}{AB} = \text{tangent}\,\theta$ या स्पर्शज्या θ ।

tangent θ को संक्षेप में $\tan\theta$ या स्प θ लिखा जाता है।

(iv) $\dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{AB}{BC} = \text{cotangent}\,\theta$ या कोटिस्पर्शज्या θ ।

cotangent θ को संक्षेप में $\cot\theta$ या कोस्प θ लिखा जाता है।

(v) $\dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \dfrac{AC}{AB} = \text{secant}\,\theta$ या व्युत्क्रम कोटिज्या θ ।

secant θ को संक्षेप में $\sec\theta$ या व्युकोज्या θ लिखा जाता है।

(vi) $\dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{AC}{BC} = \text{cosecant}\,\theta$ या व्युत्क्रमज्या θ ।

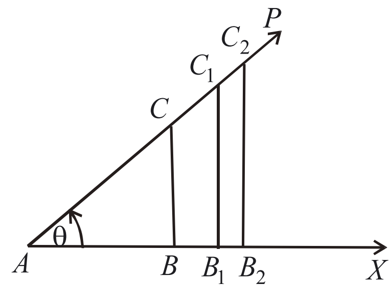
cosecant θ को संक्षेप में $\text{cosec}\,\theta$ या व्युज्या θ लिखा जाता है।

टिप्पणी : (i) मान लीजिए एक परिक्रामी रेखा AX अपनी आदि स्थिति AX से शीर्ष A को स्थिर रखते हुए वामावर्त दिशा में परिक्रमा करती हुई एक धनात्मक न्यून कोण $\angle XAP = \theta$ बनाती है। बिन्दु C, C_1, C_2 से AX पर लम्ब क्रमशः CB, C_1B_1 तथा C_2B_2 खींचिए।

हम देखते हैं कि त्रिभुज CAB, C_1AB_1, C_2AB_2 इत्यादि समरूप त्रिभुज हैं। इसलिए

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \cdots$$

और $$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \cdots$$



चित्र 14.05

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $\sin\theta$ या $\cos\theta$ का मान समान रहता है अथात् इनके मान परिक्रामी रेखा पर स्थित बिन्दु P की स्थिति पर निर्भर नहीं करता है। इसी प्रकार θ के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात भी परिक्रामी रेखा पर बिन्दु P की स्थिति पर निर्भर नहीं करते हैं।

अतः किसी त्रिकोणमितीय अनुपात का मान न्यून कोण θ पर निर्भर करता है न कि समकोण त्रिभुज की आकृति पर। क्योंकि प्रत्येक कोण θ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात का मान अद्वितीय होता है, इस कारण से त्रिकोणमितीय अनुपात को त्रिकोणमितीय कलन भी कहते हैं।

(ii) $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \ldots$ इत्यादि का अर्थ कदापि नहीं है कि sin या cos या tan या $\cdots$ को θ से गुणा किया गया है

अर्थात् $$\sin\theta \neq \sin\times\theta$$
$$\cos\theta \neq \cos\times\theta$$
$$\tan\theta \neq \tan\times\theta$$

(iii) किसी भी धनात्मक न्यून कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात सदैव धनात्मक होते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

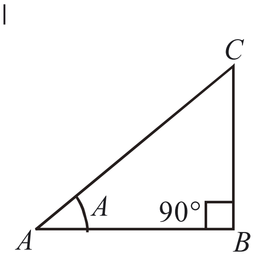
उदाहरण 3: त्रिभुज ABC में कोण B समकोण है, कोण A के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए।

हल : चित्र 14.06 के अनुसार भुजा AC कर्ण है तथा कोण A की सम्मुख भुजा BC है। अतः ΔABC में भुजा AB आधार, भुजा BC लम्ब तथा भुजा AC कर्ण है।

$$\therefore \quad \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$



चित्र 14.06

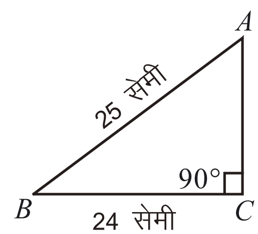
$$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{AC}{BC}$$

उदाहरण 4: त्रिभुज ABC में कोण C समकोण है तथा $AB = 25$ सेमी तथा $BC = 24$ सेमी है, तो कोण A के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ ΔABC एक समकोण त्रिभुज है



चित्र 14.07

$$\therefore \quad AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(25)^2 - (24)^2}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$= 7 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{24}{25}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{25}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{7}$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{24}$$

$$\sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{25}{7}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AB}{BC} = \frac{25}{24}$$

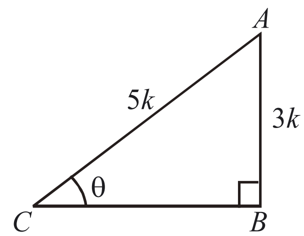
उदाहरण 5: यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ हो, तो θ के शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC की रचना करते हैं जिसमें $\sin\theta = \frac{3}{5}$ (चित्र 14.08) अर्थात् लम्ब AB और कर्ण AC, $3:5$ के अनुपात में हैं। माना $AB = 3k$ तथा $AC = 5k$, जहाँ $k > 0$ जो कि अनुपातिक अचर राशि है।

अतः बौधायन सूत्र से

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = (5k)^2 - (3k)^2 = 16k^2$$

$\therefore \quad BC = \pm 4k$



चित्र 14.08

क्योंकि कोण θ न्यून कोण है, अतः BC धनात्मक होगी

अर्थात् $BC = 4k$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}.$$

उदाहरण 6: यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$ हो, तो $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

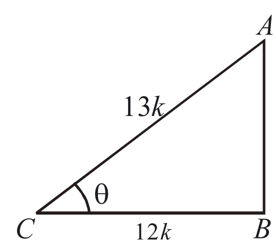
हल : त्रिभुज ABC की रचना करते है जिसमें $\sec\theta = \frac{13}{12}$ (चित्र 14.09)।

अर्थात् कर्ण AC और आधार $BC, 13:12$ अनुपात में है।

माना $AC = 13k, BC = 12k,$

जहाँ $k > 0,$ जो कि अनुपातिक अचर राशि हैं।

अतः बौधायन सूत्र से



चित्र 14.09

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (13k)^2 - (12k)^2 = 25k^2$$

$\therefore \quad AB = \pm 5k$

क्योंकि कोण θ न्यून कोण है, अतः AB धनात्मक होगी।

$\therefore \quad AB = 5k$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

प्रश्नानुसार $$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \frac{1-\frac{5}{12}}{1+\frac{5}{12}} = \frac{7}{17}$$

उदाहरण 7: यदि $\operatorname{cosec} A = 2$, तो $\cot A + \frac{\sin A}{1+\cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

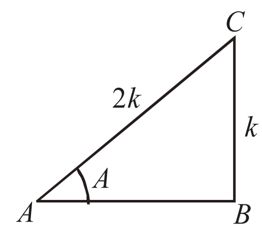
हल : $\because \operatorname{cosec} A = \frac{2}{1}$

$\therefore$ त्रिभुज ABC की रचना करते है जिसमें कर्ण AC और लम्ब BC, $2:1$ के अनुपात में हैं (चित्र 14.10)

माना $AC = 2k,\ BC = k$

जहां $k > 0$, जो कि अनुपातिक अचर राशि हैं।

अतः बौधायन सूत्र से



चित्र 14.10

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

या $$AB^2 = (2k)^2 - k^2 = 3k^2$$

या $$AB = \pm\sqrt{3}k$$

क्योंकि कोण A न्यून कोण है, अतः AB धनात्मक होगी।

$$\therefore \quad AB = \sqrt{3}k$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3}$$

प्रश्नानुसार $$\cot A + \frac{\sin A}{1+\cos A} = \sqrt{3} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{2-\sqrt{3}}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2$$

प्रश्नमाला 14.1

1. यदि ΔABC में $\angle A = 90°, a = 25$ सेमी, $b = 7$ सेमी हो, तो $\angle B$ और $\angle C$ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए।

2. यदि ΔABC में $\angle B = 90°, a = 12$ सेमी, $b = 13$ सेमी हो, तो कोण $\angle A$ और $\angle C$ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए।

3. यदि $\tan A = \sqrt{2} - 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. यदि $\sin A = \dfrac{1}{3}$ तो $\cos A \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\cos\theta = \dfrac{8}{17}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\cos A = \dfrac{5}{13}$ हो, तो $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\cos A + \operatorname{cosec} A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

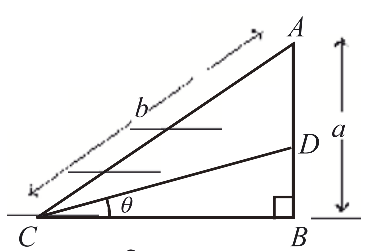
7. यदि $5\tan\theta = 4$ हो, तो $\dfrac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. त्रिभुज ABC में $\angle C = 90°$ है और यदि $\cot A = \sqrt{3}$ तथा $\cot B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1$.

9. यदि $16\cot A = 12$ हो, तो $\dfrac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. चित्र 14.13 में $AD = DB$ तथा $\angle B = 90°$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

    (i) $\sin\theta$ (ii) $\cos\theta$ (iii) $\tan\theta$

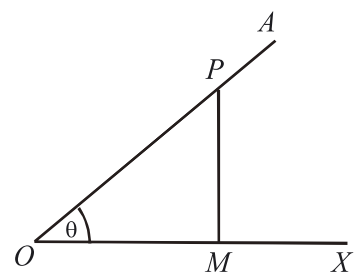


चित्र 14.13

14.03 त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंध :

(Relation between Trigonometric Ratios):

किसी समकोण त्रिभुज OMP में कोण θ के लिए भुजा PM लम्ब, भुजा OM आधार तथा भुजा OP कर्ण है।



चित्र 14.14

(i) $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} \qquad \cdots (1)$$

तथा $$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} \qquad \cdots (2)$$

(1) और (2) का गुणा करने पर

$$\sin\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = \frac{PM}{OP} \times \frac{OP}{PM} = 1$$

अर्थात् $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

या $$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

अतः $\sin\theta$ और $\operatorname{cosec}\theta$ परस्पर व्युत्क्रम हैं।

(ii) $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$

चित्र (14.14) से

$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{OM}{OP} \qquad \cdots (3)$$

और $$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{OP}{OM} \qquad \cdots (4)$$

समीकरण (3) और (4) का परस्पर गुणा करने पर

$$\cos\theta \cdot \sec\theta = \frac{OM}{OP} \cdot \frac{OP}{OM} = 1$$

अर्थात् $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \quad \text{या} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

अतः $\cos\theta$ और $\sec\theta$ परस्पर व्युत्क्रम हैं।

(iii) $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$

चित्र 14.14 से $$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{PM}{OM} \qquad \cdots (5)$$

और $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{OM}{PM}$ $\cdots$ (6)

समीकरण (5) और (6) को परस्पर गुणा करने पर

$$\tan\theta \cdot \cot\theta = \frac{PM}{OM} \times \frac{OM}{PM} = 1$$

अर्थात् $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ या $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

अतः $\tan\theta$ और $\cot\theta$ परस्पर व्युत्क्रम हैं।

(iv) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

समीकरण (1) और (3) से

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}} = \frac{PM}{OP} \times \frac{OP}{OM} = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \tan\theta$$

अर्थात् $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(v) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

समीकरण (1) और (3) से

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{OM}{OP}}{\frac{PM}{OP}} = \frac{OM}{OP} \times \frac{OP}{PM} = \frac{OM}{PM} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \cot\theta$$

अर्थात् $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(vi) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

समीकरण (1) और (3) से

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} \text{ एवं } \cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

वर्ग कर जोड़ने पर

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$= \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2} = 1$$ [बौधायन सूत्र से (चित्र 14.14)]

(vii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

चित्र 14.14 से

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM}$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{PM^2}{OM^2} = \frac{OM^2 + PM^2}{OM^2} = \frac{OP^2}{OM^2}$$ [बौधायन सूत्र से]

[$\because \sec\theta = \dfrac{OP}{OM}$, चित्र (14.14) से]

या $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

वैकल्पिक विधि :

हम जानते हैं कि

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

दोनों तरफ $\cos^2\theta$ से भाग देने पर

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \left(\because \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta, \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta\right)$$

(viii) $1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

चित्र 14.14 से $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM}$

$$\therefore \quad 1 + \cot^2\theta = 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2 = \frac{PM^2 + OM^2}{PM^2} = \frac{OP^2}{PM^2}$$ (बौधायन सूत्र से)

$= \mathrm{cosec}^2\theta$ $\left(\because \mathrm{cosec}\,\theta = \dfrac{OP}{PM}\right.$ चित्र (14.14) से $\Big)$

वैकल्पिक विधि :

हम जानते हैं कि $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

दोनों तरफ $\sin^2\theta$ से भाग देने पर

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \cot^2\theta + 1 = \text{cosec}^2\theta \quad \left(\because \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta, \frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta\right)$$

टिप्पणी : $(\sin\theta)^2$ को सदैव $\sin^2\theta$ लिखा जाता है और इसे साइन स्क्वायर थीटा पढ़ा जाता है।

अर्थात् $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta \neq \sin\theta^2$

अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों को भी इसी प्रकार से समझना चाहिए।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 8: यदि $\cos\theta = \frac{5}{13}$ हो, तो $\sin\theta$, $\tan\theta$ के मान त्रिकोण मितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए, जबकि θ एक न्यून कोण है।

हल : हम जानते हैं कि

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$\cos\theta = \frac{5}{13}$ रखने पर

$$\sin^2\theta + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \pm\frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{12}{13}$$ (क्योंकि θ न्यून कोण है)

अब $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}$

उदाहरण 9: यदि $\tan\theta = \sqrt{3}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपातों को त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए जबकि θ एक न्यून कोण है।

हल : हम जानते हैं कि

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

या $\sec^2\theta = 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2$

$$= 1 + 3 = 4$$

$\Rightarrow \quad \sec\theta = \pm 2$

या $\quad \sec\theta = 2$ (क्योंकि θ न्यून कोण है)

$\because \quad \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{1}{2}$

अतः $\quad \sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}/2\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot$$

उदाहरण 10: यदि $\text{cosec}\,A = \sqrt{10}$ हो, तो $\cot A, \sin A, \cos A$ के मान त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए। θ न्यून कोण है।

हल : हम जानते हैं कि

$$1 + \cot^2 A = \text{cosec}^2 A$$

$\Rightarrow \quad \cot^2 A = \text{cosec}^2 A - 1$

$\Rightarrow \quad \cot^2 A = \left(\sqrt{10}\right)^2 - 1 = 10 - 1 = 9$

$\Rightarrow \quad \cot A = 3$ (क्योंकि θ न्यून कोण है)

अब $\quad \sin A = \dfrac{1}{\text{cosec}\,A} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

और $\quad \cos A = \cot A \cdot \sin A$

$$= 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

उदाहरण 11: यदि $\sec\theta = \dfrac{17}{8}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपातों को त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए। θ न्यून कोण है।

हल : हम जानते है कि

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

या $\quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

या $\quad \tan^2\theta = \left(\dfrac{17}{8}\right)^2 - 1$

$$= \frac{289 - 64}{64} = \frac{225}{64}$$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{15}{8}$ (क्योंकि θ न्यून कोण है)

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{(15/8)} = \frac{8}{15}$$

और $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{17/8} = \frac{8}{17}\cdot$

अब $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

$$= \frac{15}{8}\cdot\frac{8}{17}$$

$$= \frac{15}{17}$$

और $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\left(\frac{15}{17}\right)} = \frac{17}{15}.$

उदाहरण 12: यदि $\sin\theta = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ हो, तो $\cos\theta$ और $\tan\theta$ के मान त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए। θ न्यून कोण है।

हल : $\sin\theta = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

अब $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \quad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

या $\cos^2\theta = 1 - \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$

$$= \frac{\left(a^2+b^2\right)^2 - \left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$$

$$= \frac{4a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \pm\frac{2ab}{\left(a^2+b^2\right)}$

या $\cos\theta = \frac{2ab}{\left(a^2+b^2\right)}$ ($\because$ θ न्यून कोण है)

अब $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}{\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)} = \dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

प्रश्नमाला 14.2

त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंधों द्वारा हल कीजिए : [प्रश्न 1 से 10 तक]

1. यदि $\operatorname{cosec} A = \dfrac{5}{4}$ हो, तो $\cot A, \sin A, \cos A$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\tan A = \dfrac{20}{21}$ हो, तो $\cos A$ तथा $\sin A$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\sin A = \dfrac{3}{5}$ हो, तो $\cos A$ और $\tan A$ के मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\cos B = \dfrac{1}{3}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\sin A = \dfrac{5}{13}$ हो, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\tan A = \sqrt{2} - 1$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

7. यदि $\tan A = 2$ हो, तो $\sec A \sin A + \tan^2 A - \operatorname{cosec} A$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ हो, तो $\dfrac{4\tan\theta - 5\cos\theta}{\sec\theta + 4\cot\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. यदि $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ हो, तो $\sin\theta$ तथा $\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. यदि $\sec\theta = 2$ तो $\tan\theta, \cos\theta$ तथा $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

14.04 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometric Identities) :

ऐसे त्रिकोणमितीय संबंध जो उनमें प्रयुक्त कोण के उन सभी मानों के लिए सदैव सत्य हो, जिन मानों परयुक्त त्रिकोणमितीय अनुपात परिभाषित हो, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ कहलाती हैं।

अनुच्छेद 11.02 तथा 11.03 में परिभाषित सभी संबंध θ के सभी मानों के लिए सत्य है। अतः इन्हें मूलभूत सर्वसमिकाएँ कहते हैं।

त्रिकोणमिती में सभी संबंध सर्वसमिकाएँ नहीं होती हैं। उदाहणार्थ $\sin\theta = \cos\theta$ केवल एक समीकरण है क्योंकि यह θ के समस्त मानों के लिए सत्य नहीं है।

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करते समय निम्न बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिए :

(i) सर्वसमिका में जटिल पक्ष की तरफ से प्रारम्भ करते हैं तथा मूलभूत सर्वसमिकाओं का प्रयोग करते हुए दूसरा पक्ष ज्ञात करते हैं।

(ii) यदि सर्वसमिका में कई त्रिकोणमितीय अनुपात विद्यमान हों, तो सभी अनुपातों को sine अथवा cosine को व्यक्त करना सामान्यतया सुविधाजनक होता है।

(iii) करणी चिह्न (Redical sign) यदि कोई हो, तो यथासम्भव हटाना चाहिए।

(iv) कुछ समस्याओं में परिमेयकरण का उपयोग भी किया जा सकता है।

(v) यदि सर्वसमिका के एक पक्ष को सुगमता से दूसरे पक्ष में रूपान्तरित नहीं किया जा सकता हो, तो दोनों पक्षों को यथासम्भव सरल करके एक ही राशि अथवा पद के समानक सम (Identically equal) सिद्ध कर देना चाहिए।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 13: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$(\sec\theta+\cos\theta)(\sec\theta-\cos\theta)=\tan^2\theta+\sin^2\theta.$$

हल : वाम पक्ष $=\sec^2\theta-\cos^2\theta$

$=1+\tan^2\theta-(1-\sin^2\theta)$ $\left[\because \sec^2\theta=1+\tan^2\theta \text{ तथा } \cos^2\theta=1-\sin^2\theta\right]$

$=\tan^2\theta+\sin^2\theta$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 14: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=1.$$

हल : वाम पक्ष $=(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta)$

$$=\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

(सभी को sine तथा cosine में बदलने पर)

$$=\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$ [मूलभूत सर्वसमिकाओं के उपयोग से]

$=1$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 15: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\sqrt{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}=\tan\theta+\cot\theta\cdot$$

हल : वाम पक्ष $=\sqrt{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}$

$=\sqrt{(1+\tan^2\theta)+(1+\cot^2\theta)}$ [मूलभूत सर्वसमिकाओं के उपयोग से]

$$= \sqrt{\tan^2\theta + 2 + \cot^2\theta}$$

$$= \sqrt{\tan^2\theta + 2\tan\theta\cot\theta + \cot^2} \quad [\because \tan\theta\cot\theta = 1]$$

$$= \sqrt{(\tan\theta + \cot\theta)^2}$$

$$= \tan\theta + \cot\theta$$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 16: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\sqrt{\frac{\mathbf{1+\cos\theta}}{\mathbf{1-\cos\theta}}} = \mathbf{cosec\,\theta + \cot\theta}\cdot$$

हल : वाम पक्ष में करणी चिह्न को हटाने के लिए अंश तथा हर को $\sqrt{1+\cos\theta}$ से गुणा करने पर

वाम पक्ष $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \times \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \quad [\because 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta]$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \mathrm{cosec}\,\theta + \cot\theta$$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 17: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\mathbf{\sec\theta - \tan\theta}}{\mathbf{\sec\theta + \tan\theta}} = \mathbf{1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta}\cdot$$

हल : वाम पक्ष $= \dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \qquad \cdots(1)$$

दक्षिण पक्ष $=1-2\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+2\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$$=\frac{\cos^2\theta-2\sin\theta+2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-2\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

समीकरण (1) और (2) से

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

उदाहरण 18: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}.$$

हल : दोनों पक्षों का पुनः निर्धारण से

$$\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{2}{\cos\theta}=2\sec\theta$$

अब वाम पक्ष $=\frac{\sec\theta+\tan\theta+\sec\theta-\tan\theta}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}$

$$=\frac{2\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\sec\theta}{1+\tan^2\theta-\tan^2\theta}$$

$$=2\sec\theta$$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 19: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\sec^6\theta - \tan^6\theta = 1 + 3\tan^2\theta + 3\tan^4\theta \cdot$$

हल : हम जानते हैं कि

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

अब वाम पक्ष $= (\sec^2\theta)^3 - (\tan^2\theta)^3$

$$= (\sec^2\theta - \tan^2\theta)(\sec^4\theta + \sec^2\theta\tan^2\theta + \tan^4\theta)$$

$$= (1 + \tan^2\theta - \tan^2\theta)\{\sec^2\theta(\sec^2\theta + \tan^2\theta) + \tan^4\theta\}$$

$$= 1\cdot\{(1+\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta+\tan^2\theta) + \tan^4\theta\}$$

$$= (1+\tan^2\theta)(1+2\tan^2\theta) + \tan^4\theta$$

$$= 1 + 3\tan^2\theta + 3\tan^4\theta$$

= दक्षिण पक्ष

प्रश्नमाला 14.3

निम्न सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए :

1. $\cos\theta \cdot \tan\theta = \sin\theta$
2. $(1-\sin^2\theta)\tan^2\theta = \sin^2\theta$
3. $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$
4. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$
5. $\operatorname{cosec}^6\theta - \cot^6\theta = 1 + 3\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta$
6. $\sin^2\theta\cos\theta + \tan\theta\sin\theta + \cos^3\theta = \sec\theta$
7. $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \sin\theta + \cos\theta$
8. $\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}-1} + \dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta+1} = 2\sec^2\theta$
9. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

10. $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$

11. $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

12. $\sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}=\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta$

13. $\frac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta-1)}}{\operatorname{cosec}\theta}=\cos\theta$

14. $(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta)=2$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. किसी समकोण त्रिभुज में

   (i) $\sin\theta=\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ (ii) $\cos\theta=\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ (iii) $\tan\theta=\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

   (iv) $\cos\theta=\frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$ (v) $\sec\theta=\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$ (vi) $\operatorname{cosec}\theta=\frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

2. (i) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (ii) $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

   (iii) $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$ (iv) $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

3. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

4. $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

5. $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

विविध प्रश्नमाला 14

1. यदि $\tan\theta = \sqrt{3}$ है तो $\sin\theta$ का मान है –

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) 1 [ ]

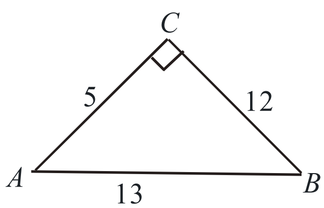
2. यदि $\sin\theta = \frac{5}{13}$ है तो $\tan\theta$ का मान है –

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{12}{13}$ (C) $\frac{13}{12}$ (D) $\frac{12}{5}$ [ ]

3. यदि $\sqrt{3}\cos A = \sin A$ हो, तो $\cot A$ का मान है –

(A) $\sqrt{3}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 2 [ ]

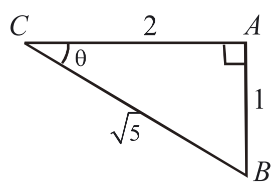
4. यदि



तो $\cot A$ का मान है –

(A) $\frac{12}{13}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{5}{13}$ (D) $\frac{13}{5}$ [ ]

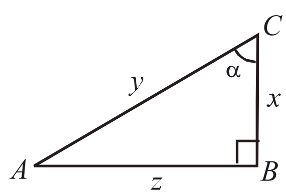
5. यदि



तो $\tan\theta$ का मान है –

(A) 2 (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{2}$ [ ]

6. यदि



तो cosec का मान है –

(A) $\frac{y}{x}$ (B) $\frac{y}{z}$ (C) $\frac{x}{z}$ (D) $\frac{x}{y}$ [ ]

7. $\sin^2 30° + \cos^2 30°$ का मान है –

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 1 [ ]

8. $\text{cosec}^2 55° - \cot^2 55°$ का मान है –

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0 [ ]

9. यदि $\cot\phi = \frac{20}{21}$ हो, तो $\text{cosec}\,\phi$ का मान है –

(A) $\frac{21}{20}$ (B) $\frac{20}{29}$ (C) $\frac{29}{21}$ (D) $\frac{21}{29}$ [ ]

10. यदि ΔABC में $\angle B = 90°$, $c = 12$ सेमी तथा $a = 9$ सेमी हो, तो $\cos C$ का मान है –

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$ [ ]

11. $(\sec 40° + \tan 40°)(\sec 40° - \tan 40°)$ बराबर है :

(A) -1 (B) 1 (C) $\cos 40°$ (D) $\sin 40°$ [ ]

12. $\frac{1}{\sin\theta - \tan\theta}$ बराबर है :

(A) $\frac{\cot\theta}{\cos\theta - 1}$ (B) $\frac{\cot\theta}{\cot\theta - \text{cosec}\,\theta}$

(C) $\text{cosec}\,\theta - \cot\theta$ (D) $\cot\theta$ [ ]

13. $\frac{\sec A - 1}{\sec A + 1}$ बराबर है :

(A) $\frac{1+\cos A}{1-\cos A}$ (B) $\frac{\cos A - 1}{1+\cos A}$ (C) $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$ (D) $\frac{\cos A - 1}{1-\cos A}$ [ ]

14. $\cot^2\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}$ बराबर है :

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 [ ]

15. यदि $\text{cosec}\,\theta = \frac{41}{40}$ हो, तो $\tan\theta$ और $\cos\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

....

16. यदि ΔABC में $\angle B$ समकोण है तथा $AB = 12$ सेमी और $BC = 5$ सेमी हो, तो $\sin A, \tan A, \sin C$ तथा $\cot C$ के मान ज्ञात कीजिए।

....

17. यदि $\cos\theta = \frac{3}{5}$ हो, तो $\frac{\sin\theta - \cot\theta}{2\tan\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

....

18. यदि $\cos\theta = \frac{21}{29}$ हो, तो $\frac{\sec\theta}{\tan\theta - \sin\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

....

19. यदि $\cot A = \sqrt{3}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos B + \cos A \cos B = 1.$

....

त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से हल कीजिए :
[प्रश्न 16-20]

20. यदि $\tan\theta = \frac{4}{3}$ हो, तो $\frac{3\sin\theta + 2\cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

21. यदि $\cot\theta = \frac{b}{a}$ हो, तो $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

22. यदि $\operatorname{cosec} A = 2$ हो, तो $\cot A + \frac{\sin A}{1 + \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. यदि $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1 - \cos^2\theta}{2 - \sin^2\theta} = \frac{3}{5}\cdot$

24. यदि $\sin A = \frac{1}{3}$ हो, तो $\cos A \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

सिद्ध कीजिए : [प्रश्न $25-27$]

25. $\sqrt{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} = \tan A + \cot A$

26. $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

27. $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \tan A + \sec A$

निम्न सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए : [प्रश्न $28-29$]

28. $\frac{\tan \quad + \tan}{\cot \quad + \cot} = \tan \quad \tan$

29. $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$

सिद्ध कीजिए : [प्रश्न $30-35$]

30. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

31. $\sec^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta = \tan^2\theta - \cot^2\theta$

32. $\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$

33. $(\sin A + \text{cosec } A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = \tan^2 A + \cot^2 A + 7$

34. $\dfrac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \dfrac{1 + \sin A}{\cos A}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 14.1

1. $\sin B = \dfrac{7}{25}$, $\cos B = \dfrac{24}{25}$, $\tan B = \dfrac{7}{24}$

$\text{cosec } B = \dfrac{25}{7}$, $\sec B = \dfrac{25}{24}$, $\cot B = \dfrac{24}{7}$

$\sin C = \dfrac{24}{25}$, $\cos C = \dfrac{7}{25}$, $\tan C = \dfrac{24}{7}$

$\text{cosec } C = \dfrac{25}{24}$, $\sec C = \dfrac{25}{7}$, $\cot C = \dfrac{7}{24}$

2. $\sin A = \dfrac{12}{13}$, $\cos A = \dfrac{5}{13}$, $\tan A = \dfrac{12}{5}$

$\text{cosec } A = \dfrac{13}{12}$, $\sec A = \dfrac{13}{5}$, $\cot A = \dfrac{5}{12}$

$\sin C = \dfrac{5}{13}$, $\cos C = \dfrac{12}{13}$, $\tan C = \dfrac{5}{12}$

$\text{cosec } C = \dfrac{13}{5}$, $\sec C = \dfrac{13}{12}$, $\cot C = \dfrac{12}{5}$

4. $2\sqrt{2} + \dfrac{3}{8}$

5. $\sin\theta = \dfrac{15}{17}$, $\tan\theta = \dfrac{15}{8}$, $\text{cosec }\theta = \dfrac{17}{15}$,

$\sec\theta = \dfrac{17}{8}$, $\cot\theta = \dfrac{8}{15}$

6. $\dfrac{169}{229}$

7. $\dfrac{5}{14}$

9. 7

10. (i) $\dfrac{a}{\sqrt{4b^2 - 3a^2}}$ (ii) $\dfrac{2\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - 3a^2}}$ (iii) $\dfrac{a}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$

प्रश्नमाला 14.2

1. $\cot A = \frac{3}{4}, \ \sin A = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{3}{5}$

2. $\cos A = \frac{21}{29}, \sin A = \frac{20}{29}$

3. $\cos A = \frac{4}{5}, \tan A = \frac{3}{4}$

4. $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \ \tan B = 2\sqrt{2}, \ \cot B = \frac{1}{2\sqrt{2}},$

   $\sec B = 3, \ \operatorname{cosec} B = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

5. $\cos A = \frac{12}{13}, \ \tan A = \frac{5}{12}$

7. $\frac{12 - \sqrt{5}}{2}$

8. $\frac{1}{2}$

9. $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cot \theta = 1$

10. $\cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$

विविध प्रश्नमाला

1. (B) 2. (A) 3. (C) 4. (B) 5. (D) 6. (B)
7. (D) 8. (A) 9. (C) 10. (A) 11. (B) 12. (A)
13. (C) 14. (D)

15. $\tan \theta = \frac{40}{9}, \ \cos \theta = \frac{9}{41}$ 16. $\frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}$ 17. $\frac{3}{160}$

18. $\frac{841}{160}$ 20. 3 21. $\frac{b+a}{b-a}$ 22. 2 24. $\frac{16\sqrt{2}+3}{8}$

❑