बीजगणित (Algebra)

महत्वपूर्ण सूत्र

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$
3. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
4. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
5. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
6. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$;
   $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
7. $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$;
   $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
8. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
9. $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$
10. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
11. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
12. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$
13. $a^n = a.a.a. \ldots n$ बार
14. $a^m.a^n = a^{m+n}$
15. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
16. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
17. $(ab)^n = a^n.b^n$
18. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
19. $a^0 = 1$ जहां $a \in R, a \neq 0$
20. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^n = \frac{1}{a^{-n}}$
21. $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$
22. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) - (ab - bc - ca)$ यदि $a + b + c = 0$ हो तो
    $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ होगा।
23. यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ हो तो
    $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ होगा
24. यदि $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c}{d}$ हो तो
    $\frac{a}{b} = \frac{c+d}{c-d}$ होगा
25. यदि $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$ हो तो इस प्रकार के व्यंजक को हल हेतु $x = a$, $y = b$ तथा $z = c$ मान रखकर एक संभावित मान निकाला जा सकता है।

नोट : उपर्युक्त सूत्रों की सहायता से बीजगणित अध्याय के अधिकांश प्रश्नों को हल किया गया है इसलिए उपर्युक्त सूत्रों को ध्यान रखना महत्वपूर्ण है। प्रतियोगात्मक परीक्षाओं में भी इन्हीं सूत्रों पर आधारित इस अध्याय के अधिकांश प्रश्न पूंछे जाते हैं जिससे इनकी महत्ता को समझा जा सकता है।

परीक्षोपयोगी प्रश्न

1. यदि व्यंजक $x^2 + x + 1$ को $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + q^2$ के रूप में लिखा जाए, तो q के संभावित मान हैं-

(a) $\pm\frac{1}{3}$ (b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\pm\frac{1}{2}$

उत्तर—(b)

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$
$$= (x^2 + 2.\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

प्रश्नानुसार

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + q^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$q^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$q = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. नीचे दिए गए प्रत्युत्तरों में से $(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3$ का एक घटक कौन-सा होगा?

(a) (a + b) (a – b)

(b) (a + b) (a + b)

(c) (a – b) (a – b)

(d) (b – c) (b – c)

उत्तर—(a)

माना $a^2 - b^2 = x$

$b^2 - c^2 = y$

$c^2 - a^2 = z$

$\therefore x + y + z = a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2 = 0$

यदि $x + y + z = 0$

तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

x, y, z के मान रखने पर

$\therefore (a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 = 3(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$

$= 3(a + b)(a - b)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$

अतः $(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3$ का एक घटक (a + b) (a – b) है।

3. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right) = 5 : 3$ हो, तो x का मान बताइए?

(a) ±1 (b) ±2

(c) ±3 (d) 0

उत्तर—(b)

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{\frac{x^2 - 1}{x}} = \frac{5}{3}$$

या $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{5}{3}$

या $3x^2 + 3 = 5x^2 - 5$

या $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$

या $x = \pm 2$

द्वितीय विधि—

विकल्पों से $x = \pm 2$ रखने पर

$$\frac{2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

या $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$

अर्थात $x = \pm 2$ पर बायां पक्ष, दायां पक्ष के बराबर हो जाता है।

अतः $x = \pm 2$ उत्तर होगा।

4. यदि $x^2 - 5x - 24 = 0$ तो, x का मान क्या होगा?

(a) +8, –3 (b) +8, +3

(c) –8, –3 (d) –8, +3

उत्तर—(a)

$x^2 - 5x - 24 = 0$

$x^2 - 8x + 3x - 24 = 0$

$x(x - 8) + 3(x - 8) = 0$

$(x - 8)(x + 3) = 0$

यदि $x - 8 = 0$ एवं $x + 3 = 0$

$\therefore x = 8 \quad \therefore x = -3$

5. k के किस मान के लिए, समीकरण $x^2 + 2(k - 4)x + 2k = 0$ के मूल बराबर होंगे?

(a) 6, 4 (b) 12, 2

(c) 8, 2 (d) 4, 8

उत्तर—(c)

चूंकि समीकरण के मूल बराबर हैं।

$\therefore b^2 = 4ac$

$\{2(k - 4)\}^2 = 4 \times 1 \times 2k$

$4(k^2 + 16 - 8k) = 8k$

$k^2 + 16 - 8k = 2k$

$k^2 - 8k - 2k + 16 = 0$

$k(k - 8) - 2(k - 8) = 0$

$(k - 8)(k - 2) = 0$

$\therefore$ k = 8 या 2

6. यदि $px^2 + qx + r = 0$ के मूलों का योग उसके गुणनफल के बराबर है, तो कौन-सा सही है?

(a) p + q = 0 (b) q + r = 0

(c) p + r = 0 (d) p + q + r = 0

उत्तर—(b)

मूलों का योग $= \frac{-q}{p}$

मूलों का गुणनफल $= \frac{r}{p}$

प्रश्नानुसार $\frac{-q}{p} = \frac{r}{p}$

$-q = r$

$\therefore q + r = 0$

7. बहु पदीय व्यंजक $x^2 - 4x + 3$ का मान शून्य है, यदि x है-

(a) 0 अथवा 2 (b) 3 अथवा 1

(c) 1 अथवा 4 (d) –2 अथवा +2

उत्तर—(b)

प्रश्नानुसार

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
या $x^2 - 3x - x + 3 = 0$
$$x(x-3) - 1(x-3) = 0$$
$$(x-3)(x-1) = 0$$
$x = 3$ या 1

अतः x का मान 3 अथवा 1 है।

8. तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार हैं कि पहले के वर्ग तथा शेष दोनों के गुणनफल का योग 154 है। सबसे बड़ा पूर्णांक है-

(a) 8 (b) 9
(c) 10 (d) 11

उत्तर—(c)

माना तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांक संख्याएं क्रमशः x, $(x+1)$, $(x+2)$ हैं।

अब प्रश्न से–

$x^2 + (x+1)(x+2) = 154$

$x^2 + x^2 + 2x + x + 2 = 154$

$2x^2 + 3x + 2 - 154 = 0$

$2x^2 + 3x - 152 = 0$

$2x^2 + 19x - 16x - 152 = 0$

$x(2x+19) - 8(2x+19) = 0$

$(2x+19)(x-8) = 0$

यदि $2x + 19 = 0$

तब x (जो संभव नहीं है)

यदि $x - 8 = 0$ तब $x = 8$

छोटा पूर्णांक =8

सबसे बड़ा पूर्णांक $= (x+2) = 8 + 2 \Rightarrow 10$

द्वितीय विधि-

विकल्प (c) से–

सबसे बड़ा पूर्णांक = 10, सबसे छोटा पूर्णांक = 8

बीच का पूर्णांक = 9

अब प्रश्न से–

$$(8)^2 + 10 \times 9 = 154$$
$$64 + 90 = 154$$
$$154 = 154$$
$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

अतः विकल्प (c) प्रश्न को संतुष्ट करता है।

अभीष्ट उत्तर 10 होगा।

9. यदि $(x^2 - 5x + 8) = (x+2)(x-3) + 2$, तो x का मान क्या है?

(a) –2 (b) 3
(c) –3 (d) 2

उत्तर—(b)

$x^2 - 5x + 8 = (x+2)(x-3) + 2$

या $x^2 - 5x + 8 = (x^2 - x - 6) + 2$

या $x^2 - 5x + 8 = x^2 - x - 4$

या $x^2 - 5x + 8 - x^2 + x + 4 = 0$

$-4x + 12 = 0 \therefore -4x = -12 \therefore x = 3$

10. यदि x तथा $\frac{1}{x} (x \neq 0)$ का औसत M हो, तो x^2 तथा $\frac{1}{x^2}$ का औसत कितना होगा ?

(a) $1 - M^2$ (b) $1 - 2M$
(c) $2M^2 - 1$ (d) $2M^2 + 1$

उत्तर—(c)

x एवं $\frac{1}{x}$ के योग का मान $= 2 \times$ औसत

$$= 2 \times M \Rightarrow 2M$$

अब $x + \frac{1}{x} = 2M$

या $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (2M)^2$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 4M^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 4M^2 - 2$$

अब $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ का औसत मान $= \frac{4M^2 - 2}{2}$

$$= 2M^2 - 1$$

11. यदि $x = 5$ है, तो व्यंजक $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ का मान है-

(a) $\frac{24}{5}$ (b) $\frac{625}{24}$
(c) $\frac{576}{25}$ (d) $\frac{24}{25}$

उत्तर—(c)

दिया गया व्यंजक $= x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

$= 5^2 - 2 + \frac{1}{5^2}$ ($x = 5$ रखने पर)

$= 25 - 2 + \frac{1}{25}$

$= 23 + \frac{1}{25}$

$= \frac{575 + 1}{25} \Rightarrow \frac{576}{25}$

12. यदि a = 23 तथा b = –29 हो, तो $25a^2 + 40ab + 16b^2$ का मान क्या होगा?

(a) 1 (b) –1

(c) 0 (d) 2

उत्तर—(a)

दिया है $a = 23$ एवं $b = -29$

तब $25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a + 4b)^2$

$= [5 \times 23 + 4 \times (-29)]^2 = (115 - 116)^2$

$= (-1)^2 = 1$

प्रश्न 13. यदि x = y = 333 और z = 334 हो, तो $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान क्या होगा?

(a) 0 (b) 667

(c) 1000 (d) 2334

उत्तर—(c)

$\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= (x + y + z)\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= \frac{x+y+z}{2}[x^2 + y^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2zx]$

$= \frac{x+y+z}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$

प्रश्न से x, y, z के मान रखने पर

$= \frac{(333 + 333 + 334)}{2}[(333 - 333)^2 + (333 - 334)^2 + (334 - 333)^2]$

$= \frac{1000}{2}[0^2 + (-1)^2 + 1^2]$

$= \frac{1000}{2} \times 2 \Rightarrow 1000$

प्रश्न 14. $x + \frac{1}{x}$ का व्युत्क्रम क्या है?

(a) $\frac{x}{x+1}$ (b) $x - \frac{1}{x}$

(c) $\frac{1}{x} + x$ (d) $\frac{x}{x^2+1}$

उत्तर—(d)

$x + \frac{1}{x}$ का व्युत्क्रम $= \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$

$= \frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}$

$= \frac{x}{x^2+1}$

15. यदि $a + \frac{1}{b} = 1$ और $b + \frac{1}{c} = 1$, तो $c + \frac{1}{a}$ किसके बराबर होगा?

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

उत्तर—(b)

$a + \frac{1}{b} = 1$

$\therefore \frac{ab+1}{b} = 1$

$ab + 1 = b$

$ab = b - 1$

$\frac{b}{b-1} = \frac{1}{a}$ .... (i)

तथा $b + \frac{1}{c} = 1$

$\therefore \frac{1}{c} = 1 - b$

$\frac{1}{(1-b)} = c$ ....(ii)

समी. (i) और समी. (ii) को जोड़ने पर

$\frac{b}{(b-1)} + \frac{1}{(1-b)} = c + \frac{1}{a}$

$\frac{b}{(b-1)} + \frac{1}{-(b-1)} = c + \frac{1}{a}$

$\frac{b}{(b-1)} - \frac{1}{(b-1)} = c + \frac{1}{a}$

$\frac{(b-1)}{(b-1)} = c + \frac{1}{a}$

$\therefore c + \frac{1}{a} = 1$

16. यदि $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ और $a^2 + ab + b^2 = 4$, तो ab का मान है-

(a) –1 (b) 0

(c) 2 (d) 1

उत्तर—(d)

$\because\ a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

या $8 = 4(a^2 - ab + b^2)$

या $a^2 - ab + b^2 = 2 \ldots\ldots(i)$

तथा $a^2 + ab + b^2 = 4 \ldots\ldots\ldots(ii)$

अतः समी. (i) से (ii) को घटाने पर

$-2ab = -2$

$ab = \frac{-2}{-2} \Rightarrow 1$

17. यदि $m + n = -2$ है, तो $m^3 + n^3 - 6mn$ का मान है-

(a) 8 (b) 4

(c) –8 (d) –4

उत्तर—(c)

$m + n = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

घन करने पर

$(m + n)^3 = (-2)^3$

$m^3 + n^3 + 3mn(m + n) = -8$

$m^3 + n^3 + 3mn \times -2 = -8$

$m^3 + n^3 - 6mn = -8$

18. यदि $a = 25$, $b = 15$, $c = -10$, तो

$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$ का मान है-

(a) 30 (b) –15

(c) –30 (d) 15

उत्तर—(d)

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$$

$$= \frac{(25)^3 + (15)^3 + (-10)^3 - 3 \times 25 \times 15 \times (-10)}{(25-15)^2 + \{15 - (-10)\}^2 + (-10 - 25)^2}$$

$$= \frac{15625 + 3375 - 1000 + 11250}{10^2 + 25^2 + (-35)^2}$$

$$= \frac{29250}{1950} \Rightarrow 15$$

19. $\left(b \times \frac{1}{a}\right)$ में किससे गुणा किया जाए, ताकि गुणनफल $\left(b + \frac{1}{a}\right)$ प्राप्त हो?

(a) $a + \frac{1}{b}$ (b) $b + \frac{1}{a}$

(c) $\frac{a}{b}$ (d) ab

उत्तर—(a)

माना $b \times \frac{1}{a}$ में x से गुणा करने पर गुणनफल $\left(b + \frac{1}{a}\right)$ प्राप्त होगा

प्रश्नानुसार

$x \times \frac{b}{a} = b + \frac{1}{a}$

$x \times \frac{b}{a} = \frac{ab + 1}{a}$

$\therefore\ x = \frac{ab + 1}{b} \Rightarrow a + \frac{1}{b}$

20. यदि $(2x - y)^2 + (3y - 2z)^2 = 0$ हो, तो $x : y : z$ का अनुपात ज्ञात कीजिए?

(a) 1 : 3 : 2 (b) 1 : 2 : 3

(c) 3 : 1 : 2 (d) 3 : 2 : 1

उत्तर—(b)

$\because\ (2x - y)^2 + (3y - 2z)^2 = 0$

यह तभी संभव है जब प्रत्येक पद शून्य हो अर्थात $2x - y = 0$ और $3y - 2z = 0$

या $x = \frac{y}{2}$, तथा $z = \frac{3y}{2}$

$\therefore\ x : y : z = \frac{y}{2} : y : \frac{3y}{2}$

या $x : y : z = y : 2y : 3y$

$= 1 : 2 : 3$

21. यदि k सबसे बड़ी संभव वास्तविक ऐसी संख्या है कि $p^4 + q^4 = (p^2 + kpq + q^2)(p^2 - kpq + q^2)$ हो, तो k का मान क्या होगा?

(a) 1 (b) $-\sqrt{2}$

(c) 2 (d) $\sqrt{2}$

उत्तर—(d)

$p^4 + q^4 = (p^2 + kpq + q^2)(p^2 + q^2 - kpq)$

$= [(p^2 + q^2) + kpq] \times (p^2 + q^2) - kpq]$

$= (p^2 + q^2)^2 - (p^2 + q^2)kpq + (p^2 + q^2)\ kpq - k^2p^2q^2$

$= (p^2 + q^2)^2 - k^2p^2q^2$

या $p^4 + q^4 = p^4 + q^4 + 2p^2q^2 - k^2p^2q^2$

या $(2 - k^2)\ p^2q^2 = 0$

$2 - k^2 = \frac{0}{p^2q^2}$

या $2 - k^2 = 0$

या $2 = k^2$

या $k^2 = 2$

या $k = \sqrt{2}$

द्वितीय विधि-

$\because\ p^4 + q^4 = (p^2 + kpq + q^2)(p^2 - kpq + q^2)$

या $(p^2 + q^2)^2 - (\sqrt{2}\ pq)^2 = (p^2 + kpq + q^2)(p^2 - kpq + q^2)$

या $(p^2 + \sqrt{2}\ pq + q^2)(p^2 - \sqrt{2}\ pq + q^2)$

$= (p^2 + kpq + q^2)(p^2 - kpq + q^2)$

$\therefore$ दोनों पक्षों की तुलना करने पर

$k = \sqrt{2}$

22. यदि $a + b = 17$ और $a - b = 9$ हो, तो $(4a^2 + 4b^2)$ का मान बताइए?

(a) 710 (b) 720

(c) 730 (d) 740

उत्तर—(d)

प्रश्नानुसार

$a + b = 17$ ....(i)

$a - b = 9$ ....(ii)

समी. (i) एवं (ii) को जोड़ने पर

$2a = 26$ या $a = 13$

a का मान समी. (i) में रखने पर

$13 + b = 17$

या $b = 17 - 13 = 4$

$\therefore\ 4a^2 + 4b^2 = 4(a^2 + b^2)$

$= 4[169 + 16]$

या $4a^2 + 4b^2 = 4 \times 185$

$= 740$

द्वितीय विधि-

$\because\ a + b = 17$ .... (i) तथा $a - b = 9$ .... (ii)

$\therefore\ 4a^2 + 4b^2 = 2[(a + b)^2 + (a - b)^2]$ (सूत्र)

$= 2[(17)^2 + (9)^2]$

[समी. (i) एवं समी. (ii) से]

$= 2(289 + 81)$

$= 2 \times 370 \Rightarrow 740$

$\therefore 4a^2 + 4b^2 = 740$

23. यदि $x + 5 + \frac{1}{x+1} = 6$ हो, तो $(x + 1)^3 + \frac{1}{(x+1)^3}$ का मान बताएं?

(a) 2 (b) 0

(c) –2 (d) 4

उत्तर—(a)

$\because\ x + 5 + \frac{1}{x+1} = 6$

या $(x + 1) + \frac{1}{(x+1)} = 2$ ......(i) **(दोनों तरफ से 4 घटाने पर)**

समी. (i) के दोनों पक्षों का घन करने पर

$(x+1)^3 + \frac{1}{(x+1)^3} + 3(x+1)\frac{1}{(x+1)}\left((x+1) + \frac{1}{(x+1)}\right)$

$= (2)^3$

या $(x + 1)^3 + \frac{1}{(x+1)^3} + 3 \times 2 = 8$ **[समी. (i) से]**

$\therefore\ (x + 1)^3 + \frac{1}{(x+1)^3} = 8 - 6 \Rightarrow 2$

24. यदि $x + y = \sqrt{3}$ और $x - y = \sqrt{2}$ हो, तो $8xy(x^2 + y^2)$ का मान बताइए?

(a) 6 (b) $\sqrt{6}$

(c) 5 (d) $\sqrt{5}$

उत्तर—(c)

$x+y=\sqrt{3}$ ....(i)

$x-y=\sqrt{2}$ ....(ii)

समी. (i) एवं (ii) को जोड़ने पर

$$x=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2}$$

इसी प्रकार समी. (i) में से (ii) को घटाने पर

$$y=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$\therefore 8xy(x^2+y^2)=8\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2}.\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2}\times\left[\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{4}+\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{4}\right]$$

$$=\frac{2}{4}(3-2)[3+2+2\sqrt{6}+3+2-2\sqrt{6}]$$

$$=\frac{1}{2}\times 10\Rightarrow 5$$

द्वितीय विधि-

$\because x+y=\sqrt{3}$ ....(i) एवं $x-y=\sqrt{2}$ ....(ii)

$\therefore 2(x^2+y^2)=(x+y)^2+(x-y)^2$

$=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=3+2=5$ (iii)

एवं $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$

$=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2=1$ (iv)

समी. (iii) एवं समी. (iv) का गुणा करने पर

$8xy(x^2+y^2)=5\times 1\Rightarrow 5$

25. यदि $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1, \sqrt{x}+\sqrt{y}=17$ हो, तो $\sqrt{xy}=?$

(a) $\sqrt{72}$ (b) 72

(c) 32 (d) 24

उत्तर—(b)

दिया है-

$\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$ .... (i)

तथा $\sqrt{x}+\sqrt{y}=17$ .... (ii)

समी. (i) और (ii) को जोड़ने पर

$2\sqrt{x}=18$

या $\sqrt{x}=9$

समी. (i) में $\sqrt{x}$ का मान रखने पर

$9-\sqrt{y}=1$

या $\sqrt{y}=8$

$\therefore \sqrt{xy}=\sqrt{x}.\sqrt{y}$

$=9\times 8\Rightarrow 72$

द्वितीय विधि-

$\because \sqrt{x}-\sqrt{y}=1$ .... (i)

एवं $\sqrt{x}+\sqrt{y}=17$ .... (ii)

$$\therefore \sqrt{xy}=\frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\right]$$

$=\frac{1}{4}[(17)^2-(1)^2]$ **[समी. (i) एवं समी. (ii) से]**

$=\frac{1}{4}[289-1]=\frac{1}{4}\times 288\Rightarrow 72$

$\therefore \sqrt{xy}=72$

26. यदि $(a+b-6)^2+a^2+b^2+1+2b=2ab+2a$ हो, तो a का मान क्या है?

(a) 7 (b) 6

(c) 3.5 (d) 2.5

उत्तर—(c)

दिया है

$(a+b-6)^2+a^2+b^2+1+2b=2ab+2a$

$(a+b-6)^2+(a^2+b^2-2ab)+1+2b-2a=0$

$(a+b-6)^2+(a-b)^2+1-2(a-b)=0$

$(a+b-6)^2+[(a-b)-1]^2=0$ ......(i)

समी. (i) के शून्य होने के लिए आवश्यक है कि जिन राशियों का वर्ग हुआ है वे अलग-अलग शून्य हों अर्थात

$a+b-6=0$

या $a+b=6$ ....(ii)

तथा $a-b-1=0$

$a-b=1$ ....(iii)

समी. (2) और (3) को जोड़ने पर

$2a=7$

$a=\frac{7}{2}\Rightarrow 3.5$