कोण एवं उनके माप

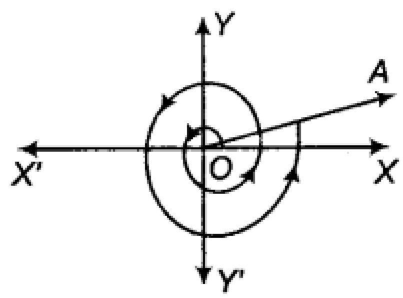
Miscellaneous Exercise

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1-5)

प्रश्न 1. 750° का कोण अनुरेखित करने वाली परिक्रामी रेखा स्थित है-
(A) प्रथम चतुर्थांश में
(B) द्वितीय चतुर्थांश में
(C) तृतीय चतुर्थाश में
(D) चतुर्थ चतुर्थाश में

उत्तर : (A) प्रथम चतुर्थांश में

संकेत: 750°= 2 × 360° + 30°



परिक्रामी रेखा OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ होकर वामावर्त घूमकर 2 पूर्ण चक्कर लगाकर फिर 30° की दिशा में घूमेगी।
इस प्रकार OA की स्थिति प्रथम चतुर्थांश में होगी।

प्रश्न 2. 30° के कोण में रेडियन की संख्या है:
(A) $\frac{\pi}{3}$ रेडियन
(B) $\frac{\pi}{4}$ रेडियन
(C) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन
(D) $\frac{3\pi}{4}$ रेडियन

उत्तर : (C) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन

संकेत:

$\because 180° = \pi$ रेडियन, $\therefore$ $1° = \frac{\pi}{180°}$ रेडियन

$\therefore$ $30° = \frac{\pi \times 30°}{180°}$ रेडियन $= \frac{\pi}{6}$ रेडियन

प्रश्न 3. $\frac{3\pi}{4}$ का मान षष्टिक पद्धति में है।
(A) 75°
(B) 135°
(C) 120°
(D) 220°

उत्तर : (B) 135°

संकेत

$\because \pi = 180°, \therefore \frac{3\pi}{4} = \frac{180 \times 3}{4} = 135°$

प्रश्न 4. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{\pi}{6}$ रेडियन कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा?
(A) 10 मिनट
(B) 20 मिनट
(C) 15 मिनट
(D) 5 मिनट

उत्तर : (D) 5 मिनट

संकेत
4 समकोण = 2π रेडियन
घड़ी की सुई को 2π रेडियन कोण की रचना करने में लगा समय = 1 घण्टा

$\therefore$ घड़ी की सुई को 1 रेडियन कोण की रचना करने में लगा समय $= \frac{1}{2\pi}$ घण्टे

$\therefore$ घड़ी की सुई को $\frac{\pi}{6}$ रेडियन कोण की रचना करने में लगा समय $= \frac{1}{2\pi} \times \frac{\pi}{6}$ घण्टे $= \frac{1}{12}$ घण्टे

$= \frac{60}{12}$ मिनट $= 5$ मिनट

प्रश्न 5. 100 मीटर त्रिज्या वाले वृत्तीय पथ पर 2π मीटर चलने पर केन्द्र पर अंतरित कोण का मान रेडियन में होगा :

(A) $\frac{\pi}{4}$
(B) $\frac{\pi}{3}$
(C) $\frac{\pi}{6}$
(D) $\frac{3\pi}{4}$

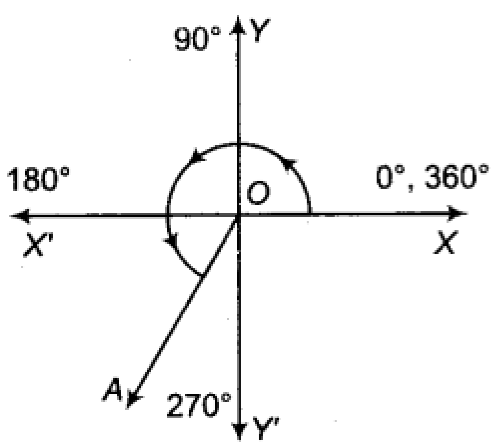
उत्तर : (A) $\frac{\pi}{4}$
संकेत : वृत्त की त्रिज्या (r) = 100 मी
वृत्त पर चाप की लम्बाई = 25π मी

$$\because \text{वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण} = \frac{\text{वृत्त पर चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}} = \frac{25\pi}{100} = \frac{\pi}{4}$$

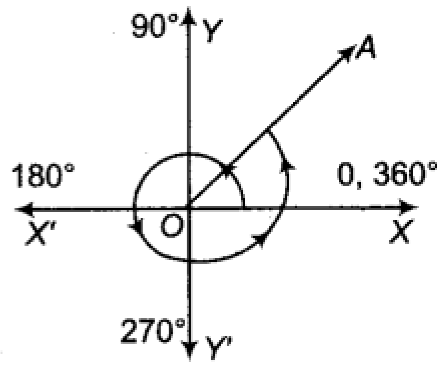
प्रश्न 6. परिक्रामी रेखा की स्थिति कौन से चतुर्थांश में होगी, जबकि वह प्रारम्भिक स्थिति से निम्नलिखित कोण बनाती हो :

(i) 240°
(ii) 425°
(iii) -580°
(iv) 1280°
(v) -980°

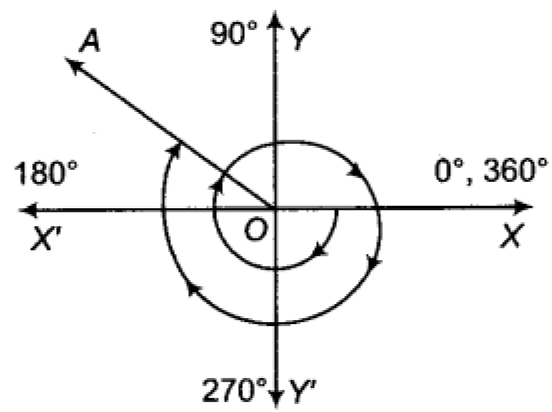
हल: (i) 240° = 180° + 60°



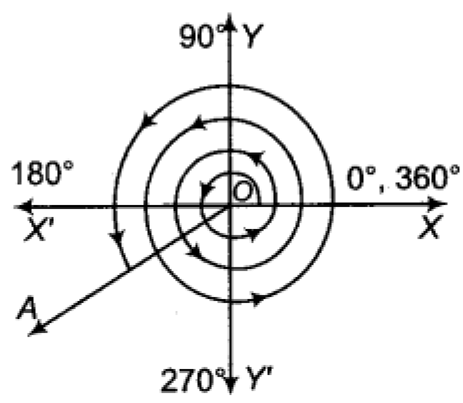
अतः परिक्रामी रेखा OA की स्थिति तृतीय चतुर्थांश में होगी।
(ii) 425° = 360° + 65°



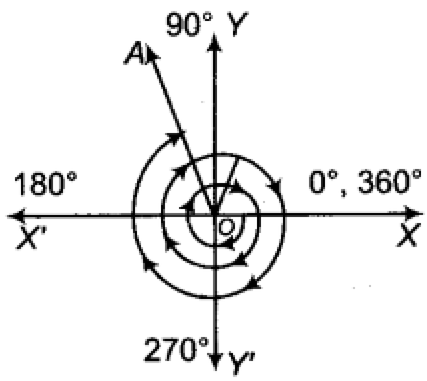
परिक्रामी रेखा OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ होकर वामावर्त घूमकर एक पूर्ण चक्कर करके फिर 65° पहले की दिशा में घूमेगी।
इस प्रकार OA की अन्तिम स्थिति प्रथम चतुर्थांश में होगी।
(iii) -580° = -360° – 220°



अतः परिक्रामी रेखा OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर दक्षिणावर्त घूमकर एक पूर्ण चक्कर फिर 220° घूमेगी। इस प्रकार उसकी अन्तिम स्थिति द्वितीय चतुर्थाश में होगी।
(iv) 1280° = 3 × 360° + 200°



परिक्रामी रेखा OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर तीन पूर्ण चक्कर लगाकर फिर 200° की दिशा में घूमेगी।
इस प्रकार OA की अन्तिम स्थिति तृतीय चतुर्थांश में होगी।
(v) -980° = -(2 × 360°) – 260°



अतः परिक्रामी रेखा OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर दक्षिणावर्त घूमकर दो पूर्ण चक्कर लगाकर फिर उसी दिशा में 260° घूमेगी।
इस प्रकार उसकी अन्तिम स्थिति द्वितीय चतुर्थांश में होगी।

प्रश्न 7. निम्नलिखित कोणों को रेडियन में परिवर्तित कीजिए।
(i) 45°
(ii) 120°
(iii) 135°
(iv) 540°

हल:

(i) $\because 180° = \pi$ रेडियन, $\therefore 1° = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

$\therefore \quad 45° = \frac{\pi \times 45°}{180°} = \frac{\pi}{4}$ रेडियन

(ii) $\because \quad 180° = \pi$ रेडियन

$\therefore \quad 120° = \frac{\pi}{180°} \times 120° = \frac{2\pi}{3}$ रेडियन

(iii) $\because \; 180° = \pi$ रेडियन

$\therefore \quad 135° = \frac{\pi \times 135°}{180°} = \frac{3\pi}{4}$ रेडियन

(iv) $\because \quad 180° = \pi$ रेडियन

$\therefore \quad 540° = \frac{\pi}{180°} \times 540° = 3\pi$ रेडियन

प्रश्न 8. निम्नलिखित कोणों को षष्टिक पद्धति में व्यक्त कीजिए।
(i) $\frac{\pi}{2}$
(ii) $\frac{2\pi}{5}$
(iii) $\frac{5\pi}{6}$
(iv) $\frac{\pi}{15}$

हल:

(i) $\because \pi = 180°, \therefore \frac{\pi}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$

(ii) $\because \pi = 180°, \therefore \frac{2\pi}{5} = 180° \times \frac{2}{5} = 72°$

(iii) $\because \pi = 180°, \therefore \frac{5}{6}\pi = \frac{180° \times 5}{6} = 150°$

(iv) $\because \pi = 180°, \therefore \frac{\pi}{15} = \frac{180°}{15} = 12°$

प्रश्न 9. 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र पर 12 सेमी लम्बाई के चाप द्वारा कितने रेडियने का कोण बनेगा?

हल: वृत्त की त्रिज्या = 5 सेमी
वृत्त पर चाप की लम्बाई = 12 सेमी

वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण

$$= \frac{\text{वृत्त पर चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}} = \frac{12}{5} \text{ रेडियन}$$

अत: वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण $= \frac{12}{5}$ रेडियन

प्रश्न 10. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{3\pi}{2}$ रेडियन कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा?

हल: 4 समकोण = 2π रेडियन
घड़ी की मिनट की सुई को 2π रेडियन कोण की रचना करने में लगा समय = 1 घण्टा

∴ घड़ी की मिनट की सुई को 1 रेडियन कोण की रचना करने में लगा समय $= \frac{1}{2\pi}$ घण्टे

∴ घड़ी की मिनट की सुई को $\frac{3\pi}{2}$ रेडियन कोण की रचना करने में लगा समय $= \frac{3\pi}{2\pi \times 2}$ घण्टे

$= \frac{3}{4}$ घण्टे $= \frac{3 \times 60}{4}$ मिनट $= 45$ मिनट

अत: घड़ी की सुई को $\frac{3\pi}{2}$ रेडियन कोण अन्तरित करने में लगा समय $= 45$ मिनट।

प्रश्न 11. किसी घड़ी के मिनट की सुई को 120° के कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा?

हल: हम जानते हैं कि घड़ी की मिनट की सुई को 1 पूरा चक्करे करने में बना कोण 360° है।
घड़ी की मिनट की सुई को 360° कोण की रचना करने में लगा समय = 1 घण्टा
घड़ी की मिनट की सुई को 1° कोण की रचना करने में लगा समय = $\frac{1}{360}$ घण्टे
घड़ी की मिनट की सुई को 120° कोण की रचना में लगा समय = $\frac{1}{360}$ x 120 घण्टे
= $\frac{1}{3}$ घण्टे
= $\frac{60}{3}$ मिनट
= 20 मिनट
अत: घड़ी की मिनट की सुई को 120° के कोण की रचना करने में लगा समय = 20 मिनट।

प्रश्न 12. किसी वृत्त में 10 सेमी लम्बाई का चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त पर चाप की लम्बाई = 10 सेमी
वृत्त के केन्द्र पर आन्तरित कोण = 60°

वृत्त की त्रिज्या = ?

$\because$ वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण

$$= \frac{\text{वृत्त पर चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}}$$

$$\Rightarrow \quad 60° = \frac{10}{\text{वृत्त की त्रिज्या}} \text{ रेडियन}$$

$$\Rightarrow \text{ वृत्त की त्रिज्या} = \frac{10}{60°} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{10}{60°} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{30}{\pi} \text{ सेमी}$$

प्रश्न 13. यदि ठीक दोपहर पश्चात घड़ी के मिनट की सुई 30 समकोण परिक्रमण कर चुकी हो, तो घड़ी में समय बताइए।

हल: ठीक दोपहर का अर्थ है: 12:00 बजे दोपहर
180° (2 समकोण) = π रेडियन
1 समकोण = $\frac{\pi}{2}$ रेडियन
30 समकोण = $\frac{\pi}{2}$ × 30 रेडियन = 15π रेडियन
घड़ी की मिनट की सुई को 2 रेडियन (360°)
कोण की रचना में लगा समय = 1 घण्टा
घड़ी की मिनट की सुई को 1π रेडियन कोण की रचना में लगा समय = $\frac{1}{2\pi}$ घण्टे
घड़ी की मिनट की सुई को 15π रेडियन कोण की रचना करने में लगा समय = $\frac{15\pi}{2\pi}$ घण्टे.
= $\frac{15}{2}$ घण्टे
= 7$\frac{1}{2}$ घण्टे
= 7 घण्टे 30 मिनट
अत: ठीक दोपहर बाद घड़ी का समय = शाम 7 बजकर 30 मिनट।

प्रश्न 14. किसी त्रिभुज के कोण 2 : 3 : 4 के अनुपात में हैं। तीनों कोणों को रेडियन में ज्ञात कीजिए।

हल: त्रिभुज के तीनों कोणों का अनुपात = 2 : 3 : 4
कोणों का अनुपातीय योग = 2 + 3 + 4 = 9

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180° = π रेडियन

$$\text{त्रिभुज का पहला कोण} = \frac{2}{9} \times \pi = \frac{2}{9}\pi \text{ रेडियन}$$

$$\text{त्रिभुज का दूसरा कोण} = \frac{3}{9} \times \pi = \frac{1}{3}\pi \text{ रेडियन}$$

$$\text{त्रिभुज का तीसरा कोण} = \frac{4}{9} \times \pi = \frac{4\pi}{9} \text{ रेडियन}$$

प्रश्न 15. $\frac{3}{5}$ π रेडियन को षष्टिक पद्धति में व्यक्त कीजिए।

हल:

$$\pi = 180^\circ \quad \therefore \frac{3}{5}\pi = \frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ$$

Additional Questions

बहुविकल्पीय प्रश्न

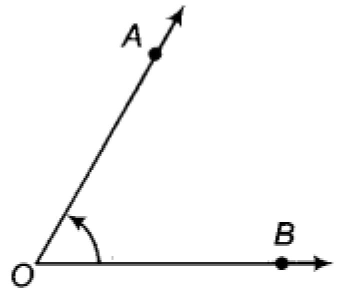
प्रश्न 1. यदि किसी वृत्त में चाप x तथा त्रिज्या r द्वारा अन्तरित कोण θ है तो निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है:

(A) $\theta^c = \frac{x}{r}$ (B) $\theta^c = \frac{r}{x}$ (C) $r = \frac{\theta^c}{x}$ (D) $r = \frac{x}{\theta^c}$

प्रश्न 2. त्रिकोणमिति का तात्पर्य है:
(A) तीन कोणों वाली आकृति
(B) तीन भुजाओं वाली आकृति
(C) त्रिभुज की माप
(D) त्रिभुज के कोणों की माप

प्रश्न 3. त्रिकोणमिति का ज्ञान निम्नलिखित में से किसके लिए उपयोगी है:
(A) भौतिकी
(B) नौसेना
(C) इन्जिनियरिंग
(D) A, B, C तीनों में

प्रश्न 4. चित्र में किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर घड़ी की सुइयों के विपरीत दिशा में। (वामावर्त) घूमती है तो इस प्रकार निर्मित कोण है:



(A) धनात्मक
(B) ऋणात्मक
(C) न धनात्मक और न ऋणात्मक
(D) कोई नहीं

प्रश्न 5. कोई परिक्रमाणी किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर द्वितीय चतुर्थांश में जो कोण बनाती है, वह
(A) 0° से 90° के मध्य होगा।
(B) 90° से 180° के मध्य होगा।
(C) 180° से 270° के मध्य होगा
(D) 270° से 360° के मध्य होगा

प्रश्न 6. हम कोणों की माप अंश, मिनट तथा सेकण्ड में मापते हैं:
(A) षष्टिक पद्धति में
(B) शतिक पद्धति में
(C) वृत्तीय पद्धति में
(D) A, B, C तीनों में

उत्तरमाला: 1. (A) 2. (C) 3. (D) 4. (A) 5. (B) 6. (A)

प्रश्न 7. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1. (i) शतिक पद्धति को .... पद्धति भी कहते हैं।
2. (ii) .... में कोण के माप की इकाई रेडियन है।
3. (iii) किसी वृत्त के केन्द्र पर उसकी त्रिज्या के बराबर लम्बाई के चाप द्वारा अन्तरित कोण .... रेडियन होता है।
4. (iv) .... पद्धति प्रचलन में नहीं है।
5. (v) किसी वृत्त की परिधि और उसके .... का अनुपात सदैव अचर होता है।
6. (vi) π एक .... संख्या है।
7. (vii) 1° = ... 17’45” (लगभग)

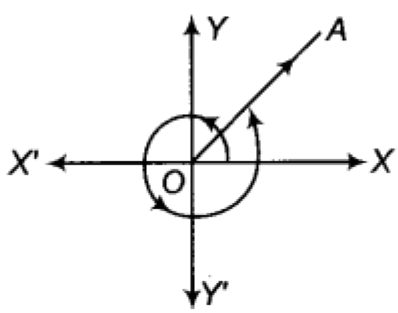
हल:

1. (i) फ्रांसीसी
2. (ii) वृत्तीय पद्धति
3. (iii) 1
4. (iv) शतिक
5. (v) व्यास
6. (vi) अपरिमेय
7. (vii) 57°

अतिलघूत्तरीय/लघूत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. चित्र की सहायता से 390° का कोण निरूपित कीजिए।

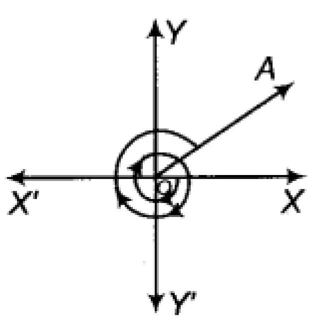
हल: 390° = 1 × 360° + 30°



अतः परिक्रमी किरण OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारंभ x कर वामावर्त घूमकर एक पूर्ण चक्कर लगाकर फिर 30° पहले की दिशा में घूमेगी।
इस प्रकार OA की अन्तिम स्थिति प्रथम चतुर्थांश में चित्रानुसार होगी।

प्रश्न 2. चित्र की सहायता से -690° का कोण निरूपित कीजिए।

हल: -690° = (-360°) + (-330°)



अतः परिक्रामी रेखा OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर दक्षिणावर्त घूमकर एक पूर्ण चक्कर

लगाकर फिर उसी दिशा में 330° घूमेगी।
इस प्रकार उसकी अन्तिम स्थिति प्रथम चतुर्थांश में होगी।

प्रश्न 3. 100° को रेडियन में परिवर्तित कीजिए।

हल:

$\because 180° = \pi$ रेडियन

$\therefore 100° = \frac{\pi \times 100°}{180°}$ रेडियन $= \frac{5\pi}{9}$ रेडियन

प्रश्न 4. $\frac{2\pi}{3}$ रेडियन को अंशों में परिवर्तित कीजिए।

हल:

$\because 1^c = \frac{180°}{\pi}$ $\quad$ ($1^c = 1$ रेडियन)

$\therefore \quad \frac{2\pi}{3}$ रेडियन $= \frac{180°}{\pi} \times \frac{2\pi}{3} = 120°$

प्रश्न 5. किसी वृत्त के केन्द्र पर $\frac{\pi}{4}$ रेडियन का कोण अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि वृत्त की त्रिज्या r है।
वृत्त के केन्द्र पर चाप तथा त्रिज्या द्वारा अन्तरित कोण = $\frac{\pi}{4}$ रेडियन

वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण

$= \frac{\text{वृत्त पर चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}}$

$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \frac{\text{वृत्त पर चाप की लम्बाई}}{r}$

$\Rightarrow$ वृत्त पर चाप की लम्बाई $= \frac{\pi r}{4}$

अत: वृत्त पर चाप की लम्बाई $= \frac{\pi r}{4}$

प्रश्न 6. किसी घड़ी के मिनट की सुई को 150° के कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा?

हल: हम जानते हैं कि घड़ी के मिनट की सुई को 1 पूरा चक्कर करने से बना कोण 360° है।
घड़ी के मिनट की सुई को 360° कोण की रचना करने में लगा समय = 1 घण्टा
घड़ी के मिनट की सुई को 1° कोण की रचना करने में लगा समय = $\frac{1}{360}$ घण्टे
घड़ी के मिनट की सुई को 150° कोण की रचना करने में लगा समय = $\frac{1\times150}{360}$
= $\frac{5}{12}$ घण्टे
= $\frac{5\times60}{12}$ मिनट
= 25 मिनट
अत: घड़ी के मिनट की सुई को 150° के कोण की रचना करने में लगा समय = 25 मिनट।

प्रश्न 7. किसी वृत्त की सम्पूर्ण परिधि द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि r त्रिज्या के वृत्त की सम्पूर्ण परिधि 2πr होती है और r लम्बाई के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण 1 रेडियन होता है।
r लम्बाई की चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण = 1 रेडियन
1 लम्बाई की चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण = $\frac{1}{r}$ रेडियन
2πr लम्बाई की चाप (परिधि) द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण = $\frac{1}{r}\times 2\pi r = 2\pi$ रेडियन
अतः वृत्त की सम्पूर्ण परिधि 2πr द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण का मापांक = 2π रेडियन या $2\pi^c$ है।

प्रश्न 8. किसी त्रिभुज के तीनों कोण 3 : 4 : 5 के अनुपात में हैं। तीनों कोणों को रेडियने में ज्ञात कीजिए।

हल: त्रिभुज के तीनों कोणों का अनुपात = 3 : 4 : 5
तीनों कोणों का अनुपातीय योग = 3 + 4 + 5 = 12
त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180° = π रेडियन

त्रिभुज का पहला कोण
$$= \frac{3}{12}\times\pi \text{ रेडियन} = \frac{\pi}{4} \text{ रेडियन}$$
त्रिभुज का दूसरा कोण
$$= \frac{4}{12}\times\pi \text{ रेडियन} = \frac{\pi}{3} \text{ रेडियन}$$
त्रिभुज का तीसरा कोण $= \frac{5}{12}\pi$ रेडियन