विषय : गणित

सामान्य निर्देश : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
(ii) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

निर्देश (अ) : प्रश्न क्रमांक 1 में 10 प्रश्न हैं तथा 10 अंक निर्धारित है। इस प्रश्न के दो उपखण्ड हैं। खण्ड-(अ) में 5 बहुविकल्पीय प्रश्न तथा खण्ड-(ब) में 5 रिक्त स्थानों की पूर्ति करना है। प्रत्येक प्रश्न के लिए 1 निर्धारित है।

खण्ड-(अ) सही उत्तर का चयन कर लिखिए :

(i) $\begin{vmatrix}\cos 70^\circ & \sin 20^\circ \\ \sin 70^\circ & \cos 20^\circ\end{vmatrix}$ का मान है :

(अ) 1 (ब) 2
(स) 0 (द) 3

(ii) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix}2 & 4 \\ 5 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो $3A$ का मान है :

(अ) $\begin{bmatrix}6 & 12 \\ 15 & 9\end{bmatrix}$ (ब) $\begin{bmatrix}5 & 7 \\ 8 & 6\end{bmatrix}$

(स) $\begin{bmatrix}2 & 4 \\ 5 & 3\end{bmatrix}$ (द) $\begin{bmatrix}12 & 6 \\ 9 & 15\end{bmatrix}$

(iii) z-अक्ष के समान्तर समतल का समीकरण है :
(अ) $By + Cz + D = 0$ (ब) $Ax + By + D = 0$
(स) $Ax + Cz + D = 0$ (द) $Ax + By + Cz = 0$

(iv) यदि $y = \log_e x$ हो, तो $\frac{dy}{dx} = ?$

(अ) $\frac{1}{x}$ (ब) $\frac{x}{\log e}$

(स) $\frac{1}{x}\log x$ (द) $\frac{1}{x}\log_e$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ का मान है :

(अ) $\sin^{-1} x + c$ (ब) $\frac{1}{a}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

(स) $\cos^{-1}\frac{x}{a} + c$ (द) $\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

खण्ड-(ब) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) समतल का सदिश समीकरण, जो $\bar{a}$ से होकर गुजरता है तथा एक दिए गए सदिश $\bar{n}$ पर लम्ब है, ... होगा।

(ii) यदि $x = a^y$ हो, तो $\frac{dx}{dy}$ = ...

(iii) यदि समाश्रयण रेखाएँ लम्बवत् हैं, तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान ..... होगा।

(iv) यदि किसी घटना A के घटने के अनुकूल संयोगानुपात 2 : 3 है, तो घटना के घटित होने की प्रायिकता ..... होगी।

(v) समकोण पर क्रिया कर रहे दो बलों 5 N और 12 N का परिणामी बल ..... होगा।

निर्देश (ब) : प्रश्न क्रमांक 2 से 9 तक अतिलघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित हैं।

2. $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ को आंशिक भिन्न में व्यक्त कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि

$$2\sin^{-1}\frac{5}{13} = \sin^{-1}\frac{120}{169}$$

4. $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. उस समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी तीन कोरें निम्न सदिशों से निरूपित हैं : $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

6. k के किस मान के लिए समतल $2x + ky + z + 9 = 0$ और $5x + 3y - 4z - 6 = 0$ परस्पर लम्ब होंगे ?

7. अवकल समीकरण $x^2\frac{dy}{dx} = 2$ को हल कीजिए।

8. सुपर कम्प्यूटर क्या है ?

9. बूलीय बीजगणित $[B, +, \cdot, ']$ के किसी अवयव x के लिए सिद्ध कीजिए कि $x + x = x$.

निर्देश (स) : प्रश्न क्रमांक 10 से 15 तक अतिलघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 3 अंक निर्धारित हैं।

10. सिद्ध कीजिए कि

$$\cos^{-1} x = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

11. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण $\bar{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\bar{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ हैं।

12. अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy = 4x^2$

13. दो कथनों p और q के लिए सत्यता सारिणी से सिद्ध कीजिए कि

$\sim(-p\vee q)\equiv(-p)\wedge(q)$

14. दो थैले जिनमें एक में 5 लाल और 7 सफेद गेंदें हैं, दूसरे में 3 लाल और 12 सफेद गेंदें हैं। एक गेंद को किसी थैले से यदृच्छया निकालने पर उसके लाल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

15. इन्टरनेट क्या है ? इसे प्रारम्भ करने हेतु आवश्यक संसाधन लिखिए।

निर्देश (द): प्रश्न क्रमांक 16 से 21 तक लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न में आन्तरिक विकल्प है। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित हैं।

16. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

अथवा

निम्न समीकरणों को क्रेमर नियम से हल कीजिए :

$x+y=3$
$y+z=5$
$x+y+z=6$

17. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 8\end{bmatrix}$ हों, तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ हो; तो सिद्ध कीजिए कि $A.(\text{Adj } A) = |A|I$.

18. एक गुब्बारे की त्रिज्या 10 सेमी/सेकण्ड की दर से बढ़ रही है। जब गुब्बारे की त्रिज्या 15 सेमी. है, तो उसका सतही क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ?

अथवा

वे अन्तराल ज्ञात कीजिए, जिनमें फलन $f(x)=2x^3-15x^2+36x+1$ वर्धमान या ह्रासमान है।

19. यदि $y=e^{x+e^{x+e^{x+\cdots\infty}}}$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1-y}$.

अथवा

यदि $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x^2-1}$.

20. उस [illegible] का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक समतलों को स्पर्श करता है तथा बिन्दु (1, 1, 2) से होकर गुजरता है।

अथवा

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुएँ (1, 0, – 1) और (3, 2, 2) से होकर जाता है तथा रेखा $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ के समान्तर है।

21. दो बल 10 N और 15 N जो एक दूसरे से 60° पर झुके हैं। इन बलों का परिणामी तथा परिणामी की दिशा ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक व्यक्ति नदी को पार कर दूसरे किनारे पर ठीक सामने बिन्दु पर पहुँचना चाहता है। यदि वह अपनी नौका को धारा के वेग के दुगुने वेग से ले जा सके, तो ज्ञात कीजिए कि वह अपनी नौका को धारा से कितना कोण बनाते हुए रखे।

निर्देश (इ) : प्रश्न क्रमांक 22 से 25 तक दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न में आन्तरिक विकल्प है। प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक निर्धारित हैं।

22. मान ज्ञात कीजिए $\int\frac{e^x(1+\sin x)}{(1+\cos x)}dx$.

अथवा

मान ज्ञात कीजिए $\int\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$.

23. एक नदी की चौड़ाई 80 मीटर है। नदी के एक किनारे से x दूरी पर गहराई d को निम्नलिखित सारणी में दर्शाया गया है :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	8	9	12	15	16	11	6

सिम्पसन नियम की सहायता से नदी के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक वक्र बिन्दुओं (0, 0), (1, 2), (2, 7), (3, 11), (4, 5), (5, 3), (6, 2) से गुजरता है। वक्र द्वारा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समलम्ब चतुर्भुज नियम से ज्ञात कीजिए।

24. निम्न आँकड़ों से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

x	2	4	6	8	10
y	6	5	4	3	2

अथवा

यदि दो समाश्रयण रेखाएँ $x+2y-5=0$ और $2x+3y-8=0$ हैं, तो ज्ञात कीजिए–

(i) x और y के माध्य;

(ii) समाश्रयण गुणांक b_{yx} और b_{xy} ;

(iii) $y=4$ के संगत x का अनुमानित मान $x=2$ के संगत y का अनुमानित मान।

25. दो बलों P और Q का परिणामी R है तथा उनके बीच कोण α है। यदि P को दुगुना कर दिया जाए, तो परिणामी R दुगुना हो जाता है। सिद्ध कीजिए कि

a2zsubjects.com

25. दो बलों P और Q का परिणामी R है तथा उनके बीच कोण α है। यदि P को दुगुना कर दिया जाए, तो परिणामी R दुगुना हो जाता है। सिद्ध कीजिए कि

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{16P^2 - 9Q^2}{16P^2}\right)^{1/2}$$

अथवा

माना t वह समय है जब एक प्रक्षेप्य अपने पथ के बिन्दु p पर पहुँचता है तथा t' वह समय है जब वह p से धरातल पर पहुँचता है। सिद्ध कीजिए कि p की धरातल से ऊँचाई $\frac{1}{2}gtt'$ है।

निर्देश (फ) :प्रश्न क्रमांक 26 एवं 27 दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न में आन्तरिक विकल्प है। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

26. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/4} \log_e(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log_e 2$$

अथवा

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के अक्षों से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

27. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुएँ $(0,-1,-1), (4,5,1), (3,9,2)$ तथा $(-4,4,4)$ समतलीय हैं।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\vec{r} = (\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) + \lambda(3\hat{i}-\hat{j})$ तथा $\vec{r} = (4\hat{i}-\hat{k}) + \mu(2\hat{i}-3\hat{k})$ प्रतिच्छेद करती है। प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।