शांकव परिच्छेद

Ex 12.1

प्रश्न 1. उस वृत्त का संमीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका
(i) केन्द्र (-2, 3) तथा त्रिज्या 4 हो।
(ii) केन्द्र (a, b) तथा त्रिज्या a – b हो।

हल- यदि किसी वृत्त का केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या r हो तो उस वृत्त का समीकरण होगा।
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

(i) यहाँ $h = -2, k = 3$ तथा $r = 4$
अतः वृत्त का अभीष्ट समीकरण
$\{x - (-2)\}^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
$x^2 + 4 + 4x + y^2 + 9 - 16y = 16$
$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

(ii) यहाँ $h = a, k = b$ तथा $r = a - b$
अतः वृत्त का अभीष्ट समीकरण

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (a - b)^2$
$x^2 + a^2 - 2ax + y^2 + b^2 - 2by = a^2 + b^2 - 2ab$
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2ab = 0$

प्रश्न 2. निम्न वृत्तों के केन्द्र के निर्देशांक तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए-
(i) $x(x + y - 6) = (x - y + 8)$
(ii) $\sqrt{1 + k^2}(x^2 + y^2) = 2ax + 2aky$
(iii) $4(x^2 + y^2) = 1$

हल- वृत्त का व्यापक समीकरण
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

यहाँ वृत्त का केन्द्र = $(-g, -f)$

वृत्त की क्रिया = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

(i) वृत्त का दिया गया समीकरण,
x(x + y – 6) = y(x – y + 8)

$x^2 + xy - 6x = xy - y^2 + 8y$
$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

तब वृत्त का केन्द्र $= (-g, -f) = \left(-\frac{(-6)}{2}, -\frac{(-8)}{2}\right)$

$= \left(\frac{6}{2}, \frac{8}{2}\right) = (3, 4)$ उत्तर

तथा वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{\left(-\frac{6}{2}\right)^2 + \left(-\frac{8}{2}\right)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

(ii) वृत्त को दिया गया समीकरण

$$\sqrt{1+k^2}\,(x^2 + y^2) = 2ax + 2a - ky$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{2ax}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{2a - ky}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{2a}{\sqrt{1+k^2}}x - \frac{2a-k}{\sqrt{1+k^2}}y = 0$$

तब वृत्त का केन्द्र $= (-g, -f)$

$$= \left(-\frac{1}{2}(x \text{ का गुणांक}), -\frac{1}{2}(y \text{ का गुणांक})\right)$$

$$= \left\{-\left(\frac{-a}{\sqrt{1+k^2}}\right), -\left(\frac{-a-k}{\sqrt{1+k^2}}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{a-k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$ उत्तर

वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$$= \sqrt{\left(\frac{-a}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 + \left(\frac{-a-k}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 - 0}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{1+k^2} + \frac{a^2+k^2}{1+k^2}} = \sqrt{\frac{a^2(1+k)^2}{(1+k^2)}}$$

$$= \sqrt{a^2}$$

= a

(iii) दिया गया वृत्त का समीकरण

$4(x^2 + y^2) = 1$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

वृत्त जिसका केन्द्र (0, 0) व त्रिज्या r हो तो उसका समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ होता है। अतः अभीष्ट केन्द्र = (0, 0) तथा क्रिज्या = $\frac{1}{2}$

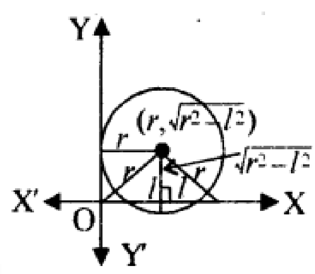
प्रश्न 3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष को स्पर्श करे तथा x-अक्ष पर 2l लम्बाई का अन्त:खण्ड काटे ।

हल- माना अभीष्ट वृत्त की त्रिज्या r है तब चित्रानुसार y-अक्ष को स्पर्श करने वाले तथा x-अक्ष पर 2l लम्बाई का अन्त:खण्ड काटने वाले वृत्त के केन्द्र के

निर्देशांक = $\left(r, \pm\sqrt{r^2 - l^2}\right)$

होंगे। तब वृत्त का अभीष्ट समीकरण

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



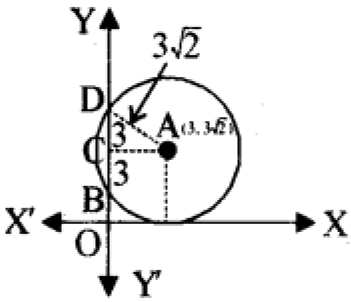
$$\Rightarrow \quad (x - r)^2 + \left(y \mp \sqrt{r^2 - l^2}\right)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + r^2 - 2xr + y^2 + r^2 - l^2 \mp 2y\sqrt{r^2 - l^2} = r^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2xr \mp 2y\sqrt{r^2 - l^2} + r^2 - l^2 = 0$$

प्रश्न 4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो x-अक्ष को मूल बिन्दु से +3 दूरी पर स्पर्श करता है तथा y-अक्ष पर 6 इकाई लम्बाई का अन्त:खण्ड काटता है।

हल-

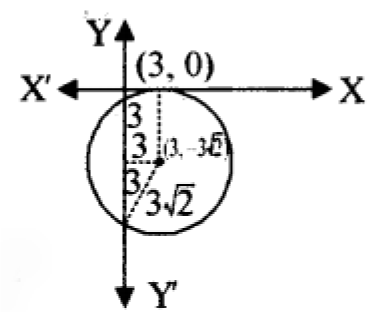


अभीष्ट वृत्त मूल बिन्दु से +3 दूरी पर स्पर्श करता है तब ऐसे दो वृत्त होंगे जो y-अक्ष पर 6 लम्बाई का अन्त:खण्ड काटें। वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्बे जीवा को समद्विभाजित करता है अतः

चित्रानुसार
$AD^2 = AC^2 + CD^2$

$AD^2 = 3^2 + 3^2 = 2 \times 3^2$
$AD = \pm 3\sqrt{2}$

अतः वृत्त की त्रिज्या = $3\sqrt{2}$ एवं वृत्त के केन्द्र = $(3, 3\sqrt{2})$ व $(3, -3\sqrt{2})$



अभीष्ट वृत्त का समीकरण

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)^2 + \left(y \mp 3\sqrt{2}\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 9 - 6x + y^2 + 18 \mp 6\sqrt{2}y = 18$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x \mp 6\sqrt{2}y + 9 = 0$$

प्रश्न 5. वृत्त $x^2 + y^2 – 8x + 10y – 12 = 0$ का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल- दिए गए समीकरण के अनुसार
$x^2 + y^2 – 8x + 10y – 12 = 0$
या $(x^2 – 8x) + (y^2 + 10y) = 12$

या $(x^2 – 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 12 + 16 + 25$
या $(x – 4)^2 + (y + 5)^2 = 53$

इसकी तुलना $(x – h)^2 + (y – k)^2 = r^2$ से करने पर
$h = 4, k = – 5$ तथा त्रिज्या $r = \sqrt{53}$
अतः वृत्त का केन्द्र $(4, – 5)$ तथा त्रिज्या $r = \sqrt{53}$

प्रश्न 6. वृत्त $2x^2 + 2y^2 – x = 0$ का केन्द्र एवं क्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल- दिए गए समीकरण के अनुसार
$2x^2 + 2y^2 – x = 0$

या $x^2 + y^2 – \frac{x}{2} = 0$

या $\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + y^2 = 0$

या $\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) + y^2 = \frac{1}{16}$

या $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

इसकी तुलना $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ से करने पर

$h = \frac{1}{4}, k = 0$ तथा त्रिज्या $r = \frac{1}{4}$

$\therefore$ वृत्त का केन्द्र $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ तथा त्रिज्या $\frac{1}{4}$ है।

प्रश्न 7. बिन्दुओं (2, 3) और (- 1, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा $x – 3y – 11 = 0$ पर स्थित है।

हल- माना कि वृत्त का समीकरण $(x – h)^2 + (y – k)^2 = r^2$ है।
अतः बिन्दु (2, 3) तथा (-1, 1) से गुजरने वाले वृत्तों के समीकरण ।

$(2 – h)^2 + (3 – k)^2 = r^2$ .....(1)

तथा $(-1 - h)^2 + (1 - k)^2 = r^2$.....(2)
क्योंकि इन वृत्तों का केन्द्र रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है।
अतः

$h - 3k = 11$ .....(3)
समीकरण (1) को हल करने पर $(2 - h)^2 + (3 - k)^2 = r^2$
या $4 - 4h + h^2 + 9 - 6k + k^2 = r^2$

या $13 - 4h + h^2 - 6k + k^2 = r^2$ .....(4)
समीकरण (2) को हल करने पर $(- 1 - h)^2 + (1 - k)^2 = r^2$
या $1 + 2h + h^2 + 1 - 2k + k^2 = r^2$
या $2 + 2h + h^2 - 2k + k^2 = r^2$ .....(5)

समीकरण (4) व (5) से
$13 - 4h + h^2 - 6k + k^2 = 2 + 2h + h^2 - 2k + k^2$
या $13 - 2 - 4h - 2h + h^2 - h^2 - 6k + 2k + k^2 - k^2 = 0$
या $11 - 6h - 4k = 0$

या $6h + 4k = 11$ .....(6)
समीकरण (3) व (6) से अर्थात् $h - 3k = 11$

$6h + 4k = 11$
समीकरण (3) में 4 का व (6) में 3 का गुणा करने पर

$$\begin{array}{r} 4h - 12k = 44 \\ 18h + 12k = 33 \\ \hline \end{array}$$

जोड़ने पर $22h = 77$

$$h = \frac{77}{22} = \frac{7}{2}$$

h का यह मान समीकरण (6) में रखने पर ।

$$6h + 4k = 11$$

$$6 \times \frac{7}{2} + 4k = 11$$

या $4k = 11 - 21$

या $k = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}$

k व h के ये मान समीकरण (1) में रखने पर

$$(2-h)^2+(3-k)^2=r^2$$

या $$\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+\left[3-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2=r^2$$

या $$\left(\frac{4-7}{2}\right)^2+\left(3+\frac{5}{2}\right)^2=r^2$$

या $$\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2=r^2$$

या $$\frac{9}{4}+\frac{121}{4}=r^2$$

$\therefore$ $$r^2=\frac{9+121}{4}=\frac{130}{4}=\frac{65}{2}$$

अतः वृत्त का अभीष्ट समीकरण

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$$

या $$x^2-7x+\frac{49}{4}+y^2+5y+\frac{25}{4}=\frac{65}{2}$$

या $$x^2-7x+y^2+5y=\frac{65}{2}-\frac{25}{4}-\frac{49}{4}$$

या $$x^2-7x+y^2+5y=\frac{130-25-49}{4}=\frac{130-74}{4}$$

या $x^2-7x+y^2+5y=\frac{56}{4}$
या $x^2+y^2-7x+5y-14=0$

प्रश्न 8. त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र x अक्ष पर हो और जो बिन्दु (2, 3) से जाता है।

हल- माना कि वृत्त का समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=r$ है।

प्रश्नानुसार वृत्त बिन्दु (2, 3) से जाता है तथा इसकी त्रिज्या 5 है। अर्थात्
$(2-h)^2+(3-k)^2=25$

या $4-4h+h^2+9-6k+k^2=25$
या $-12-4h+h^2-6k+k^2=0$ .....(1)
$\because$ इस वृत्त का केन्द्र भी x-अक्ष पर है $\therefore$ $k=0$ .....(2)

k का यह मान समीकरण (1) में रखने पर
$-12-4h+h^2=0$
या $h^2-4h-12=0$
या $h^2-6h+2h-12=0$

या $h(h-6)+2(h-6)=0$
या $(h-6)(h+2)=0$
$\therefore h=6,-2$

अब समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ में $h=6$, $k=0$ तथा $r=5$ रखने पर
$(x-6)^2+(y-0)^2=25$
या $x^2-12x+36+y^2=25$
या $x^2+y^2-12x+11=0$

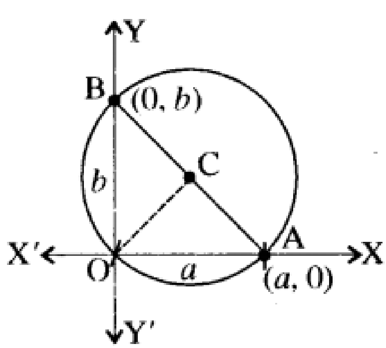
पुनः समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ में $h=-2$, $k=0$ तथा $r=5$ रखने पर।
$(x+2)^2+(y-0)^2=25$
या $x^2+4x+4+y^2=25$
या $x^2+y^2+4x-21=0$

प्रश्न 9. (0, 0) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांकों पर a और b अंत:खण्ड बनाता है।

हल- प्रश्नानुसार वृत्त मूलबिन्दु (0, 0) से होकर जाता है तथा निर्देशांकों पर a और b अंत:खण्ड बनाता है।
$\therefore OA=a$

$\therefore$ A के निर्देशांक = (a, 0)

तथा $OB=b$
$\therefore$ B के निर्देशांक = (0, b)



अत: केन्द्र C के निर्देशांक $=\left(\frac{a+0}{2},\frac{0+b}{2}\right)$ या $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$

तथा त्रिज्या OC = $\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2$

या $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4}$

या $x^2 + y^2 - ax - by = \frac{a^2+b^2}{4} - \frac{a^2+b^2}{4}$

$\therefore x^2 + y^2 - ax - by = 0$

यही वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

Ex 12.2

प्रश्न 1. वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ तथा रेखा $4x + 3y = 12$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए तथा प्रतिच्छेद जीवा की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

हल- दिये गये वृत्त का समीकरण
$x^2 + y^2 = 25$ ....(1)

रेखा का समीकरण
$4x + 3y = 12$
$3y = 12 - 4x$

$y = \frac{12-4x}{3}$ ....(2)

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$x^2 + \left(\frac{12-4x}{3}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{(12-4x)^2}{9} = 25$$

$\Rightarrow 9x^2 + (12 - 4x)^2 = 225$
$\Rightarrow 9x^2 + 144 - 96x + 16x^2 = 225$

⇒ $25x^2 - 96x = 225 - 144$
⇒ $25x^2 - 96x = 81$
⇒ $25x^2 - 96x - 81 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{96 \pm \sqrt{9216 - 4 \times 25 \times (-81)}}{2 \times 25}$$

$$x = \frac{96 \pm \sqrt{9216 + 8100}}{2 \times 25}$$

$$x = \frac{96 \pm 2\sqrt{4329}}{2 \times 25}$$

$$x = \frac{48 \pm 3\sqrt{481}}{25}$$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर—

$$y = \frac{36 \mp 4\sqrt{481}}{25} \text{ होगा।}$$

अत: प्रतिच्छेद बिन्दु

$$\left[\frac{48 \pm 3\sqrt{481}}{25}, \frac{36 \mp 4\sqrt{481}}{25}\right]$$

अत: प्रतिच्छेद बिन्दु होंगे—

$$\left(\frac{48 + 3\sqrt{481}}{25}, \frac{36 - 4\sqrt{481}}{25}\right)$$

तथा $\left(\frac{48 - 3\sqrt{481}}{25}, \frac{36 + 4\sqrt{481}}{25}\right)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2 \times 3\sqrt{481}}{25}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 4\sqrt{481}}{25}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{36 \times 481}{625} + \frac{64 \times 481}{625}}$$

$$= \sqrt{\frac{100 \times 481}{625}} = \frac{10}{25}\sqrt{481}$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{481}$$

प्रश्न 2. यदि वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ सरल रेखा $y = mx + c$ पर 2l लम्बाई का अन्त:खण्ड काटता हो, तो सिद्ध कीजिए–
$c^2 = (1 + m^2)(a^2 - l^2)$

हल- हम जानते हैं कि जीवा के अन्त:खण्ड की लम्बाई

$$PQ = 2\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{(1+m^2)}}$$

लेकिन दिया गया है—

$$PQ = 2l$$

$$\therefore \quad 2l = 2\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{(1+m^2)}}$$

या

$$l = \sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{(1+m^2)}}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर—

$$l^2 = \frac{a^2(1+m^2)-c^2}{(1+m^2)}$$

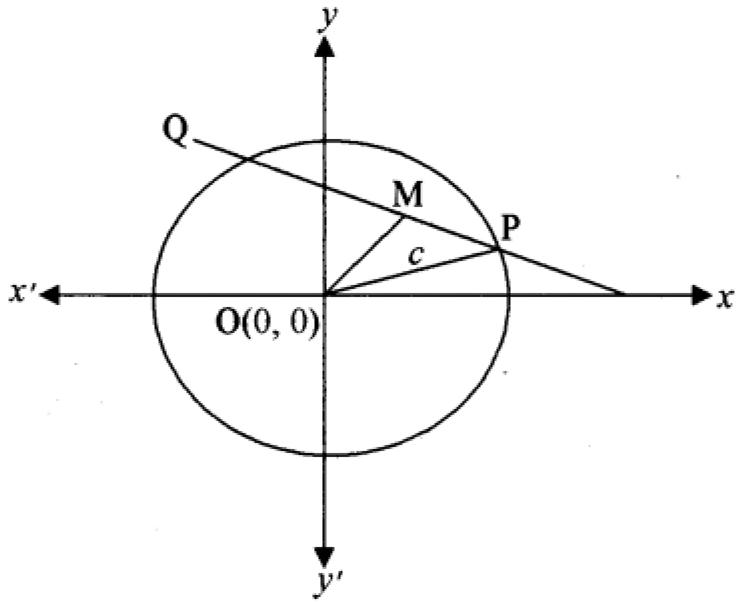
$l^2(1 + m^2) = a^2(1 + m) - c^2$

$c^2 = a^2(1 + m^2) - l^2(1 + m^2)$
$c^2 = (1 + m^2)(a^2 - l^2)$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 3. वृत्त $x^2 + y^2 = c^2$ द्वारा रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ पर काटे गये अन्त:खण्ड की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि वृत्त एवं रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दु P तथा Q हैं।



OM = बिन्दु O(0, 0) से रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ लम्ब की लम्बाई

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

∴ अन्त:खण्ड की लम्बाई = PQ = 2MP

$$= 2\sqrt{(OP)^2 - (OM)^2}$$

$$= 2\sqrt{c^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}}$$

प्रश्न 4. k के किस मान के लिए रेखा 3x + 4y = k वृत्त $x^2 + y^2 = 10x$ को स्पर्श करती है।

हल- दिये गये वृत्त के समीकरण से-

$x^2 + y^2 - 10x = 0$
केन्द्र (5, 0)

$$\left[\text{केन्द्र} = \left(-\frac{1}{2}x \text{ का गुणांक}, \ -\frac{1}{2}y \text{ का गुणांक}\right)\right]$$

$$\text{त्रिज्या} = \sqrt{(5)^2 + 0 - 0}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

वृत्त के केन्द्र से स्पर्श रेखा पर डाला गया लम्ब वृत्त की त्रिज्या के बराबर होगा।
स्पर्श रेखा का समीकरण-

$3x + 4y - k = 0$

$$\frac{3 \times 5 + 4 \times 0 - k}{\sqrt{9 + 16}} = \pm 5$$

$$\frac{15 - k}{\sqrt{25}} = \pm 5$$

$15 - k = \pm 25$

धनात्मक चिह्न लेने पर
$15 - k = 25$
$15 - 25 = k$
$\therefore k = -10$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर
$15 - k = -25$
$15 + 25 = k$
$\therefore k = 40$

प्रश्न 5. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जब-

(i) रेखा $y = mx + c$ वृत्त $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ को स्पर्श करे।
(ii) रेखा $lx + my + n = 0$ वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करे।।

हल- (i) सरल रेखा वृत्त को स्पर्श करेगी यदि केन्द्र से रेखा पर लम्ब = वृत्त की त्रिज्या
यहाँ (a, b) वृत्त का केन्द्र तथा r त्रिज्या है।

$$\therefore \quad \frac{b - am - c}{\sqrt{1 + m^2}} = r$$

वर्ग करने पर-
$(b - am - c)^2 = r^2(1 + m^2)$

$(b - c - am)^2 = r^2 + r^2m^2$
$(b - c)^2 - 2a(b - c)m + a^2m^2 = r^2 + r^2m^2$
$m^2(a^2 - r^2) - 2am(b - c) + (b - c)^2 = y$

(ii) रेखा $lx + my + n = 0$ वृत्त $x^2 + y^2 = a$ को स्पर्श करे।
स्पर्श करने का प्रतिबन्ध
$c^2 = a^2(1 + m^2)$ ....(i)

रेखा के समीकरण से
$lx + my = -n$
$my = -lx - n$

$$y = -\frac{l}{m}x - \frac{n}{m}$$

$$\text{रेखा का ढाल} = -\frac{l}{m}$$

$$\text{अन्त:खण्ड की लम्बाई} = \frac{-n}{m}$$

और वृत्त की त्रिज्या $= a$
समीकरण (1) में मान रखने पर—

$$\left(\frac{-n}{m}\right)^2 = a^2\left(1 + \frac{l^2}{m^2}\right)$$

$$\frac{n^2}{m^2} = a^2\left(\frac{m^2 + l^2}{m^2}\right)$$

$n^2 = a^2(m^2 + l^2)$

प्रश्न 6. (i) वृत्त $x^2 + y^2 = 64$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (4, 7) से गुजरती है।

(ii) वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष से 60° का कोण बनाती है।

हल- (i) बिन्दु (4, 7) से गुजरने वाली स्पर्श रेखा का समीकरण
$(y - y_1) = m(x - x_1)$

$(y - 7) = m(x - 4)$
$y - 7 = mx - 4m$
$mx - y - 4m + 7 = 0$

समी. (1) की रेखा वृत्त $x^2 + y^2 = 64$ को स्पर्श करती है। इसलिए वृत्त के केन्द्र (0, 0) से स्पर्श रेखा पर डाला गया लम्ब वृत्त की त्रिज्या के बराबर होगा

$$\frac{m \times 0 - 0 - 4m + 7}{\sqrt{m^2 + 1}} = 8$$

$\Rightarrow (7 - 4m)^2 = 64(m^2 + 1)$
$\Rightarrow 49 - 56m + 16m^2 = 64m^2 + 64$
$\Rightarrow 64m^2 + 64 - 49 + 56m - 16m^2 = 0$

$\Rightarrow 48m^2 + 56m + 15 = 0$
$\Rightarrow 48m^2 + 36m + 20m + 15 = 0$
$\Rightarrow 12m(4m + 3) + 5(4m + 3) = 0$

$\Rightarrow (12m + 5)(4m + 3) = 0$
यदि $12m + 5 = 0$
$\therefore m = \frac{-5}{12}$

या $4m + 3 = 0$
$\Rightarrow m = \frac{-3}{4}$

समीकरण (1) में मान $m = \frac{-5}{12}$ रखने पर

$$\frac{-5}{12}x - y - 4\left(-\frac{5}{12}\right) + 7 = 0$$

$$\frac{-5x}{12} - y + \frac{5}{3} + 7 = 0$$

$- 5x - 12y + 20 + 84 = 0$
$- 5x - 12 + 104 = 0$

$5x + 12y - 104 = 0$
समीकरण (1) में $m = \frac{-3}{4}$ रखने पर

$mx - y - 4m + 7 = 0$

$$\therefore \quad \frac{-3}{4}x - y - 4\left(\frac{-3}{4}\right) + 7 = 0$$

$$\frac{-3x}{4} - y + 3 + 7 = 0$$

$$\frac{-3x}{4} - y + 10 = 0$$

$- 3x - 4y + 40 = 0$
$3x + 4y - 40 = 0$

(ii) स्पर्श रेखा का समीकरण ढाल के रूप में

$$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$$

यहाँ पर $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

और वृत्त की त्रिज्या $a = 2$ है।

∴ स्पर्श रेखा का समीकरण—

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ में मान रखने पर—

$$y = \sqrt{3}x \pm 2\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}$$

$$y = \sqrt{3}x \pm 2\sqrt{1+3}$$

$$y = \sqrt{3}x \pm 2 \times 2$$

$$y = \sqrt{3}x \pm 4$$

प्रश्न 7. c का मान ज्ञात कीजिए कि रेखा $y = c$ वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा हो।

हल- स्पर्श रेखा का समीकरण
$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$
$x \times 1 + y \times 1 - 1(x + 1) + 1(y + 1) - 2 = 0$

$x + y - x - 1 + y + 1 - 2 = 0$
$2y - 2 = 0$

$y = 1$....(1)

दी गई स्पर्श रेखा
y = c ....(2)
समीकरण (1) तथा (2) की तुलना करने पर
c = 1

प्रश्न 8. वृत्त $x^2 + y^2 = 169$ के बिन्दुओं (5, 12) तथा (12, -5) पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि वे परस्पर लम्बवत् होंगी। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल- $x^2 + y^2 = 169$ ....(1)
बिन्दु (5, 12) पर वृत्त (1) की स्पर्श रेखा का समीकरण
5x + 12y = 169 ....(2)
बिन्दु (12, -5) पर वृत्त (1) की स्पर्श रेखा का समीकरण

12x – 5y = 169 ....(3)
रेखा (2) का ढाल = $\frac{-5}{12} = m_1$
रेखा (3) का ढाल = $\frac{12}{5} = m_2$

चूँकि $m_1m_2 = -1$
अतः रेखा (2) तथा (3) एक-दूसरे को समकोण पर काटती
समीकरण (2) तथा (3) को हल करने पर

$$5x + 12y - 169 = 0$$
$$12x - 5y - 169 = 0$$
$$60x + 144y - 169 \times 12 = 0$$
$$\underset{-}{60x} \underset{+}{- 25y} \underset{+}{-} 169 \times 5 = 0$$

घटाने पर— $169y + 169 \times 5 - 169 \times 12 = 0$

$$169y + 169(5 - 12) = 0$$
$$y - 7 = 0$$
$$\boxed{\therefore y = 7}$$
$$5x + 12y - 169 = 0$$

$y = 7$ रखने पर—

$$5x + 12 \times 7 - 169 = 0$$
$$5x = 169 - 84$$
$$5x = 85$$
$$x = \frac{85}{5} = 17$$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक–(17, 7)

Ex 12.3

प्रश्न 1. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी
(i) नाभि (2, 3) तथा नियता $x - 4y + 3 = 0$ है।
(ii) नाभि (-3, 0) तथा नियता $x + 5 = 0$ है।

हल- (i) माना परवलय पर कोई चर बिन्दु P(h, k) है। परवलय की परिभाषानुसार
SP = PM

जहाँ S नाभि तथा M, रेखा पर लम्बपाद है।
$SP^2 = PM^2$

$$\Rightarrow \quad (h-2)^2 + (k-3)^2 = \left(\frac{h-4k+3}{\sqrt{(1)^2+(-4)^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad (h-2)^2 + (k-3)^2 = \frac{(h-4k+3)^2}{17}$$

$17\{h^2 + 4 - 4h + k^2 + 9 - 6k\} = (h - 4k + 3)^2$
$17\{h^2 + 13 - 4h + k^2 - 6k\} = h^2 + 16k^2 + 9 - 8hk - 24k + 6h$

$17h^2 + 221 - 68h + 17k^2 - 102k = h^2 + 16k + 9 - 8hk - 24k + 6h$
$16h^2 + 8hk + k^2 - 74h - 78k + 212 = 0$

अतः बिन्दु P(h, k) का बिन्दुपथ $16x^2 + 8xy + y^2 - 74x - 78y + 212 = 0$ है। जो कि अभीष्ट परवलय का समीकरण है।

(ii) माना परवलय पर कोई चर बिन्दु P(h, k) है। परवलय की परिभाषानुसार
SP = PM

जहाँ S परवलय की नाभि तथा M, रेखा पर P से डाले गए लम्ब का लम्बपाद है।
$SP^2 = PM^2$

$$\Rightarrow \quad (h+3)^2 + (k-0)^2 = \left(\frac{h+5}{\sqrt{(1)^2}}\right)^2$$

$(h + 3)^2 + k^2 = (h + 5)^2$

$h^2 + 9 + 6h + k^2 = h^2 + 10h + 25$
$k^2 = h^2 + 10h + 25 - h^2 - 9 - 6h$

$k^2 = 4h + 16$
अतः बिन्दु P(h, k) का बिन्दुपथ, $y^2 = 4x + 16$ है जो कि अभीष्ट परवलय का समीकरण है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित परवलय के शीर्ष, अक्ष, नाभि तथा नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए

(i) $y^2 = 8x + 8y$
(ii) $x^2 + 2 = 8x – 7$

हल- (i) परवलय का दिया गया समीकरण-
$y^2 = 8x + 8y$
$y^2 – 8y = 8x$

$y^2 – 8y + (4)^2 – (4) = 8x$
$(y – 4)^2 = x + 16$
$(y – 4)^2 = 8(x + 2)$ ….(1)

समीकरण (1) में $y – 4 = Y$ एवं $x + 2 = X$ रखने पर परवलय का नया समीकरण होगा।
$Y^2 = 8X$ ….(2)

जो परवलय $y^2 = 4ax$ रूप का है। अत: इसकी तुलना करने पर
$4a = 8$
$a = 2$
परवलय $Y^2 = 8X$ के लिए

(a) शीर्ष (0, 0) अर्थात् $X = 0, Y = 0$
(b) नाभि (a, 0) = (2, 0) अर्थात् $X = 2, Y = 0$
(c) अक्ष $Y = 0$

(d) नाभिलम्ब = 4a = 4 x 2 = 8
उपरोक्त परिणामों में $X = x + 2$ तथा $Y = y – 4$ रखने पर दिये हुए परवलय के लिए।

(a) शीर्ष $x + 2 = 0 \Rightarrow x = – 2, y – 4 = 0 = y = 4$
अतः शीर्ष के निर्देशांक (-2, 4) हैं।

(b) नाभि $x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0, y – 4 = 0 \Rightarrow y = 4$
अतः नाभि के निर्देशांक (0, 4)

(c) अक्ष $y – 4 = 0 \Rightarrow y = 4$
(d) नाभिलम्ब = 8

(ii) परवलय का दिया गया समीकरण

$x^2 + 2y = 8x - 7$

$x^2 - 8x = -2y - 7$

$x^2 - 8x\ (4)^2 = -2y - 7 + (4)^2$

$(x - 4)^2 = -2y + 9$

$$\Rightarrow \quad (x-4)^2 = -2\left(y - \frac{9}{2}\right) \quad \ldots(1)$$

समीकरण (1) में $x - 4 = X$ तथा $y - \frac{9}{2} = Y$ रखने पर परवलय का नया समीकरण

$X^2 = -2Y$

जो परवलय $x^2 = -4ay$ रूप का है। अतः इसकी तुलना करने पर

$4a = 2$

$a = \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$

परवलय $X^2 = -2Y$ के लिए

(a) शीर्ष : (0, 0) अर्थात् $X = 0$, $Y = 0$

(b) नाभि : $(0, -a) = (0, -\frac{1}{2})$ अर्थात्, $X = 0, Y = -\frac{1}{2}$

(c) अक्ष : $X = 0$

(d) नाभिलम्ब $= 4a = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

उपरोक्त परिणामों में $X = x - 4$ तथा $Y = y - \frac{9}{2}$ रखने पर दिए हुए परवलय के लिए

(a) शीर्ष : $x - 4 = 0$ या $x = 4$

$y - \frac{9}{2}$ या $y = \frac{9}{2}$

अत: शीर्ष के निर्देशांक $(4, \frac{9}{2})$

(b) नाभि : $x - 4 = 0$ या $x = 4$

$y - \frac{9}{2}$ या $y = 4$

अतः नाभि के निर्देशांक (4, 4)

(c) अक्ष : $x - 4 = 0$ या $x = 4$

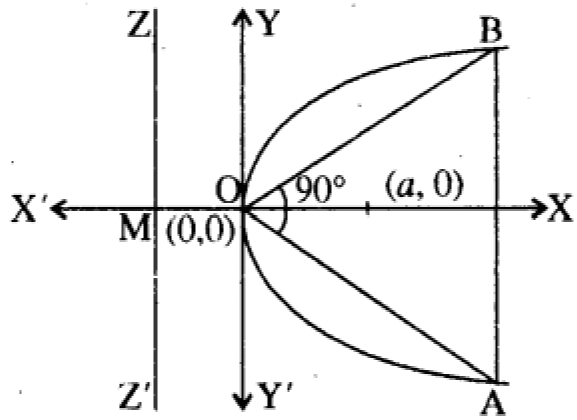
(d) नाभिलम्ब $= 4a = 2$

प्रश्न 3. परवलय $y^2 = 4ax$ की एक द्विकोटि की लम्बाई 8a है। सिद्ध कीजिये कि मूलबिन्दु से इस द्विकोटि के शीर्षों को मिलाने वाली रेखायें लम्बवत् होंगी।

हल-

दिया गया परवलय का समीकरण

$y^2 = 4ax$



हम जानते हैं, वक्र के अक्ष के लम्बवत् जीवा, वक्र की द्विकोटि कहलाती है। माना बिन्दु B (h, 4a) तथा A (h, – 4a)

बिन्दु B परवलय के समीकरण को सन्तुष्ट करेगा,

अतः $y^2 = 4ax$

$(4a)^2 = 4a \times h$

$16a^2 = 4ah$

$h = 4a$

अतः बिन्दु B (4a, 4a) तथा A (4a, – 4a) हमको यहाँ पर

$\angle BOA = 90°$ सिद्ध करना है।

OB रेखा का झुकाव (m_1) माना $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{4a - 0}{4a - 0} = 1$$

इसी प्रकार OA रेखा का झुकाव (m_2) माना

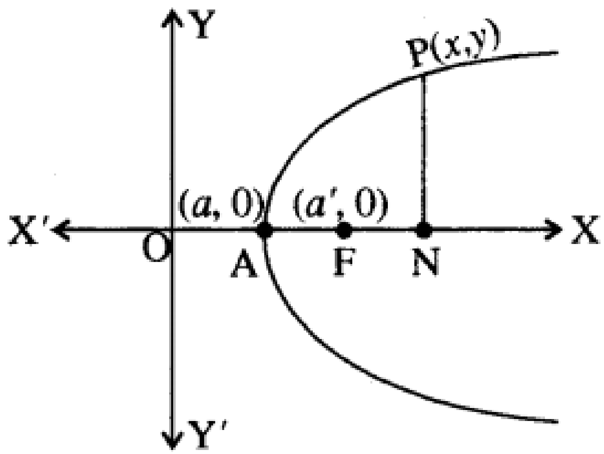
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{4a - 0}{4a} = -1$$

$\therefore \quad m_1 \times m_2 = -1$

∴ द्विकोटि के शीर्ष को मिलाने वाली रेखायें लम्बवत् होंगी।

प्रश्न 4. यदि परवलय का शीर्ष तथा नाभि x-अक्ष पर मूल बिन्दु से a तथा a′ दूरी पर हो, तो सिद्ध कीजिए कि परवलय की समीकरण $y^2 = 4(a' - a)(x - a)$ होगी।

हल- माना कि P(x, y) परवलय पर स्थित कोई बिन्दु है।



चित्रानुसार OA = a, OF = a′

अतः शीर्ष A तथा नाभि F के मध्य दूरी
AF = a′ − a

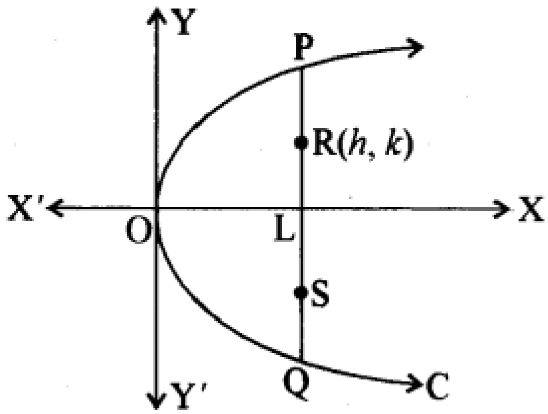
परवलय के समीकरण के ज्यामितीय रूप से हम जानते हैं कि
$PN^2 = 4\ AF\ .\ AN$

या $y^2 = 4\ (a' - a)\ (x - a)$

प्रश्न 5. PQ एक परवलय की द्विकोटि है। इसके समत्रिभाजन वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

हल- माना R तथा S द्विकोटि PQ के समत्रिभाजन वाले बिन्दु हैं।

माना R के निर्देशांक (h, k) हैं। तब OL = h और RL = k
∴ RS = RL + LS = k + k = 2k



⇒ PR = RS = SQ = 2k
⇒ LP = LR + RP = k + 2k = 3k

इस प्रकार P के निर्देशांक = (h, 3k)
चूँकि (h, 3k) बिन्दु, परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित है अतः
$(3k)^2 = 4a(h)$

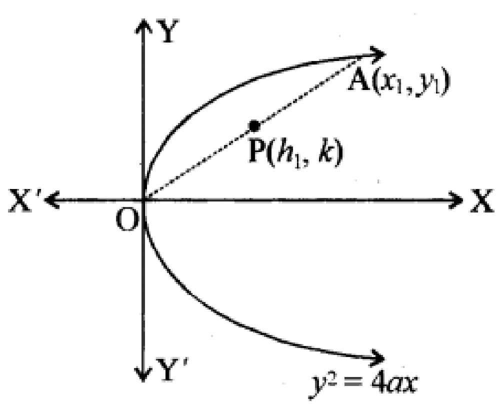
⇒ $9k^2 = 4ah$
अतः अभीष्ट बिन्दु पथ
$9y^2 = 4ax$

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2 = 4ax$ में शीर्ष से गुजरने वाली सभी जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ भी परवलय $y^2 = 2ax$ होता है।

हल- माना OA परवलय $y^2 = 4ax$ की एक जीवा है तथा P(h, k) इसका मध्य बिन्दु है। माना A के निर्देशांक (X_1, Y_1) हैं। तब

$$\frac{x_1 + 0}{2} = h, \frac{y_1 + 0}{2} = k \Rightarrow x_1 = 2h \text{ एवं } y_1 = 2k$$

अतः A निर्देशांक (2h, 2k) होंगे।



∵ A, परवलय $y^2 = 4ax$ पर है अतः
$(2k)^2 = 4a(2h)$

$\Rightarrow 4k^2 = 8ah$
$\Rightarrow k^2 = 2ah$
अतः अभीष्ट बिन्दुपथ $y^2 = 2ax$

Ex 12.4

प्रश्न 1. उन प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ सरल रेखा $4y + 3x + 6 = 0$ परवलय $2y^2 = 9x$ को काटती है।

हल- सरल रेखा का समीकरण
$4y + 3x + 6 = 0$ ....(1)

परवलय को समीकरण-
$2y^2 = 9x$ ....(2)

समीकरण (2) से x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$4y + 3\left[\frac{2y^2}{9}\right] + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4y + \frac{2y^2}{3} + 6 = 0$$

$\Rightarrow 12y + 2y^2 + 18 = 0$
$\Rightarrow 6y + y^2 + 9 = 0$

$\Rightarrow (y + 3)^2 = 0$
$\therefore y = -3$

समीकरण (2) से,
$\Rightarrow 2[-3]^2 = 9x$

$\Rightarrow 9x = 18$
$\therefore x = 2$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक–
(2,-3)

प्रश्न 2. परवलय $y^2 = 8$ द्वारा रेखा $4y - 3x = 8$ पर काटी गई जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल- जीवा की लम्बाई

$$= \frac{4}{m^2}\sqrt{a(a-mc)(1+m^2)}$$

$y^2 = 8x$ की तुलना $y^2 = 4ax$ से करने पर $4a = 8$

$\therefore a = 2$

$4y - 3x = 8$

$4y = 3x + 8$

$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

$$m = \frac{3}{4} \text{ और } c = 2$$

मान रखने पर—

$$= \frac{4}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\sqrt{2\left(2-\frac{3}{4}\times 2\right)\left(1+\frac{9}{16}\right)}$$

$$= \frac{4\times 16}{9}\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{25}{16}\right)}$$

$$= \frac{4\times 16}{9}\times\frac{5}{4} = \frac{80}{9}$$

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि सरल रेखा $x + 1 = 1$ परवलय $y = x - x^2$ को स्पर्श करती है।

हुल- सरल रेखा और परवलय के समीकरण को हल करने पर

$x + y = 1$ ....(1)

$y = x - x^2$ ....(2)

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर-

$x + x - x^2 = 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

यह समीकरण द्विघात का है। इसके मूल बराबर होंगे और संपाती होंगे।

$B^2 - 4AC = 0$

$(-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$
$4 - 4 = 0$

$0 = 0$
अतः सरल रेखा $x + y = 1$ परवलय $y = x - x^2$ को स्पर्श करती है।

प्रश्न 4. परवलय $y^2 = 4ax$ को रेखा $lx + my + n = 0$ द्वारा स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

हल- रेखा व परवलय के समीकरणों से x को लुप्त करने पर-

$$y^2 = 4a\left[-\frac{n+my}{l}\right] \quad \left[\because x = \frac{-n-my}{l}\right]$$
$\Rightarrow ly^2 = -4a(n + my)$

$\Rightarrow ly^2 + 4amy + 4an = 0$ ....(1)
यदि दी गई रेखा परवलय को स्पर्श करती है तो समीकरण (1) जो y में द्विघात है, के मूल समान होंगे ।

अतः $(4am)^2 = 4.(l)(4an)$
$16a^2m^2 = 16lan$

$\Rightarrow am^2 = ln$ यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि x-अक्ष से "α" कोण बनाने वाली परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभीय जीवा की लम्बाई $4a \operatorname{cosec}^2\alpha$ होगी।

हल- x-अक्ष से कोण बनाने वाली जीवा का समीकरण
$y = \tan\alpha \cdot x + c$ ....(1)

समीकरण (1) नाभि से गुजरती है अतः
$0 = \tan\alpha \cdot a + c$
$c = -a\tan\alpha$ ....(2)

समीकरण (1) तथा (2) से नाभीय जीवा का समीकरण– |
$y = \tan\alpha\,(x - a)$ ....(3)

मान लो नाभीय जीवा के छोर $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ हैं, तो x_1, x_2 निम्न समीकरण के मूल होंगे-
$\tan^2\alpha\,(x - a)^2 = 4ax$
$\tan^2\alpha(x^2 + a^2 - 2ax) = 4ax$

$\tan^2 \alpha. x^2 - 2ax(2 + \tan^2 \alpha) + a^2 \tan^2 \alpha = 0$

या $\quad x_1 + x_2 = \dfrac{2a(2+\tan^2\alpha)}{\tan^2\alpha}$ $\quad \left[\text{मूलों का योग} = -\dfrac{b}{a}\right]$

$x_1 x_2 = a^2$ $\quad \left[\text{मूलों का गुणनफल} = \dfrac{c}{a}\right]$

अत: $\quad x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1+x_2)^2 = 4x_1x_2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{2a(2+\tan^2\alpha)}{\tan^2\alpha}\right) - 4a^2}$$

$$= \sqrt{4a^2\left\{\frac{(2+\tan^2\alpha)^2}{\tan^4\alpha} - 1\right\}}$$

$$= 2a\sqrt{\frac{4+\tan^4\alpha+4\tan^2\alpha-\tan^4\alpha}{\tan^4\alpha}}$$

$$= 4a.\sqrt{\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^4\alpha}} = 4a\sqrt{\sec^2\alpha\cot^4\alpha}$$

$$= 4a \sec\alpha \cot^2\alpha \qquad \text{....(1)}$$

अत: $\quad PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2+\{\tan\alpha(x_1-x_2\}^2}$$

$$[\because y = \tan\alpha(x-a)]$$

$$= (x_1-x_2)\sqrt{(1+\tan^2\alpha)}$$

$$= (x_1-x_2) \times \sec\alpha \qquad \text{....(2)}$$

समीकरण (1) से मान रखने पर—

$$= 4a \sec\alpha \cot^2\alpha \,.\, \sec\alpha$$

$$= 4a\frac{1}{\cos\alpha}.\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$PQ = 4a\,\mathrm{cosec}^2\,\alpha$$

प्रश्न 6. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिससे रेखा $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करे।

हल- हम जानते हैं कि परवलय $y^2 = 4ax$ को रेखा $y = mx + c$ स्पर्श करे तो
$c = \frac{a}{m}$
या $a = mc$ ....(1)

दी गई रेखा से m तथा c के मान निकालने पर-
$x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$

$$y = -\frac{x\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{p}{\sin\alpha}$$

$y = -x \cot \alpha + p \operatorname{cosec} \alpha$
$y = mx + c$ से तुलना करने पर
$m = -\cot \alpha$

$c = p \operatorname{cosec} \alpha$
समीकरण (1) में मान रखने पर-

$a = [-\cot \alpha]\, p \operatorname{cosec} \alpha$

$$a = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \times \frac{p}{\sin\alpha}$$

$$a = \frac{-p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$a \sin^2\alpha = -p \cos \alpha$

प्रश्न 7. निम्न परवलयों पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए

(i) $y^2 = 6x$, जो रेखा $2x - 3y = 4$ के समान्तर हो।
(ii) $y^2 = 8x$, जो रेखा $2x - y + 1 = 0$ के लम्बवत् हो।

हल- (i) $y^2 = 6x$ जो रेखा $2x - 3y = 4$ के समान्तर है।
रेखा $2x - 3y - 4 = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण-

$2x - 3y + k = 0$ ....(1)
रेखा (i) परवलय $y^2 = 6x$ को स्पर्श करती है।

हम जानते हैं कि परवलय $y^2 = 4ax$ को केवल $y = mx + c$
स्पर्श करे तो।

$c = \frac{a}{m}$ ...(2)

परवलय $y^2 = 6x$ से $a = \frac{3}{2}$ तथा समीकरण (1) से $c = \frac{k}{3}$
समीकरण (2) में रखने पर।

$$\frac{k}{3} = \frac{3/2}{2/3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{3} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{27}{4}$$

अभीष्ट स्पर्श रेखा का समीकरण—

$$2x - 3y + \frac{27}{4} = 0$$

या $8x - 12y + 27 = 0$

(ii) $y^2 = 8x$, जो रेखा $2x - y + 1 = 0$ के लम्बवत् हो।
परवलय का समीकरण $y^2 = 8x$ ....(1)
रेखा $2x - y + 1 = 0$ ....(2)

रेखा (2) के लम्बवत् रेखा का समीकरण–
$x + 2y + \lambda = 0$ ..(3)
चूँकि समीकरण (3) परवलय (1) को स्पर्श करती है।

∴ $a = mc$ सूत्र से –
परवलय से-
$4a = 8$

$a = 2$
रेखी के समी. से
$2y = -x - \lambda$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{\lambda}{2}$$

$$m = \frac{-1}{2}$$

और अन्तःखण्ड $\quad c = \frac{-\lambda}{2}$

सूत्र में मान रखने पर—

$$2 = \left|\frac{-1}{2}\right|\left|\frac{-\lambda}{2}\right|$$

$$\boxed{\lambda = 8}$$

$x + 2y - 8 = 0$

प्रश्न 8. k के किस मान के लिए रेखा $2x - 3y - k$ परवलय $y^2 = 6x$ को स्पर्श करेगी ?

हल- दी गई रेखा का समीकरण

$2x - 3y = k$

$3y = 2x - k$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{k}{3} \quad \ldots(1)$$

समीकरण (1) की रेखा, परवलय $y^2 = 6x$ को स्पर्श करती है,

अत: शर्त लगाने पर—

$$a = mc \quad \ldots(2)$$

परवलय के समीकरण से $4a = 6$

$$a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

समीकरण (1) से $m = \frac{2}{3}$ और $c = \frac{-k}{3}$

समीकरण (2) में मान रखने पर—

$$\frac{3}{2} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{-k}{3}\right)$$

$$\frac{3}{2} = \frac{-2k}{9}$$

$$k = \frac{-3 \times 9}{2 \times 2} = \frac{-27}{4}$$

प्रश्न 9. स्पर्श रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु (4, 10) से परवलय $y^2 = 8x$ पर खींची जाती है।

हल- किसी बाह्य बिन्दु (x_1, y_1) से परवलय $y^2 = 4ax$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के समीकरण

$SS_1 = T^2$

$(y^2 - 4ax)(y - 4ax_1) = [yy_1 - 2a(x + x_1)]^2$

यहाँ परवलय $y^2 = 8x$ तथा बिन्दु (4, 10)
$\Rightarrow (y^2 - 8x)(10^2 - 8 \times 4) = [y(10) - 2 \times 2(x + 4)]^2$

$\Rightarrow (y^2 - 8x)(100 - 32) = (10y - 4(x + 4))^2$
$\Rightarrow 68(y^2 - 8x) = (10y - 4x - 16)^2$
$\Rightarrow 68y^2 - 544x = 100y^2 + 16x^2 + 256 - 80xy + 128x - 320y$

$\Rightarrow 0 = 100y^2 - 68y^2 + 16x^2 + 544x + 128x + 256 - 80xy - 320y$
$\Rightarrow 16x^2 + 32y^2 - 80xy + 672x - 320y + 256 = 0$
$\Rightarrow 16[x^2 + 2y^2 - 5xy + 42x - 20y + 16] = 0$
$\Rightarrow x^2 + 2y^2 - 5xy + 42x - 20y + 16 = 0$

प्रश्न 10. निम्न परवलयों पर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए
(i) $y^2 = 8x$ के बिन्दु (2, 4) पर
(ii) $y^2 + 12x = 0$ की नाभि के ऊपरी सिरे पर।

हल- (i) $y^2 = 8x$ के बिन्दु (2, 4) पर अभिलम्ब का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1)$$

परवलय के समीकरण से—

$$4a = 8 \quad \boxed{\therefore a = 2}$$

मान रखने पर—

$$(y - 4) = -\frac{4}{2 \times 2}(x - 2)$$

$\Rightarrow y - 4 = -1(x - 2)$

$\Rightarrow y - 4 = -x + 2$
$\Rightarrow x + y - 6 = 0$

(ii) परवलय $y^2 = -12x$ की ऊपरी सिरे पर अभिलम्ब का समी.

$$(y - y_1) = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1)$$

सिरे ज्ञात करने पर—

$$4a = -12$$
$$\boxed{a = -3}$$

नाभिलम्ब के सिरे $(a, 2a)$ होते हैं।

$\therefore \quad (-3, -6)$

समीकरण में मान रखने पर—

$$(y + 6) = \frac{-(-6)}{2(-3)}(x + 3)$$

$(y + 6) = -(x + 3)$

$y + 6 + x + 3 = 0$

$x + y + 9 = 0$

प्रश्न 11. निम्न परवलयों पर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए–
(i) $y^2 = 4x$ जो $y - 2x + 5 = 0$ के समान्तर हो।
(ii) $y^2 = 4x$ जो $x + 3y - 1 = 0$ के लम्बवत् हो।

हल- (i) रेखा $y - 2x + 5 = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण-
$y - 2x + c = 0$ ....(1)
रेखा (1) परवलय $y^2 = 4x$ पर अभिलम्ब होगी यदि (1) समीकरण

$y = mx - 2am - am^3$ प्रकार की होगी।
परवलय से $4a = 4 \therefore a = 1$
a का मान रखने पर

$y = mx - 2m - m^3$
$y - mx + (2m + m^3) = 0$
गुणांकों की तुलना करने पर
$-m = -2$

$m = 2$ और $c = (2m + m^3)$
$\therefore c = 2 \times 2 + (2)^3$
$c = 4 + 8 = 12$

अतः अभिलम्ब का समीकरण होगा
$y - 2x + 12 = 0$

(ii) $y^2 = 4x$ जो $x + 3y - 1 = 0$ के लम्बवत् हो।
$4a = 4 \therefore a = 1$

दी गई रेखा के लम्बवत् रेखा का समीकरण
$3x - y + k = 0$ ....(1)

अभिलम्ब का समीकरण होगा

$y = mx – 2am – am^3$
a का मान रखने पर
$y = mx – 2m – m^3$
$mx – y – (2m + m^3) = 0$

समीकरण (1) तथा (2) के गुणांकों की तुलना करने पर
$m = 3$ और $k = – (2m + m^3)$
$\therefore k = – (2 \times 3 + (3)^3)$

$k = – (6 + 27) = -33$
समीकरण (1) में मान रखने पर
$3x – y – 33 = 0$

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि रेखा $2x + y – 12a = 0$ परवलय $y^2 = 4ax$ पर अभिलम्ब जीवा है तथा उसकी लम्बाई $5\sqrt{5}a$ इकाई है।

हल- दी गयी रेखा $2x + y – 12a = 0$ परवलय $y^2 = 4ax$ पर अभिलम्ब जीवा है। इसलिए अभिलम्ब का समीकरण
$y = mx – 2am – am^3$

$y – mx + (2am + am^3) = 0$ ….(1)
समीकरण (1) की तुलना दी गई रेखा से करने पर–
$m = -2$

$-12a = 2am + am^3$
m का मान रखने पर
$-12a = 2a(-2) + (a)(-2)^3$

$-12a = – 4 – 8a$
$-12a = -12a$

जो सत्य है। अतः रेखा, परवलय पर अभिलम्ब है।
रेखा और परवलय के समीकरण को हल करने पर
$y^2 = 4ax$

$2x + y – 12a = 0$
$y = 12a – 2x$

मान रखने पर
$(12a – 2x)^2 = 4ax$

$144a^2 – 48ax + 4x^2 = 4ax$
$36a^2 – 12ax + x^2 = ax$
$x^2 – 13ax + 36a^2 = 0$

गुणनखण्ड करने पर-
$(x – 4a)(x – 9a) = 0$
$x = 4a, 9a$

∴ y के मान होंगे–
$y = 120 – 2x$
$= 12a – 2 \times 4a$
$= 12a – 8a = 4a$

और $y = 12a – 2 \times 9a$
$y = – 6a$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु होंगे-
(9a, – 6a) तथा (4a, 4a)
इनके बीच की दूरी निकालने पर

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(4a - 9a)^2 + (4a + 6a)^2}$$
$$d = \sqrt{25a^2 + 100a^2}$$
$$d = \sqrt{125a^2}$$
$$d = 5\sqrt{5}a$$

Ex 12.5

प्रश्न 1. उस दीर्घवृत्त की समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी
(i) नाभि (-1, 1), नियती x – y + 4 = 0 तथा उत्केन्द्रता e = $\frac{1}{\sqrt{5}}$ हो।
(ii) नाभि (-2, 3), नियता 3x + 4y = 1 तथा उत्केन्द्रता e = $\frac{1}{3}$ हो।

हल- (i) माना कि दोवृत्त पर कोई बिन्दु P(h, k) है तब परिभाषानुसार

P की नाभि से दूरी = e (P की नियता से दूरी)

PS = e(PM)
$PS^2 = e^2(PM)^2$

$$\Rightarrow \quad (h+1)^2 + (k-1)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{h-k+4}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}\right)^2$$

$$\left(\because e = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (h^2 + 1 + 2h + k^2 + 1 - 2k) = \frac{1}{5}\left(\frac{h-k+4}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$10(h^2 + k^2 + 2h - 2k + 2) = h^2 + k^2 + 16 - 2hk - 8k + 8h$
$10h^2 + 10k^2 + 20h - 20k + 20 = h^2 + k^2 + 8h - 8k - 2hk + 16$

$9h^2 + 9k^2 + 12h - 12k + 4 + 2hk = 0$
अतः बिन्दु Ph, k) का बिन्दुपथ

$9x^2 + 9y^2 + 12x - 12y + 2xy + 4 = 0$
अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है।

(ii) माना कि दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु P(h, k) है तब परिभाषानुसार
PS = e(PM)

$PS^2 = e^2(PM)^2$

$$\Rightarrow \quad (h+2)^2 + (k-3)^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{3h+4k-1}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}\right)^2$$

$$\left(\because e = \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (h^2 + 4 + 4h + k^2 + 9 - 6k) = \frac{1}{9}\left(\frac{3h+4k-1}{5}\right)^2$$

$225(h^2 + k^2 + 4h - 6k + 13) = 9h^2 + 16k^2 + 1 + 24hk - 8k + 6h$

$216h^2 + 209k^2 + 906h - 1342k - 24hk + 2924 = 0$
$216h^2 + 209k^2 - 24hk + 906h - 1342k + 2924 = 0$

अतः बिन्दु P(h, k) का बिन्दुपथ
$216x^2 + 209y^2 - 24xy + 906x - 1342y + 2924 = 0$
अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है।

प्रश्न 2. निम्न दीर्घवृत्तों की उत्केन्द्रता, नाभिलम्ब और नाभि के निर्देशांक ज्ञात करो।
(i) $4x^2 + 9y^2 = 1$
(ii) $25x^2 + 4y^2 = 100$
(iii) $3x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 4 = 0$

हल- (i) दिया गया दीर्घवृत्त है
$4x^2 + 9y^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{9}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 \qquad \text{....(1)}$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ से करने पर

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, a > b$$

उत्केन्द्रता : चूँकि $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$$\therefore \quad \frac{1}{9} = \frac{1}{4}(1 - e^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{9} = 1 - e^2$$

$$\Rightarrow \quad e^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$$

$\Rightarrow$ उत्केन्द्रता $(e) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ **उत्तर**

नाभिलम्ब : $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times \frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}$ **उत्तर**

नाभि के निर्देशांक : $(ae, 0)$ तथा $(-ae, 0)$

$\because \quad ae = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

अतः $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$ तथा $\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$

(ii) दिया गया दीर्घवृत्त है

$25x^2 + 4y^2 = 100$

$$\Rightarrow \quad \frac{25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{(2)^2} + \frac{y^2}{(5)^2} = 1 \qquad ....(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a < b$ से करने पर

$a = 2, b = 5$

तब $\quad c^2 = b^2 - a^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$

$\therefore \quad c = \sqrt{21}$

उत्केन्द्रता : $\quad e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

नाभिलम्ब : $\quad = \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$

नाभि के निर्देशांक $\quad = (0, \pm c) = \left(0, \pm\sqrt{21}\right)$

(iii) $3x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 4 = 0$

$3x^2 - 12x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$

$3(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) + 4 = 0$

$3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 4 = 0$

$3(x^2 - 4x + 4) - 12 + 4(y^2 - 2y + 1) - 4 + 4 = 0$

$3(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 12$

$$\Rightarrow \quad \frac{3(x-2)^2}{12} + \frac{4(y-1)^2}{12} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1 \quad \text{....(1)}$$

समीकरण (1) में, $x - 2 = X$ तथा $y - 1 = Y$ रखने पर

$$\frac{X^2}{(2)^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \quad \text{....(1)}$$

दीर्घवृत्त (2) की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ से करने पर

$$a = 2, b = \sqrt{3}$$

दीर्घवृत्त (2) के लिए,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1$$

उत्केन्द्रता $\quad e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

अत: दिए गए दीर्घवृत्त (1) की उत्केन्द्रता $= \frac{1}{2}$

नाभिलम्ब $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$

दीर्घवृत्त (2) की नाभि के निर्देशांक $(\pm c, 0)$

$$= (\pm 1, 0)$$

अर्थात् $\quad X = \pm 1, Y = 0$

तब दीर्घवृत्त (1) की नाभि के निर्देशांक

$$x - 2 = \pm 1; y - 1 = 0$$

या, $\quad x = 2 \pm 1; y = 1$

या, $\quad x = 3, 1; y = 1$

अत: दिए गए दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक (3, 1) एवं (1, 1)

प्रश्न 3. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके अक्ष निर्देश अक्ष हों तथा यह बिन्दुओं (6, 2) एवं (4, 3) के गुजरता हो।

या,

हल- माना कि दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

यह बिन्दु (4, 3) और (6, 2) से होकर जाता है।

$$\therefore \quad \frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \qquad .....(1)$$

$$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) को 4 से तथा (2) को 9 से गुणा करने पर

$$\frac{64}{a^2}+\frac{36}{b^2}=4 \qquad .....(3)$$

तथा $$\frac{324}{a^2}+\frac{36}{b^2}=9 \qquad .....(4)$$

(4) में से (3) को घटाने पर

$$\frac{260}{a^2}=5 \Rightarrow a^2=\frac{260}{5}=52$$

a^2 का यह मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{16}{52}+\frac{9}{b^2}=1 \text{ या } \frac{9}{b^2}=1-\frac{16}{52}=\frac{36}{52}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{b^2}=\frac{36}{52} \therefore b^2=\frac{9\times 52}{36}=13$$

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण $$\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$$

प्रश्न 4. उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए जिसकी नाभिलम्ब उसकी लघु अक्ष की आधी हो।

हल- दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ में (जहाँ } a>b)$$

नाभिलम्ब की लम्बाई = $\frac{2b^2}{a}$ तथा लघु अक्ष = $2b$

प्रश्नानुसार $\frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}(2b)$

या $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ .....(1)

हम जानते हैं— $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(समीकरण 1 से मान रखा है)

अतः $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

प्रश्न 5. एक बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार गमन करे कि उसकी बिन्दु (1,0) तथा (-1, 0) से दूरियों का योग सदैव 3 रहता है। यह बिन्दुपथ कौनसा वक्र है ?

हल- माना बिन्दु P(h, k) इस प्रकार गमन करता है कि उसकी बिन्दु (1, 0) तथा (-1, 0) से दूरियों का योग 3 है तब

$$\sqrt{(h-1)^2 + (k-0)^2} + \sqrt{(h+1)^2 + (k-0)^2} = 3$$

या $\sqrt{(h-1)^2 + k^2} = 3 - \sqrt{(h+1)^2 + k^2}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(h-1)^2 + k^2 = 9 - 6\sqrt{(h+1)^2 + k^2} + (h+1)^2 + k^2$$

या $36[(h+1)^2 + k^2] = (4h+9)^2$

या $36[h^2 + 2h + 1 + k^2] = 16h^2 + 72h + 81$

या $20h^2 + 36k^2 = 45$

या $\frac{h^2}{\frac{9}{4}} + \frac{k^2}{\frac{6}{4}} = 1$

$\therefore$ बिन्दु P(h, k) का बिन्दुपथ है

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

जो कि एक दीर्घवृत्त का समीकरण है।

Ex 12.6

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि रेखा $y = x + \sqrt{\frac{5}{6}}$ दीर्घवृत्त $2x^2 + 3y^2 = 1$ को स्पर्श करती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल- दी गई रेखा

$y = x + \sqrt{\frac{5}{6}}$

स्पष्ट है- m = 1 और $c = \sqrt{\frac{5}{6}}$

दीर्घवृत्त का समीकरण
$2x^2 + 3y^2 = 1$

या $$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1, a^2 = \frac{1}{2}, b^2 = \frac{1}{3}$$

जब रेखा दीर्घवृत्त को स्पर्श करती है, तब उसका प्रतिबन्ध निम्न

$c^2 = (a^2m^2 + b^2)$

मान रखने पर

$$\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

इससे सिद्ध होता है कि रेखा $y = x + \sqrt{\frac{5}{6}}$
दीर्घवृत्त के समीकरण $2x^2 + 3y^2 = 1$ को स्पर्श करती है। स्पर्श बिन्दुओं के निर्देशांक-

$$\left(\mp\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

मान रखने पर—

$$\left(\mp\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\sqrt{\frac{5}{6}}} \pm \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{5}{6}}}\right)$$

$$\left(\mp\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{6}}}, \pm\frac{1}{3\sqrt{\frac{5}{6}}}\right)$$

$$\left(\mp\sqrt{\frac{6}{20}}, \pm\sqrt{\frac{6}{45}}\right)$$

$$\left(\mp\sqrt{\frac{3}{10}}, \pm\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$$

प्रश्न 2. प्रदर्शित कीजिए कि रेखा x – 2y – 4 = 0 दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ को स्पर्श करती है।

हल- दी गयी रेखा का समीकरण

x – 2y – 4 = 0
∴ 2y = x – 4

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

$y + mx + c$ से तुलना करने पर—

$$m = \frac{1}{2} \text{ और } c = -2$$

दीर्घवृत्त के समीकरण से—

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$

या $$\frac{3x^2}{12} + \frac{4y^2}{12} = 1 \text{ या } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

दीर्घवृत्त $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 4 \text{ और } b^2 = 3$$

स्पर्श करने का प्रतिबन्ध—

$$c^2 = a^2m^2 + b^2$$

R.H.S. में मान रखने पर—

$$\Rightarrow \quad 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3$$

$$\Rightarrow \quad 4 \times \frac{1}{4} + 3 = 1 + 3 = 4$$

c^2 = R.H.S. = L.H.S.

अतः रेखा $x - 2y - 4 = 0$ दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ को स्पर्श करती है।

प्रश्न 3. k के किस मान के लिए रेखा $3x - 4y = k$ दीर्घवृत्त $5x^2 + 4y^2 = 20$ को स्पर्श करती है ?

हल- दी गयी रेखा के समीकरण से

$3x - 4y = k$

$4y = 3x - k$

$$\therefore \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{k}{4} \quad \text{....(1)}$$

दीर्घवृत्त के समीकरण से—

$$5x^2 + 4y^2 = 20$$

$$\frac{5x^2}{20} + \frac{4y^2}{20} = 1$$

$$\text{या} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{....(2)}$$

समीकरण (1) की तुलना $y = mx + c$ से करने पर—

$$m = \frac{3}{4} \text{ और } c = -\frac{k}{4}$$

समीकरण (2) की तुलना दीर्घवृत्त के समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ से करने पर—}$$

$$a^2 = 4 \text{ और } b^2 = 5$$

स्पर्श करने का प्रतिबन्ध—

$$c^2 = a^2m^2 + b^2$$

मान रखने पर—

$$\Rightarrow \quad 4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = \left(\frac{-k}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4 \times 9}{16} + 5 = \frac{k^2}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{4} + 5 = \frac{k^2}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{29}{4} \times 16 = k^2$$

$$k^2 = 4 \times 29$$
$$k = \pm 2\sqrt{29}$$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि रेखा $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल- स्पर्श करने की प्रतिबन्ध
$c^2 = a^2m^2 + b^2$ .....(1)

दी गई रेखा से मान निकालने पर
$x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$

$y = -x + \sqrt{a^2 + b^2}$ ...(2)

समीकरण (2) की तुलना $y = mx + c$
से करने पर $m = -1$ और $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
सभी मानों को समी. (1) में रखने पर

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 (-1)^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = a^2 + b^2$$

अतः रेखा दीर्घवृत्त को स्पर्श करती है।
स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक—

$$\left(\mp \frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}\right)$$

$$\left(\mp\frac{a^2(-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

प्रश्न 5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को रेखा lx + my = n द्वारा स्पर्श करने की शर्त ज्ञात कीजिये।

हल- दी गई रेखा से

lx + my = n

my = – lx + n.

$$y = \frac{-l}{m}x + \frac{n}{m} \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $y = Mx + C$ से करने पर—

$$M = -\frac{l}{m}$$

$$C = \frac{n}{m}$$

स्पर्श करने का प्रतिबन्ध—

$$C^2 = a^2M^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n}{m}\right)^2 = a^2\left(\frac{-l}{m}\right)^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n^2}{m^2} = \frac{a^2l^2}{m^2} + b^2$$

$n^2 = a^2l^2 + m^2b^2$

प्रश्न 6. दीर्घवृत्त $4x^2 + 3y^2 = 5$ के लिए उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिये जो x-अक्ष के साथ 60° का कोण बनाती हैं । स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल- हम जानते हैं कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर किसी भी स्पर्श रेखा का समीकरण होता है।

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

और स्पर्श बिन्दुओं के निर्देशांक होते हैं।

$$\left(\mp\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

यहाँ पर $a^2 = \frac{5}{4}$, $b^2 = \frac{5}{3}$ व $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

∴ दीर्घवृत्त पर स्पर्श रेखाओं के अभीष्ट समीकरण होंगे—

$$y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{\frac{5}{4}\left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{\frac{5}{4}\times 3 + \frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{\frac{15}{4} + \frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{\frac{45+20}{4\times 3}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{65}{3}}$$

और स्पर्श बिन्दुओं के निर्देशांक

$$= \left(\mp\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

$$= \left(\mp\frac{\frac{5}{4}\times\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{5}{4}\times 3+\frac{5}{3}}}, \pm\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{5}{4}\times 3+\frac{5}{3}}}\right)$$

$$= \left(\mp\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{\frac{65}{4\times 3}}}, \pm\frac{5}{3\sqrt{\frac{65}{4\times 3}}}\right)$$

$$= \left(\mp\frac{5\sqrt{3}}{4\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{65}{3}}}, \pm\frac{5}{3\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{65}{3}}}\right)$$

$$= \left(\mp\frac{5\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{65}}, \pm\frac{5\times 2\sqrt{3}}{3\sqrt{65}}\right)$$

$$= \left(\mp\frac{15}{2\sqrt{65}}, \pm\frac{10}{3}\sqrt{\frac{3}{65}}\right)$$

Ex 12.7

प्रश्न 1. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के अक्षों की लम्बाइयाँ, नाभियाँ, उत्केन्द्रता, नाभिलम्बे तथा नियताओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल- दिया गया अतिपरवलय का समीकरण है–
$9x^2 - 16y^2 = 144$

$$\Rightarrow \quad \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{(4)^2} - \frac{y^2}{(3)^2} = 1 \quad \text{....(1)}$$

समीकरण (1) की तुलना मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ से करने पर

$$a = 4, b = 3$$

अक्षों की लम्बाई :

अनुप्रस्थ अक्ष $= 2a = 2 \times 4 = 8$

संयुग्मी अक्ष $= 2b = 2 \times 3 = 6$

उत्केन्द्रता : $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}}$

$\Rightarrow \quad e = \frac{5}{4}$ उत्तर

नाभियाँ : $(\pm ae, 0) = \left(\pm 4 \times \frac{5}{4}, 0\right)$ अर्थात् $(\pm 5, 0)$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a} = 2 \times \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$

नियताओं के समीकरण—

$$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{16}{5}$$

प्रश्न 2. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी
(i) नाभि (2, 1) नियता $x + 2y - 1 = 0$ तथा उत्केन्द्रता 2 है।
(ii) नाभि (1, 2) नियता $2x + y = 1$ तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{3}$ है।

हल- (i) माना अतिपरवलय पर कोई बिन्दु P(h, k) है। नाभि S(2, 1) और नियता का समीकरण दिया है
$x + 2y - 1 = 0$

∴ अतिपरवलय की परिभाषा से
SP = e(PM)
$(SP)^2 = e^2(PM)^2$

$$\Rightarrow \quad (h-2)^2 + (k-1)^2 = (2)^2\left(\frac{h+2k-1}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}\right)^2$$

$\Rightarrow (h-2)^2 + (k-1)^2 = \frac{4}{5}(h + 2k - 1)^2$

$\Rightarrow 5[h^2 + 4 - 4h + k^2 + 1 - 2k = 4(h^2 + 4k^2 + 1 + 4hk - 4k - 2h)$
$\Rightarrow 5[h^2 + k^2 - 4h - 2k + 5] = 4[h^2 + 4k^2 + 1 + 4hk - 4k - 2h]$

$\Rightarrow 5h^2 + 5k^2 - 20h - 10k + 25 = 4h^2 + 16k^2 + 4 + 16hk - 16k - 8h$
$\Rightarrow h^2 - 11k^2 - 12h + 6k + 21 - 16hk = 0$

$\Rightarrow h^2 - 16hk - 11k^2 - 12h + 6k + 21 = 0$
बिन्दु P(h, k) का बिन्दुपथ अभीष्ट अतिपरवलय है
$x^2 - 16xy - 11y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$

(ii) माना अतिपरवलय का कोई बिन्दु P(h, k) है। दिया है
नाभि S(1, 2), नियता $2x + y - 1 = 0$ और उत्केन्द्रता $e = \sqrt{3}$

अतिपरवलय की परिभाषा से
(SP) = e(PM)
$(SP)^2 = e^2(PM)^2$

$$\Rightarrow \quad (h-1)^2 + (k-2)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2\left(\frac{2h+k-1}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}\right)^2$$

$\Rightarrow (h-1)^2 + (k-2)^2 = \frac{3}{5}(2h + k - 1)^2$
$\Rightarrow 5[h + 1 - 2h + k^2 + 4 - 4k] = 3(4h^2 + k^2 + 1 + 4hk - 2k - 4h)$

$\Rightarrow 5h^2 + 5 - 10h + 5k^2 + 20 - 20k = 12h^2 + 3k^2 + 3 + 12hk - 6k - 12h$
$\Rightarrow 5h^2 + 5k^2 - 10h - 20k + 25 = 12h^2 + 3k^2 - 12h - 6k + 12hk + 3$

$\Rightarrow 7h^2 - 2x^2 + 12hk - 2h + 14k - 22 = 0$
अतः बिन्दु P(h, k) का अभीष्ट बिन्दु पथ जो कि एक अतिपरवलय है-
$7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 14 - 22 = 0$

प्रश्न 3. अतिपरवलय $x^2 - 6x - 4y^2 - 16y - 11 = 0$ के शीर्ष, नाभियाँ, नाभिलम्ब तथा उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

हल- दिया गया अतिपरवलय है-
$\Rightarrow x^2 - 6x - 4y^2 - 16y - 11 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - (4y^2 + 16y) - 11 - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + (3)^2 - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 20 = 0$
$\Rightarrow (x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 + 16 - 20 = 0$
$\Rightarrow (x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 = 4$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{4(y+2)^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{(2)^2} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1 \qquad \text{....(1)}$$

मूल बिन्दु को (3, −2) पर स्थानान्तरित करने पर
$x - 3 = X$ तथा $y + 2 = Y$ अतः समी. (1) से

$$\frac{X^2}{(2)^2} - \frac{Y^2}{(1)^2} = 1 \qquad \text{....(2)}$$

इस समीकरण की तुलना मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ से करने पर

$$a^2 = 4$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\therefore a = 2}$$
$$b^2 = 1$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{b = 1}$$

केन्द्र—अतिपरवलय (2) के केन्द्र के निर्देशांक (0, 0) अर्थात् X = 0, Y = 0 अतः दिये हुए अतिपरवलय (1) के केन्द्र के निर्देशांक (3, −2) होंगे।

$$\begin{bmatrix} \because X = x - 3 \\ Y = y + 2 \end{bmatrix}$$

शीर्ष—अतिपरवलय (2) के लिए ($\pm a$, 0) अर्थात् (± 2, 0) या
$X = \pm 2, Y = 0$

अतः अतिपरवलय (1) के लिए—

अर्थात् $x - 3 = \pm 2$

$x = 5, 1$

$y + 2 = 0 \qquad \therefore y = -2$

उत्केन्द्रता—

$$\therefore \quad \text{उत्केन्द्रता } e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{4}}$$

$$e = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

नाभियाँ—अतिपरवलय (2) की नाभियों के निर्देशांक ($\pm ae$, 0) होंगे।

$$\left(\pm 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) = \left(\pm\sqrt{5}, 0\right)$$

अतः अतिपरवलय (1) की नाभियाँ होंगी—

$$X = \pm\sqrt{5}, \qquad Y = 0$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{5}, \qquad y + 2 = 0$$

$$\therefore \quad x = 3 \pm \sqrt{5}, \qquad \therefore y = -2$$

अतः नाभियाँ $= \left(3 \pm \sqrt{5}, -2\right)$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$

प्रश्न 4. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि

(i) नाभिलम्ब की लम्बाई 8 तथा संयुग्मी अक्ष = $\frac{1}{2}$(नाभियों के मध्य की दूरी)

(ii) नाभियों के मध्य की दूरी 16 तथा संयुग्मी अक्ष √2 हो।

(iii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई 7 तथा बिन्दु (3, -2) से गुजरता हो ।

हल- (i) यहाँ नाभिलम्ब की लम्बाई

$$\frac{2b^2}{a} = 8$$

$b^2 = 4a$ ....(1)

तथा, संयुग्मी अक्ष = $\frac{1}{2}$ x नाभियों के मध्य की दूरी
⇒ $2b = \frac{1}{2}(2ae) = ae$
⇒ $2b = ae$ ....(2)

⇒ $b^2 = a^2(e^2 - 1)$
⇒ $b^2 = a^2e^2 - a^2$

⇒ $b^2 = (2b)^2 - a^2$
⇒ $a^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2$
⇒ $a^2 = 3b^2$ ...(3)

समीकरण (1) में मान रखने पर

$\frac{a^2}{3} = 4a$
⇒ $a = 12$
a का मान समीकरण (3) में रखने पर—

$(12)^2 = 3b^2$
⇒ $\frac{144}{3} = b^2 \therefore b = 48$

अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{(12)^2} - \frac{y^2}{48} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{48} = 1$$

$$\boxed{x^2 - 3y^2 = 144}$$

(ii) नाभियों के बीच की दूरी $2ae = 16$
तथा उत्केन्द्रता $e = \sqrt{2}$
$2 \times \sqrt{2}a = 16$

$$a = \frac{16}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

तथा $$b^2 = a^2e^2 - a^2$$

$$= (8)^2 - a^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 64 - 32 = 32$$

अतिपरवलय का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 32$$

(iii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = 2b = 7

$\therefore b = \frac{7}{2}$

अतः अतिपरवलय का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{49} = 1 \quad \quad ....(1)$$

∵ अतिपरवलय (1) बिन्दु (3, -2) से गुजरता है, अतः

$$\frac{(3)^2}{a^2} - \frac{4(-2)^2}{49} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{a^2} - \frac{16}{49} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{a^2} = 1 + \frac{16}{69} = \frac{65}{49}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = \frac{9 \times 49}{65} = \frac{441}{65}$$

अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण

$$\frac{x^2}{\left(\frac{441}{65}\right)} - \frac{y^2}{\left(\frac{49}{4}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{65x^2}{441} - \frac{4y^2}{49} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 65x^2 - 36y^2 = 441$$

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि सरल रेखाओं $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=m$ तथा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{m}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ अतिपरवलय होता है।

हल- दी गई सरल रेखाएँ हैं

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=m$$

$$\Rightarrow \quad \frac{bx-ay}{ab}=m \quad \ldots(1)$$

तथा $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{bx+ay}{ab}=\frac{1}{m} \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) का गुणा करने पर

$$\left(\frac{bx-ay}{ab}\right)\left(\frac{bx+ay}{ab}\right)=(m)\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(bx)^2-(ay)^2}{(ab)^2}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2b^2}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

जो अतिपरवलय का समीकरण है।

प्रश्न 6. अतिपरवलय $5x^2 - 9y^2 = 45$ तथा रेखा $y = x + 2$ के उभयनिष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल- अतिपरवलय का समीकरण
$5x^2 - 9y^2 = 45$ ....(1)
रेखा का समीकरण-

$y = x + 2$ ......(2)
समीकरण (1) में y का मान रखने पर-
$\Rightarrow 5x^2 - 9(x + 2)^2 = 45$

$\Rightarrow 5x^2 - 9(x^2 + 4x + 4) = 45$
$\Rightarrow 5x^2 - 9x^2 - 36x - 36 = 45$

$\Rightarrow -4x^2 - 36x - 36 - 45 = 0$
$\Rightarrow -4x^2 - 36x - 81 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 + 36x + 81 = 0$
$\Rightarrow 4x^2 + 18x + 18x + 81 = 0$
$\Rightarrow 2x(2x + 9) + 9(2x + 9) = 0$

$\Rightarrow (2x + 9)(2x + 9) = 0$
$\Rightarrow (2x + 9)^2 = 0$
या $2x + 9 = 0$

$$x = -\frac{9}{2}$$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर—

$$y = x + 2$$
$$= -\frac{9}{2} + 2 = \frac{-5}{2}$$

अतः उभयनिष्ठ बिन्दु $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-5}{2}\right)$

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि रेखा lx + my = 1 अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करेगी यदि $a^2l^2 - b^2m^2 = 1$

हल- अतिपरवलय में कोई रेखा $y = mx + c$ अतिपरवलय को स्पर्श करती हो तो उसके लिए आवश्यक प्रतिबन्ध होता है

$c^2 = a^2m^2 - b^2$
रेखा के समीकरण से-
$lx + my = 1$
$my = -lx + 1$

$$y = -\frac{l}{m}x + \frac{1}{m} \qquad ....(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $y = Mx + C$ से करने पर—

$$M = -\frac{l}{m}$$

$$c = \frac{l}{m}$$

स्पर्श करने के प्रतिबन्ध में मान रखने पर—

$$c^2 = a^2m^2 - b^2$$

$$\left(\frac{1}{m}\right)^2 = a^2\left(\frac{-l}{m}\right)^2 - b^2$$

$$\frac{1}{m^2} = \frac{a^2l^2}{m^2} - b^2$$

$$1 = a^2l^2 - m^2b^2$$ इतिसिद्धम्

प्रश्न 8. अतिपरवलय $4x^2 - 4y^2 = 1$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $4y = 5x + 7$ के समान्तर हो ।

हल- माना रेखा $4y = 5x + 7$ के समान्तर रेखा का समीकरण है–
$4y = 5x + k$

चूँकि यह अतिपरवलय $4x^2 - 4y^2 = 1$ को स्पर्श करती है, अतः

$$x^2 - \left(\frac{5x+k}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - \frac{(5x+k)^2}{16} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow 16x^2 - (5x + k)^2 = 4$
$\Rightarrow 16x^2 - 25x^2 - 10xk - k^2 = 4$
$\Rightarrow - 9x^2 - 10xk - k^2 - 4 = 0$

या $9x^2 + 10x + k^2 + 4 = 0$
के मूल समान होने चाहिए।
$\Rightarrow 100k^2 = 4 \times 9 \times (k^2 + 4)$

$\Rightarrow 25k^2 = 9k^2 + 36$
$\Rightarrow 16k^2 = 36$
$\Rightarrow k = \pm \frac{3}{2}$
अत: अभीष्ट समीकरण
$4y = 5x \pm \frac{3}{2}$

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि अतिपरवलय की किसी स्पर्श रेखा पर नाभि से डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ वृत्त होता है।

हल- माना अतिपरवलय है–

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ....(1)$$

हम जानते हैं कि रेखा

$$ymx = \sqrt{a^2m^2 - b^2} \quad ....(2)$$

सदैव अतिपरवलय को स्पर्श करती है।
नाभि = $(\pm c, 0)$ से जाने वाली तथा रेखा (2) के लम्बवत् रेखा का समीकरण

$$y - 0 = -\frac{1}{m}(x \mp c)$$

$$\Rightarrow \quad my = -x \pm c$$

$$\Rightarrow \quad x + my = \pm c \quad ....(3)$$

समीकरण (2) व (3) का वर्ग करके जोड़ने पर
$\Rightarrow (y - mx)^2 + (x + my)^2 = a^2m^2 - b^2 + c^2$
$\Rightarrow y^2 + m^2x^2 - 2mry + x^2 + m^2y^2 + 2mxy = a^2m^2 - b^2 + c^2$

$\Rightarrow (1 + m)^2y^2 + (1 + m)^2x^2 = a^2m^2 = c^2 - b^2$
$\Rightarrow (1 + m)^2 (x^2 + y^2) = a^2m^2 + a^2(\because c^2 = a^2 + b^2)$
$\Rightarrow (1 + m)^2(x^2 + y^2) = (1 + m^2)a^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$
जो कि एक वृत्त का समीकरण है।

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. वृत्त $9x^2 + y^2 + 8x = (x^2 - y^2)$ की त्रिज्या है-

(A) 1
(B) 2
(C) $\frac{4}{5}$
(D) $\frac{5}{4}$

हल : (C)

प्रश्न 2. उस वृत्त को समीकरण जिसका केन्द्र प्रथम पाद में (α, β) है। तथा x-अक्ष को स्पर्श करता है, होगा-

(A) $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0$
(B) $x^2 + y^2 + 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 = 0$
(D) $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 = 0$

हल : (A)

प्रश्न 3. यदि रेखा y = mx + c वृत्त $x^2 + y^2 = 4y$ को स्पर्श करे तो c का मान है

(A) $2+\sqrt{1+m^2}$ (B) $2-\sqrt{1+m^2}$
(C) $2+2\sqrt{1+m^2}$ (D) $1+\sqrt{1+m^2}$

हल : (C)

प्रश्न 4. रेखा 3x + 4y = 25 वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ को किस बिन्दु पर स्पर्श करती है
(A) (4, 3)
(B) (3, 4)
(C) (-3, -4)
(D) (3, -4)

हल : (B)

प्रश्न 5. एक शांकवीय परिच्छेद परवलय होगा, यदि

(A) e = 0
(B) e < 1
(C) e > 1
(D) e = 1

हल : (C)

प्रश्न 6. परवलय $x^2 = -8y$ की नियता को समीकरण है
(A) y = -2
(B) y = 2
(C) x = 2
(D) x = -2

हल : (B)

प्रश्न 7. परवलय $x^2 + 4x + 2y = 0$ का शीर्ष है
(A) (0, 0)
(B) (2, -2)
(C) (-2, -2)
(D) (-2, 2)

हल : (D)

प्रश्न 8. यदि किसी परवलय की नाभि (-3, 0) तथा नियता $x + 5 = 0$ हों तो इसका समीकरण होगा
(A) $y^2 = 4(x + 4)$
(B) $y^2 + 4x + 16 = 0$
(C) $y^2 + 4x = 16$
(D) $x^2 = 4(y + 4)$

हल : (A)

प्रश्न 9. किसी परवलय के शीर्ष एवं नाभि क्रमशः (2, 0) तथा (5, 0) हो, तो इसका समीकरण होगा
(A) $y^2 = 12x + 24$
(B) $y^2 = 12x – 24$
(C) $y^2 = -12x – 24$
(D) $y^2 = -12x + 24$

हल : (B)

प्रश्न 10. परवलय $x^2 = -8y$ की नाभि है
(A) (2, 0)
(B) (0, 2)
(C) (-2, 0)
(D) (0, -2)

हल : (D)

प्रश्न 11. परवलय $y^2 = x$ की किसी स्पर्श रेखा का समीकरण है-
(A) $y = mx + 1/m$
(B) $y = mx + 1/4m$
(C) $y = mx + 4/m$
(D) $y = mx + 4m$

हल : (B)

प्रश्न 12. यदि रेखा $2y - x = 2$ परवलय $y^2 = 2x$ को स्पर्श करती हो, तो स्पर्श बिन्दु है

(A) (4, 3)

(B) (-4, 1)

(C) (2, 2)

(D) (1, 4)

हल : (C)

प्रश्न 13. परवलय $x^2 = 8y$ की रेखा $x + 2y + 1 = 0$ के समान्तर स्पर्श रेखा का समीकरण है-

(A) $x + 2y + 1 = 0$

(B) $x - 2y + 1 = 0$

(C) $x + 2y - 1 = 0$

(D) $x - 2y + 1 = 0$

हल : (A)

प्रश्न 14. परवलय $y^2 = 4x$ का एक अभिलम्ब है

(A) $y = x + 4$

(B) $y + x = 3$

(C) $y + x = 2$

(D) $y + x = 1$

हल : (B)

प्रश्न 15. दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ के अर्द्धनाभिलम्ब की लम्बाई होगी-

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

हल : (A)

प्रश्न 16. दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ की उत्केन्द्रता होगी–

(A) -2

(B) 1/2

(C) 1

(D) 2

हल : (B)

प्रश्न 17. यदि रेखा y = mx + c दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का स्पर्श करती है तो c का मान होगा-

(A) $c = \frac{a}{m}$ (B) $c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$

(C) $c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ (D) $c = a\sqrt{1 + m^2}$

हल : (C)

प्रश्न 18. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (b > a) के नाभियों के निर्देशांक होंगे-

(A) (±ae, 0)
(B) (±be, 0)
(C) (0, ±ae)
(D) (0, ±be)

हल : (D)

प्रश्न 19. आयतीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता होगी
(A) 0
(B) 1
(C) √2
(D) 2

हल : (C)

प्रश्न 20. अतिपरवलय $9x^2 – 16y^2 = 144$ की उत्केन्द्रता होगी
(A) 1
(B) 0
(C) $\frac{5}{16}$
(D) $\frac{5}{4}$

हल : (D)

प्रश्न 21. उस वृत्त का समीकरण लिखिए जिसका केन्द्र (a cos α, a sin α) तथा त्रिज्या a है।

हल- केन्द्र (a cos α, a sin α) एवं त्रिज्या a वाले वृत्त का समीकरण
$(x – a \cos α)^2 + (y – a \sin α)^2 = a^2$ [$\because (x – h)^2 + (y – k)^2 = r^2$]
$\Rightarrow x^2 + a^2 \cos^2 α – 2ax \cos α + y^2 + a^2 \sin^2 α – 2ay \sin α = a^2$
$\Rightarrow x^2 – 2ax \cos α – 2ay \sin α + y^2 + a^2(\cos^2 α + \sin^2 α) = a^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax \cos \alpha - 2ay \sin \alpha + a^2 = a^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax \cos \alpha - 2ay \sin \alpha = 0$

प्रश्न 22. यदि वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) पर स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हों तो सिद्ध कीजिए.
$x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + g^2 + f^2 = 0$

हल : दिया गया वृत्त का समीकरण-
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण
$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$
$(x_1 + g)x + (y_1 + f)y + gx_1 + fy_1 + c = 0$

$$\text{रेखा का ढाल } m_1 = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

$$m_1 = \frac{-(x_1 + g)}{(y_1 + f)} \quad \text{....(1)}$$

इसी तरह से (x_2, y_2) पर स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$(x_2 + g)x + (y_2 + f)y + gx_2 + fy_2 + c = 0$
रेखा का ढाल

$$m_2 = -\frac{(x_2 + g)}{(y_2 + f)} \quad \text{....(2)}$$

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$\frac{-(x_1 + g)}{(y_1 + f)} \times \left\{\frac{-(x_2 + g)}{(y_2 + f)}\right\} = -1$$

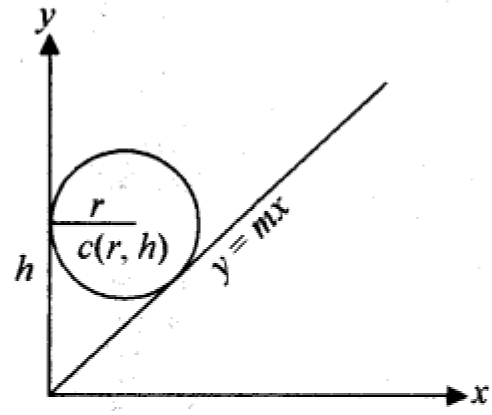
$(x_1 + g)(x_2 + g) = -(y_1 + f)(y_2 + f)$

$x_1x_2 + x_1g + gx_2 + g^2 = - y_1y_2 - y_1f - fy_2 - f^2$
$x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + g^2 + f^2 = 0$
इतिसिद्धम्

प्रश्न 23. r त्रिज्या वाले उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र प्रथम पाद में स्थित है तथा y-अक्ष को मूल बिन्दु से h दूरी पर स्पर्श करता है। मूल बिन्दु से होकर जाने वाली दूसरी स्पर्श रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

हल- उस वृत्त का समीकरण जो y-अक्ष को मूल बिन्दु से h दूरी पर

स्पर्श करता है व जिसकी त्रिज्या r हो, होगा
$(x - r)^2 + (y + h)^2 = r^2$ ….(1)



माना मूल बिन्दु से होकर जाने वाली दूसरी स्पर्श रेखा को समी. $y = mx$ है।
चूँकि रेखा $y= mx$ वृत्त (1) को स्पर्श करती है, अतः (1) के केन्द्र से रेखा $y = mx$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई r होगी।

$$\therefore \quad \frac{mr - h}{\sqrt{1+m^2}} = r$$

या $$(mr - h)^2 = r^2(1 + m^2)$$

$$m^2r^2 - 2mrh + h^2 = r^2 + r^2m^2$$

या $$2mrh = h^2 - r^2$$

या $$m = \frac{h^2 - r^2}{2rh}$$

अभीष्ट स्पर्श रेखा का समीकरण होगा—

$$y = \frac{h^2 - r^2}{2rh}x$$

या $(r^2 - h^2)x + 2rhy = 0$

प्रश्न 24. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के बिन्दु (α, β) पर खींची गई स्पर्श रेखा अक्षों को क्रमशः A एवं B बिन्दुओं पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $\frac{a^4}{2\alpha\beta}$ होगा, जहाँ O मूल बिन्दु है।

हल- वृत्त पर बिन्दु (α, β) पर स्पर्श रेखा का समीकरण-
$x\alpha + y\beta = a^2$

या $$\frac{x\alpha}{a^2} + \frac{y\beta}{a^2} = 1$$

या $$\frac{x}{\frac{a^2}{\alpha}} + \frac{y}{\frac{a^2}{\beta}} = 1$$

अत: x-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड

$$OA = \frac{a^2}{\alpha}$$

इसी प्रकार से—

y-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड

$$OB = \frac{a^2}{\beta}$$

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} OA \times OB$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{\alpha} \times \frac{a^2}{\beta^2}$$

$$= \frac{a^4}{2\alpha\beta}$$

प्रश्न 25. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये जो अक्षों के साथ a^2 क्षेत्रफल वाला त्रिभुज निर्मित करती है।

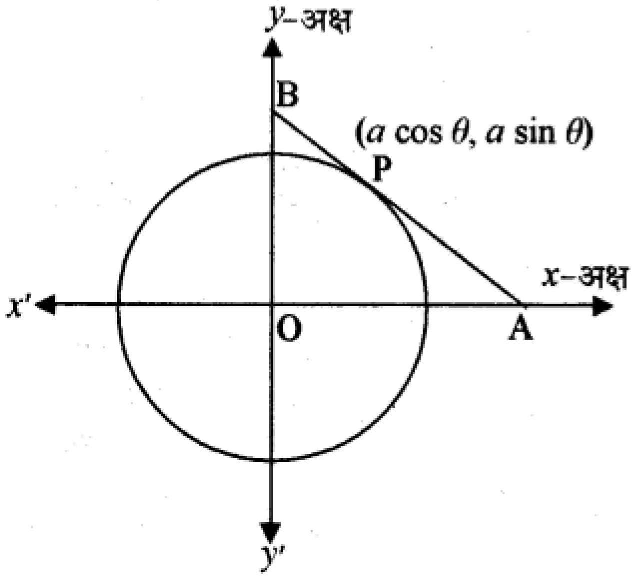
हल- माना कि वृत्त पर स्थित बिन्दु P(a cos θ, a sin θ) हैं एवं P पर स्पर्श रेखा का समीकरण होता है

$x \times a \cos\theta + y \times a \sin\theta = a^2$

$x \cos\theta + y \sin\theta = a$ ....(1)

बिन्दु A रेखा (1) तथा x-अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु है। अतः

$A\left(\frac{a}{\cos\theta}, 0\right)$ होगा।



बिन्दु B रेखा (1) तथा y-अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु है, अतः

$B\left(0, \frac{a}{\sin\theta}\right)$ होगा।

$$\Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times OA \times OB$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\cos\theta} \times \frac{a}{\sin\theta} = \frac{a^2}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2\theta = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad 2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2 \times 2} = \frac{\pi}{4}$$

θ का मान समीकरण (1) में रखने पर—

$$x \cos\frac{\pi}{4} + y \sin\frac{\pi}{4} = a$$

1 1

इसी प्रकार अन्य चतुर्थांशों में प्राप्त स्पर्श रेखाओं के समीकरण

x – y = √2a

-x + y = √2a

$-x-y=\sqrt{2}a$
संयुक्त रूप से
$\pm x \pm y=\sqrt{2}a$

प्रश्न 26. परवलय $x^2 - 4x - 8y = 4$ की नाभि के निर्देशांक लिखिए।

हल- $x^2 - 4x - 8y = 4.$
$\Rightarrow x^2 - 4x = 4 + 8y$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 8 + 8y$
$\Rightarrow (x-2)^2 = 8(1+y)$

माना $x - 2 = X$
$1 + y = Y$
$\therefore X^2 = 8Y$
$\therefore 4a = 8 \therefore a = 2$

अतः नाभि $(0, a) = (0, 2)$ लेकिन $x - 2 = 0 \therefore x = 2$
$y + 1 = 2 \therefore y = 1$
अतः नाभि के निर्देशांक (2, 1)

प्रश्न 27. परवलय $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ की उत्केन्द्रता लिखिए।

हल- $x^2 - 4x = 4y - 4$
$x^2 - 4x + 4 = 4y - 4 + 4$
$(x-2)^2 = 4y \Rightarrow X^2 = 4Y$

$4a = 4 \therefore a = 1$
नाभि (0, 1) अर्थात् $X = 0, Y = 1$
$x - 2 = 0 \therefore x = 2$
अत: $y = 1$
अतः उत्केन्द्रता $e = 1$

प्रश्न 28. रेखा $lx + my + n = 0$ के परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध लिखिए।

हल- $ln = am^2$

प्रश्न 29. उसे परवलय का समीकरण लिखिए जिसका शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (0, -a) हो।

हल- $x^2 = -4ay$

प्रश्न 30. परवलय $9y^2 - 16x - 12y - 57 = 0$ के अक्ष का समीकरण लिखिए।

हल- दिया गया है

$9y^2 - 16x - 12y - 57 = 0$

$\Rightarrow 9y^2 - 12y = 16x + 57$

$\Rightarrow 9y^2 - 12y + 4 = 16x + 57 + 4$

$$\Rightarrow \quad (3y - 2)^2 = (16x + 61) = 16\left(x + \frac{61}{16}\right)$$

माना $3y - 2 = Y$ तथा $X = x + \frac{61}{16}$

$Y^2 = 16X$

अक्ष का समीकरण $Y = 0$

$\therefore 3y - 2 = 0$

या $3y = 2$

प्रश्न 31. दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2 - ax}{a^2} + \frac{y^2 - by}{b^2} = 0$$

के केन्द्र के निर्देशांक लिखिए।

हल :

$$\frac{x^2 - ax}{a^2} + \frac{y^2 - by}{b^2} = 0$$

पूर्ण वर्ग बनाने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}{a^2} + \frac{y^2 - by + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}}{b^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{b^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{1}{4} + \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{b^2} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

अतः दीर्घवृत्त के केन्द्र के निर्देशांक $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

प्रश्न 32. रेखा x cos α + y sin α = p के दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध लिखिए।

हल : $p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha$

प्रश्न 33. अतिपरवलय का समीकरण लिखिए जिसकी अनुप्रस्थ अक्ष और संयुग्मी अक्ष क्रमशः 4 तथा 5 हैं ।

हल- दिया गया है– 2a = 4
∴ a = 2 और $a^2 = 4$
इसी प्रकार से— 2b = 5

$b = \frac{5}{2}$
$\therefore b^2 = \frac{25}{4}$

अतः अतिपरवलय का समीकरण होगा

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}-\frac{4y^2}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{25x^2-16y^2}{100} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 25x^2 - 16y = 100$$

प्रश्न 34. अतिपरवलय

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

के केन्द्र के निर्देशांक लिखिए।

हल- हम जानते हैं अतिपरवलय-

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का केन्द्र (0, 0) होता है।
$\therefore x - 1 = 0 \therefore x = 1$

इसी प्रकार से– $y + 2 = 0 \therefore y = -2$
अतः केन्द्र के निर्देशांक = (1, -2)