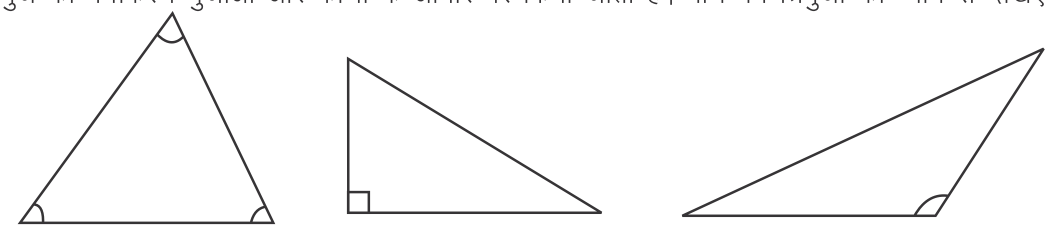
अध्याय 8
त्रिभुज और उसके गुण

8.1 त्रिभुज तीन रेखाखण्डों से बनी हुई बंद सरल आकृति है। जिसमें तीन भुजाएँ, तीन कोण तथा तीन शीर्ष होते हैं। त्रिभुज का वर्गीकरण भुजाओं और कोणों के आधार पर किया जाता है। नीचे बने त्रिभुजों को ध्यान से देखिए ।



(i) (ii) (iii)

आप इनके कोणों में क्या विशेषता देखते हैं?

त्रिभुज (i) के तीनों कोण न्यून कोण है इसलिए इसे न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं।

त्रिभुज (ii) में एक कोण समकोण है इसलिए इसे समकोण त्रिभुज कहते हैं।

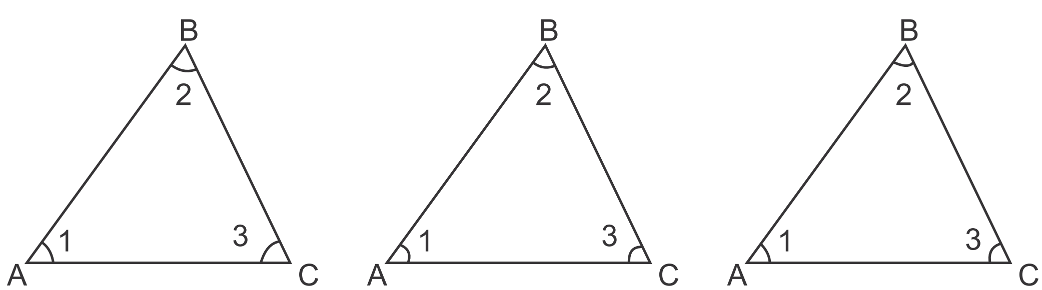
त्रिभुज (iii) में एक कोण अधिक कोण है इसलिए इसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।

क्या त्रिभुज के किसी एक कोण को बदलने पर उसके अन्य दो कोणों की माप भी बदलती है ? आप अलग–अलग त्रिभुज बनाकर जाँचें और तालिका में भरें–

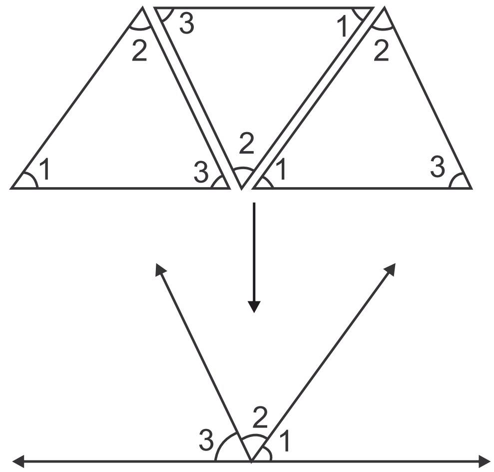
त्रिभुज का नाम	कोणों की माप
Δ ABC	$\angle A=50^0$, $\angle B=60^0$, $\angle C=70^0$
Δ ABC	$\angle A=30^0$, $\angle B=.....^0$, $\angle C=.....^0$
Δ ABC	$\angle A=100^0$, $\angle B=.....^0$, $\angle C=.....^0$

8.2 त्रिभुज के अंतःकोणों का योग गुण

1. तीन समान माप की भुजा व कोण के त्रिभुज बनाकर उन्हें काटिए।



2. तीनों त्रिभुजों को नीचे दिए अनुसार जमाइए ।



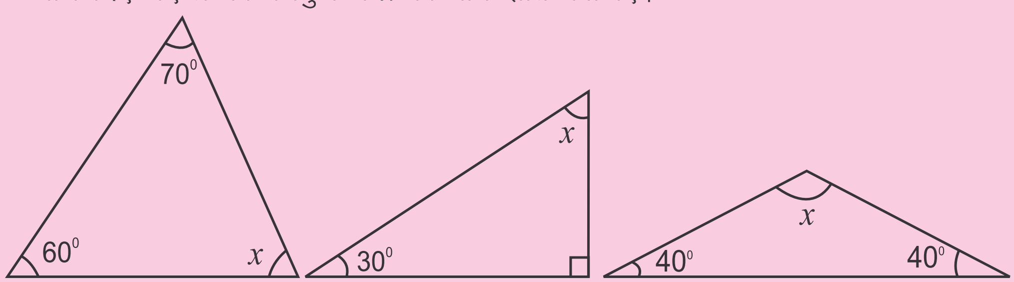
$\angle 1$, $\angle 2$ व $\angle 3$ मिलकर एक सरल कोण का निर्माण करते हैं। अतः $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

आप भी इसी प्रकार के कुछ और त्रिभुज बनाकर तथ्य की जाँच कीजिए ।

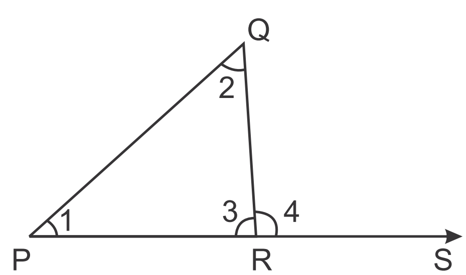
करो और सीखो

नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज में x का मान ज्ञात कीजिए।

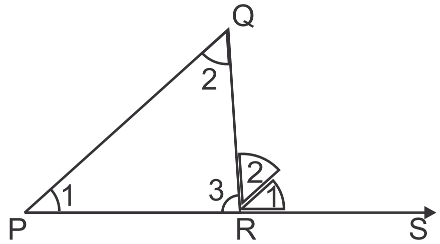


8.3 त्रिभुज के बाह्य कोण एवं इसके गुण

1. एक त्रिभुज PQR बनाइए और इसकी एक भुजा PR को बढाइए।



2. त्रिभुज PQR के समान भुजा व कोण का एक और त्रिभुज बनाकर उसके ∠1 व ∠2 को काट कर नीचे दिए गए चित्रानुसार त्रिभुज PQR के बाह्य कोण ∠QRS पर जमाइए ।



हम देखते हैं कि कोण ∠1 व ∠2 त्रिभुज PQR के बाह्य कोण ∠QRS को पूरी तरह से ढ़क लेते हैं।

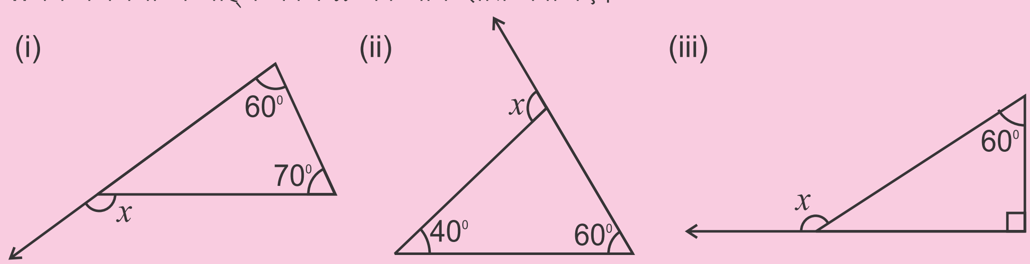
अतः ∠QRS = ∠P + ∠Q

किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अंतः कोणों के योग के बराबर होता है ।

करो और सीखो

1. निम्न चित्रों में बाह्य कोण x का मान ज्ञात कीजिए।

(i) (ii) (iii)

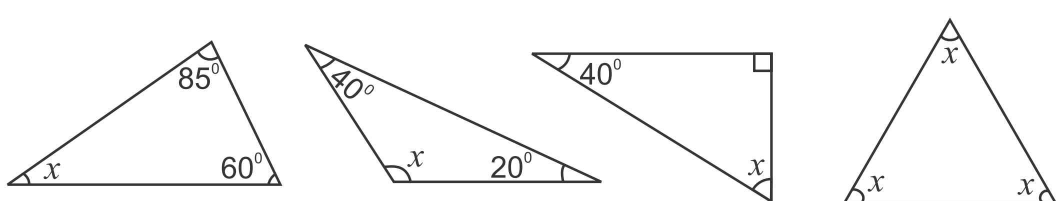


2. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसके दो कोण समकोण हो ?

3. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसके तीनों कोण 60^0 से अधिक हो ?

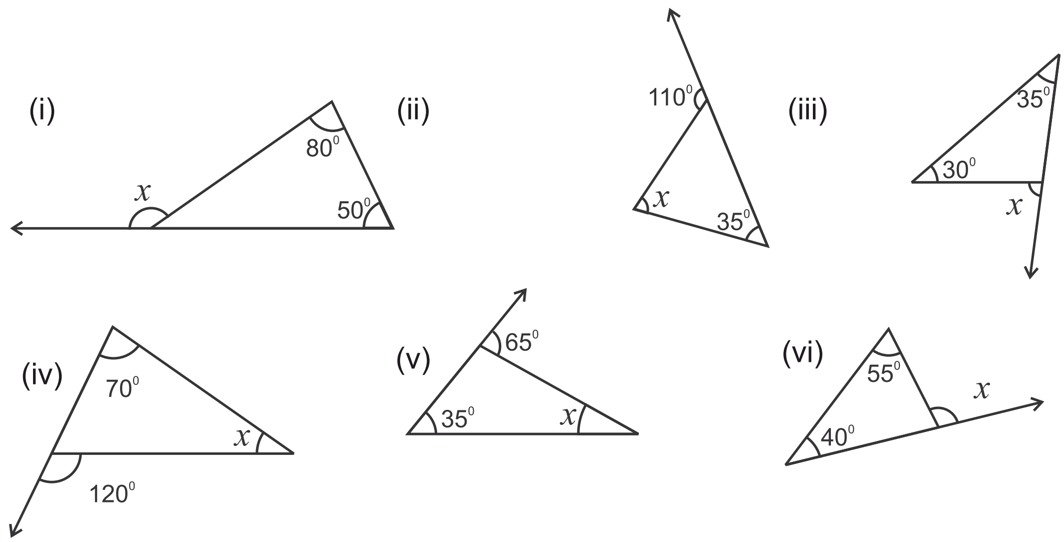
प्रश्नावली 8.1

1. नीचे दिये गए त्रिभुजों में अज्ञात कोण x का मान ज्ञात कीजिए।

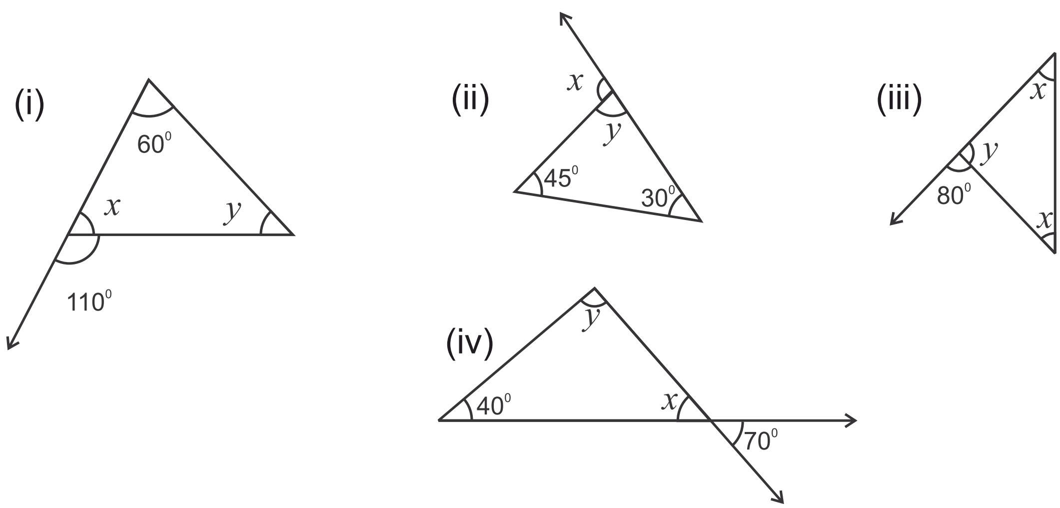


(i) (ii) (iii) (iv)

2. नीचे दी गई आकृतियों में अज्ञात कोण x का मान ज्ञात कीजिए ।



3. नीचे दी गई आकृतियों में अज्ञात कोण x व y का मान ज्ञात कीजिए ।



4. किसी समकोण त्रिभुज का एक न्यून कोण 45° का है तो इसका दूसरा न्यून कोण ज्ञात कीजिए।
5. किसी त्रिभुज के दो कोण $50^\circ, 50^\circ$ हो तो तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।
6. किसी त्रिभुज के कोण 1 : 2 : 3 अनुपात में हो तो त्रिभुज का प्रत्येक कोण ज्ञात कीजिए।
7. क्या ऐसा समकोण त्रिभुज संभव है जिसके दो कोण क्रमशः 70° व 21° है? नहीं, तो क्यों ? स्पष्ट कीजिए ।
8. नीचे कुछ कोणों के त्रिक दिए गए हैं बताइए इनमें से कौन–कौन से, त्रिभुज के कोणों को प्रदर्शित करते हैं ?
   (i) $100^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ (ii) $30^\circ, 59^\circ, 91^\circ$ (iii) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (iv) $120^\circ, 30^\circ, 50^\circ$

8.4 किसी त्रिभुज की भुजाओं की माप में सम्बन्ध

8.4.1 त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग

नीचे दिए गए मापों के अनुसार त्रिभुज बनाइए।

1. 5 सेमी, 4 सेमी, 6 सेमी नाप का त्रिभुज XYZ ।
2. 6.5 सेमी , 4.5 सेमी, 3 सेमी नाप का त्रिभुज MNO ।
3. 5 सेमी , 6 सेमी , 12 सेमी नाप का त्रिभुज PQR ।
4. 2.0 सेमी, 3 सेमी, 5 सेमी नाप का त्रिभुज UVW ।

क्या आप सभी माप के त्रिभुज बना पाए ? नहीं तो क्यों ? साथियों से चर्चा करें। आपने जो त्रिभुज बनाए उसकी भुजाओं की माप तालिका में दिखाए अनुसार भरिए।

त्रिभुज का नाम	भुजा का माप	दो भुजाओं का योग	भुजाओं में संबंध	दो भुजाओं का योग तीसरी से अधिक है	त्रिभुज बना हाँ/ नहीं
ΔXYZ	$x = 5$ $y = 4$ $z = 6$	$x + y = 5 + 4$ $y + z = 4 + 6$ $z + x = 6 + 5$	$x + y > z$ $9 > 6$ $y + z > x$ $10 > 5$ $z + x > y$ $11 > 4$	हाँ हाँ हाँ	
ΔMNO	m = n = o =	m + n = n + o = o + m =			
ΔPQR	p = q = r =	p + q = q + r = r + p =			
ΔUVW	u = v = w =	u + v = v + w = w + u =			

इस तालिका से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि **त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की मापों का योग हमेशा तीसरी भुजा के माप से अधिक होता है।**

8.4.2 त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का अन्तर

इसी प्रकार दो भुजाओं की माप के अन्तर पर विचार कीजिए । आपने क्या देखा ?

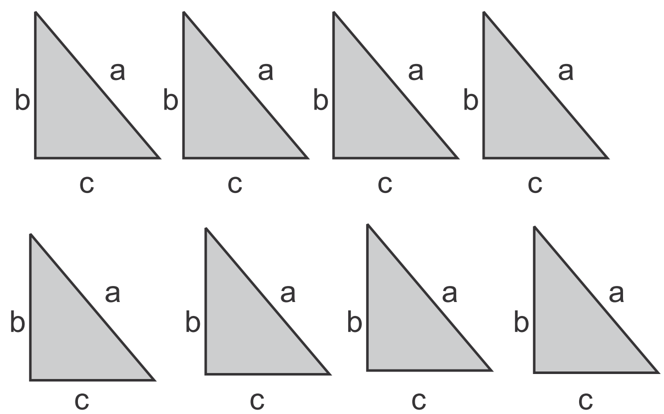
क्या किन्हीं दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से कम हैं, अधिक है अथवा बराबर है ? ऐसे कई त्रिभुजों की भुजाओं को जाँचने पर आप पाएँगे कि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से छोटा होता है।

करो और सीखो

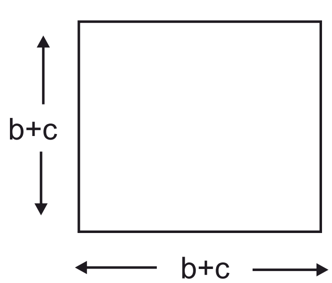
1. एक त्रिभुज बनाइए जिसकी भुजाओं की माप 3.5 सेमी, 4.5 सेमी तथा 6 सेमी हो।
2. क्या एक ऐसा त्रिभुज बन सकता है जिसकी भुजाओं की माप 4 सेमी, 5 सेमी और 9 सेमी हो।

8.5 बोधायन प्रमेय (पाइथागोरस प्रमेय)

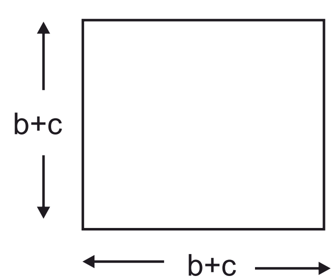
1. एक समकोण त्रिभुज बनाइए इसके आठ समान प्रतिरूप कार्डशीट पर बनाइए और उन्हें काट लीजिए । मान लीजिए त्रिभुज के समकोण के सामनेवाली भुजा (कर्ण) की लम्बाई a तथा अन्य भुजाओं की लम्बाई क्रमशः b व c है।



2. अब त्रिभुज की भुजा b और c का योग कीजिए तथा (b + c) माप की भुजा वाले दो एक समान वर्ग एक अन्य कार्डशीट पर बनाइए।

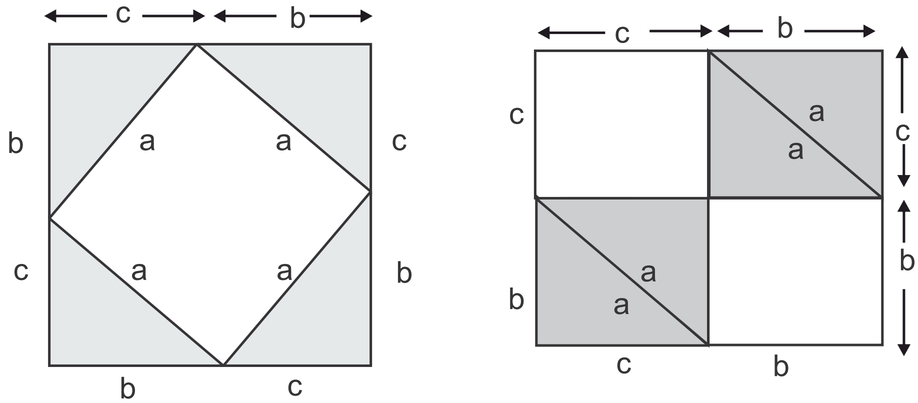


वर्ग – I



वर्ग – II

3. अब ऊपर बनाए त्रिभुजों में से चार त्रिभुजों को वर्ग – I में तथा चार त्रिभुजों को वर्ग –II में नीचे दिए गए चित्रानुसार जमाइए।



वर्ग I वर्ग II

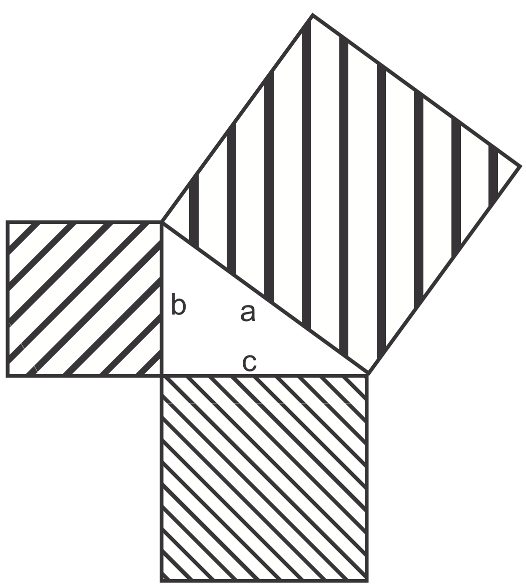
4. दोनों वर्ग एक समान है तथा आठों त्रिभुज भी एक समान है।

अतः वर्ग I के खाली भाग का क्षेत्रफल = वर्ग II के खाली भाग का क्षेत्रफल

या वर्ग I के खाली भाग में बने वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग II के खाली भाग में बने दोनों वर्गों के क्षेत्रफलों का योग।

अर्थात् $a^2 = b^2 + c^2$

समकोण त्रिभुजों का यह सम्बन्ध पाइथोगोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है, इसे सर्वप्रथम भारतीय गणितज्ञ बोधायन ने ज्ञात किया था, जिसका आधुनिक गणित में पाइथोगोरस ने व्यवस्थित प्रमाण दिया। इस प्रमेय को निम्न प्रकार भी समझा जा सकता है। हम a माप की भुजा वाले वर्ग को Δ abc के सबसे बड़ी भुजा (कर्ण) तथा b माप की भुजा व c माप की भुजा वाले वर्ग को Δ abc की भुजा b व c पर नीचे दिए गए चित्रानुसार जमा सकते हैं।

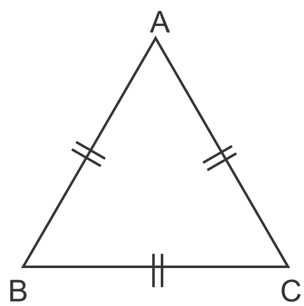


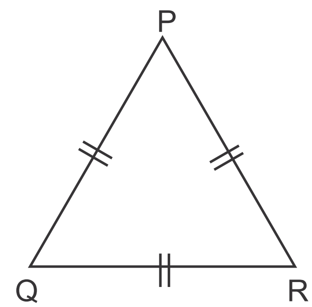
इसके अनुसार हम कह सकते हैं।

समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा (कर्ण) पर बना वर्ग अन्य दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है। प्रतीकात्मक रूप में $a^2 = b^2 + c^2$ ।

8.6 भुजाओं एवं कोण में संबंध

एक समबाहु त्रिभुज Δ ABC बनाकर इसी की एक और प्रतिलिपि Δ PQR (ट्रेस पेपर से) काटिए। अब आप Δ PQR के कोण $\angle P$ को Δ ABC के तीनों कोण पर बारी–बारी से रख कर देखिए– जब $\angle$ P को $\angle A$ पर रखते हैं तो $\angle Q$, $\angle B$ को तथा $\angle R$, $\angle C$ को ढक लेता है।





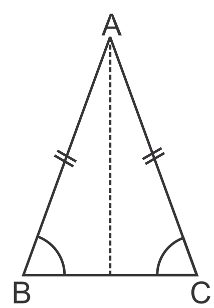
समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों को एक दूसरे पर रखने से वह एक–दूसरे को पूरा–पूरा ढक लेते हैं, अर्थात् समबाहु त्रिभुज में तीनों भुजाएँ समान होने पर तीनों कोण भी समान होते हैं ।

– क्या त्रिभुज में दो भुजाएँ समान होने पर कोण भी समान होंगे ? यदि हाँ, तो कौनसे ?

एक कार्डशीट/कागज पर समद्विबाहु त्रिभुज बनाइए। इसे नाम दीजिए ABC उसे इस प्रकार मोड़िए कि बराबर भुजाएँ सम्पाती हो ।

क्या बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर हैं ?

आप पाएँगे कि समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

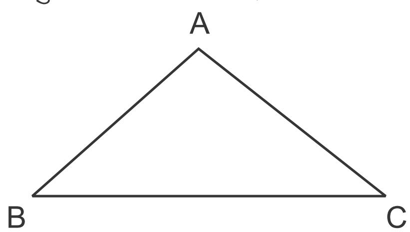


इस प्रकार समान भुजा AB और AC त्रिभुज की सम भुजाएँ कहलाती है। और उनके सम्मुख कोण $\angle B$ और $\angle C$ आधार कोण हैं जो परस्पर समान हैं।

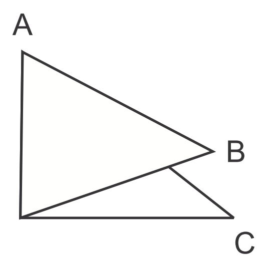
अर्थात् **समद्विबाहु त्रिभुज में दो समान माप वाली भुजाओं के सम्मुख कोण की माप भी समान होती है।**

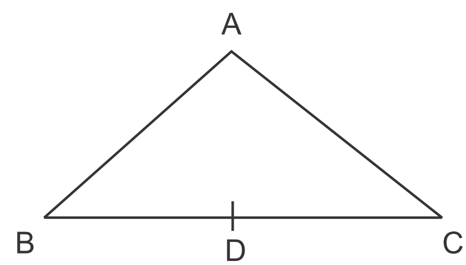
8.7 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

1. एक कागज पर एक त्रिभुज ABC बनाकर इसे काटकर अलग कर लीजिए ।

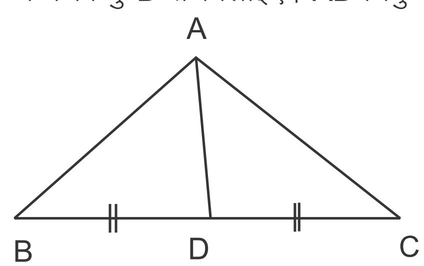


2. त्रिभुज को मोडकर शीर्ष B व C को मिलाइए। इससे भुजा BC का मध्य बिन्दु प्राप्त होगा। इसे D नाम दीजिए ।



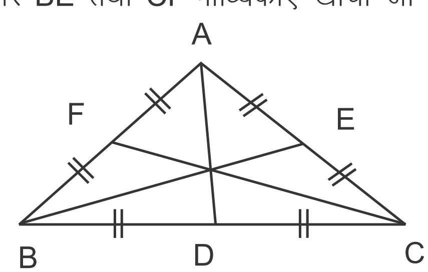


3. अब शीर्ष A को BC के मध्य बिन्दु D से मिलाइए। AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है।



त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को त्रिभुज की माध्यिका कहते हैं।

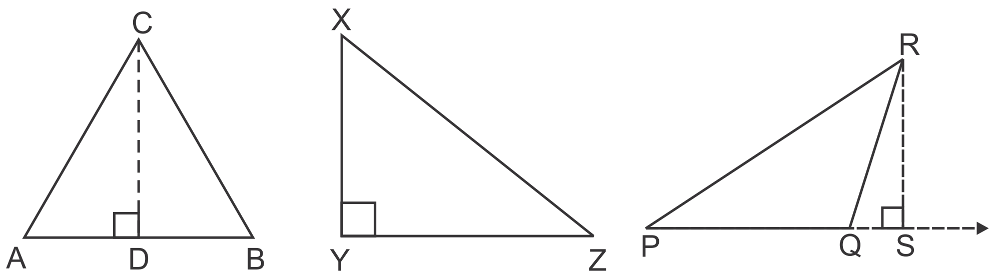
4. इसी प्रकार निम्न चित्रानुसार BE तथा CF माध्यिकाएँ खींची जा सकती हैं।



किसी भी त्रिभुज की अधिकतम 3 माध्यिकाएँ होती है। माध्यिकाओं के संगमन बिन्दु को केन्द्रक कहते हैं।

8.8 त्रिभुज के शीर्ष लम्ब

त्रिभुज के किसी भी शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब **शीर्ष लम्ब** कहलाता है। प्रत्येक त्रिभुज के तीन शीर्ष लम्ब होते हैं। शीर्षलम्बों के संगमन बिन्दु को लम्ब केन्द्र कहते है। नीचे दिए गए त्रिभुज के चित्रों में दिखाए गए शीर्षलंबों को पहचानिए।



Δ ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है, इसका प्रत्येक शीर्ष लम्ब त्रिभुज के अन्दर ही होता है ।

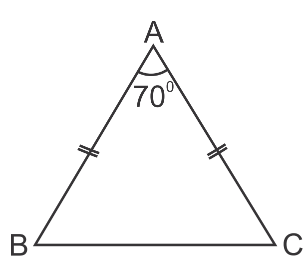
Δ XYZ एक समकोण त्रिभुज हैं, इसकी समकोण बनाने वाली दो भुजाएँ स्वयं ही शीर्ष लम्ब होती है ।

Δ PQR एक अधिक कोण त्रिभुज हैं, इसका एक शीर्ष लम्ब, त्रिभुज के बाहर बनता है ।

शीर्ष लम्ब जिस भुजा पर डाला जाता है, वह उस भुजा के सापेक्ष दिए गए त्रिभुज की ऊँचाई होती है।

प्रश्नावली 8.2

1. भुजाओं की मापों के आधार पर बताइए कौन–कौनसे माप त्रिभुज का निर्माण कर सकते हैं ?
   (i) 6, 5, 5 (ii) 2, 3, 5 (iii) 3, 4, 8 (iv) 3, 5, 6 (v) 4, 4, 8 (vi) 9, 2, 8
2. एक समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों का मान ज्ञात कीजिए।
3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) प्रत्येक त्रिभुज में कम से कम दो कोण............................होते हैं ।
   (ii) ....त्रिभुज का एक शीर्ष लम्ब त्रिभुज के बाहर होता है ।
   (iii) प्रत्येक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से........................होता है ।
   (iv) ....त्रिभुज के दो कोण समान होते हैं।
   (v) त्रिभुज के किसी शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा.................. .... कहलाती है ।
   (vi) किसी त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ जिस बिन्दु मिलती है, उसे.............कहते है।
   (vii) लम्बकेन्द्र से त्रिभुज के तीनों .... गुजरते हैं।
4. त्रिभुज ABC में $\angle A = 70^0$ तथा AB = AC हो तो $\angle B$ व $\angle C$ का माप ज्ञात कीजिए।



5. एक त्रिभुज का चित्र बनाकर उसमें एक माध्यिका तथा एक शीर्ष लम्ब को दर्शाइए ।
6. एक त्रिभुज की दो भुजाओं के माप 3 सेमी तथा 6 सेमी है। इस त्रिभुज की तीसरी भुजा का न्यूनतम तथा अधिकतम माप क्या हो सकता है ?
7. दो चेतावनी सूचक चिह्न (त्रिभुजाकार यातायात संकेतक) बनाएँ जो कि समभुज हो और जो आपका ध्यान सड़क पर आने वाले खतरों की ओर आकर्षित करता हो।

हमने सीखा

1. एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण इसके छः अवयव कहलाते हैं ।
2. एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है ।
3. किसी त्रिभुज का बाह्य कोण किसी एक भुजा को एक ही ओर बढ़ाने पर बनता है। एक भुजा को दो प्रकार से बढ़ाकर दो बाह्य कोण बनाए जा सकते हैं।
4. त्रिभुज के बाह्य कोण का माप उसके दो सम्मुख अंतःकोणों के योग के बराबर होता है ।
5. **त्रिभुज की भुजाओं के गुण**

   (i) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की मापों का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है ।

   (ii) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की मापों का अंतर तीसरी भुजा की माप से कम होता है ।

   ये दोनों गुण किसी त्रिभुज की रचना की संभावना के लिए उपयोगी होते हैं। जब त्रिभुज की माप दी हो।
6. समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा कर्ण तथा अन्य दोनों भुजाएँ उसके पाद कहलाते हैं। समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग = दोनों पादों के वर्गों का योग। (बोधायन प्रमेय)
7. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष को उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाले रेखाखण्ड को उसकी माध्यिका कहते हैं। एक त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ होती हैं। माध्यिकाओं का संगमन बिन्दु केन्द्रक कहलाता है।
8. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर खींचे गए लंब को शीर्ष लंब कहते हैं। एक त्रिभुज के तीन शीर्ष लंब होते हैं । शीर्ष लम्बों का संगमन बिन्दु लम्ब केन्द्र कहलाता है।