باب 7

تکملہ
(INTEGRALS)

❖ جس طرح پہاڑ وں پر چڑھنے کے ماہر پہاڑوں پر چڑھتے ہیں- کیونکہ یہ موجود ہیں، اسی طرح ایک اچھا ریاضی کا طالب علم نئی اشیا کا مطالعہ کرتا ہے کیونکہ یہ موجود ہے-جیمس بی برسٹل ❖

7.1 تعارف (Introduction)

جی۔ڈبلیو۔لیبنٹز (G .W. Leibnitz)
(1646-1716)

تفرق احصا(Calculus) مشتق کے تصور پر مبنی ہے۔مماس خطوط کو فنکشن کے گراف پر بیان کرنا اور اس طرح کے خطوط کے سلوپ کا حساب لگانا ہی مشتق کی اصل ہمت افزائی تھی۔تکملہ احصا کے تفاعل کے گراف سے گھرے ہوئے رقبہ کا حساب لگانے اور مسئلہ کو بیان کرنے سے بہت ہمت افزائی ہوئی۔

اگر ایک تفاعل 'f' ایک دفعہ I میں تفرق پذیر ہے۔یعنی، اس کا مشتق f' I کے ہر نقطہ پر وجود میں، تب ایک قدرتی سوال اٹھتا ہے کہ I کے ہر نقطہ پر f' دیا ہوا ہے، کیا ہم فنکشن دریافت کر سکتے ہیں؟ وہ تفال جو تفاعل کے طور پر دیا جا سکتا تھا۔مشتق کے طور پر مشتق کے برخلاف کہلاتے ہیں۔(یا ابتدائی) تفاعل کے۔اس کے آگے، جو فامولہ یہ تمام برخلاف مشتق دیتا ہے وہ فنکشن کا غیر معین تکملہ کہلاتا ہے اور اس عمل کو جو ضد مشتق کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے تکمل (Integration) کہتے ہیں۔ اس طرح کے مسئلے بہت سے عملی حالات میں پیدا ہوتے ہیں۔ایک لمحہ کے لیے مان لیجیے، اگر ہم ایک شے کی فوری رفتار اچانک جانتے ہیں، تب ایک قدرتی سوال پیدا ہوتا ہے، یعنی، کیا ہم ایک شے کی پوزیشن کا اندازہ کسی حالت میں کر سکتے ہیں؟ اس طرح کے بہت سے عملی اور نظری حالات ہیں جہاں تکمل کا طریقہ ملوث ہے۔تکملہ کا بڑھنا ذیل طریقے کے مسئلوں کو حل کرنے کی کوشش سے آتا ہے۔

(a) ایک فنکشن کو معلوم کرنا جب کہ اس کا مشتق دیا ہوا ہے۔

© NCERT not to be republished

(b) ایک فنکشن کے رقبہ کو معلوم کرنا جس میں وہ کچھ حالات کے تحت گراف سے گھرا ہوا ہے۔

یہ دو مسئلے ہمیں تکملہ کی دو اشکال کی طرف لے جاتے ہیں، مثلاً غیر معین اور معین تکملہ، جو ایک ساتھ مل کر تکملہ احصا بناتے ہیں۔ غیر معین اور معین تکملہ کے بیچ ایک رشتہ ہے جس کو احصا کا بنیادی مسئلہ (Fundamental Theorem of calculus) کہتے ہیں، اور جو معین تکملہ کو سائنس اور انجینئرنگ کے لیے ایک عملی اوزار بنا دیتا ہے۔ معین تکملہ اور بہت سے دلچسپ مسئلے جو کہ مختلف شعبوں سے تعلق رکھتے ہیں جیسے معاشی (economic) مالیاتی (finance) اور احتمال (probability) میں استعمال کیا جاتا ہے۔

اس باب میں ہم اپنے مطالعہ کو غیر معین تکملہ اور معین تکملہ تک محدود رکھیں گے اور ان کی بنیادی خصوصیات اور کچھ تکمل کی تکنیک بھی اس میں شامل ہوں گی۔

7.2 تکمل تفرق کے معکوس عمل کے طور پر
(Integration as an Inverse Process of Differentiation)

تکمل، تفرق کا معکوس عمل ہے۔ ایک تفاعل کا تفرق کرنے کے بجائے، ہمیں ایک تفاعل کا مشتق دیا ہوا ہے اور اس کا ابتدائی معلوم کرنے کے لیے کیا گیا ہے، یعنی اصل فنکشن۔ اس طرح کے عمل کو تکمل (Integration) یا ضد تفرق کہا جاتا ہے۔

ہم ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں:

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \text{(1) ....}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \quad \text{(2)............}$$

اور

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \text{(3)............}$$

ہم (1) میں مشاہدہ کرتے ہیں، تفاعل sin x، cos x کا معرف (مشتق) تفاعل ہے ہم کہتے ہیں کہ sin x، cos x کا ضد مشتق (یا ایک تکملہ) ہے۔ اسی طرح (2) اور (3) میں بالترتیب $\frac{x^3}{3}$ اور e^x ، x^2 اور e^x ضد مشتق (یا تکملہ) ہیں۔

دوبارہ، ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ کسی بھی حقیقی عدد C کے لیے، جس کا برتاؤ ایک مستقل تفاعل کے طور رکیا جاتا ہے، اس کا مشتق صفر ہے، اور اس لیے ہم (1)، (2) اور (3) کو ذیل طریقے سے لکھ سکتے ہیں۔

© NCERT not to be republished

$$\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x \text{ اور } \frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3} + C) = x^2 \text{ ، } \frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$$

اس طرح،مندرجہ بالا تفاعل کے ضد مشتق (یا تکملہ) واحد نہیں ہیں۔درحقیقت،ان میں سے ہر ایک تفاعل کے لاتعداد ضد۔مشتق وجود میں ہیں جو حقیقی اعداد کے سیٹ میں سے اختیاری؛C(arbitary) چننے سے ملتے ہیں۔اسی وجہ سے C کو ایک اختیاری مستقلہ(arbitary constant) بنایا گیا ہے۔اصلیت میں،C ایک پیرامیٹر ہے جو کہ دیے ہوئے فنکشن کے مختلف مخالف مشتق (یا تکملہ) سے حاصل ہوتا ہے۔زیادہ عام طور پر،اگر ایک فنکشن F ہے تا کہ $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ،تمام $\forall x \in I$ کے لیے،تب کسی بھی اختیاری حقیقی عدد C کے لیے (جسے تکملہ کا مستقلہ بھی کہا جاتا ہے)

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = f(x),\ x \in I$$

اس طرح $\{F + C, C \in \mathbf{R}\}$، f کے ضد مشتق کے خاندان کو ظاہر کرتا ہے۔

ریمارک: یکساں مشتق کے ساتھ تفاعل ایک مستقلہ سے علاحدہ ہوتے ہیں۔اسے دکھانے کے لیے تفاعل g اور h ایک وقفہ I پر یکساں مشتق رکھتے ہیں۔

فنکشن $f = g - h$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = g(x) - h(x),\ \forall x \in I$ سے بیان کیا گیا ہے۔

تب $\frac{df}{dx} = f' = g' - h'$ جو دیتا ہے تب $f'(x) = g'(x) - h'(x)\ \forall x \in I$

یا $f'(x) = 0,\ \forall x \in I$ تصور سے

یعنی، f کی شرح تبدیلی x کو مدنظر رکھتے ہوئے صفر ہے،وقفہ I پر اور اس لیے f مستقل ہے۔

مندرجہ بالا ریمارک (تبصرہ) کی بنا پر، یہ اس بات کی دلالت کرتی ہے کہ $\{F + C, C \in R\}$ خاندان f کے تمام ممکن ضد مشتق فراہم کرتا ہے۔

ہم ایک نئی علامت(Symbol) سے روشناس کراتے ہیں،جس کا نام ہے $\int f(x)\,dx$ جو ضد مشتق کی مکمل کلاس کو ظاہر کرتی ہے۔اور جسے x کی مناسبت سے f کا غیر معین تکملہ کہتے ہیں۔

علامتی طور پر،ہم لکھتے ہیں

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

© NCERT not to be republished

ترقیم(Notation) دیا ہوا ہے کہ $\frac{dy}{dx} = f(x)$، ہم لکھتے ہیں $y = \int f(x)\, dx$

آسانی کے لیے، ہم جدول (7.1) میں ذیل علامتیں/اصطلاح/مقولے اوران کے معنوں کے ساتھ دے رہے ہیں۔

جدول 7.1

علامتیں/اصطلاح/مقولے	معنی
$\int f(x)\, dx$	f کا تکملہ x مناسبت سے
$\int f(x)\, dx$ میں $f(x)$	تکمل
$\int f(x)\, dx$ میں x	تکمل کا متغیر
تکمل کرنا	تکملہ معلوم کرنا
f کا ایک تکملہ	ایک فنکشن F تا کہ $F'(x) = f(x)$
تکمل کرنا	تکمل معلوم کرنے کا عمل
تکمل کا مستقلہ	کوئی بھی حقیقی عدد C، جسے ایک مستقل تفاعل کے طور پر مانا گیا ہے۔

ہم پہلے ہی بہت سے مخصوص تفاعل کے مشتق کے لیے فارمولے جانتے ہیں ان فارمولوں سے ایک دم ان فنکشن کے تکملہ کے فارمولے ان ہی کے مطابق لکھ سکتے ہیں۔(جنھیں معیاری فارمولہ کہا جاتا ہے)، جن کی فہرست نیچے دی گئی ہے جو کہ دوسرے تفاعل کے تکملہ معلوم کرنے میں استعمال کیے جائیں گے۔

	مشتق (Derivatives)	تکملہ ضد مشتق (Integrals (Anti derivatives))
(i)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ ؛	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
	خاص طور پر، ہم نوٹ کرتے ہیں کہ، $\frac{d}{dx}(x) = 1$ ؛	$\int dx = x + C$
(ii)	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ؛	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
(iii)	$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ ؛	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

© NCERT not to be republished

(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ ؛ $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

(v) $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x$ ؛ $\int \text{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ ؛ $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

(vii) $\frac{d}{dx}(-\text{cosec } x) = \text{cosec } x \cot x$ ؛ $\int \text{cosec } x \cot x \, dx = -\text{cosec } x + C$

(viii) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ؛ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(xi) $\frac{d}{dx}(-\cos^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ؛ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

(x) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ ؛ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\frac{d}{dx}(-\cot^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ ؛ $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$

(xii) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ؛ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

(xiii) $\frac{d}{dx}(-\text{cosec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ ؛ $\int \frac{ax}{x\sqrt{x^2-1}} = -\text{cosec}^{-1} x + C$

(xiv) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ؛ $\int e^x \, dx = e^x + C$

(xv) $\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}$ ؛ $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C$

(xvi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$ ؛ $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

نوٹ عملی طور پر، عموماً ہم ان وقفوں کو ظاہر نہیں کرتے جہاں مختلف فنکشن کی معرف ہوں۔ حالانکہ کسی مخصوص مسئلہ کے دوران ہمیں اس کا دھیان رکھنا چاہیے۔

7.2.1 غیر معین تکملہ کا جیومیٹریائی ترجمانی (Geometrical interpretation of indefinite integral)

مان لیجیے $f(x) = 2x$، تب $\int f(x) \, dx = x^2 + C$ ، C کی مختلف قدروں کے لیے، ہمیں مختلف تکملہ حاصل ہوتے ہیں۔ لیکن

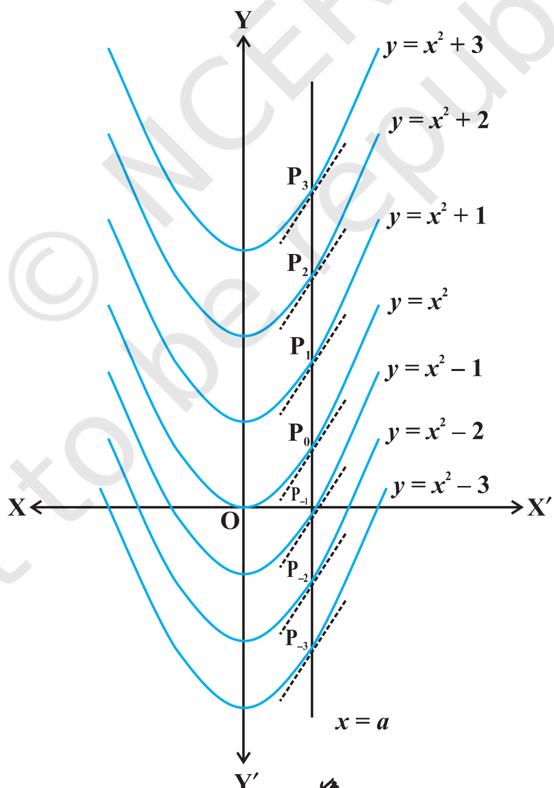
© NCERT not to be republished

یہ تکملہ جیومیٹریائی انداز میں بالکل ایک جیسے ہیں۔

اس طرح، $y = x^2 + C$ ، جہاں C ایک اختیاری مستقلہ ہے، اور تکملوں کے ایک خاندان کو ظاہر کرتا ہے۔ C کو مختلف قدریں دینے پر، ہمیں خاندان کے مختلف افراد ملتے ہیں۔ یہ ایک ساتھ مل کر غیر معین تکملہ بناتے ہیں۔ اس معاملے میں، ہر ایک تکملہ y– محور کے ساتھ ایک مکافی (Parabola) کو ظاہر کرتا ہے۔

واضح طور پر C=0 کے لیے، ہمیں $y = x^2$ حاصل ہوتا ہے۔ ایک مکافی جس کا راس مبدا پر ہے۔ C=1 کے لیے، منحنی $y = x^2 + 1$ کے لیے، $y = x^2$ کو y– محور پر مثبت سمت میں بدلنے پر $y = x^2 - 1$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے، C کی ہر ایک مثبت قدر کے لیے خاندان کے ہر ایک مکافی کا راس y– محور کی مثبت سمت میں ہے اور C کی ہر ایک منفی قدر کے لیے اس کا راس y– محور کی منفی طرف ہے۔ ان میں سے کچھ کو شکل 7.1 میں دکھایا گیا ہے۔

آیئے ہم ان تمام مکافیوں کا خط $x=a$ کے ذریعہ تقاطع پر غور کریں۔ شکل 7.1 میں ہم نے $a>0$ لیا ہے۔ $a<0$ کے لیے بھی



شکل 7.1

یہی صحیح ہے ۔ اگر خط $x=a$ بالترتیب مکافیوں $y=x^2,\ y=x^2+1,\ y=x^2+2,\ y=x^2-1,\ y=x^2-2$ کو بالترتیب $P_0, P_1, P_2, P_{-1}, P_{-2}$ پر کاٹتا ہے وغیرہ؛ تب ان نقاط پر $\frac{dy}{dx}$، $2a$ کے برابر ہے۔ یہ، یہ ظاہر کرتا ہے کہ ان نقاط پر مماس منحنیوں کے متوازی ہیں۔اس طرح، (مان لیجیے) $\int 2x\,dx = x^2 + C = F_C(x)$ کا مطلب ہے کہ ان تمام منحنیوں $y = F_C(x),\ C \in R$ پر مماس، منحنیوں اور خط $x=a, (a \in R)$ کے تقاطع نقطوں پر متوازی ہیں۔ اس کے آگے ، ذیل مساوات (بیان) (مان لیجیے) $\int f(x)\,dx = F(x) + C = y$ منحنیوں کے خاندان (فیملی) کو ظاہر کرتی ہے۔ C کی مختلف قدریں فیملی کے مختلف اعداد کے مطابق ہوں گی اور یہ ممبر کسی بھی منحنی کو بخود متوازی رکھنے پر حاصل ہو سکتے ہیں۔ یہ غیر معین تکملہ کا جیومیٹریائی بیان ہے۔

7.2.2 غیر معین تکملہ کی کچھ خصوصیات (Some properties of indefinite integral)

اس ذیلی سیکشن میں، ہم غیر معین تکملہ کی کچھ خصوصیات نکالیں گے۔

(I) تفرق اور تکمل کا عمل ذیل نتائج کی سوچ سے ایک دوسرے کا برعکس ہے:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

اور $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ ، جہاں C ایک اختیاری مستقلہ ہے

ثبوت مان لیجیے F، f کا ضد مشتق ہے، یعنی

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

تب
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

اس لیے
$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(F(x) + C\right)$$

$$= \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

اسی طرح، ہم غور کرتے ہیں کہ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

© NCERT not to be republished

اور اس لیے $\int f'(x)\, dx = f(x) + C$

جہاں C ایک اختیاری مستقلہ ہے اور جسے تکمل کا مستقلہ کہتے ہیں۔

(II) یکساں مشتق کے ساتھ دو غیر معین تکملہ منحنی کے یکساں خاندان کی طرف لے جاتے ہیں اس لیے یہ معادل ہیں۔

ثبوت مان لیجیے f اور g دو تفاعل ہیں تا کہ

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\, dx$$

یا
$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx\right] = 0$$

اس لیے $\int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx = C$ ، جہاں C ایک حقیقی عدد ہے (کیوں؟)

یا
$$\int f(x)\, dx = \int g(x)\, dx + C$$

لہٰذا منحنی کے خاندان $\left\{\int f(x)\, dx + C_1, C_1 \in R\right\}$

اور $\left\{\int g(x)\, dx + C_2, C_2 \in R\right\}$ مماثل ہیں

اس لیے، اس نظریہ سے، $\int f(x)\, dx$ اور $\int g(x)\, dx$ برابر ہیں

نوٹ $\left\{\int f(x)\, dx + C_1, C_1 \in \mathbf{R}\right\}$ اور $\left\{\int g(x)\, dx + C_2, C_2 \in \mathbf{R}\right\}$ خاندانوں کی معادلت عام طور پر بغیر پیرامیٹر کو بیان کیے ہوئے $\int f(x)\, dx = \int g(x)\, dx$ لکھ کر ظاہر کی جاتی ہے۔

(III) $$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

ثبوت: خصوصیت (I) کے ذریعے، ہمارے پاس ہے

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\, dx\right] = f(x) + g(x) \qquad ...(1)$$

دوسری جانب، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\, dx$$

$$= f(x) + g(x) \qquad ...(2)$$

© NCERT not to be republished

اس طرح، خصوصیت (II) کو مدنظر رکھتے ہوئے، (1) اور (2) سے یہ حاصل ہوتا ہے

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

(IV) کسی بھی حقیقی عدد k کے لیے، $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

ثبوت: خصوصیت (I) سے، $\frac{d}{dx}\int k\, f(x)\, dx = k\, f(x)$

ساتھ ہی $\frac{d}{dx}\left[k \int f(x)\, dx \right] = k \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = k\, f(x)$

اس لیے، خصوصیت (II) کے استعمال سے، ہمارے پاس ہے $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

(V) خصوصیت (III) اور (IV) کو تفاعل کی محدود تعداد $f_1, f_2, \ldots, f_n$ کے لیے عام کیا جا سکتا ہے اور یہ حقیقی اعداد، $k_1, k_2, \ldots, k_n$ دیتے ہیں

$$\int \left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x) \right] dx$$
$$= k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx + \ldots + k_n \int f_n(x)\, dx$$

ایک دیے گئے تفاعل کا ضد مشتق معلوم کرنے کے لیے، ہم اس تفاعل کی تلاش بہت غور فکر کے ساتھ کرتے ہیں جس کا مشتق دیا ہوا تفاعل ہے۔ ضروری تفاعل کی تلاش ایک ضد مشتق دریافت کرنے لیے تکمل کے نظر ثانی کا طریقہ کہلاتا ہے۔ ہم کچھ مثالوں کی مدد سے اسے ظاہر کر سکتے ہیں:

مثال 1: نظر ثانی کا طریقہ استعمال کر کے ذیل میں ہر ایک تفاعل کا ضد مشتق لکھیے

(i) $\cos 2x$ (ii) $3x^2 + 4x^3$ (iii) $\frac{1}{x}, x \neq 0$

حل: (i) ہم ایک ایسا تفاعل تلاش کرتے ہیں جس کا مشتق $\cos 2x$ ہے۔ یاد کیجیے کہ

$$\frac{d}{dx}\sin 2x = 2\cos 2x$$

یا اس لیے، $\cos 2x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$ ، $\cos 2n$ کا $\frac{1}{2}\sin 2n$ ایک ضد مشتق ہے۔

(ii) ہم ایک ایسا تفاعل تلاش کرتے ہیں جس کا مشتق $3x^2 + 4x^3$ ہے۔ نوٹ کیجیے کہ

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3$$

اس لیے، $3x^2 + 4x^3$ کا ضد مشتق $x^3 + x^4$ ہے۔

(iii) ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{d}{dx}[\log(-x)] = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, x < 0 \text{ اور } \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

مندرجہ بالا کو ایک ساتھ ملانے پر، ہمیں $\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ حاصل ہوتا ہے

اس لیے، $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$ ، $\frac{1}{x}$ کا ایک ضد مشتق ہے۔

مثال 2: ذیل تکملہ دریافت کیجیے:

(i) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx$ (ii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\, dx$ (iii) $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x})\, dx$

حل: (i) ہمارے پاس ہے

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = \int x\, dx - \int x^{-2} dx \text{ (خصوصیت v سے)}$$

$$= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1\right) - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_2\right) \text{ ؛ تکمل کے مستقل ہیں}$$

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{x^{-1}}{-1} - C_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C_1 - C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$$ ، جہاں $C = C_1 - C_2$ ایک دوسرا تکمل کے مستقلے ہیں۔

> **نوٹ** اب یہاں سے آگے، ہم آخری جواب میں صرف ایک ہی تکمل کے مستقلہ کا استعمال کریں گے۔

(ii) ہمارے پاس ہے

$$\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\, dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + x + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + x + C$$

(iii) ہمارے پاس ہے $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x})\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int 2e^x\, dx - \int \frac{1}{x} dx$

© NCERT not to be republished

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2e^x - \log|x| + C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2e^x - \log|x| + C$$

مثال 3: ذیل تکملہ دریافت کیجیے:

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx$

(iii) $\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx$

حل:

(i) ہمارے پاس ہے

$$\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + C$$

(ii) ہمارے پاس ہے

$$\int (\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$$

$$= -\cot x - \operatorname{cosec} x + C$$

(iii) ہمارے پاس ہے

$$\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

مثال 4: f کا ضد مشتق F معلوم کیجیے جو کہ $f(x) = 4x^3 - 6$ سے بیان کیا گیا ہے، جہاں $F(0)=3$ ہے

حل: $f(x)$ کا ایک ضد مشتق $x^4 - 6x$ ہے، چوں کہ

$$\frac{d}{dx}(x^4 - 6x) = 4x^3 - 6$$

© NCERT not to be republished

اس لیے، F کا ضد مشتق اس سے دیا گیا ہے

$F(x) = x^4 - 6x + C$، جہاں C مستقلہ ہے

دیا ہوا ہے $F(0) = 3$، جو دیتا ہے

$3 = 0 - 6 \times 0 + C$ یا $C = 3$

اس لیے، مطلوب ضد مشتق اکیلا تفاعل F ہے جو اس طرح بیان کیا گیا ہے

$F(x) = x^4 - 6x + 3$

ریمارک (Remarks)

(i) ہم دیکھتے ہیں کہ اگر F، f کا ضد مشتق ہے، تب F+C بھی اسی طرح ہے، جہاں C مستقلہ ہے۔ اس لیے، اگر ہم تفاعل f کا ایک مشتق F جانتے ہیں، ہم f کے لا تعداد ضد مشتق F کے ساتھ کوئی بھی مستقلہ جمع کرنے پر لکھ سکتے ہیں اور جسے $F(x)+C, C \in \mathbf{R}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ استعمال میں، یہ بہت بار ممکن ہے کہ ایک اور اضافی شرط کو مطمئن کرتا ہو جو بعد میں C کی ایک مخصوص قدر معلوم کرے اور فنکشن کا ایک واحد ضد مشتق دے۔

(ii) کبھی کبھی، F بنیادی تفاعل کے رکن میں بیان نہیں کیا جا سکتا جیسے کثیر رکنی، لوگارتمی، قوت نمائی، ٹرگنومیٹریائی تفاعلات اور ان کے معکوس وغیرہ۔ اس لیے ہم $\int f(x)\, dx$ معلوم کرنے سے رک جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر صرف معائنہ کر کے $\int e^{-x^2} dx$ دریافت کرنا ممکن نہیں ہے کیونکہ ہم وہ تفاعل نہیں معلوم کر سکتے جس کا مشتق e^{-x^2} ہے۔

(iii) ایک تکمل کا متغیر x کے علاوہ کسی اور متغیر سے ظاہر کیا جاتا ہے، تکملہ فارمولے میں بھی اسی کے حساب سے ردو بدل کی جاتی۔ مثال کے طور پر

$$\int y^4\, dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5} y^5 + C$$

7.2.3 تفرق اور تکمل کے درمیان موازنہ (Comparison between differentiation and integration)

1۔ دونوں تفاعلات پُر عمل ہیں۔

© NCERT not to be republished

2۔ دونوں خطی خصوصیت کو مطمئن کرتے ہیں یعنی:

(i) $\frac{d}{dx}\left[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\right]=k_1\frac{d}{dx}f_1(x)+k_2\frac{d}{dx}f_2(x)$

(ii) $\int\left[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\right]dx=k_1\int f_1(x)\,dx+k_2\int f_2(x)\,dx$

یہاں k_1 اور k_2 مستقلہ ہیں۔

3۔ ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ سارے تفاعلات تفرق پذیر نہیں ہوتے ہیں۔ اسی طرح، تمام فنکشن تکمل پذیر نہیں ہوتے۔ ہم غیر تفرق پذیر اور غیر تکمل پذیر فنکشن کا مطالعہ اعلیٰ جماعتوں میں کریں گے۔

4۔ ایک تفاعل کا مشتق اگر موجود ہے تو وہ ایک واحد تفاعل ہے۔ ایک تفاعل کا تکمل اس طرح نہیں ہے۔ حالانکہ ایک جمعی مستقلہ تک واحد ہوتے ہیں یعنی ایک تفاعل کے کن ہی دو تکملوں میں ایک مستقلہ کا فرق ہوتا ہے۔

5۔ جب کثیر رکنی تفاعل P کی تفریق کی جاتی ہے تو نتیجہ ایک کثیر رکنی ہوتا ہے جس کی ڈگری (درجہ) P کے درجہ سے '1' کم ہوتا ہے۔ جب ایک کثیر رکنی تفاعل 'P' کا تکمیل کی جاتی ہے۔ نتیجہ ایک کثیر رکنی ہوتا ہے جس کا درجہ 'P' سے '1' زیادہ ہوتا ہے۔

6۔ ہم مشتق کی بات ایک نقطہ پر کرسکتے ہیں، ہم تکمیل کی بات ایک نقطہ پر نہیں کرسکتے، ہم ایک تفاعل کے تکملہ کا ذکر ایک وقفہ میں کرسکتے ہیں جس پر تکملہ بیان کیا گیا ہے جیسا کہ سیکشن 7.7 میں دیکھا جاسکتا ہے۔

7۔ ایک تفاعل کے مشتق کا جیومیٹریائی مطلب ہے، ایک مماس کا سلوپ اس کے مطابق منحنی کے ایک نقطہ پر۔ اسی طرح، ایک فنکشن کا تکملہ جیومیٹریائی طریقہ سے دکھایا گیا ہے، ایک منحنی کی فیملی جو کہ ایک دوسرے کے متوازی رکھی گئی ہے اور جس کے مماس منحنی کے خاندان کے نقطے، تقاطع پر متوازی ہیں، عمودی خطوط کے ساتھ خود محور پر اور جو کہ تکمیل کے متغیر کو ظاہر کرتی ہے۔

8۔ کچھ طبعی مقداروں کو دریافت کرنے کے لیے مشتق کا استعمال کیا جاتا ہے، مثال کے طور پر ایک حرکت کرتے ہوئے ذرے کی رفتار، جب کہ 't' وقفہ میں طے کیا گیا فاصلہ معلوم ہے، اسی طرح، تکملہ کا استعمال 't' وقفہ میں طے کیے گئے فاصلہ کو معلوم کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔

9۔ تفرق ایک عمل ہے جس میں حدود (limit) شامل ہیں۔ اسی طرح تکمیل ہے، جو کہ سیکشن 7.7 میں دیکھا جائے گا۔

10۔ تفرق اور تکمل کے عمل ایک دوسرے کے برعکس ہیں جیسا کہ سیکشن (i)7.2.2 میں بحث کی گئی ہے۔

© NCERT not to be republished

مشق 7.1

معائنہ کے طریقے کی مدد سے ذیل تفاعل کے ضد مشتق (یا تکملہ) دریافت کیجیے:

1. $\sin 2x$ **2.** $\cos 3x$ **3.** e^{2x}

4. $(ax+b)^2$ **5.** $\sin 2x - 4e^{3x}$

مشق 6 تا 20 کے تکملہ دریافت کیجیے:

6. $\int (4e^{3x}+1)\,dx$ **7.** $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$ **8.** $\int (ax^2+bx+c)\,dx$

9. $\int (2x^2+e^x)\,dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$

12. $\int \frac{x^3+3x+4}{\sqrt{x}}\,dx$ **13.** $\int \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}\,dx$ **14.** $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$

15. $\int \sqrt{x}(3x^2+2x+3)\,dx$ **16.** $\int (2x-3\cos x+e^x)\,dx$

17. $\int (2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})\,dx$ **18.** $\int \sec x(\sec x+\tan x)\,dx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}\,dx$ **20.** $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

مشق 21 اور 22 میں صحیح جواب کا انتخاب کیجیے:

21۔ $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ کا ضد مشتق برابر ہے

(A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x^2+C$

(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

22۔ اگر $\frac{d}{dx}f(x)=4x^3-\frac{3}{x^4}$ ہے تاکہ $f(2)=0$ ۔ تب $f(x)$

(A) $x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$ (B) $x^3+\frac{1}{x^4}+\frac{129}{8}$

© NCERT not to be republished

(C) $x^4+\frac{1}{x^3}+\frac{129}{8}$ (D) $x^3+\frac{1}{x^4}-\frac{129}{8}$

7.3 تکمل کے طریقے (Methods of Integration)

پچھلے سیکشن میں ہم نے ان تفاعلات پر بحث کی ہے جو کہ کچھ تفاعلات کے مشتق سے فوراً حاصل ہوتے ہیں یہ معائنہ پر مبنی تھا، یعنی اس فنکشن F کی تلاش میں جس کا مشتق f ہے اور جو کہ ہمیں تکملہ f کی طرف لے جاتا ہے۔ حالانکہ یہ طریقہ، جو کہ معائنہ پر مبنی ہے، بہت سے فنکشن کے لیے بہت موزوں نہیں ہے۔ اس لیے ہمیں اور بہت سے طریقوں کی ضرورت ہے۔ تکملہ کو دریافت کرنے کے لیے اسے معیاری شکل میں رکھ کر، ان میں سے جو خاص طریقہ یا تکنیک ہیں وہ ان پر مبنی ہیں:

1۔ بدل کے ذریعہ تکمل (Integration by Substitution)

2۔ جزوی کسروں کا استعمال کر کے تکمل (Integration using Partial Fractions)

3۔ بالحصص کے ذریعہ تکمل (Integration by Parts)

7.3.1 بدل کے ذریعہ تکمل (Integration by substitution)

اس سیکشن میں، بدل مقام کے ذریعہ تکمل کے طریقے پر غور کرتے ہیں۔

دیے ہوئے تکملہ $\int f(x)\,dx$ کو غیر معین متغیر x کو $x=g(t)$ t تبدیل کر کے دوسری شکل میں بدل سکتے ہیں۔

غور کیجیے $\qquad I=\int f(x)\,dx$

رکھیے $x=g(t)$ تا کہ $\frac{dx}{dt}=g'(t)$ ہو سکے

ہم لکھتے ہیں $\qquad dx=g'(t)\,dt$

اس طرح $\qquad I=\int f(x)\,dx=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt$

متغیر کو بدلنے والا یہ فارمولہ ہمارے پاس ایک اہم اوزار ہے، بدل کے ذریعے تکمل کے نام سے یہ عام طور پر اس وقت اور بھی خاص ہو جاتا ہے جہاں ہمیں یہ اندازہ (قیاس آرائی) ہے کہ بدل سے کیا فائدہ ہوگا۔ عام طور پر ہم ایک تفاعل کے لیے ایک بدل کرتے ہیں جس کا مشتق بھی تکمل کی شکل برآمد ہے جیسا کہ مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے بیان کیا گیا ہے۔

© NCERT not to be republished

مثال 5: x کی وضاحت درج ذیل تفاعل کا تکمل کیجیے۔

(i) $\sin mx$ (ii) $2x\sin(x^2+1)$

(iii) $\dfrac{\tan^4\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (iv) $\dfrac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}$

حل: ہم جانتے ہیں کہ mx کا مشتق m ہے۔ اس لیے ہم $mx=t$ رکھتے ہیں تا کہ $mdx=dt$

اس لیے $\displaystyle\int\sin mx\,dx=\frac{1}{m}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{m}\cos t+C=-\frac{1}{m}\cos mx+C$

(ii) x^2+1 کا مشتق $2x$ ہے۔ اس لیے، ہم $x^2+1=t$ بدل کا استعمال کرتے ہیں تا کہ $2x\,dx=dt$ ہو۔

اس لیے، $\displaystyle\int 2x\sin(x^2+1)\,dx=\int\sin t\,dt=-\cos t+C=-\cos(x^2+1)+C$

(iii) $\sqrt{x}$ کا مشتق $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ہے۔ اس طرح، ہم $\sqrt{x}=t$ بدل کا استعمال کرتے ہیں تا کہ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$ ہو جو

کہ دیتا ہے $dx=2t\,dt$

اس طرح $\displaystyle\int\frac{\tan^4\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{2t\tan^4t\sec^2t\,dt}{t}=2\int\tan^4t\sec^2t\,dt$

دوبارہ، ہم $\tan t=u$ رکھتے ہیں تا کہ $\sec^2t\,dt=du$ ہو سکے

اس لیے، $\displaystyle 2\int\tan^4t\sec^2t\,dt=2\int u^4\,du=2\frac{u^5}{5}+C$

$=\dfrac{2}{5}\tan^5t+C$ (کیونکہ $u=\tan t$ ہے)

$=\dfrac{2}{5}\tan^5\sqrt{x}+C$ (کیونکہ $t=\sqrt{x}$ ہے)

اس لیے، $\displaystyle\int\frac{\tan^4\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{5}\tan^5\sqrt{x}+C$

متبادل کے طور پر، $\tan\sqrt{x}=t$ رکھیے

(iv) $\tan^{-1}x=\dfrac{1}{1+x^2}$ کا مشتق ہے۔ اس لیے، ہم

$\tan^{-1}x=t$ رکھتے ہیں تا کہ $\dfrac{dx}{1+x^2}=dt$

© NCERT not to be republished

اس لیے، $\int \frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}\,dx = \int \sin t\, dt = -\cos t + C = -\cos(\tan^{-1}x) + C$

اب بدل کے ذریعے طریقہ کا استعمال کر کے کچھ تکملوں پر بحث کرتے ہیں جس میں ٹرگنومیٹریائی تفاعلات اوران کے معیاری تکملے شامل ہیں۔ یہ بعد میں بغیر حوالہ کے استعمال کیے جائیں گے۔

(i) $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$

ہمارے پاس ہے

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$\cos x = t$ رکھیے تاکہ $\sin x\, dx = -dt$

تب $$\int \tan x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C$$

یا $$\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$$

(ii) $\int \cot x\, dx = \log|\sin x| + C$

ہمارے پاس ہے $$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$\sin x = t$ رکھیے تاکہ $\cos x\, dx = dt$

تب $$\int \cot x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\sin x| + C$$

(iii) $\int \sec x\, dx = \log|\sec x + \tan x| + C$

ہمارے پاس ہے

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$\sec x + \tan x = t$ رکھیے تاکہ $\sec x(\tan x + \sec x)\, dx = dt$

اس لیے، $$\int \sec x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\sec x + \tan x| + C$$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

© NCERT not to be republished

ہمارے پاس ہے $$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)} dx$$

رکھیے cosec x+cot x=t تاکہ $-\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x) \, dx = dt$

اس لیے $$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log |t| = -\log |\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$= -\log \left| \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} \right| + C$$

$$= \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

مثال 6: ذیل تکملے معلوم کیجیے:

(i) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin (x + a)} dx$ (iii) $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$

حل:

(i) ہمارے پاس ہے

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x (\sin x) \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x (\sin x) \, dx$$

رکھیے t = cos x تاکہ $dt = -\sin x \, dx$

اس لیے $$\int \sin^2 x \cos^2 x (\sin x) \, dx = -\int (1 - t^2) t^2 \, dt$$

$$= -\int (t^2 - t^4) \, dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

(ii) رکھیے $x + a = t$۔ تب $dx = dt$ اس لیے

$$\int \frac{\sin x}{\sin (x + a)} dx = \int \frac{\sin (t - a)}{\sin t} dt$$

$$= \int \frac{\sin t \cos a - \cos t \sin a}{\sin t} dt$$

$$= \cos a \int dt - \sin a \int \cot t \, dt$$

$$= (\cos a)\, t - (\sin a) \left[\log |\sin t| + C_1 \right]$$

$$= (\cos a)\,(x+a) - (\sin a) \left[\log |\sin (x+a)| + C_1 \right]$$

$$= x \cos a + a \cos a - (\sin a) \log |\sin (x+a)| - C_1 \sin a$$

اس لیے، $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)}\, dx = x \cos a - \sin a \log |\sin (x+a)| + C$

جہاں، $C = -C_1 \sin a + a \cos a$ ، ایک دوسرا اختیاری مستقلہ ہے۔

(iii) $$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x + \sin x + \cos x - \sin x)\, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx \qquad \ldots\ldots(1)$$

اب $I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$ پر غور کیجیے

$\cos x + \sin x = t$ رکھیے تاکہ $(\cos x - \sin x)\, dx = dt$

اس لیے $I = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C_2 = \log |\cos x + \sin x| + C_2$

اسے (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2} \log |\cos x + \sin x| + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log |\cos x + \sin x| + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}$$

© NCERT not to be republished

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log\left|\cos x + \sin x\right| + C, \left(C = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$$

مشق 7.2

مشق 1 تا 37 میں فنکشن کا تکمل کیجیے۔

1. $\frac{2x}{1+x^2}$
2. $\frac{(\log x)^2}{x}$
3. $\frac{1}{x + x\log x}$
4. $\sin x \sin(\cos x)$
5. $\sin(ax+b)\cos(ax+b)$
6. $\sqrt{ax+b}$
7. $x\sqrt{x+2}$
8. $x\sqrt{1+2x^2}$
9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$
10. $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$
11. $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x > 0$
12. $(x^3-1)^{\frac{1}{3}} x^5$
13. $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$
14. $\frac{1}{x(\log x)^m}, x > 0$
15. $\frac{x}{9-4x^2}$
16. e^{2x+3}
17. $\frac{x}{e^{x^2}}$
18. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$
19. $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
20. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$
21. $\tan^2(2x-3)$
22. $\sec^2(7-4x)$
23. $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$
24. $\frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}$
25. $\frac{1}{\cos^2 x(1-\tan x)^2}$
26. $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$
28. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$
29. $\cot x \log \sin x$
30. $\frac{\sin x}{1+\cos x}$
31. $\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$
32. $\frac{1}{1+\cot x}$
33. $\frac{1}{1-\tan x}$
34. $\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$
35. $\frac{(1+\log x)^2}{x}$

© NCERT not to be republished

36. $\dfrac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$ **37.** $\dfrac{x^3\sin\left(\tan^{-1}x^4\right)}{1+x^8}$

38 اور 39 سوالوں میں صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

38۔ $\int \dfrac{10x^9+10^x \log_{e^{10}} dx}{x^{10}+10^x}$ برابر ہے

(A) $10^x - x^{10} + C$ (B) $10^x + x^{10} + C$

(C) $(10^x - x^{10})^{-1} + C$ (D) $\log(10^x + x^{10}) + C$

39۔ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ برابر ہے

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x - \cot x + C$

(C) $\tan x \cot x + C$ (D) $\tan x - \cot 2x + C$

7.3.2 ٹرگنومیٹریائی اکائیوں کا استعمال کرکے تکمل کرنا (Integration using trigonometric identities)

جب تکملہ میں کچھ ٹرگنومیٹریائی تفاعل ملوث ہوتے ہیں، تکملہ دریافت کرنے کے لیے ہم کچھ جانی پہچانی اکائیوں کا استعمال کرتے ہیں جیسا کہ ذیل کی مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے۔

مثال 7: معلوم کیجیے (i) $\int \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$ (iii) $\int \sin^3 x\, dx$

حل: (i) متماثل $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ کو یاد کیجیے، جو دیتی ہے

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

اس لیے، $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) متماثل $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ کو یاد کیجیے (کیوں؟)

تب $\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx \int \sin x\, dx\right]$

© NCERT not to be republished

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right] + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

(iii) تماثلہ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

اس لیے،

$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

متبادل کے طور پر، $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$

$\cos x = t$ رکھیے تا کہ $-\sin x\, dx = dt$ ہو

اس لیے

$$\int \sin^3 x\, dx = -\int (1-t^2)\, dt = -\int dt + \int t^2\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

ریمارک (Remark) ٹرگنومیٹریائی اکائیوں کا استعمال کر کے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ دونوں جوابات برابر ہیں۔

مشق 7.3

مشق 1 سے 22 میں تفاعلات کے تکملے دریافت کیجیے:

1. $\sin^2(2x+5)$ **2.** $\sin 3x \cos 4x$ **3.** $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$

4. $\sin^3(2x+1)$ **5.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **6.** $\sin x \sin 2x \sin 3x$

7. $\sin 4x \sin 8x$ **8.** $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **9.** $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

10. $\sin^4 x$ **11.** $\cos^4 2x$ **12.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

© NCERT not to be republished

13. $\dfrac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}$
14. $\dfrac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x}$
15. $\tan^3 2x \sec 2x$
16. $\tan^4 x$
17. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$
18. $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$
19. $\dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$
20. $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}$
21. $\sin^{-1}(\cos x)$
22. $\dfrac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

سوال 23 اور 24 میں صحیح جواب کا انتخاب کیجیے

23۔ $\int \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ برابر ہے

(A) $\tan x + \cot x + C$
(B) $\tan x + \operatorname{cosec} x + C$
(C) $-\tan x + \cot x + C$
(D) $\tan x + \sec x + C$

24۔ $\int \dfrac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)} dx$ برابر ہے

(A) $-\cot(ex^x) + C$
(B) $\tan(xe^x) + C$
(C) $\tan(e^x) + C$
(D) $\cot(e^x) + C$

7.4 کچھ مخصوص تفاعلات کے تکملے (Integrals of Some Particular Functions)

اس سیکشن میں ہم نیچے تکملوں کے کچھ ضروری فارمولے بتائیں گے اور انھیں بہت سے دوسرے تعلق رکھنے والے معیاری تکملوں پر تکمل معلوم کرنے کے لیے استعمال کریں گے۔

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

© NCERT not to be republished

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

اب ہم مندرجہ بالا نتائج کو ثابت کریں گے:

(1) ہمارے پاس ہے $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

اس لیے $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|(x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

(2) مندرجہ بالا (1) کے حوالے سے، ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

اس لیے، $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[-\log|a-x| + \log|a+x|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

نوٹ (1) میں استعمال کی گئی تکنیک کی سیکشن 7.5 میں وضاحت کی جائے گی۔

(3) $x = a \tan \theta$ رکھیے۔ تب $dx = a \sec^2\theta \, d\theta$.

© NCERT not to be republished

اس لیے، $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{a\sec^2\theta\,d\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}$

$$=\frac{1}{a}\int d\theta=\frac{1}{a}\theta+C=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$$

(4) مان لیجیے $x=a\sec\theta$ ہے۔ تب $dx=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

اس لیے، $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}}$

$$=\int\sec\theta\,d\theta=\log\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+C_1$$

$$=\log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right|+C_1$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\log|a|+C_1$$

$=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$ ، جہاں $C=C_1-\log|a|$

(5) مان لیجیے $x=a\sin\theta$ ہے۔ تب $dx=a\cos\theta\,d\theta$ ہے۔

اس لیے، $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}$

$$=\int d\theta=\theta+C=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$$

(6) مان لیجیے $x=a\tan\theta$ ہے۔ تب $dx=a\sec^2\theta\,d\theta$

اس لیے، $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}}$

$$=\int\sec\theta\,d\theta=\log\left|(\sec\theta+\tan\theta)\right|+C_1$$

$$=\log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+C_1$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log|a|+C_1$$

© NCERT not to be republished

$$= \log \left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$ ، جہاں $C = C_1 - \log|a|$

ان بنیادی فارمولوں کو استعمال کر کے، اب ہم کچھ اور فارمولے حاصل کرتے ہیں جو کہ استعمال کے نقطۂ نظر سے بہت مفید ہیں اور انھیں تکملوں کو دریافت کرنے میں براہ راست استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(7) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے، ہم لکھتے ہیں

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

اب $x+\frac{b}{2a}=t$ رکھیے تاکہ $dx=dt$ ہو اور $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$ لکھنے پر، ہم دیکھتے ہیں کہ تکملہ $\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$ صورت میں چھوٹا ہو گیا ہے جو کہ $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ کے نشان پر مبنی ہے اور اس لیے اسے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ کی قسم کا تکملہ دریافت کرنے کے لیے، ایسا ہی کیجیے جیسا کہ (7) میں کیا گیا ہے، ہمیں بنیادی تکملہ فارمولے استعمال کر کے حاصل ہوتا ہے۔

(9) $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$ ، جہاں p, q, a, b, c مستقلہ ہیں، کسی قسم کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں حقیقی اعداد A اور B معلوم کرتے ہیں تاکہ

$$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B = A(2ax+b)+B$$

A اور B معلوم کرنے کے لیے ہم دونوں طرف x کے ضریب اور مستقل ارکان کی برابری کرتے ہیں۔ اس طرح A اور B معلوم ہو جاتے ہیں اور ایسے تکملہ ایک جانی پہچانی صورت میں چھوٹا ہو جاتا ہے۔

(10) $\int\frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ کی قسم کے تکملہ کی تحسیب کرنے کے لیے ہم (9) کی طرح آگے بڑھتے ہیں اور پھر تکملہ کو اس بنیادی صورت میں لکھتے ہیں۔

ہم مندرجہ بالا طریقوں کو کچھ مثالوں کے ذریعے سمجھاتے ہیں۔

مثال 8: درج ذیل تکملے دریافت کیجیے:

© NCERT not to be republished

(i) $\int \frac{dx}{x^2-16}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

حل: ہمارے پاس ہے

(i) $\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$ [7.4(1) سے]

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ (ii)

$x-1=t$ رکھیے۔ تب $dx=dt$

اس لیے، $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1}(t) + C$ [7.4(5) سے]

$= \sin^{-1}(x-1) + C$

مثال 9: درج ذیل تکملے دریافت کیجیے:

(i) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ (ii) $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}$

حل: (i) ہمارے پاس ہے

$$x^2-6x+13 = x^2-6x+3^2-3^2+13 = (x-3)^2+4$$

اس طرح $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{1}{(x-3)^2+2^2}\,dx$

مان لیجیے $x-3=t$ تب $dx=dt$

اس لیے، $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + C$ [7.4 (3) سے]

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C$

(ii) درج تکملہ 7.4(7) کی صورت کا ہے۔ ہم تکمل کا نسب نماں اس طرح لکھتے ہیں،

$$3x^2+13x-10 = 3\left(x^2+\frac{13x}{3}-\frac{10}{3}\right)$$

© NCERT not to be republished

$$= 3\left[\left(x+\frac{13}{6}\right)^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2\right]$$ (مربع مکمل کرنے پر)

اس طرح $$\int\frac{dx}{3x^2+13x-10}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{13}{6}\right)^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$x+\frac{13}{6}=t$ رکھیے۔ تب $dx=dt$

اس لیے، $$\int\frac{dx}{3x^2+13x-10}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2-\left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3\times2\times\frac{17}{6}}\log\left|\frac{t-\frac{17}{6}}{t+\frac{17}{6}}\right|+C_1$$ [7.4(i) سے]

$$=\frac{1}{17}\log\left|\frac{x+\frac{13}{6}-\frac{17}{6}}{x+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{17}\log\left|\frac{6x-4}{6x+30}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right|+C_1+\frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right|+C$$ ، جہاں $C=C_1+\frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$ ہے

(iii) ہمارے پاس ہے $$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2x}{5}\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$ (مربع مکمل کرنے پر)

$x-\frac{1}{5}=t$ رکھیے۔ تب $dx=dt$

© NCERT not to be republished

اس لیے
$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| t + \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \right| + C \; [7.4(4)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2x}{5}} \right| + C$$

مثال 10: درج ذیل تکملے دریافت کیجیے

(i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}} dx$

حل:

(i) 7.4(9) فارمولے کا استعمال کرکے، ہم یوں ظاہر کریں گے

$$x+2 = A\frac{d}{dx}\left(2x^2+6x+5\right)+B = A\,(4x+6)+B$$

دونوں طرف سے x کے ضریب اور مستقل ارکان کو برابر رکھنے پر، ہمارے پاس ہے

$4A = 1$ اور $6A + B = 2$ یا $A = \frac{1}{4}$ اور $B = \frac{1}{2}$

اس لیے،
$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$$= \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{2} I_2 \text{ (مان لیجیے)} \qquad ...(1)$$

میں $2x^2+6x+5=t$ رکھیے، تاکہ $(4x+6)\,dx = dt$

اس لیے،
$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_1$$

$$= \log|2x^2+6x+5| + C_1 \qquad ...(2)$$

اور
$$I_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}}$$

© NCERT not to be republished

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$x + \frac{3}{2} = t$ رکھیے، تاکہ $dx = dt$، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \tan^{-1} 2t + C_2 \qquad [\text{7.4(3) سے}]$$

$$= \tan^{-1} 2\left(x + \frac{3}{2}\right) + C_2 = \tan^{-1}(2x + 3) + C_2 \qquad \text{...(3)}$$

(2) اور (3) کا استعمال (1) میں کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{x + 2}{2x^2 + 6x + 5}\, dx = \frac{1}{4} \log\left|2x^2 + 6x + 5\right| + \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x + 3) + C$$

جہاں، $C = \frac{C_1}{4} + \frac{C_2}{2}$ ہے

(ii) یہ تکملہ 7.4(10) میں دی گئی صورت میں ہم اسے اس طرح ظاہر کرتے ہیں

$$x + 3 = A \frac{d}{dx}(5 - 4x - x^2) + B = A(-4 - 2x) + B$$

دونوں طرف x کے ضریب اور مستقل ارکان کو برابر رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں

$-2A = 1$ اور $-4A + B = 3$، یعنی $A = -\frac{1}{2}$ اور $B = 1$

اس لیے،
$$\int \frac{x + 3}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}\, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-4 - 2x)\, dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} I_1 + I_2 \qquad \text{...(1)}$$

I_1 میں $5 - 4x - x^2 = t$ رکھیے، تاکہ $(-4 - 2x)\, dx = dt$

اس لیے،
$$I_1 = \int \frac{(-4 - 2x)\, dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad 2\sqrt{t} + C_1$$

$$= 2\sqrt{5 - 4x - x^2} + C_1 \qquad \text{...(2)}$$

© NCERT not to be republished

اب غور کیجیے $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$

$x + 2 = t$ رکھیے، تاکہ $dx = dt$

اس لیے، $I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \sin^{-1}\frac{t}{3} + C_2$ [7.4(5) سے]

$$= \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C_2 \quad ...(3)$$

(2) اور (3) کو (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\sqrt{5-4x-x^2} + \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C$$، جہاں، $C = C_2 - \frac{C_1}{2}$

مشق 7.4

مشق 1 سے 23 کے تفاعلات کے تکملے کیجیے

1. $\frac{3x^2}{x^6+1}$
2. $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$
3. $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$
4. $\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$
5. $\frac{3x}{1+2x^4}$
6. $\frac{x^2}{1-x^6}$
7. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$
8. $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$
9. $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$
10. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$
11. $\frac{1}{9x^2+6x+5}$
12. $\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$
13. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$
14. $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$
15. $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$
16. $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$
17. $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$
18. $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$
19. $\frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$
20. $\frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$
21. $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$
22. $\frac{x+3}{x^2-2x-5}$
23. $\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

© NCERT not to be republished

مشق 24 اور 25 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے:

24۔ $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ برابر ہے

(A) $x\tan^{-1}(x+1)+C$ (B) $\tan^{-1}(x+1)+C$

(C) $(x+1)\tan^{-1}x+C$ (D) $\tan^{-1}x+C$

25۔ $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ برابر ہے

(A) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (B) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$

(C) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (D) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{9}\right)+C$

7.5 جزوی کسروں کے ذریعے تکمل (Integration by Partial Fractions)

یاد کیجیے کہ ناطق تفاعل کو دو کثیر رکنیوں کی نسبت کے طور پر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل میں بیان کیا گیا ہے جہاں P (x) اور Q(x)، x میں کثیر رکنیاں ہیں اور $Q(x) \neq 0$۔ اگر P(x) کا درجہ Q(x) کے درجہ سے کم ہے، تب ناطق فنکشن واجب کہلاتا ہے، ورنہ، یہ غیر واجب کہلاتا ہے۔ غیر واجب ناطق فاعل کو واجب ناطق فاعل میں لمبی تقسیم کے عمل سے تحویل کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے، اگر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ غیر واجب ہے، تب $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$، جہاں T (x)، x میں کثیر رکنی ہے اور $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ ایک واجب ناطق تفاعل ہے۔ جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ کثیر رکنی کا کس طرح تکمل کرتے ہیں، کسی بھی ناطق تفاعل کا تکمل ایک واجب ناطق تفاعل کے تکمل میں تحویل ہو جاتا ہے۔ وہ ناطق تفاعل جن کا ہم تکمل کے لیے غور کریں گے، وہ ہوں گے جن کے نسب نما کو خطی اور دو رکنی اجزائے ضربی میں توڑا جا سکے۔ مان لیجیے کہ ہم $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ کی قدر کا اندازہ لگانا چاہتے ہیں جہاں $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ایک واجب ناطق تفاعل ہے۔ یہ ہمیشہ ممکن ہے تکمل کو آسان ناطق تفاعلات کے حاصل جمع کے طور پر ایک طریقہ سے لکھنا جسے جزوی کسروں میں تحلیل کہتے ہیں ہمیشہ ممکن ہے۔ اس کے بعد تکمل کرنا پہلے سے جانے ہوئے طریقوں کے ذریعے آسان ہو جاتا ہے۔ ذیل جدول 7.2 میں آسان جزوی کسروں کی قسم کو ظاہر کیا گیا ہے جو کہ ناطق کسروں کی مختلف قسموں کے ساتھ جڑی ہوئی ہیں۔

© NCERT not to be republished

جدول 7.2

شمار نمبر	ناطق تفاعل سے	جزوی کسر سے
1	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$
2	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$	$\frac{px+q}{(x-a)^2}$
3	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
4	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}$	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$
5	$\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$ جہاں x^2+bx+c کے مزید اجزائے ضربی نہیں ہو سکتے۔	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$

مندرجہ بالا جدول میں، B، A اور C میں حقیقی اعداد ہیں جنھیں موزوں انداز میں دریافت کرنا ہے۔

مثال 11 $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ دریافت کیجیے

حل تکمل ایک واجب ناطق تفاعل ہے۔ اس لیے [جدول (i) 7.2] میں دی ہو جزوی کسر کی صورت استعمال کر کے ہم لکھتے ہیں

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} \qquad \ldots(1)$$

جہاں حقیقی اعداد A اور B موزوں انداز میں معلوم کرنے ہیں۔ یہ دیتا ہے

$1 = A(x+2) + Bx(+1)$

x کے ضریب اور مستقل رکن کو برابر کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$A+B=0$$

© NCERT not to be republished

اور $2A+B=1$

ان مساوات کو حل کرنے پر، ہمیں $A=1$ اور $B=-1$ حاصل ہوتا ہے

اس طرح، تکمل اس سے دیا گیا ہے

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x+2}$$

اس لیے،
$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log |x+1| - \log |x+2| + C$$

$$= \log \left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

ریمارک (Remark) اوپر مساوات (1) ایک اکائی ہے، یعنی یہ بیان x کی تمام (ممکن) قدروں کے لیے درست ہے۔ کچھ مصنف '≡' علامت کا استعمال یہ دکھانے کے لیے کرتے ہیں کہ یہ بیان ایک اکائی ہے اور علامت '=' کا استعمال یہ دکھانے کے لیے کرتے ہیں کہ یہ بیان ایک مساوات ہے، یعنی یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ بیان x کی صرف کچھ قدروں کے لیے درست ہے۔

مثال 12: $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\, dx$ دریافت کیجیے

حل: یہاں تکمل $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ ایک مناسب ناطق تفاعل نہیں ہے، اس لیے ہم x^2+1 کو x^2-5x+6 سے تقسیم کرتے ہیں اور دریافت کرتے ہیں

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}$$

مان لیجیے
$$\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

تاکہ
$$5x-5 = A(x-3) + B(x-2)$$

دونوں طرف x کے ضریب اور مستقل ارکان کو برابر رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $A+B=5$ اور $-3A+2B=5$ ان مساواتوں کو حل کرنے پر، ہمیں $A=-5$ اور $B=10$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح،
$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

© NCERT not to be republished

اس لیے، $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 10\int \frac{dx}{x-3}$

$= x - 5\log|x-2| + 10\log|x-3| + C.$

مثال 13: $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}\,dx$ معلوم کیجیے

حل: تکمل جدول 7.2(4) میں د گئے نمونے کی طرح کا ہے۔ہم لکھتے ہیں

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

تا کہ $3x-2 = A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2$

$$= A(x^2+4x+3) + B(x+3) + C(x^2+2x+1)$$

x^2، xاور مستقل ارکان کے ضریب کا دونوں طرف موازنہ کرنے پر، ہمیں $A + C = 0$,$4A + B + 2C = 3$ اور $3A + 3B + C = -2$ حاصل ہوتا ہے۔ ان مساوات کو حل کرنے پر، ہمیں $A = \frac{1}{11}$ ، $B = \frac{-5}{2}$ اور $C = \frac{-11}{4}$ حاصل ہوتا ہے۔اس لیے تکمل اس طرح دیا گیا ہے

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$$

اس لیے، $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3}$

$$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + C$$

$$= \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + C$$

مثال 14: $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ معلوم کیجیے

حل: $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ پر غور کیجیے اور $x^2 = y$ رکھیے

تب $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$

© NCERT not to be republished

لکھیے $\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4}$

تاکہ $y = A(y+4) + B(y+1)$

دونوں طرف y اور مستقل ارکان کے ضریب کا موازنہ کرنے پر، ہمیں A+B=1 اور 4A+B=0 حاصل ہوتا ہے، جو دیتا ہے

$$A = -\frac{1}{3} \text{ اور } B = \frac{4}{3}$$

اس طرح، $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$

اس لیے
$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$
$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$
$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

مندرجہ بالا کی مثال میں، بدل صرف جزوی کسر والے حصہ کے لیے کی گئی ہے نا کہ تکملی حصہ کے لیے۔ اب ہم ایک مثال پر غور کرتے ہیں، جہاں تکمل میں بدل کا طریقہ اور جزوی کسر طریقہ کا اجماع ہے۔

مثال 15: $\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi$ معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $y = \sin\phi$

تب $dy = \cos\phi\, d\phi$

اس لیے،
$$\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{(3y-2)\,dy}{5-(1-y^2)-4y}$$
$$= \int \frac{3y-2}{y^2-4y+4}\,dy$$
$$= \int \frac{3y-2}{(y-2)^2} = I \quad \text{(مان لیجیے)}$$

اب ہم لکھتے ہیں $\frac{3y-2}{(y-2)^2} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{(y-2)^2}$ [جدول 7.2(2) سے]

اس لیے، $3y-2=A(y-2)+B$

y اور مستقل ارکان کے ضریب کا موازنہ کرنے پر، ہمیں A=3 اور B–2A=–2 حاصل ہوتا ہے، جو A=3 اور B=4 دیتا ہے۔

اس لیے، مطلوبہ تکمل اس طرح دیا گیا ہے

$$I=\int\left[\frac{3}{y-2}+\frac{4}{(y-2)^2}\right]dy=3\int\frac{dy}{y-2}+4\int\frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$=3\log|y-2|+4\left(-\frac{1}{y-2}\right)+C$$

$$=3\log|\sin\phi-2|+\frac{4}{2-\sin\phi}+C$$

$$=3\log(2-\sin\phi)+\frac{4}{2-\sin\phi}+C$$ (کیونکہ $2-\sin\phi$ ہمیشہ مثبت ہے)

مثال 16: $\int\frac{x^2+x+1\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$ دریافت کیجیے

حل: تکمل ایک واجب ناطق تفاعل ہے۔ ناطق تفاعل کو جزوی کسر میں تحلیل کیجیے (جدول 2.2(5)]۔ لکھیے

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

اس لیے، $x^2+x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)$

x^2، x اور مستقل ارکان کے ضریبوں کا دونوں طرف موازنہ کرنے پر، ہمیں A+B=1، 2B+C=1 اور A+2C=1 حاصل ہوتا ہے۔ ان مساوات کو حل کرنے پر ہمیں، $A=\frac{3}{5}$، $B=\frac{2}{5}$ اور $C=\frac{1}{5}$ حاصل ہوتا ہے

اس طرح، تکمل اس سے دیا گیا ہے

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{3}{5(x+2)}+\frac{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1}=\frac{3}{5(x+2)}+\frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

اس لیے، $$\int\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx=\frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{3}{5}\log|x+2|+\frac{1}{5}\log\left|x^2+1\right|+\frac{1}{5}\tan^{-1}x+C$$

© NCERT not to be republished

مشق 7.5

سوال 1 تا 21 میں ناطق تفاعلات کا تکمل کیجیے۔

1. $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$
2. $\frac{1}{x^2-9}$
3. $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
4. $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
5. $\frac{2x}{x^2+3x+2}$
6. $\frac{1-x^2}{x(1-2x)}$
7. $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$
8. $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$
9. $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$
10. $\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$
11. $\frac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$
12. $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$
13. $\frac{2}{(1-x)(1+x^2)}$
14. $\frac{3x-1}{(x+2)^2}$
15. $\frac{1}{x^4-1}$

16۔ $\frac{1}{x(x^n+1)}$ [اشارہ شمار کنندہ اور نسب نما کو x^{n-1} سے ضرب کیجیے اور $x^n = t$ رکھیے

17۔ $\frac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ [اشارہ Sin$x$=t رکھیے]

18. $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$
19. $\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$
20. $\frac{1}{x(x^4-1)}$

21۔ $\frac{1}{(e^x-1)}$ [اشارہ: $e^x = t$ رکھیے]

مشق 22 سے 23 میں ہر ایک کے صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

22۔ $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ برابر ہے

(A) $\log\left|\frac{(x-1)^2}{x-2}\right|+C$ (B) $\log\left|\frac{(x-2)^2}{x-1}\right|+C$

(C) $\log\left|\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2\right|+C$ (D) $\log|(x-1)(x-2)|+C$

23۔ $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ برابر ہے

© NCERT not to be republished

(A) $\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (B) $\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

(C) $-\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (D) $\frac{1}{2}\log|x| + \log(x^2+1) + C$

7.6 بالحصص تکمل (Integration by Parts)

اس سیکشن میں، ہم تکمل کا ایک اور طریقہ بیان کریں گے، جو کہ تفاعلات کی تکملی ضرب میں بہت زیادہ مفید ثابت ہوا ہے۔

اگر u اور v ایک واحد متغیر x (مان لیجیے) کہ دو تفرق پذیر تفاعل ہیں۔ تب تفرق کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

دونوں طرف کا تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

یا

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx \quad \text{(1)...}$$

مان لیجیے $u=f(x)$ اور $\frac{dv}{dx} = g(x)$ ہے۔ تب

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \text{ اور } v = \int g(x)\,dx$$

اس لیے، عبارت (1) اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int [\int g(x)\,dx]\,f'(x)\,dx$$

یعنی،

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int [f'(x)\int g(x)\,dx]\,dx$$

اگر ہم f کو پہلے تفاعل اور g کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں، تب یہ ضابطہ درج ذیل کی طرح بیان کیا جا سکتا ہے:

''دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل = (پہلا تفاعل) × دوسرے تفاعل کا تکمل) تکمل [(پہلے فنکشن کا تفرقی ضریب) × دوسرے فنکشن کا تکمل)]

مثال 17: $\int x\cos x\,dx$ دریافت کیجیے

© NCERT not to be republished

حل: $f(x)=x$ (پہلا تفاعل) رکھیے اور $g(x) = \cos x$ (دوسرا تفاعل) رکھیے

تب، اجزا تکمل بالحصص سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int x \cos x \, dx = x \int \cos x \, dx - \int [\frac{d}{dx}(x) \int \cos x \, dx] \, dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

مان لیجیے، ہم $f(x) = \cos x$ اور $g(x) = x$ لیتے ہیں

تب $\int x \cos x \, dx = \cos x \int x \, dx - \int [\frac{d}{dx}(\cos x) \int x \, dx] \, dx$

$$= (\cos x) \frac{x^2}{2} + \int \sin x \frac{x^2}{2} dx$$

اس طرح، یہ دکھاتا ہے کہ تکمل $\int x \cos x \, dx$ کی تحویل اور زیادہ پیچیدہ تکملے میں ہو جاتی ہے جس میں x کی اور زیادہ طاقت ہے۔ اس لیے، پہلے اور دوسرے فنکشن کا واجب چننا بہت اہم ہے۔

ریمارک (Remark)

(i) یہ ظاہر کرنا بیش قیمتی ہے کہ تکمل بالحصص کرنا تفاعل کے تمام حاصل ضرب کے معاملوں میں ممکن نہیں ہے۔ مثال کے طور پر یہ طریقہ $\int \sqrt{x} \sin x \, dx$ میں کارآمد نہیں ہے۔ اس کی وجہ ہے کہ کوئی تفاعل ایسا موجود نہیں ہے جس کا مشتق $\sqrt{x} \sin x$ ہے۔

(ii) یہ مشاہدہ کیجیے کہ جب ہم دوسرے تفاعل کا تکملہ دریافت کرتے ہیں تو کوئی تکمل کا مستقلہ نہیں لیتے ہیں۔ اگر ہم دوسرے تفاعل $\cos x$ کا تکملہ ایسے لکھیں جو کہ $\sin x + K$ ہے، جہاں K کوئی مستقلہ ہے، تب

$$\int x \cos x \, dx = x(\sin x + k) - \int (\sin x + k) \, dx$$

$$= x(\sin x + k) - \int (\sin x \, dx - \int k \, dx$$

$$= x(\sin x + k) - \cos x - kx + C = x \sin x + \cos x + C$$

یہ، یہ دکھاتا ہے کہ دوسرے تفاعل کے تکملہ میں ایک مستقلہ جوڑنے پر یہ فالتو ہے، جیسا کہ آخری نتیجہ سے متعلق ہے جب کہ تکمل کو کرنے کے لیے اجزا کے طریقے کا استعمال کیا گیا ہے۔

(iii) عام طور پر، اگر کوئی تفاعل x قوت کا ہے یا x میں کثیر رکنی ہے، تب ہم اسے پہلے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں۔ حالانکہ ان معاملوں میں جہاں دوسرے تفاعل معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعل ہے یا لوگارتمی تفاعل ہے، تب ہم انھیں پہلے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں۔

مثال 18: $\int \log x \, dx$ معلوم کیجیے۔

حل: اس کے شروع کرنے میں ہم یہ اندازہ لگانے میں قاصر ہیں جس کا مشتق $\log x$ ہے۔ ہم $\log x$ کو پہلے تفاعل اور مستقل تفاعل '1' کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں۔ تب دوسرے تفاعل کا تکمل x ہے۔

اس طرح، $$\int (\log x . 1)\, dx = \log x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int 1\, dx\right] dx$$

$$= (\log x) \cdot x - \int \frac{1}{x}\, x\, dx = x \log x - x + C$$

مثال 19: $\int x\, e^x\, dx$ معلوم کیجیے

حل: x کو پہلے اور e^x کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیجیے۔ دوسرے تفاعل کا تکملہ e^x ہے۔

اس لیے، $$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx = xe^x - e^x + C$$

مثال 20: $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $\sin^{-1} x$ پہلا تفاعل ہے اور $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ دوسرا تفاعل ہے۔

ہم پہلے دوسرے تفاعل کا تکملہ معلوم کریں گے، یعنی؛ $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ کا

$t = 1 - x^2$ لیجیے۔ تب $dt = -2x\, dx$

اس لیے، $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

اس طرح، $$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = (\sin^{-1} x)\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\, \sin^{-1} x + x + C = x - \sqrt{1-x^2}\, \sin^{-1} x + C$$

© NCERT not to be republished

متبادل کے طور پر، یہ تکملہ قائم مقامی کے طریقہ سے بھی معلوم کیا جا سکتا ہے جہاں $\sin^{-1}x = \theta$ ہے۔ اور پھر تکمل بالحصص کرنے پر۔

مثال 21: $\int e^x \sin x\, dx$ معلوم کیجیے

حل: e^x کو پہلا تفاعل لیجیے اور $\sin x$ کو دوسرا تفاعل۔ تب، تکمل بالحصص کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \int e^x \sin x\, dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + I_1 \text{ (مان لیجیے)} \qquad \ldots(1)$$

e^x اور $\cos x$ کو بالترتیب I_1 میں پہلا اور دوسرا تفاعل لینے پر I_1 ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

I_1 کی قدر (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ یا $2I = e^x (\sin x - \cos x)$

اس طرح، $I = \int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

متبادل کے طور پر، درج بالا تکملہ کو $\sin x$ کو پہلا تفاعل اور e^x کو دوسرا تفاعل لے کر بھی حل کیا جا سکتا ہے۔

7.6.1 $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx$ کی طرح کا تکملہ

ہمارے پاس ہے $I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$

$= I_1 + \int e^x f'(x)\, dx$ ، جہاں $I_1 = \int e^x f(x)\, dx$ ہے $\qquad \ldots(1)$

$f(x)$ اور e^x کو بالترتیب (I) میں پہلا اور دوسرا تفاعل لینے پر اور تکمل بالحصص کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$I_1 = f(x)\, e^x - \int f'(x)\, e^x dx + C$$

I_1 کو (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = e^x f(x) - \int f'(x)\, e^x dx + \int e^x f'(x)\, dx + C = e^x f(x) + C$$

اس طرح، $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x f(x) + C$

© NCERT not to be republished

مثال 22: معلوم کیجیے (i) $\int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx$

حل:

(i) ہمارے پاس ہے $I = \int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$

$f(x) = \tan^{-1} x$ پر غور کیجیے، تب $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ہے

اس طرح، دیا ہوا تکملہ $e^x\, [f(x) + f'(x)]$ کی قسم کا ہے

اس لیے، $I = \int e^x (\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx = \, = e^x \tan^{-1} x + C$

(ii) ہمارے پاس ہے $I = \int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2} dx = \int e^x [\frac{x^2 - 1 + 1 + 1)}{(x+1)^2}]\, dx$

$$= \int e^x [\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx = \int e^x [\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx$$

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ پر غور کیجیے، تب $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

اس طرح، دیا ہوا تکملہ $e^x\, [f(x) + f'(x)]$ کی طرح کا ہے

اس لیے $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x\, dx = \frac{x-1}{x+1} e^x + C$

مشق 7.6

مشق 1 تا 22 میں تفاعلات کا تکملہ کیجیے۔

1. $x \sin x$ **2.** $x \sin 3x$ **3.** $x^2 e^x$ **4.** $x \log x$

5. $x \log 2x$ **6.** $x^2 \log x$ **7.** $x \sin^{-1} x$ **8.** $x \tan^{-1} x$

9. $x \cos^{-1} x$ **10.** $(\sin^{-1} x)^2$ **11.** $\frac{x \cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $x \sec^2 x$

13. $\tan^{-1} x$ **14.** $x (\log x)^2$ **15.** $(x^2+1) \log x$

© NCERT not to be republished

16. $e^x(\sin x+\cos x)$ **17.** $\dfrac{x\,e^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

19. $e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\dfrac{(x-3)\,e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x}\,\sin x$

22. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

سوال 23 اور 24 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

23۔ $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ برابر ہے

(A) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$ (B) $\frac{1}{3}e^{x^2}+C$

(C) $\frac{1}{2}e^{x^3}+C$ (D) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

24۔ $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\,dx$ برابر ہے

(A) $e^x\cos x + C$ (B) $e^x \sec x + C$

(C) $e^x \sin x + C$ (D) ex tan x + C

7.6.2 کچھ اور قسم کے تکملے (Integrals of some more types)

یہاں، ہم کچھ خاص طریقوں کے معیاری تکملوں پر بحث کریں گے۔ جو تکمل بالحصص کی تکنیک پر مبنی ہیں:

(i) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(i) مان لیجیے $I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

مستقل فنکشن 1 کو دوسرا فنکشن لینے پر اور اجزا کے ذریعہ تکمل کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$I = x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,x\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

© NCERT not to be republished

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \text{I} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

یا
$$2\text{I} = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

یا
$$\mathbf{I} = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

اسی طرح، دوسرے دو تکملوں کا اجزا کے ذریعے تکمل کرنے پر، مستقل تفاعل 'I' کو دوسرے تفاعل کے طور پر لینے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

(ii) $$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

(iii) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

متبادل کے طور پر، تکملے (1)، (ii) اور (iii) ٹرگنومیٹریائی تعمل البدل کے ذریعے بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ جیسے $x=a\sec\theta$ کو (i) میں رکھنے پر، $x=a\tan\theta$ کو (ii) میں رکھنے پر اور $x=a\sin\theta$ کو بالترتیب (iii) میں رکھنے پر

مثال 23: $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$ معلوم کیجیے

حل: نوٹ کر لیجیے کہ

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 4}\, dx$$

$x + 1 = y$ رکھیے، تاکہ $dx = dy$ ہو۔ تب

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx = \int \sqrt{y^2 + 2^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} y\sqrt{y^2 + 4} + \frac{4}{2}\log\left| y + \sqrt{y^2 + 4} \right| + C$$ [7.6.2(ii) کا استعمال کرنے پر]

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 2\log\left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + C$$

مثال 24: $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$ معلوم کیجیے

حل: نوٹ کر لیجیے کہ $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - (x+1)^2}\, dx$

$x+1=y$ رکھیے، تاکہ $dx = dy$ ہو

© NCERT not to be republished

اس طرح $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{4-y^2}\,dy$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2} + C$$ (7.6.2(iii) کا استعمال کرنے پر)

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

مشق 7.7

مشتق 1 تا 9 میں تفاعلات کا تکمل معلوم کیجیے۔

1. $\sqrt{4-x^2}$
2. $\sqrt{1-4x^2}$
3. $\sqrt{x^2+4x+6}$
4. $\sqrt{x^2+4x+1}$
5. $\sqrt{1-4x-x^2}$
6. $\sqrt{x^2+4x-5}$
7. $\sqrt{1+3x-x^2}$
8. $\sqrt{x^2+3x}$
9. $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

سوال 10 تا 11 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

10۔ $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ برابر ہے

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right| + C$

(B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(C) $\frac{2}{3}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$

11۔ $\int\sqrt{x^2-8x+7}\,dx$ برابر ہے

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - 3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

© NCERT not to be republished

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-\frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

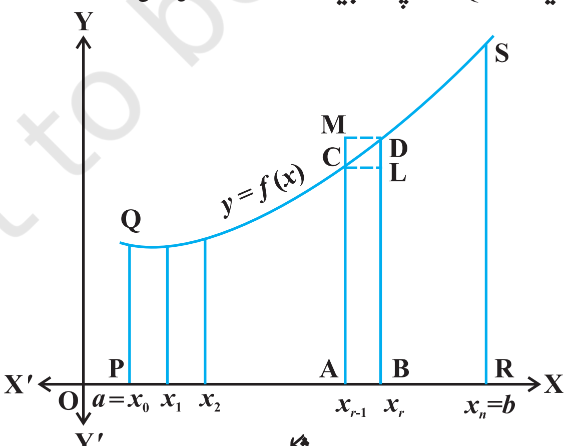
7.7 معین تکملہ (Definite Integral)

پچھلے سیکشن میں ہم نے لامحدود تکملوں کے بارے میں پڑھا ہے اور ان کو معلوم کرنے کے چند طریقوں کے بارے میں بحث کی ہے جس میں کچھ مخصوص تفاعل بھی شامل ہیں۔ اس سیکشن میں ہم معین تکملے کے تفاعل کا مطالعہ کریں گے۔ معین تکملے کی ایک واحد قدر ہوتی ہے۔ ایک معین تکملہ کو $\int_a^b f(x)\,dx$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں a تکملے کی زیریں اور b بالائی ہوتی ہے۔ معین تکملے کا تعارف یا تو انتہا کے مجموعہ کے طور پر کیا جاتا ہے یا یہ ایک مخالف تفرق F وقفہ $[a,b]$ میں رکھتا ہے، تب اس کی قدر F کی قدروں کے انتہائی نقاط پر، یعنی، $F(b) - F(a)$ کے فرق کے درمیان ہے۔ یہاں ہم، ان دونوں حالتوں پر غور کریں گے جیسا کہ ذیل میں بحث کی گئی ہے:

7.7.1 معین تکملہ ایک حاصل جمع کی انتہا کے طور پر (Definite integral as the limit of a sum)

مان لیجیے بند وقفہ (a,b) پر f ایک مسلسل تفاعل ہے۔ یہ مان لیجیے کہ تفاعل کے ذریعہ لی گئی تمام قدریں منفی ہیں، تاکہ تفاعل کا گراف x– محور کے اوپر ایک منحنی ہے۔

معین تکملہ $\int_a^b f(x)\,dx$ منحنی $y=f(x)$ طولی مختص $x=a$، $x=b$ اور x– محور سے گھرے ہوئے علاقہ کا رقبہ ہے۔ اس رقبہ کی قدر کا اندازہ لگانے کے لیے، حلقہ PRSQP پر غور کیجیے جو کہ x– محور اور طولی مختص $x=a$ اور $x=b$ کے درمیان ہے (شکل 7.2)



شکل 7.2

© NCERT not to be republished

وقفہ $[a,b]$ کو n برابر کے ماتحت وقفوں میں بانٹیے جو کہ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{r-1}, x_r], ..., [x_{n-1}, x_n]$ سے ظاہر کیے گئے ہیں اور جہاں $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, ..., x_r = a+rh$ اور $x_n = b = a + nh$ یا $n = \frac{b-a}{h}\cdot$ ہے۔ ہم نوٹ کرتے ہیں کہ جس طرح $n\to\infty$ ویسے ہی $h\to 0$ ہے۔

حلقہ PRSQP جس پر غور کیا جا رہا ہے n ماتحت حلقوں کا حاصل جمع ہے، جہاں ہر ایک ماتحت حلقہ، ماتحت وقفوں $[x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, 2, 3, , n$ پر بیان کیا گیا ہے۔

شکل 7.2 سے ہمارے پاس ہے

(1)... مستطیل (ABDM) کا رقبہ > علاقہ (ABDCA) کا رقبہ > مستطیل (ABCL) کا رقبہ

شدت کے ساتھ جس طرح $x_r - x_{r-1} \to 0$، یعنی $h\to 0$، (1) میں دکھائے گئے تینوں رقبہ تقریباً ایک دوسرے کے برابر ہو جاتے ہیں۔ اب ہم درج ذیل حاصل جمع معلوم کرتے ہیں۔

$$s_n = h\,[\,f(x_0) + ... + f(x_{n-1})] = h\sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) \quad ...(2)$$

اور

$$S_n = h\,[\,f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)] = h\sum_{r=1}^{n} f(x_r) \quad ...(3)$$

یہاں s_n اور S_n بالترتیب ذیلی مستطیلوں اور درج بالا مستطیلوں کے رقبوں کا حاصل جمع ظاہر کرتے ہیں۔ جو کہ ماتحت وقفوں $[x_{r-1}, x_r]$، $r = 1, 2, 3, n$ کے اوپر ہے۔

ایک اختیاری ماتحت وقفہ $[x_{r-1}, x_r]$ کے لیے نامساوات (1) کو مدنظر رکھتے ہوئے ہمارے پاس ہے

$$s_n < \text{حلقہ PRSQP کا رقبہ} < S_n \quad ...(4)$$

جیسے جیسے $n\to\infty$، پٹیاں قریب ہوتی جاتی ہیں، یہ مان لیا گیا ہے کہ (2) اور (3) کی انتہائی قدریں دونوں حالت میں یکساں ہیں اور مشترک انتہائی قدر منحنی کے زیر سایہ مطلوبہ رقبہ ہے۔

علامتی طور پر، ہم لکھتے ہیں

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \text{حلقہ PRSQP کا رقبہ} = \int_a^b f(x)dx \quad ...(5)$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یہ رقبہ دوسرے کسی بھی رقبہ کی انتہائی قدر ہے جو کہ مستطیل کی منحنی سطح کے نیچے اور مستطیل کی منحنی

سطح کے اوپر ہے۔ آسانی کے لیے، ہم مستطیلوں کی اونچائی منحنی کی اونچائی کے برابر لیں گے جو کہ ہر ایک ماتحت وقفہ کی بائیں ہاتھ کے کنارے کی طرف ہوگا۔ اس لیے ہم (5) کو اس طرح لکھتے ہیں

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\,[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)\,h]$$

یا

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)\,h] \qquad \ldots(6)$$

جہاں $h=\frac{b-a}{n}\to 0$ کیونکہ $n\to\infty$

اوپر کی عبارت (6) معین تکملے کی تعریف، انتہائی کے حاصل جمع کے طور پر جانی جاتی ہے۔

ریمارک (Remark): ایک تفاعل کے محدود تکملے کی قدر کسی بھی خاص وقفہ پر اس تفاعل کے تکملے پر منحصر ہوتی ہے، لیکن تکمل کے متغیر کے اوپر نہیں تاکہ ہم لامحدود متغیر کو ظاہر کرنے کے لیے چن سکیں۔ اگر لامحدود متغیر کو x کے بجائے t یا u سے ظاہر کیا جائے تو ہم آسانی کے لیے تکملے کو $\int_a^b f(x)\,dx$ کے بجائے $\int_a^b f(t)\,dt$ یا $\int_a^b f(u)\,du$ کو لکھتے ہیں۔ اس لیے، تکمل کا متغیر مصنوعی متغیر کہلاتا ہے۔

مثال 25: $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ کی انتہائی حاصل جمع کے طور معلوم کیجیے۔

حل: تعریف سے

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)\,h],$$

جہاں $h=\frac{b-a}{n}$ ہے

اس مثال میں، $a=0$ ، $b=2$ ، $f(x)=x^2+1$ ، $h=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$

اس لیے،

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(0)+f(\frac{2}{n})+f(\frac{4}{n})+\ldots+f(\frac{2(n-1)}{n})]$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[1+(\frac{2^2}{n^2}+1)+(\frac{4^2}{n^2}+1)+\ldots+\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)]$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n\text{-terms}}\right]+\frac{1}{n^2}(2^2+4^2+\ldots+(2n-2)^2]$$

© NCERT not to be republished

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[n+\frac{2^2}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[n+\frac{4}{n^2}\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[n+\frac{2}{3}\frac{(n-1)\;(2n-1)}{n}]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}[1+\frac{2}{3}(1-\frac{1}{n})\;(2-\frac{1}{n})] = 2\;[1+\frac{4}{3}] = \frac{14}{3}$$

مثال 26: $\int_0^2 e^x\, dx$ کی قیمت کا اندازہ انتہائی کے حاصل جمع کے طور پر معلوم کیجیے۔

حل: تعریف سے

$$\int_0^2 e^x\, dx = (2-0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^0+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{4}{n}}+\ldots+e^{\frac{2n-2}{n}}\right]$$

G.P. کے n ارکان کے مجموعہ کا استعمال کرکے، جہاں $a=1$ ، $r=e^{\frac{2}{n}}$ ہے۔ ہمارے پاس ہے

$$\int_0^2 e^x\, dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{e^{\frac{2n}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}] = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^2-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right]$$

$$= \frac{2\,(e^2-1)}{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}\right]\cdot 2} = e^{2-1}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h}=1$ کا استعمال کرنے پر

مشق 7.8

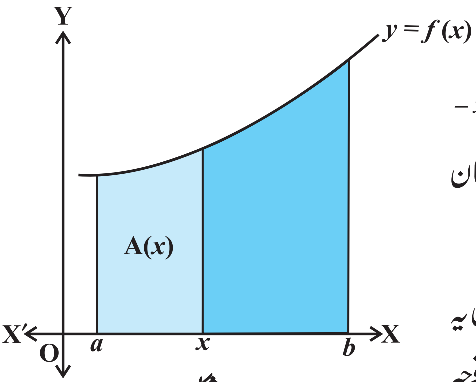
ذیل محدود تکملوں کی قدر کا اندازہ انتہا کے حاصل کے طور پر معلوم کیجیے۔

1. $\int_a^b x\, dx$ **2.** $\int_0^5 (x+1)\, dx$ **3.** $\int_2^3 x^2\, dx$

4. $\int_1^4 (x^2-x)\, dx$ **5.** $\int_{-1}^1 e^x\, dx$ **6.** $\int_0^4 (x+e^{2x})\, dx$

© NCERT not to be republished

7.8 احصا کا بنیادی مسئلہ (Fundamental Theorem of Calculus)



شکل 7.3

7.8.1 رقبہ تفاعل (Area Function)

ہم $\int_a^b f(n)\,dn$ کو منحنی $y=f(x)$ مختص $x=a$ اور $x=b$ اور x – محور سے گھرے ہوئے علاقہ کے رقبہ کے طور پر بیان کر چکے ہیں، مان لیجیے $[a, b]$ میں ایک نقطہ x دیا ہوا ہے۔ تب

شکل 7.3 میں دیے گئے شیڈ ڈ خطہ کے رقبہ کو ظاہر کرتا ہے۔ [یہاں یہ مان لیا گیا ہے کہ $x \in [a, b]$ کے لیے $f(x) > 0$ ہے، نیچے جو توجہ دلائی گئی ہے وہ دوسرے تفاعل کے لیے بھی اسی طرح صحیح ہے]۔اس شیڈ ڈ خطہ کا رقبہ x کی قدر پر مبنی ہے۔

دوسرے الفاظ میں، اس شیڈ ڈ خطہ کا رقبہ x کا تفاعل ہے۔ ہم x کے اس تفاعل $A(x)$ کو رقبہ تفاعل کے طور بیان کرتے ہیں ہم تفاعل $A(n)$ کو رقبہ تفاعل کہتے ہیں۔ جو اس طرح دیا گیا ہے

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad \ldots\ldots(1)$$

اس تعریف پر مبنی دو بنیادی مسئلے د گئے ہیں۔ حالانکہ، ہم ان کا صرف بیان دے رہے ہیں، کیونکہ ان کا ثبوت اس کتاب کی حد سے باہر ہے۔

7.8.2 تکملہ احصا کا پہلا بنیادی مسئلہ (First fundamental theorem of integral calculus)

مسئلہ 1 مان لیجیے بند وقفہ $[a,b]$ پر f ایک مسلسل تفاعل ہے اور مان لیجیے $A(x)$ رقبہ تفاعل ہے۔ تب تمام $x \in [a, b]$ کے لیے $A'(x)=f(x)$ ہے

7.8.3 تکملہ احصا کا دوسرا بنیادی مسئلہ (Second fundamental theorem of integral calculus)

ہم ذیل میں ایک اہم مسئلہ کو بیان کرتے ہیں جو ہمیں مخالف تفرق کا استعمال کر کے محدود تکملہ کی قدر کا اندازہ لگانے کے قابل بناتے ہیں۔

مسئلہ 2 مان لیجیے بند وقفہ $[a,b]$ پر f ایک مسلسل تفاعل ہے اور F، f کا ضد تفرق ہے۔ تب

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

© NCERT not to be republished

ریمارک (Remark)

(i) الفاظ میں، مسئلہ 2 ہمیں بتاتا ہے کہ $\int_a^b f(x)\,dx =$ (بالائی حد b پر f کے ضد مشتق F کی قدر۔ اسی ضد مشتق کی زیریں حد پر قدر)

(ii) یہ مسئلہ بہت زیادہ استعمال میں آنے والا ہے، کیونکہ یہ ہمیں بغیر انتہا کا حاصل جمع نکالے ہوئے معین تکملہ کو اور آسانی سے حل کرنے میں مدد کرتا ہے۔

(iii) ایک معین تکملہ کا حساب لگانے کے لیے فیصلہ کن عمل ہے جس میں ایک تفاعل معلوم کرنا ہے جس کا مشتق تکملے کے برابر ہو۔ یہ تکمل اور تفرق کے درمیان رشتہ کو اور طاقت دیتا ہے۔

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx$ میں ہونے کی ضرورت ہے کہ تفاعل f کو بہترین طریقہ سے بیان کرنے کی اور $[a, b]$ میں مسلسل مثال کے طور پر، محدود تکملہ $\int_{-2}^{3} x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ پر غور کرنا غلط ہے، کیونکہ تفاعل f جو کہ $f(x) = x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ سے ظاہر کیا گیا ہے، جو کہ بند وقفہ [-23] کے حصے میں بیان نہیں کیا گیا ہے۔

$\int_a^b f(x)\,dx$ کی تحسیب کے اقدامات

(i) غیر معین تکملہ $\int f(x)\,dx$ معلوم کیجیے۔ مان لیجیے یہ F(x) ہے۔ تکمل میں مستقلہ C رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہے کیونکہ اگر ہم F(x) کی بجائے F(x) + C پر غور کرتے ہیں تو، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}]_a^b = [\mathrm{F}(b) + \mathrm{C}] - [\mathrm{F}(a) + \mathrm{C}] = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

اس طرح، اختیاری مستقلہ معین تکملہ قدر کی تحسیب کرنے میں غائب ہو جاتا ہے

(ii) $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = [\mathrm{F}(x)]_a^b$ کی قدر کا اندازہ لگایئے، جو کہ $\int_a^b f(x)\,dx$ کی قدر ہے

اب ہم کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 27: ذیل تکملوں کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $\int_2^3 x^2\,dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$

(iii) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$ (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt$

حل

(i) مان لیجیے $I = \int_2^3 x^2\, dx$ ہے۔ کیونکہ $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$ ہے

اس لیے، دوسرے بنیادی مسئلہ سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = F(3) - F(2) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

(ii) مان لیجیے $I = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\, dx$ ہے۔ ہم پہلے تکملے کا ضد مشتق معلوم کرتے ہیں۔

$30 - x^{\frac{3}{2}} = t$ رکھیے۔ تب $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx = dt$ یا $\sqrt{x}\, dx = -\frac{2}{3} dt$ ہے۔

اس طرح، $\int \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\, dx = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right] = F(x)$

اس لیے، احصا کے دوسری بنیادی مسئلہ سے، ہمارے پاس ہے

$$I = F(9) - F(4) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-27)} - \frac{1}{30-8}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{22}\right] = \frac{19}{99}$$

(iii) مان لیجیے $I = \int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$

جزوی کسروں کا استعمال کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

تاکہ $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)} = -\log|x+1| + 2\log|x+2| = F(x)$

© NCERT not to be republished

اس لیے، احصا کے دوسری بنیادی مسئلہ سے، ہمارے پاس ہے

$$I = F(2) - F(1) = [-\log 3 + 2\log 4] - [-\log 2 + 2\log 3]$$

$$= -3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) مان لیجیے $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t \, dt$، $\int \sin^3 2t \cos 2t \, dt$ پر غور کیجیے۔

$\sin 2t = u$ رکھیے تاکہ $2\cos 2t \, dt = du$ یا $\cos 2t \, dt = \frac{1}{2} du$

تاکہ $\int \sin^3 2t \cos 2t \, dt = \frac{1}{2} \int u^3 du$

$$= \frac{1}{8}[u^4] = \frac{1}{8}\sin^4 2t = F(t) \quad \text{(مان لیجیے)}$$

اس لیے، تکملہ احصا کے دوسرے بنیادی مسئلہ سے

$$I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{8}\left[\sin^4 \frac{\pi}{2} - \sin^4 0\right] = \frac{1}{8}$$

مشق 7.9

سوال 1 تا 20 میں معین تکملوں کی قدر معلوم کیجیے

1. $\int_{-1}^{1} (x+1)\, dx$
2. $\int_{2}^{3} \frac{1}{x}\, dx$
3. $\int_{1}^{2} (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)\, dx$
4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx$
5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$
6. $\int_{4}^{5} e^x\, dx$
7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$
8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec} x\, dx$
9. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$
11. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-1}$
12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$
13. $\int_{2}^{3} \frac{x\, dx}{x^2+1}$
14. $\int_{0}^{1} \frac{2x+3}{5x^2+1}\, dx$
15. $\int_{0}^{1} x e^{x^2}\, dx$
16. $\int_{1}^{2} \frac{5x^2\, dx}{x^2+4x+3}$
17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + x^3 + 2)\, dx$
18. $\int_{0}^{\pi} (\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2})\, dx$
19. $\int_{0}^{2} \frac{6x+3}{x^2+4}\, dx$
20. $\int_{0}^{1} (x e^x + \sin \frac{\pi x}{4})\, dx$

© NCERT not to be republished

سوال 21 تا 22 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

21۔ $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ برابر ہے

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

23۔ $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+9x^2}$ برابر ہے

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

7.9 بدل کے ذریعے معین تکملوں کی قدر معلوم کرنا
(Evaluation of Definite Integrals by Substitution)

پچھلے سیکشن میں ہم نے غیر معین تکملہ کو معلوم کرنے میں بہت سے طریقوں پر بحث کی ہے۔ غیر معین تکملے کو معلوم کرنے کے لیے ایک مخصوص طریقہ بدل کا طریقہ ہے۔

$\int_a^b f(x)\, dx$ کا بدل کے ذریعہ قدر کا اندازہ لگانے کے لیے مندرجہ ذیل طریقہ کے اقدامات ہو سکتے ہیں۔

1۔ تکملے پر بغیر انتہا کے غور کیجیے $y = f(x)$ یا $x = g(y)$ رکھیے تاکہ دیا ہوا تکملہ ایک جانی پہچانی شکل اختیار کر لے۔

2۔ نئے تکملے کا نئے متغیر کی مناسبت سے بغیر تکمل کے مستقلہ کو ظاہر کیے ہوئے تکمل کیجیے۔

3۔ نئے متغیر کے لیے دوبارہ بدل رکھیے اور جواب کو اصل متغیر کی شکل میں لکھیے۔

4۔ تکملہ کی دی ہوئی انتہا پر جواب کی قدریں (3) میں معلوم کیجیے اور قدروں کا فرق بالائی اور زیریں حد پر معلوم کیجیے۔

نوٹ اس طریقہ کو جلدی کرنے کے لیے ہم ذیل کی طرح آگے بڑھ سکتے ہیں۔ (1) اور (2) اقدامات کو کرنے کے بعد (3) قدم کی کوئی ضرورت نہیں ہے۔ یہاں، تکملے کو بذاتِ خود نئے متغیر میں رکھا جائے گا، اور تکملہ کی انتہائیں اسی کے مطابق بدل دی جائیں گی، تاکہ ہم آخری قدم کو انجام دے سکیں۔

© NCERT not to be republished

ہمیں یہ مثالوں کے ذریعے سمجھنا چاہیے۔

مثال 28: $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: $t = x^5 + 1$ رکھیے، تب $dt = 5x^4 dx$ ہے۔

اس لیے، $\int 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$

اس طرح، $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$

$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - \left((-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

متبادل کے طور پر، ہم پہلے اس تکملے کو تبدیل کریں گے اور پھر تبدیل ہوئے تکملہ کا نئی انتہاؤں کے ساتھ قیمت کا اندازہ لگائیں گے۔

مان لیجیے $t = x^5 + 1$ ہے۔ تب $dt = 5x^4 dx$

یہ ذہن نشین کر لیجیے، کہ جب $x = -1$، $t=0$ اور جب $x=1$، $t=2$

اس طرح جب x -1 سے 1 کی طرف جاتا ہے، t، 0 سے 2 کی طرف ہے

اس لیے $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int_{0}^{2}\sqrt{t}\,dt$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

مثال 29: $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $t = \tan^{-1}x$ ہے، تب $dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ہے۔ نئی انتہائیں $x = 0$ تو $t = 0$ اور جب $x = 1$ تو $t = \frac{\pi}{4}$ ہیں۔ اس طرح جب x 0 سے '1' کی طرف بڑھتا ہے، t، 0 سے $\frac{\pi}{4}$ کی طرف بڑھتا ہے

اس لیے $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} - 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$

مشق 7.10

1 تا 8 سوالوں میں بدل کے ذریعے کا استعمال کر کے تکملوں کی قدر معلوم کیجیے۔

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\,\cos^5\phi\,d\phi$ **3.** $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

4. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\,dx$ ($x+2=t^2$ رکھیے) **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2}$ **7.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **8.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}\,dx$

سوال 9 اور 10 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

9۔ تکملے $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,dx$ کی قدر ہے

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

10۔ اگر $f(x) = \int_0^x t\sin t\,dt$ ہے، تب $f'(x)$ ہے

(A) $\cos x + x\sin x$ (B) $x\sin x$

(C) $x\cos x$ (D) $\sin x + x\cos x$

7.10 معین تکملوں کی کچھ خصوصیات (Some Properties of Definite Integrals)

ہم نے ذیل میں معین تکملوں کی کچھ خاص خصوصیات بیان کی ہیں۔ یہ معین تکملوں کی قدر معلوم کرنے میں اور زیادہ مفید ثابت ہوں گی۔

$$\mathbf{P_0}: \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\mathbf{P_1}: \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$ خاص طور پر $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$$\mathbf{P_2}: \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

© NCERT not to be republished

$$P_3: \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

$$P_4: \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(یہ بات قابل غور ہے کہ P_4 ، P_3 کا ایک خاص کیس ہے)

$$P_5: \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

$P_6: \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ اگر $f(2a-x) = f(x)$ اور 0 ہے اگر $f(2a-x) = -f(x)$

$P_7:$ (i) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ اگر f ایک جفت تفاعل ہے، یعنی، اگر $f(-x) = f(x)$،

(ii) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ اگر f ایک طاق تفاعل ہے یعنی، اگر $f(-x) = -f(x)$ ہے،

ہم ان خصوصیات کے ثبوت ایک ایک کر کے دیتے ہیں۔

P_0 کا ثبوت: $x=t$ بدل کر کے اسے سیدھے طور پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

P_1 کا ثبوت: مان لیجیے f ، F کا ضد مشتق ہے ۔ تب، احصا کے دوسرے بنیادی مسئلہ سے ہمارے پاس ہے

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx$$

یہاں ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ، اگر $a=b$ ہے، تب $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 کا ثبوت: مان لیجیے t,F کا ضد مشتق ہے، تب

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{(1)...}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a) \quad \text{(2)...}$$

اور

$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c) \quad \text{(3)...}$$

(2) اور (3) کو جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

یہ خصوصیت P_2 کو ثابت کرتا ہے۔

© NCERT not to be republished

P_3 کا ثبوت: مان لیجیے $t=a+b-x$ ہے۔ تب $dt=-dx$ ہے۔ جب $x=a$، $t=b$ اور $x=b$، $t=a$ ہے۔ اس لیے

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt \ (P_1 \text{ سے})$$

$$= \int_a^b f(a+b-x) \ (P_0 \text{ سے})$$

P_4 کا ثبوت: $t=a-x$ رکھیے۔ تب $dt=-dx$ ہے۔ جب $x=0$، $t=a$ اور جب $x=a$، $t=0$۔ اب P_3 کی طرح آگے بڑھنے پر

P_5 کا ثبوت: P_2 کا استعمال کرنے پر، ہمارے پاس ہے $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$

دوسرے تکملے کے دائیں ہاتھ کی طرف مان لیجیے $t=2a-x$۔ تب $dt=-dx$ ہے۔ جب $x=a$، $t=a$ اور جب $x=2a$، $t=0$ ہے۔ ساتھ ہی $x=2a-t$

اس لیے دوسرا تکملہ ہوجاتا ہے

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

اس لیے $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

P_6 کا ثبوت: P_5 کا استعمال کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \quad ...(1)$$

اب اگر، $f(2a-x)=f(x)$ ہے، تب (1) ہوجاتی ہے

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

اور اگر $f(2a-x)=-f(x)$، تب (1) ہوجاتی ہے

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

© NCERT not to be republished

P_7 کا ثبوت: P_2 کا استعمال کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

تب، مان لیجیے پہلے تکملہ میں دائیں ہاتھ کی طرف $t = -x$

$t = a$ ،جب $x = -a$ ،$-dt = -dx$

اور جب $x = 0$ ،$t = 0$ ساتھ ہی $x = -t$

اس لیے،
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad (P_0 \text{ سے}) \qquad (1)...$$

(i) اب، اگر f ایک جفت تفاعل ہے۔ تب $f(-x) = f(x)$ اور اس لیے (1) ہو جاتی ہے

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(ii) اگر f ایک طاق تفاعل ہے، تب $f(-x) = -f(x)$ اور اس لیے (1) ہو جاتی ہے

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

مثال 30: $\int_{-1}^{2} |x^3 - x|\,dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: ہم یہ ذہن نشین کرتے ہیں کہ $[-1, 0]$ پر $x^3 - x \geq 0$ ہے اور $[0, 1]$ پر $x^3 - x \leq 0$ ہے اور $[1, 2]$ پر $x^3 - x \geq 0$ ہے۔ اس لیے P_2 سے ہم لکھتے ہیں

$$\int_{-1}^{2} |x^3 - x|\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} -(x^3 - x)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

© NCERT not to be republished

$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}$$

مثال 31: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\sin^2 x$ ایک جفت تفاعل ہے۔اس لیے، P_7 (i) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

مثال 32: $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $I=\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$۔ تب P_4 سے ہمارے پاس ہے

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)\, dx}{1+\cos^2(\pi-x)}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} - I$$

یا
$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

یا
$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

$\cos x=t$ رکھیے تاکہ $-\sin x\, dx = dt$ ہوا جب $x=0$، $t=1$ اور جب $x=\pi$، $t=-1$ ہے۔اس لیے، (P_1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \frac{-\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

© NCERT not to be republished

$$= \pi \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$ (P_7 سے، کیونکہ $\frac{1}{1+t^2}$ جفت تفاعل ہے)

$$= \pi \left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \pi\left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0\right] = \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

مثال 33: $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $I = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ ہے۔ مان لیجیے $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$ ہے۔ تب

$f(-x) = \sin^5 (-x) \cos^4 (-x) = -\sin^5 x \cos^4 x = -f(x)$ یعنی f ایک منفی فنکشن ہے۔

اس لیے P_7 (ii) سے $I=0$ ہے۔

مثال 34: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \qquad \ldots\ldots(1)$$

تب، P_4 سے

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x) + \cos^4 (\frac{\pi}{2} - x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx \qquad \ldots\ldots(2)$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\,I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

اس لیے $I = \frac{\pi}{4}$

مثال 35: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \qquad \ldots\ldots(1)$$

© NCERT not to be republished

تب، P_3 سے

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}\,dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx \quad ...(2)$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\,I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$ اس لیے $$I = \frac{\pi}{12}$$

مثال 36: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$

تب، P_4 سے

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx$$

I کی دونوں قدروں کو جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\,I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \cos x + \log 2 - \log 2)\,dx$$ (log 2 کو جمع کرنے اور گھٹانے پر)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx$$ (کیوں؟)

پہلے تکملے میں $2x = t$ رکھیے۔ تب $2\,dx = dt$، جب $x = 0$، $t = 0$ اور جب $x = 0$، $t = 0$ اور $x = \frac{\pi}{2}$، $t = \pi$ ہے۔

اس لیے $$2\,I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$2\,I = \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$ [P_6 سے کیوں کہ $\sin(\pi - t) = \sin t$]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx - \frac{\pi}{2} \log 2$$ (متغیر t کو x سے بدلنے پر)

$$= I - \frac{\pi}{2} \log 2$$

اس طرح $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \frac{-\pi}{2} \log 2$

مشق 7.11

معین تکملوں کی خصوصیات کا استعمال کر کے، 1 تا 18 سوالوں میں تکملوں کی قدر معلوم کیجیے

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x \, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x \, dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$

5. $\int_{-5}^{5} | x + 2 | \, dx$

6. $\int_2^8 | x - 5 | \, dx$

7. $\int_0^1 x (1 - x)^n \, dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log (1 + \tan x) \, dx$

9. $\int_0^2 x \sqrt{2 - x} \, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \log \sin x - \log \sin 2x) \, dx$

11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1 + \sin x}$

13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$

14. $\int_0^{2\pi} \cos^5 x \, dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$

16. $\int_0^{\pi} \log (1 + \cos x) \, dx$

17. $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a - x}} dx$

18. $\int_0^4 |x - 1| \, dx$

19۔ دکھائیے کہ $\int_0^a f(x) g(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$ ہے، اگر f اور g، $f(x) = f(a - x)$ اور $g(x) + g(a - x) = 4$ سے بیان کیے گئے ہیں

سوال 20 اور 21 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

20۔ $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1)\, dx$ کی قدر ہے

(A) 0 (B) 2 (C) π (D) 1

21۔ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$ کی قدر ہے

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) –2

متفرق مثالیں

مثال 37: $\int \cos 6x \sqrt{1+\sin 6x}\, dx$ دریافت کیجیے

حل: مان لیجیے $t = 1 + \sin 6x$ ہے، تاکہ $dt = 6\cos 6x\, dx$

اس لیے $\int \cos 6x \sqrt{1+\sin 6x}\, dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}} dt$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} (t)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9}(1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + C$$

مثال 38: $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\, dx$ معلوم کیجیے

حل: ہمارے پاس ہے $\int \frac{(x^4-x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\, dx = \int \frac{(1-\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{4}}}{x^4}\, dx$

$1 - \frac{1}{x^3} = 1 - x^{-3} = t$ رکھیے، تاکہ $\frac{3}{x^4} dx = dt$

اس لیے $\int \frac{(x^4-x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\, dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}\, dt = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + C$

مثال 39: $\int \frac{x^4\, dx}{(x-1)(x^2+1)}$ معلوم کیجیے

حل: ہمارے پاس ہے

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

© NCERT not to be republished

$$= (x+1) + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \qquad (1)...$$

اب دکھایئے

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} \qquad (2)$$

اس طرح

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$= (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C$$

دونوں طرف کے ضریبوں کا موازنہ کرنے پر، ہمیں $A + B = 0$، $C - B = 0$ اور $A - C = 1$ حاصل ہوتا ہے جو کہ $A = \frac{1}{2}$ ، $B = C = -\frac{1}{2}$ دیتا ہے A، B اور C کی قدریں (2) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \qquad (3)...$$

دوبارہ، (3) کو (1) میں رکھنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} = (x+1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

اس لیے

$$\int \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

مثال 40: $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$ کو معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے

$$I = \int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$$

$$= \int \log(\log x)\,dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}dx$$

پہلے تکملے میں، ہم '1' کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں۔ تب اس کا تکمل بالحصص کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = x\log(\log x) - \int \frac{1}{x\log x}x\,dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad (1)...$$

© NCERT not to be republished

دوبارہ، $\int \frac{dx}{\log x}$، پر غور کیجیے، 'I' کو دوسرا تفاعل لیجیے اور تکمل بالحصص کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x \left\{ -\frac{1}{(\log x)^2} \left(\frac{1}{x} \right) \right\} dx \right] \quad \ldots(2)$$

(2) کو (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} = x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} + C$$

مثال 41: $\int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x} \right] dx$ کو معلوم کیجیے

حل: ہمارے پاس ہے

$$I = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x} \right] dx = \int \sqrt{\tan x} (1 + \cot x)\, dx$$

$\tan x = t^2$ رکھیے، تاکہ $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$ ہو

یا $$dx = \frac{2t\, dt}{1 + t^4}$$

تب $$I = \int t \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \frac{2t}{(1 + t^4)}\, dt$$

$$= 2 \int \frac{(t^2 + 1)}{t^4 + 1}\, dt = 2 \int \frac{\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt}{\left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right)} = 2 \int \frac{\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt}{\left(t - \frac{1}{t} \right)^2 + 2}$$

$t - \frac{1}{t} = y$ رکھیے، تاکہ $\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = dy$ ہو۔ تب

$$I = 2 \int \frac{dy}{y^2 + \left(\sqrt{2} \right)^2} = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}} + C = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{\left(t - \frac{1}{t} \right)}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{t^2 - 1}{\sqrt{2}\, t} \right) + C = \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2 \tan x}} \right) + C$$

© NCERT not to be republished

مثال 42: $\int \frac{\sin 2x \cos 2x \, dx}{\sqrt{9 - \cos^4(2x)}}$ کو معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $I = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9 - \cos^4 2x}} dx$

$\cos^2(2x) = t$ رکھیے، تا کہ $4 \sin 2x \cos 2x \, dx = -dt$

اس لیے $I = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{9 - t^2}} = -\frac{1}{4} \sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + C = -\frac{1}{4} \sin^{-1}\left[\frac{1}{3} \cos^2 2x\right] + C$

مثال 43: $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)| dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: یہاں
$$f(x) = |x \sin \pi x| = \begin{cases} x \sin \pi x \text{ for } -1 \le x \le 1 \\ -x \sin \pi x \text{ for } 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$$

اس لیے $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} -x \sin \pi x \, dx$

$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} x \sin \pi x \, dx$$

دونوں تکملوں کا دائیں ہاتھ کی طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

مثال 44: $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $I = \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \, dx}{a^2 \cos^2(\pi - x) + b^2 \sin^2(\pi - x)}$ (P_4 کا استعمال کر کے)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - I$$

© NCERT not to be republished

اس طرح $2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

یا $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ (P_6 کا استعمال کرکے)

(شمارکنندہ اور نسب نما کو $\cos^2 x$ سے تقسیم کرنے پر)

$b \tan x = t$ رکھیے، تاکہ $b \sec^2 x \, dx = dt$ ہو۔ ساتھ ہی، جب $x = 0$، $t = 0$ اور جب $t \to \infty$،

اس لیے، $I = \frac{\pi}{b} \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{\pi}{b} \cdot \frac{1}{a} \left[\tan^{-1} \frac{t}{a} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{ab} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi^2}{2ab}$

باب 7 پر مبنی متفرق مشق

سوال 1 تا 24 میں تفاعلات کا تکملہ کیجیے

1. $\frac{1}{x - x^3}$

2. $\frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$

3. $\frac{1}{x\sqrt{ax - x^2}}$ [اشارہ $x = \frac{a}{t}$ رکھیے]

4. $\frac{1}{x^2 (x^4 + 1)^{\frac{3}{4}}}$

5. $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ [اشارہ $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)}$، $x = t^6$ رکھیے]

6. $\frac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$

7. $\frac{5x}{sin(x-a)}$

8. $\frac{e^{5\log x} - e^{4\log x}}{e^{3\log x} - e^{2\log x}}$

9. $\frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}$

10. $\frac{sin^8 - cos^8 x}{1 - 2 sin^2 x \, cos^2 x}$

11. $\frac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\frac{x^3}{\sqrt{1 - x^8}}$

13. $\frac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$

14. $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. $\cos^3 x \, e^{\log \sin x}$

16. $e^{3\log x} (x^4 + 1)^{-1}$

17. $f'(ax+b)[f(ax+b)]^n$

18. $\frac{1}{\sqrt{\sin^3 x \sin(x+\alpha)}}$

19. $\frac{\sin^{-1}\sqrt{x} - \cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x}}, x \in [0, 1]$

20. $\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

21. $\frac{2 + \sin 2x}{1 + \cos 2x} e^x$

22. $\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2 (x+2)}$

© NCERT not to be republished

23. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **24.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}$

25 تا 33 سوالوں میں معین تکملوں کی قدر معلوم کیجیے۔

25. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ **26.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x\ \cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$ **27.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

28. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$ **29.** $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ **30.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}\,dx$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\tan^{-1}(\sin x)\,dx$ **32.** $\int_0^{\pi} \dfrac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$

33. $\int_1^4 [|x-1|+|x-2|+|x-3|]\,dx$

مندرجہ ذیل (34 تا 39 سوالوں) کو ثابت کیجیے

34. $\int_1^3 \dfrac{dx}{x^2(x+1)}=\dfrac{2}{3}+\log\dfrac{2}{3}$ **35.** $\int_0^1 x\,e^x\,dx=1$

36. $\int_{-1}^1 x^{17}\cos^4 x\,dx=0$ **37.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx=\dfrac{2}{3}$

38. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\,dx=1-\log 2$ **39.** $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx=\dfrac{\pi}{2}-1$

40۔ $\int_0^1 e^{2-3x}\,dx$ کی حاصل جمع کے طور پر قدر معلوم کیجیے۔

41 تا 44 سوالوں میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے

41۔ $\int\dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$ برابر ہے

(A) $\tan^{-1}(e^x)+C$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x})+C$

(C) $\log(e^x-e^{-x})+C$ (D) $\log(e^x+e^{-x})+C$

42۔ $\int\dfrac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$ برابر ہے

(A) $\dfrac{-1}{\sin x+\cos x}+C$ (B) $\log|\sin x+\cos x|+C$

© NCERT not to be republished

(C) $\log|\sin x - \cos x| + C$ (D) $\dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

43۔ اگر $f(a+b-x) = f(x)$ کے ہے، تب $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ برابر ہے

(A) $\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)\, dx$ (B) $\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)\, dx$

(C) $\dfrac{b-a}{2}\int_a^b f(x)\, dx$ (D) $\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\, dx$

44۔ $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{1+x-x^2}\right) dx$ کی قدر ہے

(A) 1 (B) 0 (C) –1 (D) $\dfrac{\pi}{4}$

خلاصہ (Summary)

- تکمل، تفرق کا معکوس طریقہ ہے۔ تفرقی انحصا (کیلکولس) میں ہمیں ایک تفاعل دیا ہوا ہو اور ہمیں اس تفاعل کا مشتق یا معلوم کرنا ہوتا ہے، لیکن تکمل احصا میں، ہمیں وہ تفاعل معلوم کرنا ہے جس کا تفرق دیا ہوا ہے۔ اس طرح، تکمل وہ طریقہ ہے جو کہ تفرق کا معکوس ہے۔

مان لیجیے $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ہے۔ تب ہم $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ لکھتے ہیں۔ ان تکملوں کو لامحدود تکملے یا عام تکملے کہتے ہیں، C کو تکمل کا مستقلہ کہتے ہیں۔ ان تمام تکملوں میں مستقلہ کا فرق ہوتا ہے۔

- جیومیٹریائی نقطہ نظر سے، ایک غیر معین تکملہ منحنیوں کی فیملی کا حاصل جمع ہے، جس میں سے ہر ایک کو ایک منحنی کو بجو د متوازی میں بدل کر y– محور کے ساتھ اوپر یا نیچے کی طرف رکھ کر حاصل کیا جاتا ہے۔

- غیر معین تکملوں کی کچھ خصوصیات مندرجہ ذیل میں دی گئی ہیں:

1. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

2. کسی بھی حقیقی عدد k کے لیے، $\int k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$

اور عام طور پر، اگر $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ فنکشن ہیں اور $k_1, k_2, \ldots, k_n$ حقیقی اعداد میں، تب

© NCERT not to be republished

$$\int [k_1 \, f_1(x) + k_2 f_2(x) + ... + k_n f_n(x)] \, dx$$

$$= k_1 \int f_1(x) \, dx + k_2 \int f_2(x) \, dx + ... + k_n \int f_n(x) \, dx$$

- **کچھ معیاری تکملے (Some Standard Integrals)**

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ خاص طور پر $\int dx = x + C$

(ii) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ (iii) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(iv) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$ (v) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

(vi) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

(vii) $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$ (viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$ (x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$ (xii) $\int e^x dx = e^x + C$

(xiii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ (xiv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

(xv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1} x + C$ (xvi) $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$

- **جزوی کسروں کے ذریعے تکمل (Integration by partial fractions)**

یاد کیجیے کہ ایک ناطق فنکشن دو کثیر رکنیوں $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کی نسبت ہے، جہاں P(x) اور Q(x)، x میں کثیر رکنیاں ہیں اور $Q(x) \neq 0$۔ اگر کثیر رکنی P(x) کا درجہ کثیر رکنی Q(x) کے درجہ سے زیادہ ہے، تب ہم P(x) کو Q(x) سے تقسیم کر سکتے ہیں تاکہ $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ ہو، جہاں T(x)، x میں ایک کثیر رکنی ہے اور $P_1(x)$ کا درجہ Q(x) کے درجہ سے کم ہے۔ T(x) ایک کثیر رکنی ہے اس لیے اس کا تکمل آسانی سے کیا جا سکتا

© NCERT not to be republished

ہے۔ $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ کا تکمل $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ کی جزوی کسروں کے حاصل جمع کے طور پر رکھ کر درج ذیل طریقوں سے کیا جاسکتا ہے:

1. $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}, a \neq b$

2. $\frac{px+q}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$

3. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$

4. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$

5. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

جہاں x^2+bx+c کے مزید اور اجزا ضربی نہیں ہوسکتے۔

◆ **بدل کے ذریعے تکمل (Integration by Substitution)**

تکمل کے متغیر میں بدلاؤ کبھی کبھی ایک تکملے کو کسی ایک بنیادی تکملہ میں تحلیل کر دیتا ہے۔ وہ طریقہ جس میں ہم متغیر کو کسی دوسرے متغیر میں بدل دیتے ہیں بدل کا طریقہ کہلاتا ہے۔ جب تکملے میں کوئی ٹرگنومیٹریائی تفاعل ملوث ہوتا ہے، ہم کسی بھی جانی پہچانی اکائی کا استعمال تکملے کو معلوم کرنے کے لیے کرتے ہیں۔ بدل کا استعمال کر کے، ہم ذیل معیاری تکملے حاصل کرتے ہیں۔

(i) $\int \tan x \, dx = \log |\sec x| + C$ (ii) $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

◆ **کچھ خصوصی تفاعلات کے تکملے (Integrals of some special functions)**

(i) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

© NCERT not to be republished

(ii) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

(iii) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log | x + \sqrt{x^2 + a^2} | + C$

◆ **تکمل بالحصص (Integration by Parts)**

دیئے ہوئے فنکشنوں f_1 اور f_2 کے لیے، ہمارے پاس ہے۔

$\int f_1(x) \cdot f_2(x)\, dx = f_1(x) \int f_2(x)\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) \cdot \int f_2(x)\, dx \right] dx$ یعنی، دو

تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل = پہلا تفاعل × دوسرے تفاعل کا تکملہ ۔ تکملہ [پہلے فنکشن کا تفرقی ضریب × دوسرے فنکشن کا تکملہ]۔ پہلے اور دوسرے فنکشن کو جیسے کرنے میں احتیاط برتنی ہوگی۔ صاف طور پر، ہم اس تفاعل کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیں گے جس کا تکملہ ہمیں اچھی طرح سے معلوم ہو۔

◆ $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + C$

◆ **کچھ مخصوص قسم کے تکملے (Some Special types of Integrals)**

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ یا $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ قسم کے تکملوں کو معیاری شکل میں بدلا جا سکتا ہے۔

اور انھیں اس طرح ظاہر کرتے ہیں

© NCERT not to be republished

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

(v) $\int \frac{px + q\, dx}{ax^2 + bx + c}$ یا $\int \frac{px + q\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ قسم کے تکملوں کو معیاری شکل میں ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$px + q = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + \mathrm{B} = \mathrm{A}\,(2ax + b) + \mathrm{B}$، جہاں A اور B کو دونوں طرف کے ضریبوں کا موازنہ کر کے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

- ہم نے $\int_a^b f(x)\, dx$ کو منحنی $y = f(x)$، $a \le x \le b$، x–محور اور مختص $x=a$ اور $x=b$ سے گھرے ہوئے رقبہ کے طور پر بیان کیا ہے۔ مان لیجیے x دیئے ہوئے وقفہ [a,b] میں موجود ہے تب $\int_a^x f(x)\, dx$ رقبہ تفاعل A(x) ظاہر کرتا ہے۔ یہ رقبہ تفاعل کا نظریہ تکمل احصا کے بنیادی مسئلہ کی طرف لے جاتا ہے۔

- **تکملہ احصا کا پہلا بنیادی مسئلہ (First fundamental theorem of integral calculus)**

مان لیجیے رقبہ فنکشن اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

$$\mathrm{A}(x) = \int_a^x f(x)\, dx \quad x \ge a$$

جہاں فنکشن f کو وقفہ $[a, b]$ پر مسلسل مانا گیا ہے۔ تب $\mathrm{A}'(x) = f(x)$ ہے تمام $x \in [a, b]$ کے لیے

- **تکملہ احصا کا دوسرا بنیادی مسئلہ (Second fundamental theorem of integral calculus)**

مان لیجیے f، x کا مسلسل تفاعل ہے جو کہ بند وقفہ $[a, b]$ میں بیان کیا گیا ہے اور F ایک دوسرا تفاعل ہے، تا کہ $\frac{d}{dn}\mathrm{F}(n) = f(n)$ تمام x کے لیے جو کہ f کے علاقہ میں ہیں۔ تب

$$\int_a^b f(x)\, dx = [\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

یہ وسعت علاقہ $[a, b]$ پر f کا معین تکملہ کہلاتا ہے، جہاں a اور b تکمل کی انتہا کہلاتی ہیں a زیریں انتہا ہے اور b بالائی انتہا ہے۔

© NCERT not to be republished