अध्याय 2

रिश्ते संख्याओं के

2.1 रिमझिम और मुकुल पिछली कक्षाओं में सीखे गुणनखंड का अभ्यास कर रहे हैं। रिमझिम ने 16 के गुणनखंड 2, 4, 6 व 8 बताए।

मुकुल – रिमझिम तुम 6 को 16 का गुणनखंड कैसे कह रही हो? क्या तुम 16 को 6–6 के समूह में बाँट सकती हो?

रिमझिम– मैं करके देखती हूँ।

* * * * * *
* * * * * *
* * * *

अरे, दो बार तो 6–6 का समूह बन गया पर तीसरी बार में 2 कम रह गए।

मुकुल – इसका अर्थ हुआ कि 6, 16 का गुणनखण्ड नहीं है। क्योंकि 16 को 6–6 के समूह में पूरा नहीं बाँटा जा सकता है।

रिमझिम– बराबर–बराबर बाँटने का मतलब तो भाग करना भी होता है, तो क्या हम कह सकते हैं कि वे सभी संख्याएँ जिनका पूरा–पूरा भाग 16 में जाए वे 16 का गुणनखंड होंगी ?

2.2 गुणनखण्ड एवं गुणज

रिमझिम वे संख्याएँ ज्ञात करना चाहती है जो 8 को पूरा–पूरा विभाजित करती है। वह 8 को 8 व उससे छोटी संख्याओं से इस प्रकार विभाजित करती हैं

1) 8 (8 - 8 ——— 0 ———	2) 8 (4 - 8 ——— 0 ———	3) 8 (2 - 6 ——— 2 ———	4) 8 (2 - 8 ——— 0 ———
भागफल 8 है शेषफल 0 है।	भागफल 4 है शेषफल 0 है।	भागफल 2 है शेषफल 2 है।	भागफल 2 है शेषफल 0 है।
5) 8 (1 - 5 ——— 3 ———	6) 8 (1 - 6 ——— 2 ———	7) 8 (1 - 7 ——— 1 ———	8) 8 (1 - 8 ——— 0 ———
भागफल 1 है शेषफल 3 है।	भागफल 1 है शेषफल 2 है।	भागफल 1 है शेषफल 1 है।	भागफल 1 है शेषफल 0 है।

रिमझिम – 1, 2, 4 व 8 ऐसी संख्याएँ हैं जिनका पूरा–पूरा भाग 8 में जाता है। अतः 1, 2, 4 व 8 संख्या 8 के गुणनखण्ड हैं। अतः 8 को 1 x 8, 2 x 4 के रूप में लिख सकते हैं **गुणनखंड को हम अपवर्तक भी कहते हैं।**

मुकुल – रिमझिम इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं कि 1, 2, 4 व 8 का एक गुणज 8 है (अतः 1, 2, 4 व 8 के पहाड़ों में 8 आता है।)

करो और सीखो

नीचे दी गई तालिका में संख्याओं के सामने इनके गुणनखंड लिखिए।

संख्या	गुणनखंड
12	1, 2, 3, 4, 6, 12
24	....
27	....
17	....
15	....
7	....

ऊपर दी गई तालिका से क्या आप कह सकते हैं कि 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है?

....

2.3 भाज्य और अभाज्य संख्याएँ

नीचे दी गई संख्याओं के गुणनखण्डों को देखिए।

संख्या	गुणनखण्ड	गुणनखण्डों की संख्या
1	1	1
2	1,2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7	1,7	2
8	1,2,4,8	4

तालिका 2.1

तालिका में 1 ही केवल ऐसी संख्या है जिसके गुणनखण्डों की संख्या 1 है, इसलिए ये न तो भाज्य है न ही अभाज्य।

तालिका को देखकर बताइए , वे कौन–कौन सी संख्याएँ हैं जिनके केवल दो गुणनखण्ड हैं ? ....

ऐसी संख्याएँ जिनके दो ही गुणनखण्ड होते हैं (1 तथा स्वयं वह संख्या) उन्हें **अभाज्य संख्या** कहते हैं, जैसे 2, 3, 5, 7 आदि।

दो से अधिक गुणनखण्डों वाली संख्याएँ **भाज्य अथवा संयुक्त संख्याएँ** कहलाती हैं, जैसे 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

संख्या खेल– आओ हम एक ऐसा खेल खेलते हैं जिसकी सहायता से हम बिना गुणनखण्ड किए भी बता सकते हैं कि संख्या भाज्य या अभाज्य है। सबसे पहले 1 से 100 तक की संख्याओं को नीचे दर्शाए अनुसार लिखिए –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चरण 1 संख्या 1 पर सबसे पहले बॉक्स ☐ बनाएँ क्योंकि यह ना तो भाज्य संख्या है और ना ही अभाज्य संख्या है।

चरण 2 संख्या 2 पर घेरा लगाइए और 2 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों जैसे 4, 6 व 8 इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 3 अगली बिना कटी संख्या 3 है। 3 पर घेरा लगाइए और 3 के शेष सभी गुणजों को काट दीजिए।

चरण 4 इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक की दी गई सभी संख्याओं पर या तो घेरा ना लग जाए या वे कट ना जाएँ। घेरा लगी सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं।

इस खेल के बाद बताइए कि 1 से 100 के बीच आपको कितनी अभाज्य संख्याएँ प्राप्त होती हैं? इन अभाज्य संख्याओं को क्रमबद्ध लिखिए और अपने दोस्तों से इनका मिलान भी कीजिए।

2.4 सम–विषम संख्याएँ

कनक और प्रीतम कंचे से खेल रहे थे।

कनक– देखो प्रीतम, मैं तुम्हें एक खेल सिखाती हूँ। कुछ कंचे मुट्ठी में लेकर आपस में मिलाकर एक मुट्ठी में जितने चाहो उतने ले कर अपनी मुट्ठी बंद कर लो। अब मुझे बताना है कि तुम्हारी मुट्ठी में कंचे जोड़ों में हैं या नहीं। इस खेल को एकी या बेकी भी कहते हैं।

एकी मतलब जितने, कंचे मुट्ठी में हैं उनके दो–दो के समूह बनाना और यदि कोई कंचा अकेला बच जाए तो हुआ एकी और यदि सभी कंचों के दो–दो के जोड़े बन जाए तो वह हुआ बेकी। कनक व प्रीतम ने इस खेल को खेला और इसे तालिका में लिखा।

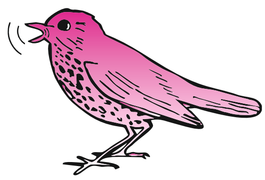
आप भी यह खेल अपने दोस्तों के साथ खेलिए और तय कीजिए कि किन–किन संख्याओं को एकी कहा जाए और किन संख्याओं को बेकी कहा जाए ?

क्या आप कोई नियम बना पाए ? इकाई के स्थान पर 2, 4, 6, 8, 0 होने पर संख्याएँ सम संख्याएँ कहलाती हैं। 1, 3, 5, 7, 9 इकाई स्थान पर हो तो वे संख्याएँ विषम संख्याएँ कहलाती हैं।

स्कोर कार्ड			
कनक		प्रीतम	
15	कंचे	बेकी	गलत
19	कंचे	एकी	सही
24	कंचे	बेकी	सही
....		....	....

तालिका 2.2

ऐसी सभी संख्याएँ जिनमें 2 का पूरा–पूरा भाग जाए या वे 2 का गुणज हो सम संख्याएँ कहलाती हैं।



करो और सीखो

सम व विषम संख्याओं को अलग–अलग लिखिए।

(i) 357 (ii) 436 (iii) 77 (iv) 1900 (v) 5001

सम संख्याएँ................................विषम संख्याएँ................................

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के सभी गुणनखण्ड लिखिए।
   (i) 48 (ii) 36 (iii) 28 (iv) 100 (v) 125
2. निम्नलिखित संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए।
   (i) 7 (ii) 12 (iii) 17 (iv) 15 (v) 18
3. 10 से 30 के बीच की सभी अभाज्य संख्याओं को लिखिए।
4. सबसे छोटी अभाज्य संख्या लिखिए।
5. निम्नलिखित में से कौनसी संख्याओं का 6 एक गुणनखण्ड है?
   6, 10, 12, 15, 18, 25, 30, 38, 46
6. ऐसी तीन संख्याएँ लिखिए जो 4 व 6 दोनों की गुणज हो।
7. सत्य या असत्य बताइए।
   (i) 108, 9 का एक गुणज है।
   (ii) 7, 27 का एक गुणनखण्ड है।
   (iii) दो अभाज्य संख्याओं का योग एक सम संख्या होता है।
   (iv) प्रत्येक अभाज्य संख्या विषम होती है।
   (v) 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है।
   (vi) प्रत्येक संख्या का गुणज उससे छोटा होता है।
   (vii) प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड उससे छोटा होता है।

2.5 विभाज्यता के नियम

2.5.1 इकाई स्थान के अंक के आधार पर

(i) 2 से विभाज्यता

हमने अभी सम एवं विषम संख्याओं के बारे में सीखा है अब आप बताइए क्या हम कह सकते हैं कि सभी सम संख्याएँ 2 से विभाजित होती हैं? कुछ सम व विषम संख्याएँ लीजिए जैसे 24, 15, 48, 26, 13, 11 और उनके गुणनखण्ड कीजिए।

24 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

15 के गुणनखण्ड 1, 3, 5, 15

इसी प्रकार आप संख्याओं 26, 48, 13, 11 के गुणनखण्ड कीजिए।

2 जिन संख्याओं का एक गुणनखण्ड है उनके इकाई स्थान पर कौनसा अंक है ? लिखिए ....

संख्याएँ		संख्याएँ	
सम	2 से भाज्य	विषम	2 से भाज्य
22	हाँ	11	नहीं
28		51	
50		57	
36		23	
——		——	
——		——	

तालिका 2.3

अतः हम कह सकते हैं कि वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई स्थान पर 0, 2, 4, 6, 8 आता है वे संख्याएँ 2 से विभाज्य होती हैं और 2 उनका एक गुणनखण्ड भी होता है।

(ii) 10 से विभाज्यता

संख्याएँ	10 से भाज्य हाँ/नहीं
20	
22	
120	
50	
17	
19	

तालिका 2.4

तालिका में आप कुछ और संख्याएँ भरिए। 10 से भाज्य संख्याओं के इकाई स्थान वाले अंक को देखने पर क्या आपको कोई पैटर्न मिलता है?

वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर शून्य आता है या जिनका एक गुणनखण्ड 10 होता है वे 10 से पूर्णतः विभाजित होती हैं।

(iii) 5 से विभाज्यता

दी गई संख्याओं के सभी गुणनखण्ड लिखिए।

संख्याएँ	गुणनखण्ड
45	1,3,5,9,45
40	1,2,4,5,8,10,20,40
32	....
18	....
25	....

अब उन सभी संख्याओं के इकाई अंकों को देखिए जिनका एक गुणनखण्ड 5 है।

अतः हम कह सकते हैं कि वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर 0 अथवा 5 आता है वे संख्याएँ 5 से विभाज्य होती हैं।

करो और सीखो

1. क्या जिन संख्याओं में इकाई का अंक 5 या 0 होता है, उन सभी संख्याओं का एक गुणनखण्ड 5 होगा?
2. क्या वे सभी संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी?
3. क्या ऐसी कोई संख्या जिसका इकाई का अंक 5 या 0 ना हो, उसका एक गुणनखण्ड 5 हो सकता है?

2.5.2 अंकों के योग के आधार पर

(i) 3 की विभाज्यता का नियम

कक्षा में शिक्षक एक खेल खिलाएगा ।

1. कोई एक संख्या सोचिए।
2. उस संख्या के अंकों का योग कीजिए।
3. अंकों के योग में 3 का भाग दीजिए।
4. क्या भाग पूरी–पूरी बार गया?
5. मूल संख्या में 3 का भाग दीजिए।
6. क्या भाग पूरी–पूरी बार गया?

विद्यार्थियों से प्राप्त परिणामों को शिक्षक श्यामपट्ट पर समेकित करेंगे।

संख्याएँ	अंकों का योग	3 से विभाज्य
39	3 + 9 = 12 ; 1 + 2 = 3	हाँ
109	1 + 0 + 9 = 10 ; 1 + 0 = 1	नहीं
507		
1008		
....		

तालिका 2.5

ऊपर दी गई तालिका को पूरा कीजिए–
रीना ने 321 में इस नियम से 3 की विभाज्यता को जाँचा
321 में संख्यांकों का योग = 3 + 2 + 1 = 6
6, 3 से विभाजित है।

3) 321 (107
- 3
021
- 21
00

अतः हम कह सकते हैं कि यदि किसी संख्या के सभी अंकों का योगफल 3 से विभाजित होता है तो वह संख्या भी 3 से भाज्य होगी।

(ii) 9 की विभाज्यता का नियम

संख्या	अंकों का योग	संख्या 9 से भाज्य
1827	1 + 8 + 2 + 7 = 18	हाँ
1227		
3395		
145		
....		

तालिका 2.6

तालिका को पूरा कीजिए, क्या आप इससे 9 की विभाज्यता के लिए कोई पैटर्न बता सकते हैं?
यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य है तो वह संख्या भी 9 से भाज्य होगी।

करो और सीखो

3672 में अंकों का योग 3 + 6 + 7 + 2 = 18
क्या यह 9 से भाज्य है ? 3672 ÷ 9 करके देखिए।

(iii) 6 की विभाज्यता का नियम

संख्या 216 पर 2 व 3 की विभाज्यता को जाँचिए।

संख्या	2 से भाज्य	3 से भाज्य	6 से भाज्य
216	हाँ	हाँ	हाँ
58	हाँ	नहीं	नहीं
108			
103			
....			

तालिका 2.7

आप कुछ और संख्याएँ तालिका में लिखिए और तालिका को पूरा कीजिए। क्या आपको 6 से विभाज्यता के लिए कोई पैटर्न दिखाई देता है?

यदि कोई संख्या 2 तथा 3 से अलग–अलग विभाजित होती है तो वह 6 से भी विभाज्य होगी।

करो और सीखो

दी गई संख्याओं 336, 123, 1002, 4236 की 6 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

(iv) 4 से विभाज्यता का नियम

जब किसी संख्या के दहाई एवं इकाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाज्य होती है अथवा उस संख्या में दहाई व इकाई के स्थान पर 0 हो तो वह संख्या 4 से विभाजित होती है।

आप कुछ संख्याएँ लेकर इस पैटर्न को जाँचिए।

मीना ने एक संख्या 9212 ली तब इसके दहाई व इकाई स्थान के अंकों से बनी संख्या 12 है जो 4 से भाज्य है। आप इसे भाग करके देखिए।

(v) 8 की विभाज्यता का नियम

यदि किसी संख्या के सैंकड़ा, दहाई, इकाई वाले तीन अंकों की संख्या 8 से विभाजित हो या सैंकड़ा दहाई व इकाई के स्थान पर शून्य हो तो वह संख्या 8 से विभाजित होगी।

इस पैटर्न को तालिका में जाँचिए।

संख्याएँ	सैंकड़ा, दहाई व इकाई अंक से बनी संख्या	8 से भाज्य हाँ/नहीं
1. 30480	480 ÷ 8 = 60	हाँ
2. 42108	108 ÷ 8 = ...	....
3. 1324	324 ÷ 8 = ...	....
4.	.... = ...	....
5	.... = ...	....

तालिका 2.8

(vi) 11 की विभाज्यता का नियम

क्या संख्या 72325, 11 से विभाज्य है? 72325 में विषम स्थान के अंक 7, 3, 5 है।

इन अंकों का योग = 7 + 3 + 5 = 15

इसी प्रकार सम स्थान के अंकों का योग = 2 + 2 = 4

(विषम स्थान के अंकों का योग) - (सम स्थान के अंको का योग) = 15 - 4 = 11, जो 11 से विभाज्य है।

अतः संख्या 72325 भी 11 से भाज्य है।

इसी प्रकार आप भी तालिका को भरिए और पता लगाइए कौन–कौन सी संख्याएँ 11 से विभाज्य है?

```
11) 72325 ( 6575
   - 66
   ----
      63
    - 55
    ----
       82
     - 77
     ----
        55
      - 55
      ----
         0
```

क्र.सं.	संख्याएँ	सम स्थान के अंकों का योग	विषम स्थान के अंकों का योग	अन्तर 11 से भाज्य है / नहीं
1	3333			
2	15708			
3	12345			
4	130303			

तालिका 2.9

क्या ऊपर दी गई तालिका से आप 11 की विभाज्यता के लिए कोई नियम बना सकते हैं ?

वे सभी संख्याएँ जिनके सम तथा विषम स्थानों के अंकों के योग का अंतर 0 या 11 के गुणज हो, 11 से विभाज्य होती है।

2.6 सार्व गुणज एवं अभाज्य गुणनखण्ड

सार्वगुणज

3 व 4 के गुणज क्या हैं?

3 के गुणज = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24---- (कुछ और गुणज लिखिए)

4 के गुणज = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36..... (कुछ और गुणज लिखिए)

अब 3 व 4 के समान गुणजों पर गोला बनाइए।

12, 24, 36....ऐसी संख्याएँ हैं जो 3 व 4 दोनों की गुणज हैं, इन्हें हम 3 व 4 का सार्व गुणज कहते हैं।

अभाज्य गुणनखण्ड

हम संख्याओं के गुणनखण्ड करना सीख चुके हैं। यहाँ हम संख्या 18 के गुणनखण्ड पर विचार करते है– 18 = 2 x 9 18 = 3 x 6

= 2 x 3 x 3 = 3 x 2 x 3

हमे देखते हैं कि संख्या 18 के उपर्युक्त दोनों प्रकार से किए गुणनखण्डों के अंत में प्राप्त गुणनखण्ड अभाज्य संख्याएँ हैं। किसी संख्या के इस प्रकार के गुणनखण्ड अभाज्य गुणनखण्ड कहलाते हैं।

किसी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड निम्न प्रकार भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) 28 (ii) 54 (iii) 96 (iv) 148 (v) 156
2. 4 अंकों की सबसे छोटी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड लिखिए।
3. निम्न के सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) 24, 36 (ii) 35, 40 (iii) 12,18, 30 (iv) 14, 25, 35
4. निम्न के प्रथम तीन सार्वगुणज ज्ञात कीजिए।
   (i) 4 और 5 (ii) 8 व 12 (iii) 2, 4,10 (iv) 3, 9,15
5. 50 से छोटी ऐसी सभी संख्याएँ लिखिए जो 2 व 3 की सार्वगुणज है।

2.7 महत्तम समापवर्तक

2.7.1 अभाज्य गुणनखण्ड विधि से

हमने गुणनखण्ड के बारे में सीखा है चलो गुणनखण्डों की विशेषताओं के बारे में जानकारी करते हैं।

30, 36 व 42 के सर्वसंभव गुणनखण्ड होंगे।

30 =	[1]	[2]	[3]	5	[6]	10	15	30	
36 =	[1]	[2]	[3]	4	[6]	9	12	18	36
42 =	[1]	[2]	[3]	[6]	7	14	21	42	

अतः हम देखते हैं 1, 2 ,3 व 6 संख्या 30, 36 व 42 के समान गुणनखण्ड हैं। इनमें भी 6 वह सबसे बड़ी संख्या है जिससे संख्याएँ 30, 36, 42 तीनों विभाज्य है। ऐसी संख्या को महत्तम समापवर्तक कहते हैं। आओ इसके दैनिक जीवन में उपयोग के उदाहरणों को समझते हैं।

उदाहरण 1 आशा, निशा और श्याम के पास क्रमशः 14 मी., 35 मी. व 21 मी. लम्बे रिबन के रोल हैं तीनों रिबन को बड़े से बड़े समान टुकड़ों में इस प्रकार काटना चाहते हैं कि काटने के पश्चात् रिबन शेष न रहे। तो वह समान रूप से कितने–कितने मीटर के टुकड़े काटेंगे?

हल आशा, निशा व श्याम क्रमशः रिबन के निम्न मापों के टुकड़े काट सकते हैं।

14	=	1	2	7	14
35	=	1	5	7	35
21	=	1	3	7	21

14, 35 व 21 का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ (समान) गुणनखण्ड 7 है अतः 7 मी. वह बड़ी से बड़ी माप है जिसमें हम 14 मी., 35 मी. व 21 मी. के बराबर माप के रिबन काट सकते हैं। यह महत्तम समापवर्तक भी है।

उदाहरण 2 संख्या 24, 36 व 60 का महत्तम समापवर्तक अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात कीजिए।

हल 24, 36 और 60 का म.स. इन संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है –

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

24	=	[2]	x	[2]	x	2	x	[3]
36	=	[2]	x	[2]	x	[3]	x	3
60	=	[2]	x	[2]	x	[3]	x	5

24, 36 व 60 के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = 2 x 2 x 3

अतः 24, 36 और 60 का म.स. 2 x 2 x 3 = 12

करो और सीखो

राजू की गाय 15 लीटर तथा भैंस 20 लीटर दूध देती है उस बर्तन का अधिकतम माप क्या होगा जो गाय व भैंस के दूध को पूरा–पूरा माप सके?

2.7.2 वैदिक विधि से

वैदिक गणित में सूत्र (संकलन– व्यवकलन) से भी म.स. ज्ञात किया जा सकता है, आओ प्रयास करें।

उदाहरण 3 संख्या 24 व 36 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल संख्याओं का प्रथम अंतर = 36 - 24 = 12

अतः संभावित म.स. = 12

दूसरा अंतर 24 - 12 = 12, प्रथम अंतर = दूसरा अंतर है। अतः 24 व 36 का म.स. = 12

उदाहरण 4 संख्या 145 व 232 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल प्रथम अंतर 232 - 145 = 87 अतः संभावित म.स. 87

दूसरा अंतर 145 - 87 = 58 अतः संभावित म.स 58

तीसरा अंतर 87 - 58 = 29 अतः संभावित म.स 29

चौथा अंतर 58 - 29 = 29 अतः म.स. 29

145 व 232 का म.स. = 29

उदाहरण 5 संख्या 18, 54, 81 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल दो संख्या का संकलन 18 + 81 = 99

प्रथम अंतर 18 + 81 - 54 = 45 अतः संभावित म.स. 45

दूसरा अंतर 54 - 45 = 9 अतः संभावित म.स. 9

संभावित म.स. 9, 45 का गुणज है।

अतः 18, 54, 81 का म.स. = 9

करो और सीखो

वैदिक विधि से म.स. ज्ञात कीजिए।

(i) 8,12 (ii) 38, 57 (iii) 117, 195 (iv) 99, 165, 231

प्रश्नावली 2.3

1. निम्न संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।
   (i) 36, 84 (ii) 28, 42 (iii) 13, 26, 52
   (iv) 15, 35, 40 (v) 23, 31, 93
2. निम्न का म.स. क्या है ?
   (i) दो क्रमागत संख्याएँ (ii) दो क्रमागत सम संख्याएँ (iii) दो क्रमागत विषम संख्याएँ

3. एक फर्श की चौड़ाई 25 मी. और लम्बाई 30 मी. है। ऐसी सबसे लम्बी रस्सी की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो कमरे की लम्बाई और चौड़ाई को पूरा–पूरा नाप ले।

4. तीन टैंकरों में क्रमश : 96 ली, 100 ली और 144 ली तेल आता है उस बर्तन का अधिकतम माप क्यो होगा जो तीनों टैंकरों के तेल को पूरा–पूरा माप देगा ?

5. 36 मीटर, 54 मीटर और 90 मीटर की दूरियों को नापने के लिए बड़ी से बड़ी किस लम्बाई की रस्सी की आवश्यकता होगी ?

2.8 लघुत्तम समापवर्त्य

अध्यापक कक्षा में बच्चों से एक पहेली पूछते हैं।

''चार–चार या पाँच–पाँच की बनाऊँ ढ़ेरियाँ।
दोनों बार पूरी–पूरी बँटे कम से कम कितनी बेरियाँ।''

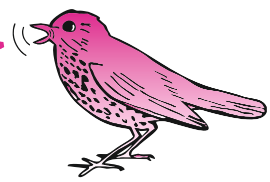
लीला – इसका मतलब ये हुआ कि हर ढ़ेरी में बेर समान हो तथा दोनों ढ़ेरियाँ पूरी–पूरी बँटनी चाहिए न बचे न घटे।

अध्यापक – हाँ, अब ये बताओ कि हर ढ़ेरी में कम से कम कितने बेर होंगे ?

कमल – अगर बेर 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 आदि संख्याओं में हो तो उन्हें चार–चार की ढ़ेरियों में बाँटा जा सकता हैं।

लीला – अगर बेर 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 45 आदि संख्याओं में हो तो पाँच–पाँच की ढ़ेरियों में पूरा–पूरा बाँट सकते है।

वह छोटी से छोटी संख्या जो दो या दो से अधिक संख्याओं से पूरी–पूरी विभाजित हो जाती है उन संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य कहलाती है।



करो और सीखो

दो घंटियाँ एक साथ बजना प्रारंभ करती है। पहली घंटी हर 3 मिनिट बाद तथा दूसरी घंटी हर 5 मिनिट बाद पुनः बजती है तो दोनों घंटियाँ कितने समय पश्चात् फिर से एक साथ बजेगी?

2.8.1 लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की विधियाँ

1. अभाज्य गुणनखण्ड विधि

48 और 30 का ल.स. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात करते हैं।

चरण 1 : प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

48 = 2x2x2x2x3

30 = 2x3x5

2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	30
3	15
5	5
	1

चरण 2 : इन अभाज्य गुणनखण्ड़ों में, अभाज्य गुणनखण्ड 2 अधिकतम 4 बार आता है। (यह 48 में है) और 3 तथा 5 अधिकतम 1—1 बार ही आते है।

अतः अभीष्ट ल.स. = 2x2x2x2x3x5 = 240 होगा।

2. भाग विधि

18, 24 और 30 का ल.स. भाग विधि से ज्ञात करते हैं।

चरण 1 : संख्याओं को नीचे दर्शाए अनुसार पंक्ति में लिखते हैं।

2	18, 24, 30
2	9, 12, 15
2	9, 6, 15
3	9, 3, 15
3	3, 1, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

चरण 2 : छोटी से छोटी संख्याओं से भाग देते हैं। जो संख्याएँ विभाजित नहीं होती हैं उन्हें अगली पंक्ति में वैसा का वैसा ही लिखते हैं।

चरण 3 : इसे तब तक जारी रखते हैं, जब तक संख्या विभाजित होती रहे। फिर अगली अभाज्य संख्या से विभाजन की प्रक्रिया दोहराते हैं, जब तक सभी संख्याएँ पूरी तरह से विभाजित ना हो जाए।

चरण 4 : हर पंक्ति की भाजक संख्याओं का गुणा ल.स. होता है।

अतः 18, 24, 30 का ल.स. 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 = 360

3. वैदिक विधि

संख्या 12 व 16 का ल.स. वैदिक विधि से ज्ञात करते हैं।

चरण 1 : 12 व 16 को भिन्न रूप में $\frac{12}{16}$ लिखते हैं। (सूत्र आनुरूप्येण)

चरण 2 : 12 व 16 के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं। $\frac{12}{16} = \frac{2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$

चरण 3 : जो संख्या अंश व हर में उभयनिष्ठ है उन्हें हटा देते हैं। $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

चरण 4 : उर्ध्वतिर्यक गुणा विधि से 12 x 4 = 16 x 3 = 48 प्राप्त हुआ।

अतः 12 व 16 का ल.स. 48 है।

करो और सीखो

1. संख्या 48, 64 व 80 का लघुत्तम समापवर्त्य भाग विधि से ज्ञात कीजिए।
2. संख्या 24, 30 का लघुत्तम समापवर्त्य वैदिक विधि से ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 2.4

1. निम्नलिखित का ल.स. ज्ञात कीजिए।
   (i) 10, 15
   (ii) 14, 28
   (iii) 12, 18 और 27
   (iv) 48, 56 और 72
2. न्यूनतम कितने आमों को 5-5 और 6-6 के समूहों में पूरा–पूरा बाँटा जा सकता है ?
3. स्नेहा और वंश क्रमशः प्रत्येक तीसरे व पाँचवे दिन बाजार जाते हैं। आज दोनों बाजार गए थे। कितने दिन बाद वे फिर से एक साथ बाजार जाएँगे?
4. हरीश, सलीम और राकेश किसी मैदान का पूरा चक्कर लगाने में क्रमश : 6, 8 और 12 मिनट लगाते है। तीनों 6 बजे साथ दौड़ना आरंभ करे तो कितने समय बाद तीनों एक साथ होंगे?
5. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 16, 20 व 24 से पूरी–पूरी विभाजित हो।
6. एक नीला बल्ब प्रत्येक 60 सेकण्ड में जलता व बुझता है तथा एक लाल बल्ब प्रत्येक 90 सेकण्ड में जलता व बुझता है। यदि दोनों बल्ब 5 बजे एक साथ जलते हैं तो कितनी बजे पुनः एक साथ जलेंगे?

हमने सीखा

1. (i) एक संख्या का गुणनखण्ड उस संख्या का पूर्ण विभाजक होता है।
   (ii) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणनखण्ड होती है। 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है।
   (iii) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणनखण्ड उस संख्या से छोटा या बराबर होता है।
   (iv) प्रत्येक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखण्डों का एक गुणज होती है।
   (v) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।
   (vi) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणज है।
2. (i) वह संख्या जिसके दो ही गुणनखण्ड होते हैं (संख्या स्वयं और 1) अभाज्य संख्या कहलाती है। जिन संख्याओं के दो से अधिक गुणनखण्ड होते है, वे संख्याएँ भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

(ii) संख्या 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है जो एक सम संख्या भी है। अन्य सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।

3. संख्याओं को बिना भाग की क्रिया किए उनकी संख्या 2, 3,4, 5, 8, 9, 10 और 11 से विभाज्यता की जाँच कर सकते है। हमने संख्या के अंकों का विभिन्न संख्याओं से विभाज्यता के संबंधों का अध्ययन किया है।

(i) 2, 5 और 10 से विभाज्यता केवल इकाई के अंक को देखकर बताई जा सकती है।

(ii) 3 और 9 से विभाज्यता संख्या के अंकों के योग द्वारा बताई जा सकती है।

(iii) 4 से विभाज्यता इकाई और दहाई तथा 8 से विभाज्यता इकाई, दहाई व सैंकड़े से बनने वाली संख्या द्वारा जाँची जा सकती है।

(iv) 11 से विभाज्यता दाईं ओर से सम स्थानों के अंकों के योग और विषम स्थानों के अंकों के योग के अंतर द्वारा जाँची जा सकती है।

4. यदि दो संख्याएँ एक संख्या से विभाजित होती है तो उन दोनों का योग तथा अंतर भी उस संख्या से विभाजित होता है।

5. दो या अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) उसके सार्वगुणनखंडों में से सबसे बड़ा होगा।

6. दो या अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) उसके सार्वगुणजों में से सबसे छोटा होगा। वैदिक गणित के माध्यम से भी संख्याओं का ल.स. (LCM) एवं म.स. (HCF) ज्ञात किया जा सकता है।