அத்தியாயம் 1

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துக்கொள்ள இயலும்

- அணி மற்றும் அணிக்கோவைகளின் வரையறை
- அணிக்கோவைகளின் பண்புகள்
- சேர்ப்பு அணியின் கருத்துரு
- நேர்மாறு அணியின் கருத்துரு
- ஒருங்கமை நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்
- உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு

செகி கொவா

1.1 அணிக்கோவைகள் (Determinants)

அறிமுகம்

பழமைவாய்ந்த சீன முறையில் ஒருங்கமைசமன்பாடுகளின்கெழுக்கள்மூங்கில் குச்சிகளைக் கொண்டு கணக்கிடும் நோக்கில் சீரமைக்கப்படும் நேரத்தில் செகி கொவா (1683) என்கிற ஜப்பானிய கணிதவியலாளர் அணிக்கோவைகள் பற்றிய கருத்தை உருவாக்கினார் என்று நம்பப்படுகிறது. பின்னர் காட்ஃபிரைட் வில்கெம் வான் லெபனைட்ஸ் என்கிற ஜெர்மானிய கணிதவியலாளர் அணிக் கோவைகளை முறையாக மேம்படுத்தினார். ஆர்தர் கெய்லே (1841) என்பவர் நிகழ்காலத்தில் அல்லது தற்போது பயன்படுத்தப்படுகின்ற செங்குத்துக்கோடு குறியீட்டை அறிமுகப்படுத்தினார். ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை தீர்ப்பதற்கான விதிகளை 1750ஆம் ஆண்டு வெளியிட்டவர் என்று அறியபட்ட கிராமர் என்பவரால் அணிகோவை அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

9XJ3SA

பத்தாம் வகுப்பில் அணிகள் மற்றும் அதன் இயற்கணித பண்புகள் பற்றி படித்துள்ளோம். மேலும் இயற்கணித சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை அணிவடிவில் எழுதலாம் எனவும் படித்துள்ளோம். (x_1, y_1) (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) உச்சிகளை கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பானது,

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

என நாம் அறிந்துள்ளோம். இவ்வகை அமைப்பினை நினைவுக்கூர்வதில் கடினத்தன்மையைக் குறைக்கும் விதமாக கணிதவியலாளர்கள் இவற்றை அணிக்கோவை அமைப்பில் விவரிக்கும் முறையை உருவாக்கினார்கள். எனவே மேற்கண்ட அமைப்பை

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ என எழுதலாம்.

ஆகையால் ஒரு அணிக்கோவை என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட விரிவாக்கத்தை எளிய வழியில் எழுத உதவும் அமைப்பு ஆகும். அவைகள் சதுரவடிவில் இரு குத்துக்கோடுகளுக்கிடையே வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளதை காண்க. இப்பாடப்பகுதியில் மெய்யெண்களை மூலகங்களாக கொண்ட மூன்று வரிசை

வரையுள்ள அணிக்கோவைகளைப் பற்றி படிப்போம். மேலும் அணிக்கோவைகளின் பல்வேறு பண்புகள் (நிரூபணமின்றி), சிற்றணிக்கோவைகள், இணைக்காரணிகள், சேர்ப்பு அணி, சதுர அணியின் நேர்மாறு மற்றும் அணிக்கோவைகளின் வணிக பயன்பாடு ஆகியவற்றை கற்கலாம்.

முந்தைய வகுப்புகளில் அணிகளைப் பற்றி கற்றுக் கொண்டோம். அணிகள் மற்றும் அவற்றின் செயல்பாடுகள் பற்றி நினைவு கூறலாம்.

1.1.1 நினைவு கூறுதல்

அணி (Matrix)

வரையறை 1.1

உறுப்புகளைச் செவ்வக வடிவில் நிரைகள் மற்றும் நிரல்களைக் கொண்டு ஒரு அடைப்புக் குறிக்குள் அமைப்பது அணியாகும்.

அணிகளை A, B, C, …என்ற எழுத்துகளால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

உதாரணமாக , $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

அணியின் வரிசை அல்லது பரிமாணம் (Order of a matrix)

ஓர் அணி A இல் m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் இருந்தால் அந்த அணி A இன் வரிசை $m \times n$ ஆகும்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் A இன் வரிசை 2×3

அணியின் பொதுவடிவம் (General form of matrix)

பொதுவாக $m \times n$ வரிசையுள்ள அணி A பின்வருமாறு அமையும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} & \cdots\ \cdots\ a_{1i} & \cdots\ \cdots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} & \cdots\ \cdots\ a_{2i} & \cdots\ \cdots\ a_{2n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3} & \cdots\ \cdots\ a_{mi} & \cdots\ \cdots\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

இதனை சுருக்கமாக $[a_{ij}]_{mxn}$ $i = 1, 2, ...m;$ $j = 1, 2, \ldots .n$ எனவும் எழுதலாம். இங்கு a_{ij} என்ற உறுப்பு நிரை i மற்றும் நிரல் j–இல் உள்ள உறுப்பு ஆகும்.

அணியின் வகைகள்

நிரை அணி (Row matrix)

ஒரே ஒரு நிரையை மட்டுமே கொண்ட அணி நிரை அணி எனப்படும்.

உதாரணமாக,

$$A = [\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1i} \ldots\ldots\ldots a_{1n}]_{1\times n};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}_{1 X 2}$$

நிரல் அணி (Column matrix)

ஒரே ஒரு நிரலை மட்டுமே கொண்ட அணி நிரல் அணி எனப்படும்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

பூச்சிய அணி அல்லது இன்மை அணி (சுழி அணி) (Zero matrix)

ஓர் அணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அவ்வணி பூச்சிய அணி எனப்படும்

உதாரணமாக,

$$O = [0],\ O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்பன பூச்சிய அணிகளாகும்.

குறிப்பு

பூச்சிய அணியின் வரிசை எந்த வரிசையாகவும் அமையலாம்.

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 2 20-04-2020 05:08:23 PM

சதுர அணி (Square matrix)

ஓர் அணியின் நிரை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அவ்வணி ஒரு சதுர அணியாகும்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ வரிசை 2-ஐ உடைய சதுர அணி ஆகும்

$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 \\ 2 & \frac{3}{5} & -4 \end{bmatrix}$ வரிசை 3-ஐ உடைய சதுர அணி ஆகும்.

குறிப்பு

ஒரு சதுர அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் கூடுதல் அணியின் சுவடு ஆகும்.

முக்கோண அணி (Triangular matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேல் அல்லது கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில் அவ்வணி முக்கோண அணியாகும்.

உதாரணமாக,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

மூலைவிட்ட அணி (Diagonal matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில் அவ்வணி மூலைவிட்ட அணியாகும்.

உதாரணமாக,

$A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3–ஐ உடைய மூலைவிட்ட அணியாகும்.

திசையிலி அணி (Scalar matrix)

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் சமமாக இருந்தால் அது திசையிலி அணி ஆகும்.

உதாரணமாக,

$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3 உடைய திசையிலி அணியாகும்.

அலகு அணி அல்லது சமனி அணி (Unit matrix)

ஒரு திசையிலி அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் "எண் ஒன்று" எனில் அவ்வணி சமனி அணி அல்லது அலகு அணி எனப்படும்.

உதாரணமாக,

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 2 உடைய அலகு அணியாகும்.

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3 உடைய அலகு அணியாகும்.

அணியின் திசையிலி பெருக்கல் (Multiplication of matrix by scalar)

$A = [a_{ij}]$ என்ற அணியின் அனைத்து உறுப்புகளையும் k என்ற திசையிலியால் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் அணி $kA = [ka_{ij}]$ $(i, j$ –ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்).

மாறாக ஓர் அணி A-யை மாறிலி k ஆல் பெருக்குவது என்பது அணி A இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் k ஆல் பெருக்க கிடைக்கும் அணியாகும்.

உதாரணமாக, $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ எனில், $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & -4 & 16 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

அணியின் எதிர்மறை (Negative of a matrix)

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு அணி என்க. A இன் கூட்டல் எதிர்மறை $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ ஆனது அனைத்து உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 3 20-04-2020 05:08:24 PM

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ எனில்,

$-A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

சம அணிகள் (Equality of matrices)

A, B என்ற இரு அணிகள்

(i) ஒரே வரிசை உடையனவாகவும்

(ii) அவற்றின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகவும் இருந்தால் அவை சம அணிகள் எனப்படும்.

அணிகளின் கூட்டலும், கழித்தலும் (Addition and subtraction of matrices)

இரு அணிகள் A, B என்பன ஒரே வரிசையாக அமையும்போது மட்டும் அவற்றின் கூட்டல், கழித்தல் வரையறுக்கப்படுகிறது. இவற்றின் கூடுதல் $A + B$ ஆனது A, B இன் ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுவதாகும். குறியீட்டு முறையில்

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ எனில், $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

இதே போன்று $A - B = A + (-B) = [a_{ij}]_{m\times n} + [-b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$ என்பதாகும்.

அணிகளின் பெருக்கல் (Multiplication of matrices)

A, B என்ற இரு அணிகளில் A இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B –ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் இவ்வணிகள் பெருக்கத்தக்கவை எனப்படும். அணி A இன் ஒவ்வொரு நிரையிலுள்ள உறுப்புகளையும் அணி B இன் ஒவ்வொரு நிரலின் ஒத்த உறுப்புகளுடன் பெருக்கி கூட்டுவதன் மூலம் AB என்ற பெருக்கல் அணி கிடைக்கிறது.

$A = [a_{ij}]$ என்பது $m \times p$ வரிசையுடைய அணி மற்றும் $B = [b_{ij}]$ என்பது $p \times n$ வரிசையுடைய அணி எனில் AB யின் பெருக்கல் அணி $C = [c_{ij}]$ என்பது $m \times n$ வரிசையுடைய அணி ஆகும்.

நிரை நிரல் மாற்று அணி (Transpose Matrix)

$A = [a_{ij}]$ என்பது $m \times n$ வரிசையுடைய ஒரு அணி என்க. அணி A இன் நிரைகளை நிரல்களாகவும் அல்லது நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படும் அணி A இன் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். அந்த அணியை A^T என்று குறிக்கலாம். இங்கு A^T இன் வரிசை $n \times m$ ஆகும்.

உதாரணமாக,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

குறிப்பு

மேற்கூறியக் கருத்துகள், மாணவர்கள் நன்கு அறிந்தவை என நம்பப்படுகிறது. நமது தற்போதைய பாடத்திட்டத்தினை கீழ்வரும் பிரிவுகளிலிருந்து தொடங்குவோம்.

வரையறை 1.2

மெய்யெண்கள் அல்லது கலப்பெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட n வரிசையுள்ள ஒவ்வொரு சதுர அணி A யுடன் நாம் ஓர் எண்ணை தொடர்புபடுத்த முடியுமானால், இதனை அணி A இன் அணிக்கோவை என்கிறோம். இதனை $|A|$ அல்லது $\det(A)$ அல்லது Δ எனகுறிக்கலாம்.

சதுர அணி A இன் உறுப்புகளை கொண்டு ஓர் அணிக்கோவையை வடிவமைத்தால் இதனை அணி A இன் அணிக்கோவை எனலாம்.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ எனில்

$$|\text{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.1

மதிப்பிடுக : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 4 20-04-2020 05:08:25 PM

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4)-(-1)4$$
$$= 8+4 = 12$$

மூன்று அல்லது அதற்கு மேல் வரிசையுடைய அணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளை மதிப்பிடுவதற்கு நாம் சிற்றணி மற்றும் இணைகாரணிகளை வரையறுக்க வேண்டும்.

1.1.2 சிற்றணிக்கோவை (Minor)

$|A| = |[a_{ij}]|$ என்பது n வரிசையுடைய அணிக்கோவை என்க. ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு a_{ij} இன் சிற்றணிக்கோவையானது a_{ij} அமைந்த நிரை மற்றும் நிரலை நீக்குவதால் பெறப்படும் அணிக்கோவையாகும். a_{ij} யின் சிற்றணிக்கோவையானது M_{ij} எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

1.1.3 இணைக்காரணிகள் (Cofactors)

தகுந்த குறியுடன் கூடிய சிற்றணிக்கோவைகள் இணைக்காரணிகள் ஆகும். a_{ij} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி A_{ij} எனில்

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

மூன்றாம் வரிசை அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ இன் உறுப்புகளான a_{11}, a_{12}, a_{13} இவற்றின் சிற்றணிக்கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) a_{11} இன் சிற்றணிக்கோவை

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

a_{11} இன் இணைக்காரணி

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

(ii) a_{12} இன் சிற்றணிக்கோவை

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

a_{12} இன் இணைக்காரணி

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

(iii) a_{13} இன் சிற்றணிக்கோவை

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

a_{13} இன் இணைக்காரணி

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில் உள்ள உறுப்புக்களுக்கு சிற்றணிக்கோவை மற்றும் இணைக்காரணிகள் காண்க.

தீர்வு

1 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{11} = 3$

-2 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{12} = 4$

4 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{21} = -2$

3 இன் சிற்றணிக்கோவை $= M_{22} = 1$

1 இன் இணைக்காரணி $= A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 3$

-2 இன் இணைக்காரணி $=$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -4$$

4 இன் இணைக்காரணி $= A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = 2$

3 இன் இணைக்காரணி $= A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பின் சிற்றணிக்கோவை மற்றும் இணைக்காரணிகள் காண்க.

தீர்வு

3 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{11} =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-5 = -5$$

1 இன் சிற்றணிக்கோவை $M_{12} =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0-20 = -20$$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 5 20-04-2020 05:08:27 PM

2 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{13} =

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6$$

2 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{21} =

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

2 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{22} =

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 8 = -8$$

5 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{23} =

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

4 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{31} =

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

1 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{32} =

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 4 = 11$$

0 இன் சிற்றணிக்கோவை M_{33} =

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

3 இன் இணைக்காரணி A_{11} =

$$(-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = -5$$

1 இன் இணைக்காரணி A_{12} =

$$(-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 20$$

2 இன் இணைக்காரணி A_{13} =

$$(-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = -6$$

2 இன் இணைக்காரணி A_{21} =

$$(-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = 2$$

2 இன் இணைக்காரணி A_{22} =

$$(-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = -8$$

5 இன் இணைக்காரணி A_{23} =

$$(-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = 1$$

4 இன் இணைக்காரணி A_{31} =

$$(-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = 1$$

1 இன் இணைக்காரணி A_{32} =

$$(-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -11$$

0 இன் இணைக்காரணி A_{33} =

$$(-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = 4$$

ஒரு அணிக்கோவையை எந்தவொரு நிரை அல்லது நிரல் வழியாகவும் மதிப்பிடலாம்.

உதாரணமாக,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ (அல்லது) $a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$ (R_1 வழியாக விரிவுபடுத்த)

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ (அல்லது) $a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$ (C_1 வழியாக விரிவுபடுத்த)

எடுத்துக்காட்டு 1.4

மதிப்பு காண்க: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

தீர்வு

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = 1 (1இன் சிற்றணிக்கோவை) −2 (2 இன் சிற்றணிக்கோவை) + 4(4 இன் சிற்றணிக்கோவை)

$$= 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 - 52 = -52.$$

1.1.4 அணிக்கோவைகளின் பண்புகள் (நிரூபணமின்றி)

1. ஓர் அணிக்கோவையின் நிரை, நிரல்களை பரிமாற்றம் செய்தால், அதன் மதிப்பு மாறாது.
2. ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) தமக்குள் பரிமாற்றம் செய்யப்படின் அணிக்கோவை மதிப்பின் குறிமட்டுமே மாறும்.
3. ஓர் அணிக்கோவையில் இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வசமம் எனில் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 6 20-04-2020 05:08:28 PM

4. ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு மாறிலி k ஆல் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு k ஆல் பெருக்கப்படும்.

5. ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்போடும் மற்ற நிரைகளில் (நிரல்களில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளைக் குறிப்பிட்ட மாறிலிகளால் முறையாக பெருக்கிக் கூட்டுவதால் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

6. ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள இரு நிரைகள் (நிரல்கள்) விகித சமத்தில் இருப்பின் அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

7. ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள ஒரு நிரையின் (நிரலின்) ஒவ்வொரு உறுப்பும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருக்கும் எனில் அவ்வணிக்கோவையை அதே வரிசையுடைய இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிக்கோவைகளின் கூட்டல் பலனாக எழுத இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+2a & 2y+2b & 2z+2c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+2a & 2y+2b & 2z+2c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 13 \end{vmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.6

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x^2-(x-1)(x+1)$$
$$= x^2-(x^2-1)$$
$$= x^2-x^2+1 = 1$$

குறிப்பு

முக்கோணம் அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பு என்பது அணியின் முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கல் பலனாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

தீர்க்க $$\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 1, x = 2, x = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 1.8

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 102 & 18 & 36 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$ ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 102 & 18 & 36 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \; (\because R_2 \equiv R_3)$$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 7 20-04-2020 05:08:28 PM

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a-b & (a-b)(a+b) \\ 0 & b-c & (b-c)(b+c) \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)[0-0+\{b+c-(a+b)\}]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

பயிற்சி 1.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கோவைகளின் அனைத்து உறுப்புகளின் சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக்காரணிகளைக் காண்க.

   (i) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு காண்க

3. தீர்க்க: $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில் $|AB|$ யைக் காண்க.

5. தீர்க்க: $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 11 \\ -3 & 5 & x \\ -x & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

6. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு காண்க

7. $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & bc & b+c \\ \frac{1}{b} & ca & c+a \\ \frac{1}{c} & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

8. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ என நிறுவுக.

1.2 அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a matrix)

1.2.1 பூச்சியக்கோவை அணி (Singular matrix)

A என்ற ஒரு சதுர அணியின், $|A| = 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியக்கோவை அணி எனப்படும்.

1.2.2 பூச்சியமற்ற கோவை அணி (Non–singular matrix)

A என்ற ஒரு சதுர அணியின், $|A| \neq 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ –ஐ பூச்சியக்கோவை அணி எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 4 = 0$$

$\therefore A$ என்பது பூச்சிய கோவை அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ –ஐ பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனக் காட்டுக.

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 8 20-04-2020 05:08:30 PM

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 8 = 16$$

$$\neq 0$$

$\therefore$ A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகும்

உங்களுக்கு தெரியுமா?

A மற்றும் B என்பன சம வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் எனில் AB மற்றும் BA முறையே சம வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகளாக இருக்கும்.

1.2.3 சேர்ப்பு அணி (Adjoint of matrix)

A என்ற அணியின் இணைக்காரணிகளால் பதிலீடு செய்து பெறப்படும் அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி, A யின் சேர்ப்பு அணி ஆகும். இதனை adj A என எழுதலாம்

அதாவது adj $A = [A_{ij}]^T$. $[A_{ij}]$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியின் இணைக்காரணி அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் adj A காண்க.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு

(i) $|adjA| = |A|^{n-1}$ இங்கு n என்பது A இன் வரிசையாகும்.

(ii) $|kA| = k^n|A|$ இங்கு n என்பது A இன் வரிசையாகும்.

(iii) $adj(kA) = k^{n-1}adjA$ இங்கு n என்பது A இன் வரிசையாகும்.

(iv) $A(adj\ A) = (adj\ A)A = |A|I$

(v) $AdjI = I$, I என்பது ஓர் அலகு அணி.

(vi) adj (AB) = (adj B)(adj A)

(vii) $|AB| = |A|\,|B|$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனில் adj A காண்க

தீர்வு

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 0-(-4) = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(0-(-3)) = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0-12 = -12$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-8) = 7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0-(-3) = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0-0 = 0$$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 9 20-04-2020 05:08:31 PM

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -3 & -12 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.4 நேர்மாறு அணி

A என்பது வரிசை n உடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணி என்க. $AB=BA=I$ (I என்பது n வரிசை அலகு அணி) எனுமாறு ஒரு அணி B –ஐ காண முடிந்தால் B ஆனது A இன் நேர்மாறு அணி எனப்படும். A இன் நேர்மாறு அணியை A^{-1} என எழுதலாம்.

இப்போது, $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\, I$

$$\Longrightarrow \quad A\left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right) = \left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right)A = I$$

$\Longrightarrow \quad AB = BA = I$ இங்கு $B = \dfrac{1}{|A|}adjA$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adjA$$

குறிப்பு

(i) B என்பது A இன் நேர்மாறு எனில் A என்பது B இன் நேர்மாறு ஆகும்
அதாவது $B = A^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}$

(ii) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

(iii) ஓர் அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால் அது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்ததாகும். அதாவது எந்த அணிக்கும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்மாறுகள் இருக்காது

(iv) A^{-1} –ன் வரிசையும், A –ன் வரிசையும் சமமாக இருக்கும்.

(v) $I^{-1} = I$, இங்கு I என்பது அலகு அணியாகும்.

(vi) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (vii) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்

$$A^2 = I \Leftrightarrow A = A^{-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \neq 0$$

A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகையால், A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adjA$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.15

$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

A என்பது பூச்சியக்கோவை அணி. எனவே A^{-1} யைக் காணஇயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(15-20) - 4(6-8) + 4(10-10)$$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 10 20-04-2020 05:08:33 PM

$= 2(-5) - 4(-2) + 4(0)$

$= -10 + 8 + 0 = -2 \neq 0$

A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி ஆகையால், A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$A_{11} = -5; A_{21} = 8; A_{31} = -4$

$A_{12} = 2; A_{22} = -2; A_{32} = 0$

$A_{13} = 0; A_{23} = -2; A_{33} = 2$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 8 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.17

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் $A^2 - kA + I_2 = O$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் k –ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் A^{-1} காண்க.

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

தரவு $A^2 - kA + I_2 = O$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7-2k+1 & 12-3k+0 \\ 4-k+0 & 7-2k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8-2k & 12-3k \\ 4-k & 8-2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 4 - k = 0$

$\Rightarrow k = 4$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 4 - 3 = 1 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ யைக் காணஇயலும்.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.18

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ எனக் காட்டுக

தீர்வு

தரவு $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ யைக் காணஇயலும்.

$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0$

B^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -1 \neq 0$

$(AB)^{-1}$ யைக் காணஇயலும்.

$$\text{adj}(AB) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} adj(AB)$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} adj B$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.19

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-5}{35} \\ \frac{-1}{35} & \frac{-6}{35} & \frac{25}{35} \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{-10}{35} \end{bmatrix}$

என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு எனக்காட்டுக.

தீர்வு

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-5}{35} \\ \frac{-1}{35} & \frac{-6}{35} & \frac{25}{35} \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{-10}{35} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{35}\begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 25 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{35}{35}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{-4}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-5}{35} \\ \frac{-1}{35} & \frac{-6}{35} & \frac{25}{35} \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{-10}{35} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 25 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} = \frac{35}{35}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$AB = BA = I$$

ஆகையால் A மற்றும் B அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் A இன் சேர்ப்பு அணி காண்க.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் $A(adj\ A) = |A|\ I$ என்பதை சரிபார்க்க, மேலும் A^{-1} காண்க.

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகளுக்கு நேர்மாறு அணி காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 12 20-04-2020 05:08:38 PM

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} -3 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், $adj\ (AB) = (adj\ B)(adj\ A)$ என்பதை சரிபார்க்க

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், $(adj\ A)A = O$ எனக் காட்டுக.

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், A இன் நேர்மாறு அணி A எனக் காட்டுக.

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், A ஐக் காண்க.

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும் எனக் காட்டுக.

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதை சரிபார்க்க.

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 9 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இல்லை எனில் λ இன் மதிப்பு காண்க.

11. $X = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & p & q \end{bmatrix}$ மற்றும், $Y = X^{-1}$ எனில் p, q –ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

1.2.5 நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் நேரிய சமன்பாடு தொகுப்பின் தீர்வு காணல்

$x_1, x_2, ..., x_n$ என்பவை மதிப்பிட வேண்டிய n மாறிகள் என்க. இம் மாறிகளில் அமைந்த அசமபடித்தான n நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

இதனை $\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$

என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

இவ்வாறாக $AX = B$ ... (1) என்கிற அணி சமன்பாட்டை அடைகிறோம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

சமன்பாடு (1) லிருந்து

$$X = A^{-1}B$$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

நேர்மாறு அணி முறையில் தீர்க்க:

$2x + 5y = 1$

$3x + 2y = 7$

தீர்வு

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ என எழுதலாம்

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 13 20-04-2020 05:08:40 PM

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -11 \neq 0$$

A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x = 3, y = -1$

எடுத்துக்காட்டு 1.21

நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்க:

$3x - 2y + 3z = 8;\ 2x + y - z = 1;$
$4x - 3y + 2z = 4$

தீர்வு

தரவு $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

இதனை $AX = B$ என்று எழுதலாம்

$X = A^{-1}B$

இங்கு $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -17 \neq 0$$

A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$A_{11} = -1 \quad A_{12} = -8 \quad A_{13} = -10$

$A_{21} = -5 \quad A_{22} = -6 \quad A_{23} = 1$

$A_{31} = -1 \quad A_{32} = 9 \quad A_{33} = 7$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ -5 & -6 & 1 \\ -1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = [A_{ij}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = 1, y = 2$ மற்றும் $z = 3$

எடுத்துக்காட்டு 1.22

4 கிலோ வெங்காயம், 3 கிலோ கோதுமை மற்றும் 2 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹320, 2 கிலோ வெங்காயம், 4 கிலோ கோதுமை, 6 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹560, 6 கிலோ வெங்காயம், 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 3 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹380 எனில், நேர்மாறு அணி முறையில் ஒரு கிலோவிற்கான பொருள்களின் விலையை காண்க.

தீர்வு

ஒரு கிலோ வெங்காயம், கோதுமை, அரிசியின் விலைகள் முறையே x, y, z என்க.

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 14 20-04-2020 05:08:41 PM

$$4x + 3y + 2z = 320$$
$$2x + 4y + 6z = 560$$
$$6x + 2y + 3z = 380$$

இதனை

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 560 \\ 380 \end{bmatrix}$$ என எழுதலாம்.

$$AX = B$$

இங்கு, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 320 \\ 560 \\ 380 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$$

A^{-1} யைக் காணஇயலும்.

$A_{11} = 0 \quad A_{12} = 30 \quad A_{13} = -20$

$A_{21} = -5 \quad A_{22} = 0 \quad A_{23} = 10$

$A_{31} = 10 \quad A_{32} = -20 \quad A_{33} = 10$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 30 & -20 \\ -5 & 0 & 10 \\ 10 & -20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 320 \\ 560 \\ 380 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 56 \\ 38 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 - 280 + 380 \\ 960 + 0 - 760 \\ -640 + 560 + 380 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$x = 20, \; y = 40, \; z = 60$$

ஒரு கிலோ வெங்காயத்தின் விலை = ₹20

ஒரு கிலோ கோதுமையின் விலை = ₹40

ஒரு கிலோ அரிசியின் விலை = ₹60

பயிற்சி 1.3

1. நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்க:
   $2x + 3y - 5 = 0 \; ; \; x - 2y + 1 = 0$

2. நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்க:
   (i) $3x - y + 2z = 13; \; 2x + y - z = 3;$
   $x + 3y - 5z = -8$
   (ii) $x - y + 2z = 3; \; 2x + z = 1;$
   $3x + 2y + z = 4$
   (iii) $2x - z = 0 \; ; \; 5x + y = 4 \; ; \; y + 3z = 5$

3. இரவி என்கிற விற்பனையாளர் வெவ்வேறு தரகு வீதங்களையுடைய A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களை 2009 ஆண்டின் சனவரி, பிப்ரவரி மற்றும் மார்ச் மாதங்களில் விற்பனை செய்ததற்கான விவரங்கள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

மாதங்கள்	விற்பனை செய்த அலகுகள்			பெற்ற மொத்த தரகு (ரூபாயில்)
	A	B	C	
சனவரி	9	10	2	800
பிப்ரவரி	15	5	4	900
மார்ச்	6	10	3	850

A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களுக்கான தரகு வீதத்தை நேர்மாறு அணி முறையில் காண்க.

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 15 20-04-2020 05:08:42 PM

4. A, B, C என்ற மூன்று பொருட்களின் விலையை ஒரு அலகிற்கு முறையே x, y மற்றும் z என்க. P என்பவர் 4 அலகு C–யை வாங்குகிறார். 3 அலகு A மற்றும் 5 அலகு B யை விற்பனை செய்கிறார். Q என்பவர் 3 அலகு B யை வாங்குகிறார். மேலும் 2 அலகு A யையும் 1 அலகு C யையும் விற்பனை செய்கிறார். R என்பவர் 1 அலகு A யை வாங்குகிறார். மேலும் 4 அலகு B யையும் 6 அலகு C யையும் விற்பனை செய்கிறார். மேற்கண்டவற்றில் P,Q,R என்பவர்கள் முறையே ஈட்டியத் தொகை ₹6,000, ₹5,000, ₹13,000 எனில் A,B மற்றும் C ன் ஒரு அலகிற்கான விலையைக் நேர்மாறு அணி முறையில் காண்க.

5. மூன்று எண்களின் கூடுதல் 20. முதல் எண்ணை 2 ஆல் பெருக்கி, இரண்டாவது எண்ணைக் கூட்டி, மூன்றாவது எண்ணைக் கழிக்க, கிடைக்கும் மதிப்பு 23 ஆகும். முதல் எண்ணை மூன்றால் பெருக்கி வரும் மதிப்புடன் இரண்டு மற்றும் மூன்றாம் எண்களைக் கூட்ட கிடைக்கும் மதிப்பு 46 எனில் அந்த எண்களை நேர்மாறு அணிமுறையில் காண்க.

6. ஒரு அலுவலகத்தில் மூன்று வாரங்களில் செலவுகள் செய்ததற்கான விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. மூன்று வாரங்களுக்கு வெவ்வேறு தரப்பினரின் ஊதியங்கள் மாறாமல் இருப்பதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தரப்பினரின் ஊதியத்தையும் நேர்மாறு அணி முறையில் கணக்கிடுக.

வாரங்கள்	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை			வாரத்திற்கு மொத்த செலவு (₹)
	A	B	C	
1 வது வாரம்	4	2	3	4900
2 வது வாரம்	3	3	2	4500
3 வது வாரம்	4	3	4	5800

1.3 உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு (Input – Output Analysis)

பேராசிரியர் வேஸ்லி W. லியோன்டிப் என்பவரால் உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு என்ற உத்தி கண்டறியப்பட்டது. உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு என்பது பொருளாதாரப் பிரிவுகளுக்கு இடையேயான இணைச் சார்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட பொருளாதார பகுப்பாய்வு அமைப்பாகும். இந்த முறையானது பெரும்பாலும் நேரிடை அல்லது எதிரிடை பொருளாதார அதிர்வுகளின் விளைவுகளை கணக்கிட பயன்படுகிறது. மேலும் பொருளாதாரம் முழுவதிலும் ஏற்படகூடிய சிற்றலை விளைவுகளை பகுப்பாய்வு செய்ய பயன்படுகிறது.

உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு உள்ளீடு–வெளியீடு அட்டவணைகளை அடிப்படையாகக்கொண்டதாகும். பொருளாதார கட்டமைப்பில் உள்ள தொழிற்சாலைகளுக்கு சுழற்சி முறையில் அளிக்கப்படும் விவரங்கள் நிரை மற்றும் நிரல்களாக அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரல்களின் தலைப்பில் தொழிற்சாலைகள் வகைப்படுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு நிரலில் உள்ள விவரம் தொழிற்சாலை உற்பத்தியில் பயன்படுத்தக்கூடிய உள்ளீடுகளின் அளவினை தொடர்புப்படுத்துகிறது. உதாரணத்திற்கு மோட்டார் உற்பத்தியில், நிரல், மோட்டார் கட்டமைப்பிற்கு தேவையான வளங்களை குறிக்கிறது. (அதாவது இரும்பு, அலுமினியம், பிளாஸ்டிக், மின்னணுக்கள் மற்றும் பல) உள்ளீடு மற்றும் வெளியீடு மாதிரிகள் ஒரு ரூபாய் முதலீடு அல்லது உற்பத்திக்கு தேவையான உழைப்பின் அளவை குறிப்பதற்குத் தனியாக அட்டவணைகளைக் கொண்டிருக்கும்.

A_1 மற்றும் A_2 என்ற இரு தொழிற்சாலைகளைக் கொண்ட எளிமையான பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஒன்றை கருதுவோம். அந்த தொழிற்சாலைகள்

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 16 20-04-2020 05:08:42 PM

ஒவ்வொன்றும் ஒரே விதமான பொருளை மட்டுமே உற்பத்திச் செய்வதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையும் தனது செயல்பாட்டிற்கு, தன் உற்பத்தியில் ஒரு பகுதியையும், ஏனையவற்றிற்கு மற்ற தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியையும் பயன்படுத்திக் கொள்கிறது. இவ்விதமாக அவை ஒன்றையொன்று சார்ந்து செயல்படுகின்றன. மேலும் உற்பத்தி முழுவதும் நுகரப்படுவதாகக் கொள்வோம். அதாவது ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையில் மொத்த உற்பத்தியும் அதன் தேவையும், மற்ற தொழிற்சாலைகளின் தேவையையும், வெளியாரின் தேவை அதாவது இறுதித் தேவையையும் சரியாக நிறைவு செய்யுமாறு அமைவதாகக் கொள்வோம்.

பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு மாறாதிருக்கும் போது இரு தொழிற்சாலைகளின் தற்போதைய உற்பத்தி அளவுகளின் விவரங்கள் அடிப்படையில், வெளியாரின் தேவையின் மாற்றத்திற்கு ஏற்றபடி உற்பத்தி அளவுகள் எந்த அளவில் இருக்க வேண்டும் என்பதைக் காணுவதே நமது நோக்கமாகும்.

a_{ij} என்பது A_j ஆல் பயன்படுத்தப்படும் A_i இன் உற்பத்தியின் ரூபாய் மதிப்பு என்க. இதில் $i, j = 1, 2$

x_1 மற்றும் x_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் தற்போதைய உற்பத்திகளின் ரூபாய் மதிப்புகள் என்க.

d_1 மற்றும் d_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் உற்பத்திக்கான இறுதித் தேவைகளின் ரூபாய் மதிப்புகள் என்க.

இவற்றின் வாயிலாக நாம் அமைக்கும் சமன்பாடுகள்

$$a_{11} + a_{12} + d_1 = x_1; \quad a_{21} + a_{22} + d_2 = x_2 \ldots (1)$$

மேலும் $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{x_j}$ $i, j = 1, 2$ என்க

அதாவது

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1}; \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2}; \quad b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1}; \quad b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2}$$

எனவே சமன்பாடுகள் (1) யை கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + d_1 = x_1$$

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + d_2 = x_2$$

இவற்றைக் கீழ்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$(1 - b_{11})x_1 - b_{12}x_2 = d_1$$

$$-b_{21}x_1 + (1 - b_{22})x_2 = d_2$$

இவற்றின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 1 - b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 - b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$(I - B)X = D$ ஆகும்

இங்கு $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

$$X = (I - B)^{-1}D$$

இங்கு அணி B என்பது தொழில்நுட்ப அணி [Technology Matrix] எனப்படும்.

1.3.1 ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகள்

பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் இருக்க ஹாக்கின்–சைமன் என்பவர்களது கீழ்க்கண்ட இரு நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும்.

B என்பது தொழில்நுட்ப அணி எனில்,

(i) $I - B$ அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகை எண்களாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) $|I - B|$ மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 17 20-04-2020 05:08:42 PM

எடுத்துக்காட்டு 1.23

இரு தொழிற்சாலைகளையுடைய பொருளாதார அமைப்பின் தொழில்நுட்ப அணி

$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி அது செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என்று கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு

$$B = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$|I - B| = \begin{vmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.9 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$= (0.2)(0.3) - (-0.2)(-0.9)$$

$$= 0.06 - 0.18$$

$$= -0.12 < 0$$

$|I - B|$ என்பது குறை எண்.

∴ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் [Hawkins-simon] நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்படவில்லை. எனவே பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.24

2016 ஆம் ஆண்டின் இரண்டு தொழிற்சாலைகளின் பரிவர்த்தனைகளின், பொருளாதாரக் கட்டமைப்பின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொழிற்சாலை	1	2	இறுதி தேவை	மொத்த உற்பத்தி
1	500	1,600	400	2,500
2	1,750	1,600	4,650	8,000
தொழிலாளர்கள்	250	4,800	-	-

தொழில்நுட்ப அணியைக் கண்டுபிடித்து, இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின் படி செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என சரிபார்க்க.

தீர்வு

$a_{11} = 500 \quad a_{12} = 1600 \quad x_1 = 2500$

$a_{21} = 1750 \quad a_{22} = 1600 \quad x_2 = 8000$

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{500}{2500} = 0.20;$$

$$b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{1600}{8000} = 0.20$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{1750}{2500} = 0.70;$$

$$b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{1600}{8000} = 0.20$$

தொழில்நுட்ப அணி $= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது

இப்பொழுது, $|I - B| = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.7 & 0.8 \end{vmatrix}$

$$= (0.8)(0.8) - (-0.7)(-0.2)$$

$$= 0.64 - 0.14$$

$$= 0.50 > 0$$

$|I - B|$ இன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது. மேலும் $|I-B|$ என்பது மிகை. ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் (Hawkins-simon) இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளது. எனவே இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 1.25

ஒரு பொருளாதார அமைப்பில் P_1 மற்றும் P_2 என்ற இரு தொழிற்சாலைகள் உள்ளன. அவற்றின் தேவை மற்றும் அளிப்பு நிலவரம் (ரூபாய் கோடிகளில்) கீழ்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தியாளர் பிரிவு	உபயோகிப்போர் பிரிவு P_1	P_2	இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
P_1	10	25	15	50
P_2	20	30	10	60

P_1 –ன் இறுதித் தேவையானது 35க்கும் P_2 –ன் இறுதித் தேவை 42 க்கும் மாறும்போது உற்பத்திகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$a_{11} = 10 \quad a_{12} = 25 \quad x_1 = 50$

$a_{21} = 20 \quad a_{22} = 30 \quad x_2 = 60$

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5};\quad b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5};\quad b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

தொழில்நுட்ப அணி, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது.

$$|I - B| = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{7}{30} > 0$$

$(I - B)$ இன் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகையாக உள்ளது. மேலும் $|I - B|$ யும் மிகையாக உள்ளது. ஹாக்கின்ஸ் – சைமன் இரு நிபந்தைனைகளும் நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளன. எனவே பொருளாதார கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

$$adj\ (I-B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$(I-B)^{-1} = \frac{1}{|I-B|} adj(I-B)$$

$(|I-B| \neq 0,$ என்பதால் $(I-B)^{-1}$ கிடைக்கப்பெறும்)

$$= \frac{1}{\frac{7}{30}} adj(I-B)$$

$$= \frac{30}{7}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

தீர்வு $= X = (I-B)^{-1}D$, இங்கு $D = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 204 \end{bmatrix}$$

P_1 –ன் உற்பத்தி ₹150 கோடியாகவும், P_2 –ன் உற்பத்தி ₹204 கோடியாகவும் இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

ஒரு பொருளாதார கட்டமைப்பில் நிலக்கரி மற்றும் இரும்பு உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. இரண்டு பொருட்களும் ஒவ்வொன்றின் உற்பத்தியில் இடைஉள்ளீடாக பயன்படுகிறது. ஒரு டன் இரும்பு உற்பத்திக்கு 0.4 டன் இரும்பு மற்றும் 0.7 டன் நிலக்கரி தேவைப்படுகிறது. இவ்வாறே ஒரு டன் நிலக்கரி உற்பத்திக்கு 0.1 டன் இரும்பு மற்றும் 0.6 டன் நிலக்கரி தேவைப்படுகிறது. எந்த ஒரு உள்ளீடு மூலதனமும் தேவைப்படவில்லை. இந்த அமைப்பு செயல்படும் நிலையில் உள்ளதாக நீங்கள் கருதுகிறீர்களா? ஒரு டன் இரும்பு மற்றும் ஒரு டன் நிலக்கரி உற்பத்தி செய்யத் தேவைப்படும் வேலை நாட்கள் முறையே 5 மற்றும் 2. பொருளாதார கட்டமைப்பில் 100 டன் நிலக்கரியும் 50 டன் இரும்பும் உற்பத்தி செய்ய வேண்டும் எனில் மொத்த உற்பத்தி செய்யத் தேவைப்படும் தொழிலாளர் நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

	இரும்பு	நிலக்கரி	இறுதி தேவை
இரும்பு	0.4	0.1	50
நிலக்கரி	0.7	0.6	100
தொழிலாளர் நாட்கள்	5	2	-

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 19 20-04-2020 05:08:45 PM

தொழில்நுட்ப அணி $B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$

$$I-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$|I-B| = \begin{vmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.7 & 0.4 \end{vmatrix}$$

$$= (0.6)(0.4)-(-0.7)(-0.1)$$

$$= 0.24 - 0.07 = 0.17$$

ஹாக்கின்ஸ்–சைமனின் இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்பட்டுள்ளது. எனவே இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

$$\text{adj }(I-B) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$(I-B)^{-1} = \frac{1}{|I-B|} adj(I-B)$$

$$= \frac{1}{0.17}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$X = (I-B)^{-1}D$, இங்கு $D = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{0.17}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{0.17}\begin{bmatrix} 30 \\ 95 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 176.5 \\ 558.8 \end{bmatrix}$$

இரும்பு வெளியீடு = 176.5 டன்கள்

நிலக்கரி வெளியீடு = 558.8 டன்கள்

மொத்த தொழிலாளர்களின் வேலை நாட்கள்

= 5(இரும்பு வெளியீடு) + 2(நிலக்கரி வெளியீடு)

= 5(176.5) + 2(558.8)

= 882.5 + 1117.6 = 2000.1

$\simeq$ 2000 தொழிலாளர் நாட்கள்.

பயிற்சி 1.4

1. இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.30 \\ 0.41 & 0.33 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி தொறிழ்சாலைகளின் செயல்பாடு சாத்தியமானதா என சரிபார்க்க.

2. இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி தொறிழ்சாலைகளின் செயல்பாடு சாத்தியமானாதா என சரிபார்க்க

3. இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 \\ 0.40 & 0.67 \end{bmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி தொறிழ்சாலைகளின் செயல்பாடு உள்ளதா என ஆராய்க.

4. A மற்றும் B ஆகிய இரு பொருட்கள் உற்பத்தி செய்யப்படுகிறது 0.4 டன் A மற்றும் 0.7 டன் B ஆகியவைகள் 1 டன் A உற்பத்தி செய்ய தேவைப்படுகிறது. அதேபோன்று 0.1 டன் A மற்றும் 0.7 டன் B ஆகியவைகள் 1 டன் B உற்பத்தி செய்ய தேவைப்படுகிறது. தொழில் நுட்ப அணியை எழுதவும். 68 டன்கள் A மற்றும் 10.2 டன்கள் B ஆகியவை தேவைப்படும் எனில் இரண்டையும் உற்பத்தி செய்வதற்கு தேவையான மொத்த அளவு காண்க.

5. இரு தொழிற்சாலைகளுக்கிடையே உள்ள உற்பத்தி பரிமாற்றம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தி பிரிவு	நுகர்வோர் பிரிவு		உள்நாட்டு தேவை	மொத்த வெளியீடு
	X	Y		
X	30	40	50	120
Y	20	10	30	60

தொழில் நுட்ப அணியை கண்டுபிடிக்க மற்றும் ஹாக்கின்ஸ் – சைமன்

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 20 20-04-2020 05:08:46 PM

நிபந்தனைகளின்படி அமைப்பின் சாத்தியத்தை சோதிக்கவும், உள் தேவை மாற்றங்கள் முறையே 80 மற்றும் 40 அலகு எனில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் புது தேவையை பூர்த்தி செய்வதற்கான மொத்த வெளியீடு என்ன?

6. இரு பொருளாதார பிரிவிற்கான பரிவர்த்தனை அணி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிரிவு	விற்பனை		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	1	2		
1	4	3	13	20
2	5	4	3	12

(i) தொழில் நுட்ப அணியை எழுதுக

(ii) பிரிவு 1–ன்இறுதித்தேவையானது 23 அலகுகள் அதிகரிக்கும் போது உற்பத்திகளைக் காண்க.

7. ஒரு தொழிற்சாலை உற்பத்திப் பரிமாற்றத்தின் இரு பிரிவு X மற்றும் Y கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்திப் பிரிவு	நுகர்வோர் பிரிவு		உள்நாட்டு தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	X	Y		
X	15	10	10	35
Y	20	30	15	65

X –ன் உள்நாட்டு தேவை 12 க்கும் Y –ன் உள்நாட்டு தேவை 18 க்கும் மாறும் போது மொத்த உற்பத்தி காண்க.

பயிற்சி 1.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ எனில் x –ன் மதிப்புகள் காண்க

(a) 0, –1 (b) 0, 1

(c) –1, 1 (d) –1, –1

2. $\begin{vmatrix} 2x+y & x & y \\ 2y+z & y & z \\ 2z+x & z & x \end{vmatrix}$ இன் மதிப்பு

(a) $x\,y\,z$ (b) $x+y+z$

(c) $2x+2y+2z$ (d) 0

3. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ இல் –7 இன் இணைக் காரணி

(a) –18 (b) 18

(c) –7 (d) 7

4. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ எனில், $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ –ன்மதிப்பு

(a) Δ (b) $-\Delta$

(c) 3Δ (d) -3Δ

5. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}^2$ என்றஅணிக்கோவையின் மதிப்பு

(a) abc (b) 0

(c) $a^2\,b^2\,c^2$ (d) $-abc$

6. A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணி எனில் $|kA|$ என்பது

(a) $k|A|$ (b) $-k|A|$

(c) $k^3|A|$ (d) $-k^3|A|$

7. $adj(AB) =$

(a) $adjA\; adjB$ (b) $adjA^T\; adjB^T$

(c) $adjB\; adjA$ (d) $adjB^T\; adjA^T$

8. $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு

(a) $\frac{7}{30}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (b) $\frac{7}{30}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{12} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

(c) $\frac{30}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (d) $\frac{30}{7}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{12} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 21 20-04-2020 05:08:48 PM

9. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ மேலும் $ad - bc \neq 0$ எனில், A^{-1} என்பது

(a) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(b) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

(c) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(d) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$

9XSYTX

10. உள்ளீடு–வெளியீடு பகுப்பாய்வு செயல்படும் வாய்ப்பிற்கான ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 2

11. உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வை அறிமுகப்படுத்தியவர்

(a) சர். பிரான்சிஸ் கால்டன்

(b) பிஷர்

(c) பேராசிரியர் வேஸ்லி. W. லியோன்டிப்

(d) ஆர்தர் கேய்லி

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகளில் எதற்கு நேர்மாறு அணி இல்லை?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு அணி

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ எனில் $A(adjA)$ என்பது

(a) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

15. A, B என்பது பூச்சியமற்றக்கோவை அணி எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது தவறு?

(a) $A^2 = I \Rightarrow A^{-1} = A$

(b) $I^{-1} = I$

(c) $AX = B$ எனில், $X = B^{-1}A$

(d) A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணி எனில் $|adj\ A| = |A|^2$

16. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4x & 4y & 4z \\ -3x & -3y & -3z \end{vmatrix}$ இன் மதிப்பு

(a) 5 (b) 4 (c) 0 (d) –3

17. நேர்மாறு அணி உடைய வரிசை 2 கொண்ட அணி A எனில், $det(A^{-1})$ என்பது

(a) $det(A)$ (b) $\dfrac{1}{det(A)}$

(c) 1 (d) 0

18. A என்பது 3×3 வரிசை உடைய அணி மற்றும் $|A| = 4$ எனில், $|A^{-1}|$ என்பது

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{16}$

(c) 2 (d) 4

19. A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணி மற்றும் $|A| = 3$ எனில், $|adjA|$ என்பது

(a) 81 (b) 27 (c) 3 (d) 9

20. $\begin{vmatrix} x & x^2 - yz & 1 \\ y & y^2 - zx & 1 \\ z & z^2 - xy & 1 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 0 (c) –1 (d) $-xyz$

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 22 20-04-2020 05:08:54 PM

21. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ எனில், $|2A|$ என்பது

(a) $4\cos 2\theta$ (b) 4

(c) 2 (d) 1

22. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ மற்றும் A_{ij} என்பது a_{ij}, இன் இணைக்காரணி எனில் Δ ன் மதிப்பு

(a) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

(b) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(c) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$

(d) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

23. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 0$ எனில் x –ன் மதிப்பு

(a) $\frac{-5}{6}$ (b) $\frac{5}{6}$

(c) $\frac{-16}{5}$ (d) $\frac{16}{5}$

24. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$ எனில், $\begin{vmatrix} 20 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix}$ –ன் மதிப்பு

(a) –5 (b) –125 (c) –25 (d) 0

25. ஓர் அணிக் கோவையில் மூன்று நிரைகள் (நிரல்கள்) சர்வ சமம் எனில் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) 3

இதர கணக்குகள்

1. தீர்க்க: $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ -1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

2. மதிப்பிடுக $\begin{vmatrix} 10041 & 10042 & 10043 \\ 10045 & 10046 & 10047 \\ 10049 & 10050 & 10051 \end{vmatrix}$

3. விரிவுபடுத்தாமல் அணிக் கோவையின் மதிப்பு பூச்சியம் என நிறுவுக $\begin{vmatrix} 5 & 5^2 & 5^3 \\ 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 5^4 & 5^5 & 5^6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2a^3b^3c^3$ என நிறுவுக.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில் $A(adjA) = (adjA)(A) = |A|I_3$ என்பதை சரிபார்க்க.

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ –ன் நேர்மாறு காண்க

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 4A + 5I_2 = O$ என நிறுவுக மற்றும் A^{-1} காண்க.

8. நேர்மாறு அணி முறையில் தீர்க்க: $x - y + z = 2, 2x - y = 0, 2y - z = 1$.

9. 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ சர்க்கரையின் மொத்த விலை ₹70. ஒரு கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹70. 3 கிலோ கோதுமை, 2 கிலோ சர்க்கரை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் மொத்த விலை ₹170. எனில் நேர்மாறு அணி முறையில் ஒவ்வொரு பொருட்களின் ஒரு கிலோவிற்கான விலையைக் காண்க.

10. A மற்றும் B என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் விவரங்கள் (ரூபாய் கோடிகளில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	A	B		
A	50	75	75	200
B	100	50	50	200

A –ன் இறுதித் தேவை 300 ஆகவும் B இன் இறுதித் தேவை 600 ஆகவும் மாறும்போது அவற்றின் உற்பத்தி அளவுகளைக் காண்க

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 23 20-04-2020 05:08:58 PM

தொகுப்புரை

- ஒரு சதுர அணிக்கு தொடர்புடைய அணிக்கோவையின் மதிப்பு ஓர் எண்ணாக அமையும்.
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் அணிக் கோவை மதிப்பு $|A| = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$
- A என்ற அணிக்கோவையின் a_{ij} என்ற ஓர் உறுப்பின் சிற்றணிக் கோவை என்பது, Aயிலிருந்து a_{ij} உள்ள நிரை, நிரல்களை விடுவித்துப் பெறப்படும் அணிக்கோவை ஆகும். இதனை M_{ij} எனக் குறிப்போம்.
- தகுந்த குறியுடன் கூடிய சிற்றணிக்கோவை இணைக்காரணி ஆகும். a_{ij} என்ற உறுப்பின் இணைக்காரணி A_{ij} எனில் $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
- $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ எனில்,

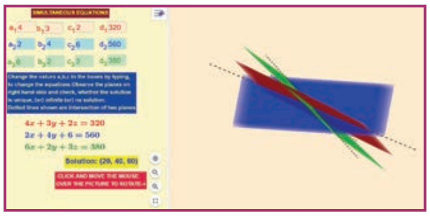
  $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ அல்லது $a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$
- $\text{adj } A = \left[A_{ij}\right]^T$ இங்கு $\left[A_{ij}\right]$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட அணியின் இணைக்காரணி அணி.
- $|adjA| = |A|^{n-1}$, இங்கு n என்பது A என்ற அணியின் வரிசை.
- $A(adjA) = (adjA)(A) = |A| I$.
- $adjI = I$, I என்பது அலகு அணி ஆகும்.
- $\text{adj}(AB) = (adj\, B)(adj\, A)$.
- A என்ற ஒரு சதுர அணியில் $|A| = 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியக்கோவை அணி எனப்படும்.
- A என்ற ஒரு சதுர அணியில் $|A| \neq 0$ எனில் அவ்வணி பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.
- A என்பது n ஆம் வரிசை பூச்சியமற்றக்கோவை அணி என்க. $AB = BA = I$ எனுமாறு ஒரு அணி B –ஐ காண முடிந்தால் B ஆனது A இன் நேர்மாறு அணி எனப்படும். A இன் நேர்மாறு அணியை A^{-1} என எழுதலாம்.
- A இன் நேர்மாறு $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$.
- ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் (Hawkkins - Simon) நிபந்தனைகளின்படி உள்ளீடு – வெளியீடு பகுப்பாய்வு செயல்படும் வகையில் உள்ளதா என உறுதிப்படுத்த
  - (i) $I - B$ அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகை எண்களாக இருக்க வேண்டும்.
  - (ii) $|I - B|$ மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 24 20-04-2020 05:08:59 PM

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
அணிக்கோவை	Determinant
இணைக் காரணி	Cofactor
உள்ளீடு	Input
சிற்றணிக் கோவைகள்	Minors
சேர்ப்பு அணி	Adjoint Matrix
திசையிலி	Scalar
நிரை நிரல் மாற்று அணி	Transpose of a Matrix
நேர்மாறு அணி	Inverse Matrix
பகுப்பாய்வு	Analysis
பூச்சியக் கோவை அணி	Singular Matrix
பூச்சியமற்றக் கோவை அணி	Non-Singular Matrix
முக்கோண அணி	Triangular Matrix
மூலை விட்ட அணி	Digonal Matrix
வெளியீடு	Output

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Simultaneous Equations"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

படி - 2

தேர்வுப்பெட்டியில் தேவையான ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளுக்கான அளவுருக்களை உள்ளீட்டுப்பெட்டியில் தட்டச்சு செய்யவும். நீங்களாக தீர்வைக் கண்டுபிடித்துக் கீழே காணும் தீர்வைச் சரி பார்க்கவும். வலப் பக்கத்தில் சமன்பாடுகளுக்கான தளங்களும் அவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியும்(தீர்வு) காணப்படும். மூன்று தளங்களும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டாவிடில் தீர்வு இல்லை என்று பொருள் படும்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

01_11th_BM-STAT_Ch-1-TM.indd 25 20-04-2020 05:09:00 PM