JEE MAIN - 2016 (Paper 1)

61. જો $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x, x \neq 0$ અને $S = \{x \in R : f(x) = f(-x)\}$; તો;

(A) S ખાલી ગણ છે. (B) S એકાકી ગણ છે.

(C) Sમાં બરાબર બે ઘટક છે. (D) Sમાં બેથી વધુ ઘટકો છે.

ઉકેલ : $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$

x ના સ્થાને $\frac{1}{x}$ લેતાં, $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$

$\therefore \frac{3x - f(x)}{2} = \frac{\frac{3}{x} - 2f(x)}{1}$ $\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$\therefore 3x - f(x) = \frac{6}{x} - 4f(x)$

$\therefore f(x) = \frac{2}{x} - x$

હવે, $f(x) = f(-x) \Rightarrow \frac{2}{x} - x = -\frac{2}{x} + x \Rightarrow \frac{4}{x} = 2x \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ **જવાબ (C)**

62. θની જે કિંમત માટે $\frac{2+3i\ sin\,\theta}{1-2i\ sin\,\theta}$ શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા હોય તે :

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (D) $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ઉકેલ : $\frac{2+3i\ sin\,\theta}{1-2i\ sin\,\theta} \times \frac{1+2i\ sin\,\theta}{1+2i\ sin\,\theta} = \frac{(2-6sin^2\theta)+i(7sin\theta)}{1+4sin^2\theta}$

જો $\frac{2-6sin^2\theta}{1+4sin^2\theta} = 0$ તો શુદ્ધ કાલ્પનિક સંખ્યા મળે.

તેથી $2 = 6sin^2\theta$. આથી $sin^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad \theta = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **જવાબ (D)**

63. $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 + 4x - 60} = 1$ ને સંતોષતી x ની તમામ વાસ્તવિક કિંમતોનો સરવાળો .... છે.

(A) 3 (B) −4 (C) 6 (D) 5

ઉકેલ : $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 + 4x - 60} = 1 = (x^2 - 5x + 5)^0$

$\therefore \quad x^2 + 4x - 60 = 0,$ [$a^x = a^y \Rightarrow x = y$, જ્યાં $a \neq 1, 0, -1$]

$\therefore \quad x = -10$ અથવા 6

હવે ધારો કે આધાર $x^2 - 5x + 5 = 0$ અથવા 1 અથવા −1

$x^2 - 5x + 5 = 0$ શક્ય નથી.	$x^2 - 5x + 5 = 1$	$x^2 - 5x + 5 = -1$
આથી ઉકેલ −10, 6, 4, 1, 2 છે.	$\therefore x = 4$ અથવા 1	તો, $x^2 + 4x - 60$ યુગ્મ જ હોઈ શકે.
આથી તમામ વાસ્તવિક ઉકેલોનો સરવાળો		$\therefore x = 2$ અથવા 3

$= -10 + 6 + 4 + 1 + 2 = 3$

$x = 3$ અયુગ્મ છે અને ઉકેલ નથી

જવાબ (A)

64. જો $A = \begin{bmatrix} 5a & -b \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ અને A *adj* A = AA^T, તો $5a + b$ બરાબર,

(A) −1 (B) 5 (C) 4 (D) 13

ઉકેલ : $A = \begin{bmatrix} 5a & -b \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$A\ adj\ A = AA^T$

$\therefore \begin{bmatrix} 5a & -b \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & b \\ -3 & 5a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a & -b \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5a & 3 \\ -b & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 10a+3b & 0 \\ 0 & 10a+3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25a^2+b^2 & 15a-2b \\ 15a-2b & 13 \end{bmatrix}$

અનુરૂપ ઘટકો સરખાવતાં $10a + 3b = 25a^2 + b^2$

અને $10a + 3b = 13$

અને $15a - 2b = 0$

ધારો કે $\frac{a}{2} = \frac{b}{15} = k$. તેથી $10a + 3b = 20k + 45k = 13$. માટે $k = \frac{1}{5}$

વળી, $25a^2 + b^2 = (5a)^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$

ઉકેલતાં $a = \frac{2}{5}$, $b = 3$

આથી, $5a + b = 5 \times \frac{2}{5} + 3 = 5$ **જવાબ (B)**

65. સુરેખ સમીકરણોની સંહતિ

$x + \lambda y - z = 0$

$\lambda x - y - z = 0$

$x + y - \lambda z = 0$

ના શૂન્યેતર ઉકેલ માટે

(A) λની કિંમતો અસંખ્ય છે (B) λની ફક્ત એક જ કિંમત છે

(C) λની બરાબર બે કિંમત મળે (D) λની બરાબર ત્રણ કિંમતો મળે

ઉકેલ : $x + \lambda y - z = 0$

$\lambda x - y - z = 0$

$x + y - \lambda z = 0$

શૂન્યેતર ઉકેલ માટે, $\Delta = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda + 1 - \lambda(-\lambda^2 + 1) - (\lambda + 1) = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda = 0, \pm 1$

λની બરાબર ત્રણ કિંમતો મળે. **જવાબ (D)**

66. જો SMALL શબ્દના મૂળાક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને અર્થવાહી કે અર્થ વગરના પાંચ મૂળાક્ષરોથી બનતા શબ્દો બનાવી તેમને ડિક્ષનેરી ક્રમમાં ગોઠવવામાં આવે તો SMALL નો ક્રમ .... મો હોય.

(A) 46મો (B) 59મો (C) 52મો (D) 58મો

ઉકેલ : A LL MS એ SMALLમાં મૂળાક્ષરો છે.

A (LL MS) $\rightarrow \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$ (પ્રથમ મૂળાક્ષર A હોય તો)

L (AL MS) $\rightarrow 4! = 24$ (પ્રથમ મૂળાક્ષર L હોય તો)

M (AL LS) $\rightarrow \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$ (પ્રથમ મૂળાક્ષર M હોય તો)

SA (MLL) $\rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$ (પ્રથમ મૂળાક્ષર સમૂહ SA હોય તો)

SL (ALM) $\rightarrow 3! = 6$ (પ્રથમ મૂળાક્ષર સમૂહ SL હોય તો)

'SMALL' પહેલા શબ્દોની સંખ્યા $= 12 + 24 + 12 + 3 + 6 = 57$

SMALL 58મો શબ્દ છે.

$\therefore$ SMALLનું સ્થાન 58મું છે. **જવાબ (D)**

67. $\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)^n$, $x \neq 0$ ના વિસ્તરણમાં પદોની સંખ્યા 28 હોય તો વિસ્તરણનાં તમામ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો .... છે.

(A) 64 (B) 2187 (C) 243 (D) 729

ઉકેલ : પદોની સંખ્યા $= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 28$. તેથી, $n^2 + 3n - 54 = 0$.

આથી, $(n + 9)(n - 6) = 0$. તેથી, $n = 6$ $(n \neq -9)$

$\therefore$ ધારો કે $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{2n}}{x^{2n}} = \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)^n$

$x = 1$ લેતાં, $n = 6$ તથા $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 3^6 = 729$ **જવાબ (D)**

68. અચળ ન હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીના બીજા, પાંચમાં અને નવમાં પદ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય તો તેનો સામાન્ય ગુણોત્તર .... છે.

(A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{7}{4}$

ઉકેલ : $t_2 = a + d$

$t_5 = a + 4d$

$t_9 = a + 8d$

t_2, t_5, t_9 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$(a + 4d)^2 = (a + d)(a + 8d)$

$a^2 + 16d^2 + 8ad = a^2 + 8d^2 + 9ad$

$8d^2 - ad = 0$

$d(8d - a) = 0$

સમાંતર શ્રેણી અચળ શ્રેણી નથી. આથી $d \neq 0$

$\therefore \quad a = 8d$

સમાંતર શ્રેણી $8d, 9d, 10d...$ છે.

સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર $= \frac{t_5}{t_2} = \frac{a+4d}{a+d} = \frac{12d}{9d} = \frac{4}{3}$ **જવાબ (B)**

69. $\left(1\frac{3}{5}\right)^2 + \left(2\frac{2}{5}\right)^2 + \left(3\frac{1}{5}\right)^2 + 4^2 + \left(4\frac{4}{5}\right)^2 + ...$ નાં પ્રથમ દસ પદોનો સરવાળો $\frac{16}{5}\ m$ હોય, તો $m =$ ....

(A) 102 (B) 101 (C) 100 (D) 99

ઉકેલ : $\left(1\frac{3}{5}\right)^2 + \left(2\frac{2}{5}\right)^2 + \left(3\frac{1}{5}\right)^2 + 4^2 + \left(4\frac{4}{5}\right)^2 + ...10$ પદો સુધી

$= \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{20}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 + ...$ 10 પદો સુધી

$(8)^2 + (12)^2 + (16)^2 + ...$ 10 પદો સુધી મેળવવા માટે,

$T_n = [4(n + 1)]^2, n = 1$ થી 10.

$= 16(n^2 + 2n + 1)$

$\Sigma T_n = \sum_{n=1}^{10} 16(n^2 + 2n + 1)$ $\left(\sum_{n=1}^{10} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385\right)$

$= 16[385 + 55(2) + 10]$ $\left(\sum_{n=1}^{10} n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = 55\right)$

$= 16(505)$ $\left(\sum_{n=1}^{10} 1 = n = 10\right)$

$\therefore \quad \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 + ...$ 10 પદ સુધી $= \frac{16 \times 505}{25}$

પરંતુ $\frac{16 \times 505}{25} = \frac{16}{5}\ m$

$\therefore \quad m = \frac{505}{5} = 101$ **જવાબ (B)**

70. જો $p = \lim_{x \to 0+} (1 + tan^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$, તો $\log_e p =$ ....

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ : $p = \lim_{x \to 0+} \left\{1 + tan^2 \sqrt{x}\right\}^{\frac{1}{tan^2\sqrt{x}} \times \frac{tan^2\sqrt{x}}{2x}}$

$$= e^{\lim_{x \to 0+} \frac{tan^2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} \times \frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$\log_e p = \frac{1}{2}$ **જવાબ (C)**

71. $x \in R$ માટે $f(x) = |\log 2 - sin\, x|$ અને $g(x) = f(f(x))$, તો,

(A) g એ $x = 0$ માટે વિકલનીય નથી (B) $g'(0) = cos(\log 2)$

(C) $g'(0) = -cos(\log 2)$ (D) g એ $x = 0$ માટે વિકલનીય છે તથા $g'(0) = -sin(\log 2)$

ઉકેલ : $g(x) = |\log_e 2 - sin\,(|\log_e 2 - sin\,x|)|$

0 ના સામિપ્યમાં $g(x) = \log_e 2 - sin\,(\log_e 2 - sin\,x)$

$\therefore\ g'(x) = cos\,(\log_e 2 - sin\,x) \times cos\,(x)$

$\therefore\ g'(0) = cos\,(\log_e 2)$ **જવાબ (B)**

72. ધારો કે $f(x) = tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+sin\,x}{1-sin\,x}}\right)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$y = f(x)$ નો $x = \frac{\pi}{6}$ આગળનો અભિલંબ .... બિંદુમાંથી પણ પસાર થાય.

(A) (0, 0) (B) $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

ઉકેલ : $f(x) = tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+sin\,x}{1-sin\,x}}\right)$

$$= tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{1+cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)$$

$0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$

જો $x = \frac{\pi}{6}$, તો $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ $y - \frac{\pi}{3} = -2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ છે.

$\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. **જવાબ (B)**

73. 2 એકમ લંબાઈના તારને બે ભાગમાં કાપીને વાળીને એક ભાગમાંથી x એકમ લંબાઈનો ચોરસ તથા બીજા ભાગમાંથી r ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ બનાવવામાં આવે છે. જો આ બંને ભાગના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય, તો

(A) $2x = (\pi + 4)r$ (B) $(4 - \pi)x = \pi r$ (C) $x = 2r$ (D) $2x = r$

ઉકેલ : ધારો કે બંને ભાગની લંબાઈ a અને $2 - a$ છે

આપેલ શરતો પ્રમાણે,

$a = 4x$ તથા $2 - a = 2\pi r$

$\therefore \quad x = \frac{a}{4}$ તથા $r = \frac{2-a}{2\pi}$

$\therefore \quad$ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{16}$ તથા

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi\left[\frac{(2-a)}{2\pi}\right]^2 = \frac{\pi(4+a^2-4a)}{4\pi^2}$

$= \frac{(a^2-4a+4)}{4\pi}$

$f(a) = \frac{a^2}{16} + \frac{a^2-4a+4}{4\pi}$

$\therefore \quad f(a) = \frac{a^2\pi+4a^2-16a+16}{16\pi}$

$\therefore \quad f'(a) = \frac{1}{16\pi}[2a\pi + 8a - 16]$

$\therefore \quad f'(a) = 0$. તેથી $2a\pi + 8a - 16 = 0$. આથી $2a\pi + 8a = 16$

$\therefore \quad 2a(\pi + 4) = 16$. માટે, $a = \frac{8}{\pi+4}$

$\therefore \quad x = \frac{a}{4} = \frac{2}{\pi+4}$ અને $r = \frac{2-a}{2\pi} = \frac{2-\frac{8}{\pi+4}}{2\pi}$

$= \frac{2\pi+8-8}{2\pi(\pi+4)} = \frac{1}{\pi+4}$

$\therefore \quad x = \frac{2}{\pi+4}$ અને $r = \frac{1}{\pi+4} \Rightarrow x = 2r$

$f''(a) = \frac{1}{16\pi}(2\pi + 8) > 0$

$\therefore \quad x = 2r$ માટે ક્ષેત્રફળ ન્યૂનતમ છે. **જવાબ (C)**

74. સંકલ $\int \frac{2x^{12}+5x^9}{(x^5+x^3+1)^3}\, dx$ નું મૂલ્ય ....

(A) $\frac{-x^5}{(x^5+x^3+1)^2}$ + C (B) $\frac{x^{10}}{2(x^5+x^3+1)^2}$ + C (C) $\frac{x^5}{2(x^5+x^3+1)^2}$ + C (D) $\frac{-x^{10}}{2(x^5+x^3+1)^2}$ + C

ઉકેલ : $\int \frac{2x^{12}+5x^9}{\left[x^5\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)\right]^3}\, dx = \int \frac{2x^{12}+5x^9}{x^{15}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)^3}\, dx$

અંશ તથા છેદને x^{15} વડે ભાગતાં,

$\therefore\ \mathrm{I} = \int \frac{\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^6}}{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)^3}\, dx$

ધારો કે $\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right) = t$. આથી, $\left(\frac{-2}{x^3}-\frac{5}{x^6}\right) dx = dt$

$\therefore\ \mathrm{I} = \int \frac{-dt}{t^3}$

$= \frac{-t^{-3+1}}{-3+1} + \mathrm{C}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{t^2} + \mathrm{C}$

$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)^2} + \mathrm{C}$

$= \frac{1}{2}\ \frac{x^{10}}{\left(x^5+x^3+1\right)^2} + \mathrm{C}$

જવાબ **(B)**

75. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)...3n}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}$ નું મૂલ્ય ....

(A) $\frac{18}{e^4}$ (B) $\frac{27}{e^2}$ (C) $\frac{9}{e^2}$ (D) 3 log3 − 2

ઉકેલ : ધારો કે $\mathrm{P} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}....\frac{n+2n}{n}\right]^{\frac{1}{n}}$

log લેતાં,

$\log \mathrm{P} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{2n} \log\left(1+\frac{r}{n}\right)$

$= \int_0^2 \log(1+x)\, dx$

$= \left[\log(1+x)\,.\,x\ \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{1+x}\, dx$

$= 2 \log 3 - \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = 2 \log 3 - \left[[x]_0^2 - [\log(1+x)]_0^2\right]$

$= 2 \log 3 - [2 - \log 3] = 3 \log 3 - 2$

$= \log 3^3 - \log e^2$

$= \log \left(\frac{27}{e^2}\right)$

$\therefore$ $P = \frac{27}{e^2}$ **જવાબ (B)**

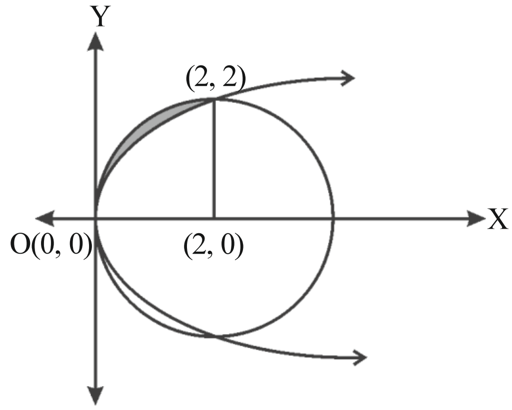
76. પ્રદેશ $\{(x, y) : y^2 \ge 2x$ અને $x^2 + y^2 \le 4x, x \ge 0, y \ge 0\}$ નું ચોરસ એકમમાં ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\pi - \frac{4}{3}$ (B) $\pi - \frac{8}{3}$ (C) $\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ઉકેલ : $x^2 + y^2 \le 4x$ એ (2, 0) કેન્દ્ર તથા 2 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ તથા તેની અંદરનો પ્રદેશ દર્શાવે છે. $y^2 \ge 2x$ એક પરવલય સંબંધિત પ્રદેશ છે.

$x^2 + y^2 \le 4x$ તથા $y^2 \ge 2x$ આપેલ છે.

વક્રો $y^2 = 2x$ તથા $x^2 + y^2 = 4x$ નાં છેદબિંદુ મેળવીએ.



$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow x^2 + 2x = 4x$

તેથી, $x^2 - 2x = 0$. માટે $x(x - 2) = 0$

$\therefore x = 0$ અથવા $x = 2$

$\therefore y = 0$ અથવા $y = 2$

આથી, $(x, y) = (0, 0)$ અથવા $(x, y) = (2, 2)$

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \int_0^2 (y_1 - y_2)dx = \int_0^2 y_{\text{વર્તુળ}}\, dx - \int_0^2 y_{\text{પરવલય}}\, dx$

$= \left[\frac{\pi r^2}{4}\right]_{r=2} - \int_0^2 \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}\, dx$

$= \frac{\pi \times 4}{4} - \left[\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$

$= \pi - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot (2^{\frac{3}{2}} - 0) = \pi - \frac{8}{3}$ **જવાબ (B)**

77. જો વક્ર $y = f(x)$ એ $(1, -1)$માંથી પસાર થાય તથા વિકલ સમીકરણ $y(1 + xy)dx = x\, dy$નું સમાધાન કરે તો $f\left(-\frac{1}{2}\right) =$ ....

(A) $-\frac{2}{5}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

ઉકેલ : $\frac{y}{x}(1 + xy) = \frac{dy}{dx}$

ધારો કે $y = vx$.

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v(1 + vx^2) = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v^2x^2 = x\frac{dv}{dx}$$

$$\int x\, dx = \int \frac{1}{v^2}\, dv$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{v} + c$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{2} = -\frac{x}{y} + c$$

ધારો કે $x = 1, y = -1$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{1} + c \Rightarrow c = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{2} = -\frac{x}{y} - \frac{1}{2}$$

આપણે $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ મેળવવું છે.

$x = -\frac{1}{2}$ લો.

$$\therefore \quad \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)}{y} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{2y} - \frac{1}{2}$$

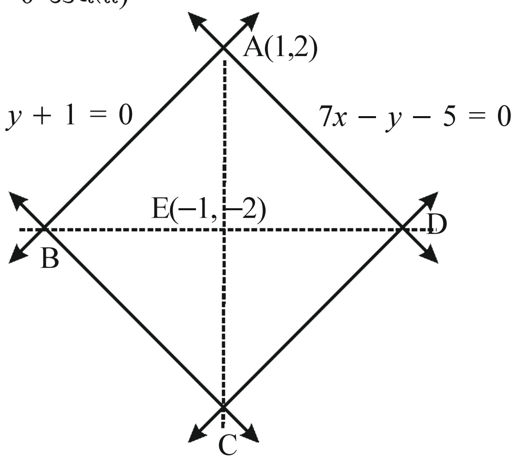
$$\therefore \quad y = \frac{4}{5}$$

જવાબ (D)

78. એક સમભુજ ચતુષ્કોણની બાજુઓ $x - y + 1 = 0$ અને $7x - y - 5 = 0$ પર છે. જો તેના વિકર્ણો $(-1, -2)$ માં છેદે તો નીચેના પૈકી .... આ સમભુજ ચતુષ્કોણનું એક શિરોબિંદુ હોઈ શકે.

(A) $(-3, -9)$ (B) $(-3, -8)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ (D) $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}\right)$

ઉકેલ : Aના યામ = $(1, 2)$ ($x - y + 1 = 0$ અને $7x - y - 5 = 0$ ઉકેલતાં)



$\therefore$ $\overleftrightarrow{AE}$નો ઢાળ = 2

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BD}$નો ઢાળ = $-\frac{1}{2}$ $\left(\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{BD}\right)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BD}$નું સમીકરણ $\frac{y+2}{x+1} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ $x + 2y + 5 = 0$

$\overleftrightarrow{BD}$ તથા $\overleftrightarrow{AD}$ ઉકેલતાં.

$\therefore$ D ના યામ = $\left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$

$x - y + 1 = 0$ અને $x + 2y + 5 = 0$ ઉકેલતાં, $B = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ અને $C = (-3, -6)$. **જવાબ (C)**

79. $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$ વર્તુળને બહારથી સ્પર્શતા અને X-અક્ષને સ્પર્શતા વર્તુળોનાં કેન્દ્રો,

(A) એક વર્તુળ પર છે (B) એક ઉપવલય પર છે

(C) અતિવલય પર છે (D) પરવલય પર છે

ઉકેલ : $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$ એ (4, 4) કેન્દ્ર તથા 6 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ છે.

(ત્રિજ્યા $= \sqrt{4^2 + 4^2 + 4} = 6$)

ધારો કે માંગેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર (h, k) છે.

$C_1C_2 = r_1 + r_2$

$\sqrt{(h-4)^2 + (k-4)^2} = (6 + |k|)$

$(h - 4)^2 + (k - 4)^2 = (6 + |k|)^2$

$h^2 - 8h + 16 + k^2 - 8k + 16 = 36 + k^2 + 12|k|$

$h^2 - 8h - 20k - 4 = 0$ અથવા $h^2 - 8h + 4k - 4 = 0$

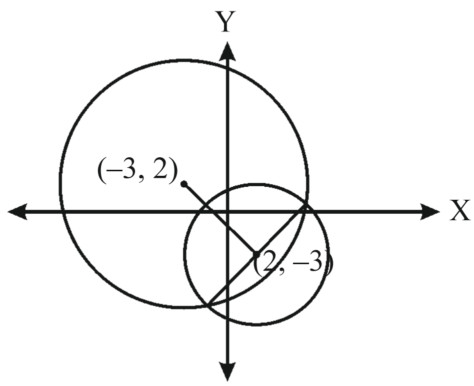
$x^2 - 8x - 20y - 4 = 0$ અથવા $x^2 - 8x + 4y - 4 = 0$

આ બિંદુગણ પરવલય દર્શાવે છે. **જવાબ (D)**

80. (−3, 2) કેન્દ્રવાળા વર્તુળ Sની એક જીવા $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ નો એક વ્યાસ છે. તો Sની ત્રિજ્યા .... છે.

(A) $5\sqrt{2}$ (B) $5\sqrt{3}$ (C) 5 (D) 10

ઉકેલ : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ નું કેન્દ્ર (2, −3) છે.



તેની ત્રિજ્યા $\sqrt{4 + 9 + 12} = 5$

બંને કેન્દ્રો $C_1(2, -3)$ અને $C_2(-3, 2)$

વચ્ચેનું અંતર

$d = \sqrt{(2+3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{50}$

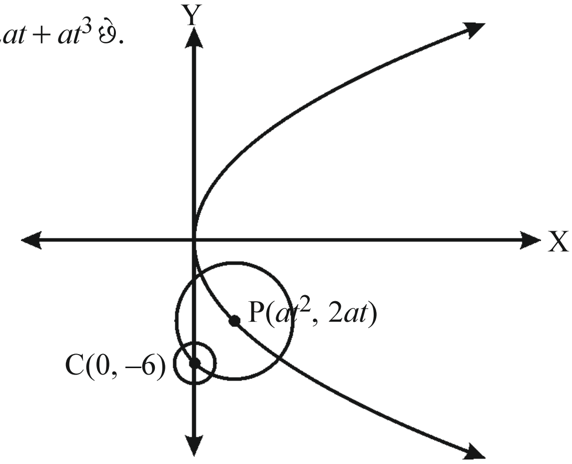
Sની ત્રિજ્યા $= \sqrt{5^2 + (\sqrt{50})^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ **જવાબ (B)**

81. $x^2 + (y + 6)^2 = 1$ ના કેન્દ્રથી ન્યૂનતમ અંતરે $y^2 = 8x$ પરનું બિંદુ P છે. તો Cમાંથી પસાર થતા તથા P કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 12 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - x + 4y - 12 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - \frac{x}{4} + 2y - 24 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 4x + 9y + 18 = 0$

ઉકેલ : $P(at^2, 2at)$ આગળ પરવલયના અભિલંબનું સમીકરણ $y + tx = 2at + at^3$ છે.



તે $(0, -6)$માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \quad -6 = 2at + at^3$

$-6 = 4t + 2t^3$ $\qquad (a = 2)$

$t^3 + 2t + 3 = 0.$

આથી, $(t + 1)(t^2 - t + 3) = 0$

$t^2 - t + 3 = 0$ નાં બીજ સંકર સંખ્યા છે.

$\therefore \quad t = -1$

તેથી, $P(a, -2a) = (2, -4).$ $\qquad (a = 2)$

વર્તુળની ત્રિજ્યા $= CP = \sqrt{2^2 + (-4+6)^2} = 2\sqrt{2}$

વર્તુળનું સમીકરણ $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = (2\sqrt{2})^2$

$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 12 = 0$ **જવાબ (A)**

82. જેના નાભિલંબની લંબાઈ 8 હોય તથા સહાયક અક્ષની લંબાઈ નાભિઓ વચ્ચેના અંતરથી અડધી હોય તેવા અતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા .... છે.

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

ઉકેલ : $l = \frac{2b^2}{a} = 8$. આથી, $b^2 = 4a$ ...(i)

$\therefore \quad 2b = \frac{1}{2}(2ae)$

$\therefore \quad 2b = ae$ ...(ii)

(ii) નો વર્ગ કરતાં,

$4b^2 = a^2e^2$. તેથી $4\frac{b^2}{a^2} = e^2$. આપણે જાણીએ છીએ કે $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$. આથી, $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$

$\therefore \quad 4(e^2 - 1) = e^2$

$\therefore \quad 4e^2 - e^2 = 4$

$\therefore \quad 3e^2 = 4$

$\therefore \quad e = \frac{2}{\sqrt{3}}$ **જવાબ (C)**

83. $(1, -5, 9)$ નું $x = y = z$ ને સમાંતર $x - y + z = 5$ નું અંતર .... છે.

(A) $3\sqrt{10}$ (B) $10\sqrt{3}$ (C) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{20}{3}$

ઉકેલ : ધારો કે Q = (1, −5, 9)

આપેલ રેખાનાં સમીકરણ $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$

રેખા $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-9}{1} = r$ એ (1, −5, 9)માંથી પસાર થાય છે તથા તેની દિશા રેખા $x = y = z$ ની દિશા છે.

રેખા પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $P(r + 1, r - 5, r + 9)$ છે.

તે સમતલ પર હોવાથી,

$\therefore \ (r + 1) - (r - 5) + (r + 9) = 5$

$\therefore \ r = -10$

P ના યામ (−9, −15, −1) છે.

અંતર $PQ = \sqrt{(10)^2 + (10)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{3}$ **જવાબ (B)**

84. રેખા $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+4}{3}$ એ સમતલ $lx + my - z = 9$ માં આવેલી છે, તો $l^2 + m^2$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 26 (B) 18 (C) 5 (D) 2

ઉકેલ : રેખા પરનું બિંદુ P = (3, −2, −4)

P એ સમતલ $lx + my - z = 9$ પર છે.

$\therefore \ 3l - 2m + 4 = 9$

$\therefore \ 3l - 2m = 5$ ...(i)

રેખા સમતલ પર હોવાથી $(2, -1, 3) \cdot (l, m, -1) = 0$. તેથી $2l - m - 3 = 0$

$2l - m = 3$ ...(ii)

ઉકેલતાં, $l = 1, m = -1$

આથી, $l^2 + m^2 = 2$ **જવાબ (D)**

85. $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ એકમ સદિશો છે અને $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. જો $\vec{b}$ એ $\vec{c}$ ને સમાંતર ન હોય તો $\vec{a}$ તથા $\vec{b}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ .... છે.

(A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

ઉકેલ : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

$\therefore (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{c}$

$\vec{b}$ એ $\vec{c}$ ને સમાંતર ન હોવાથી,

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ તથા $-(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ |\overline{a}||\overline{b}|\ cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ તથા $\overline{a}$ અને $\overline{b}$ એકમ સદિશો છે.

$\therefore\ cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ **જવાબ (D)**

86. 2, 3, a અને 11 નું પ્રમાણિત વિચલન 3.5 છે, તો નીચેના પૈકી કયું સત્ય છે ?

(A) $3a^2 - 26a + 55 = 0$ (B) $3a^2 - 32a + 84 = 0$

(C) $3a^2 - 34a + 91 = 0$ (D) $3a^2 - 23a + 44 = 0$

ઉકેલ : $s = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$\therefore\ \frac{4+9+a^2+121}{4} - \left(\frac{2+3+a+11}{4}\right)^2 = \frac{49}{4}$

$\therefore\ (4a^2 + 536) - (a^2 + 32a + 256) = 196$

$\therefore\ 3a^2 - 32a + 84 = 0$ **જવાબ (B)**

87. છ પૃષ્ઠોવાળા પાસા A અને B એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. પાસા A પર 4 આવે તે ઘટના E_1 છે. પાસા B પર 2 આવે તે ઘટના E_2 છે. બંને પાસા પર મળતા પૂર્ણાંકોનો સરવાળો અયુગ્મ હોય તે ઘટના E_3 છે. તો નીચેના પૈકી કયું વિધાન અસત્ય છે ?

(A) E_1 અને E_2 નિરપેક્ષ છે. (B) E_2 અને E_3 નિરપેક્ષ છે.

(C) E_1 અને E_3 નિરપેક્ષ છે. (D) E_1, E_2 અને E_3 નિરપેક્ષ છે.

ઉકેલ : $P(E_1) = \frac{1}{6}$

$P(E_2) = \frac{1}{6}$

$P(E_3) = \frac{1}{2}$

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36} = P(E_1)\,P(E_2)$ $\{(4, 2)\}$

$P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{12} = P(E_2)\,P(E_3)$ $\{(1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$

$P(E_3 \cap E_1) = \frac{1}{12} = P(E_1)\,P(E_3)$ $\{(4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \neq P(E_1)\,P(E_2)\,P(E_3)$

$\therefore\ E_1, E_2, E_3$ નિરપેક્ષ નથી. **જવાબ (D)**

88. જો $0 \le x < 2\pi$, તો નીચેના સમીકરણનું સમાધાન કરતી વાસ્તવિક સંખ્યા x ની સંખ્યા .... છે.

$cos\,x + cos\,2x + cos\,3x + cos\,4x = 0$

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9

ઉકેલ : $cos\, x + cos\, 2x + cos\, 3x + cos\, 4x = 0$

$(cos\, x + cos\, 4x) + (cos\, 2x + cos\, 3x) = 0$

$2cos\frac{5x}{2} \cdot cos\frac{3x}{2} + 2cos\frac{5x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} = 0$

$2cos\frac{5x}{2}\left[cos\frac{3x}{2} + cos\frac{x}{2}\right] = 0$

(i) $cos\frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{5} \Rightarrow [0, 2\pi)$ માં $x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$.

(ii) $cos\frac{3x}{2} + cos\frac{x}{2} = 0$

$4cos^3\frac{x}{2} - 3cos\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 4cos^3\frac{x}{2} - 2cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2cos^3\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2} = 0$

$cos\frac{x}{2}\left[2cos^2\frac{x}{2} - 1\right] = 0 \Rightarrow cos\frac{x}{2}[cos\, x] = 0$

$cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\pi$ અથવા $cos\, x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$x = \pi$ અથવા $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

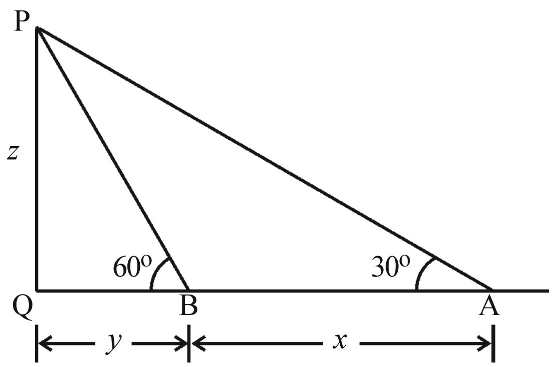
ઉકેલો $x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ...$(0 \le x < 2\pi)$ માં તેમની સંખ્યા 7 છે.

જવાબ (C)

89. એક વ્યક્તિ એકસમાન ગતિથી સીધા રસ્તા પર આવેલા શિરોલંબ સ્તંભ તરફ ચાલતો જાય છે. એક બિંદુ A આગળ તેને સ્તંભની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30^o જણાય છે. તે જ દિશામાં 10 મિનિટ ચાલ્યા પછી B આગળ સ્તંભની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60^o જણાય છે તો Bથી સ્તંભ સુધી પહોંચવામાં લાગતો સમય .... મિ છે.

(A) 6 (B) 10 (C) 20 (D) 5

ઉકેલ :



ધારો કે AB = x, BQ = y, PQ = z

$tan30^o = \frac{z}{x+y}$. તેથી $z = \frac{x+y}{\sqrt{3}}$

$tan60^o = \frac{z}{y}$. તેથી $z = \sqrt{3}\, y$

$\therefore \frac{x+y}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\, y$. તેથી, $x + y = 3y$. માટે, $x = 2y$

$\therefore y = \frac{x}{2}$

x અંતર ચાલવામાં 10 મિનિટ લાગે છે.

$\therefore y = \frac{x}{2}$ અંતર ચાલવામાં 5 મિનિટ લાગશે. **જવાબ (D)**

90. બૂલીઅન અભિવ્યક્તિ $(p \wedge (\sim q)) \vee q \vee ((\sim p) \wedge q)$ ને સમાન અભિવ્યક્તિ .... છે.

(A) $(\sim p) \wedge q$ (B) $p \wedge q$ (C) $p \vee q$ (D) $p \vee (\sim q)$

ઉકેલ : $(p \wedge (\sim q)) \vee q \vee ((\sim p) \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$(\sim p) \wedge q$	$(p \wedge (\sim q)) \vee q$	$(p \wedge (\sim q)) \vee q \vee ((\sim p) \wedge q)$	$p \vee q$
T	T	F	F	F	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F	F	F	F

બીજી રીત :

$$(p \wedge (\sim q)) \vee q \vee ((\sim p) \wedge q) = (p \wedge (\sim q)) \vee q$$
$$= (q \vee p) \wedge (q \vee (\sim q))$$
$$= (q \vee p) \wedge t$$
$$= q \vee p$$
$$= p \vee q$$

જવાબ (C)

●