01

संयुक्त फलन
(Composite Functions)

1.01 प्रस्तावना एवं पूर्वाभ्यास (Introduction and previous learning)

पूर्व कक्षा में हमने सम्बन्ध एवं विशेष प्रकार के सम्बन्ध (फलन) का अध्ययन किया है। गणित के अध्ययन में फलन एक आधारभूत संकल्पना है अत: इसका और अधिक विस्तार से अध्ययन किया जाना आवश्यक प्रतीत होता है। विस्तरित अध्ययन से पूर्व कुछ आवश्यक मुख्य संकल्पनाओं को यहाँ दिया जाना अध्ययन में सहायक सिद्ध होगा।

फलन : किसी समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित फलन या प्रतिचित्रण एक ऐसा नियम या संगतता है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध होता है।

फलन के प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर : यदि f समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन है तो समुच्चय A को फलन f का प्रांत तथा समुच्चय B को फलन f का सहप्रांत कहते हैं। समुच्चय B के उन सभी अवयवों का समुच्चय जो A के अवयवों के प्रतिबिम्ब है, f का परिसर कहलाता है। इसे f(A) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

अचर फलन : एक ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत उसके प्रांत का प्रत्येक अवयव सहप्रांत के एक ही अवयव से सम्बद्ध हो, अचर फलन कहलाता है।

तत्समक फलन : किसी समुच्चय A से A में परिभाषित ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं और केवल स्वयं से सम्बद्ध हो, A का तत्समक फलन कहलाता है इसे I_A से निरूपित किया जाता है।

तुल्य फलन : दो फलन f तथा g तुल्य कहलाते है यदि

(i) f का प्रांत $=g$ का प्रांत (ii) f का सहप्रांत $=g$ का सहप्रांत (iii) $f(x)=g(x),\ \forall\ x$

अवयवों की सम्बद्धता के आधार पर फलनों के प्रकार निम्न है :

(i) **एकैकी फलन** : यदि $f: A\to B$ एक फलन हो, तो f एकैकी फलन कहलाता है यदि f के अन्तर्गत A के भिन्न–भिन्न अवयवों के B में भिन्न–भिन्न प्रतिबिम्ब हो।

(ii) **बहु–ऐकी फलन** : यदि $f: A\to B$ एक फलन हो, तो f बहुऐकी फलन कहलाता है यदि f के अन्तर्गत A के दो या अधिक अवयवों का B में एक प्रतिबिम्ब है।

(iii) **आच्छादक फलन** : यदि $f: A\to B$ एक फलन हो, तो f आच्छादक फलन कहलाता है यदि B का प्रत्येक अवयव A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब हो अर्थात् B के प्रत्येक अवयव का A में कम से कम एक पूर्व प्रतिबिम्ब विद्यमान हो।

(iv) **अन्तर्क्षेपी फलन** : यदि $f: A\to B$ एक फलन हो, तो f अन्तर्क्षेपी फलन कहलाता है यदि B में कम से कम एक ऐसा अवयव विद्यमान हो जो A के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं हो अर्थात् जिसका कोई पूर्व प्रतिबिम्ब A में विद्यमान नहीं हो। अत: f अन्तर्क्षेपी है यदि $f(A)\neq B$

(v) **एकैकी–आच्छादक फलन** : यदि $f: A\to B$ एक फलन हो तो f एकैकी–आच्छादक कहलाता है यदि f एकैकी के साथ–साथ आच्छादक भी हो।

1.02 माना A, B, C तीन अरिक्त समुच्चय हैं तथा $f: A\to B$ तथा $g: B\to C$ दो फलन हैं।

चूंकि f, A से B में फलन है, $\therefore$ A के प्रत्येक अवयव x के लिए B में एक अद्वितीय अवयव $f(x)$ विद्यमान होगा।

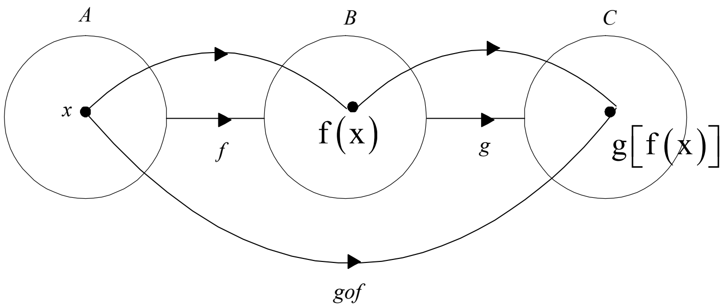
पुन : चूंकि g, B से C में एक फलन है। $\therefore$ B के इस अवयव $f(x)$ के लिए C में एक अद्वितीय अवयव $g\left[f(x)\right]$ विद्यमान होगा।

इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों फलनों f तथा g पर एक साथ विचार करने पर A से C में परिभाषित एक नया फलन प्राप्त होता है। इस फलन को g तथा f का संयुक्त फलन कहते हैं तथा इसे (gof) से निरूपित करते हैं। इसे निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

परिभाषा : *यदि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो फलन हों तो फलन $(gof): A \to C$, जो निम्न प्रकार परिभाषित हो*

$$(gof)x = g[f(x)], \quad \forall \; x \in A$$

g तथा f का संयुक्त फलन कहलाता है।



आकृति 1.01

टिप्पणी : (gof) की परिभाषा से स्पष्ट है कि (gof) तभी परिभाषित होगा जब A के प्रत्येक अवयव x के लिए $f(x), g$ के प्रान्त का अवयव हो ताकि इसका g प्रतिबिम्ब ज्ञात किया जा सके।

अतः (gof) फलन परिभाषित होने के लिए फलन f का परिसर, फलन g के प्रान्त का उपसमुच्चय होना आवश्यक है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. *यदि $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5\}, C = \{7,8,9\}$ तथा $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ निम्न प्रकार परिभाषित हो :*

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 5; \quad g(4) = 8, \quad g(5) = 9$$, तो $g \circ f$ ज्ञात कीजिए।

हल : *तब $(gof): A \to C$ के अर्न्तगत*

$$(gof)(1) = g[f(1)] = g(4) = 8$$
$$(gof)(2) = g[f(2)] = g(4) = 8$$
$$(gof)(3) = g[f(3)] = g(5) = 9$$

$\therefore \quad (gof) = \{(1,8),(2,8),(3,9)\}$

उदाहरण-2. यदि $f: R \to R, f(x) = \sin x$ तथा $g: R \to R, g(x) = x^2$ तो $g \circ f$ एवं $f \circ g$ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ पर f का परिसर, g के प्रान्त का उपसमुच्चय है तथा g का परिसर, f के प्रान्त का उपसमुच्चय है। अत : (gof) तथा (fog) दोनों ही परिभाषित हैं।

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(\sin x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$$

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = \sin x^2$$

यहाँ $\quad (gof) \neq (fog)$

उदाहरण-3. यदि $f: N \to Z, f(x) = 2x$

तथा $g: Z \to Q, g(x) = (x+1)/2$ हो, तो $f \circ g$ एवं $g \circ f$ ज्ञात कीजिए।

हल : $(gof)(x) = g[f(x)] = g(2x) = (2x+1)/2, \quad \forall x \in N$

इस परिस्थिति में (fog) विद्यमान नहीं है।

1.03 संयुक्त फलन के गुण (Properties of composite of functions)

(i) संयुक्त फलन द्वारा क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन करना आवश्यक नहीं है (The composite of functions is not necessarily commutative)

माना $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो फलन हों। तब संयुक्त फलन $(gof): A \to C$ विद्यमान एवं परिभाषित होगा क्योंकि f का परिसर, g के प्रान्त का उपसमुच्चय है। परन्तु इस स्थिति में (fog) विद्यमान नहीं होगा क्योंकि फलन g का परिसर, f के प्रान्त A का उपसमुच्चय नहीं है। अत : यदि $C \not\subset A, (fog)$ विद्यमान नहीं होगा।

यदि $C = A$ हो तो $f: A \to B$ तथा $g: B \to A$

इस स्थिति में $(gof): A \to A$ तथा $(fog): B \to B$ दोनों विद्यमान होंगे परन्तु फिर भी $(gof) \neq (fog)$ क्योंकि दोनों के प्रान्त तथा सहप्रान्त भिन्न हैं।

यदि $A = B = C$ तब $(gof): A \to A$ तथा $(fog): A \to A$ होंगें फिर भी दोनों का बराबर होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरणार्थ : यदि $f: R \to R, f(x) = 2x$ तथा $g: R \to R, g(x) = x^2$ हो तो

$$(gof): R \to R, (fog): R \to R \quad \text{परन्तु}$$

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = 2x^2$$

अत : $$(fog) \neq (fog)$$

टिप्पणी : विशेष परिस्थिति में ही (gof) तथा (fog) बराबर हो सकते हैं।

उदाहरणार्थः यदि $f: R \to R, f(x) = x^2$

$g: R \to R, g(x) = x^3$ हो, तो

$$(gof): R \to R, (fog): R \to R$$

तथा $$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = (x^2)^3 = x^6$$

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^3) = (x^3)^2 = x^6$$

अत : $$(fog) = (gof)$$

परन्तु सदैव ऐसा होना आवश्यक नहीं है।

(ii) संयुक्त फलन साहचर्य गुणधर्म का पालन करते हैं (Composite of Functions is Associative)

प्रमेय 1.1 यदि तीन फलन f, g, h इस प्रकार के हों कि संयुक्त फलन $f \circ (g \circ h)$ तथा $(f \circ g) \circ h$ परिभाषित हों तो

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

प्रमाण : माना तीन फलन f, g, h निम्न प्रकार परिभाषित हैं :

$$h: A \to B,\ g: B \to C,\ f: C \to D$$

तब दोनों संयुक्त फलन $fo(goh)$ तथा $(fog)oh, A$ से D में परिभाषित होंगे।

अर्थात् $$fo(goh): A \to D \quad \text{तथा} \quad (fog)oh: A \to D$$

स्पष्ट है कि दोनों के प्रान्त A तथा सहप्रान्त D हैं। अत : इनकी तुल्यता के लिए हमें सिद्ध करना है कि

$$[fo(goh)](x) = [(fog)oh](x),\ \forall x \in A$$

माना कि $x \in A,\ y \in B,\ z \in C$ इस प्रकार है कि

$$h(x) = y \quad \text{तथा} \quad g(y) = z$$

तब
$$[fo(goh)](x) = f[(goh)(x)]$$
$$f[g\{h(x)\}] = f[g(y)] = f(z)$$

$\therefore$ $$[fo(goh)](x) = f(z) \tag{1}$$

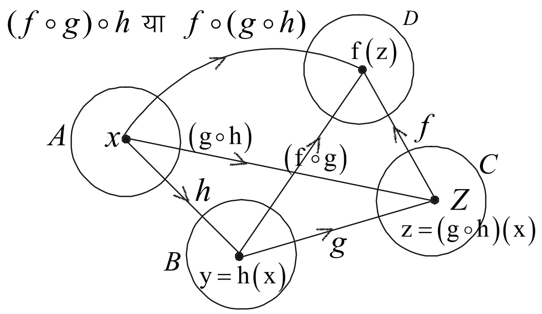
पुनः $$[(fog)oh](x) = (fog)[h(x)] = (fog)(y)$$
$$= f[g(y)] = f(z) \tag{2}$$

अतः (1) तथा (2) से

$$[fo(goh)](x) = [(fog)oh](x),\ \forall x \in A$$

$\therefore$ $$fo(goh) = (fog)oh$$

निम्न आकृति द्वारा इसे प्रदर्शित किया जा सकता है।



आकृति 1.02

(iii) दो एकैकी आच्छादक फलनों का संयुक्त फलन भी एकैकी आच्छादक होता है। (The composite of two bijections is a bijection)

प्रमेय 1.2 यदि f और g इस प्रकार के दो एकैकी आच्छादक फलन हों कि (gof) परिभाषित किया जा सके तो (gof) भी एकैकी आच्छादक होगा।

प्रमाण : माना $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो एकैकी आच्छादक फलन हों। तब संयुक्त फलन (gof) समुच्चय A से समुच्चय C में परिभाषित किया जा सकता है। अर्थात्

$$(gof): A \to C$$

सिद्ध करना है कि (gof) एकैकी आच्छादक है।

एकैकी : माना $a_1, a_2 \in A$ इस प्रकार हैं कि

$$(gof)(a_1) = (gof)(a_2)$$

$\Rightarrow$ $g[f(a_1)] = g[f(a_2)]$

$\Rightarrow$ $f(a_1) = f(a_2)$ [$\because g$ एकैकी है]

$\Rightarrow$ $a_1 = a_2$ [$\because f$ एकैकी है]

$\therefore$ (gof) एकैकी है।

आच्छादक : यदि $c \in C$ तब

$c \in C \Rightarrow \exists b \in B$ इस प्रकार है कि $g(b) = c$ [$\because g$ आच्छादक है]

पुन: $b \in B \Rightarrow \exists a \in A$ इस प्रकार है कि $f(a) = b$ [$\because f$ आच्छादक है।]

इस प्रकार $c \in C \Rightarrow \exists a \in A$ इस प्रकार है कि

$$(gof)(a) = g[f(a)] = g(b) = c$$

अर्थात् C का प्रत्येक अवयव A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब है दूसरे शब्दों में C के प्रत्येक अवयव का पूर्व–प्रतिबिम्ब A में विद्यमान है। अत : (gof) आच्छादक है।

अत : (gof) एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रमेय 1.3 यदि $f : A \to B$ हो तो $foI_A = I_B of = f$, जहां I_A तथा I_B समुच्चय A तथा B में परिभाषित तत्समक फलन है। अर्थात् किसी फलन को तत्समक फलन से संयुक्त करने पर वही फलन प्राप्त होता है।

प्रमाण : $\because$ $I_A : A \to A$ तथा $f : A \to B$ $\therefore$ $(foI_A) : A \to B$

माना $x \in A$ तब

$(foI_A)(x) = f[I_A(x)] = f(x)$ $[\because I_A(x) = x, \forall x \in A]$

$\therefore$ $foI_A = f$ (1)

पुन: $f : A \to B$ तथा $I_B : B \to B$ $\therefore$ $(I_B of) : A \to B$

माना $z \in A$ तथा $f(x) = y$, जहाँ $y \in B$

$\therefore$ $(I_B of)(x) = I_B[f(x)] = I_B(y) = y$ $[\because I_B(y) = y, \forall y \in B]$

$= f(x)$ (2)

(1) व (2) से $(I_B of) = f = (f \circ I_A)$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-4. यदि $f : R \to R, f(x) = x^3$ तथा $g : R \to R, g(x) = 3x - 1$ तब $(gof)(x)$ तथा $(fog)(x)$ का मान ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि $fog \neq gof$.

हल : स्पष्टत : $(gof) : R \to R$ तथा $(fog) : R \to R$

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^3) = 3x^3 - 1$$

पुन : $(fog)(x) = f[g(x)] = f(3x - 1) = (3x - 1)^3$

$\because$ $(3x^3 - 1) \neq (3x - 1)^3$

$\therefore$ $(gof) \neq (fog)$

उदाहरण-5. यदि $f: R \to R, f(x) = x^2 + 2$ तथा $g: R \to R, g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ हो, तो (gof) तथा (fog) ज्ञात कीजिए।

हल : स्पष्टत : $(gof): R \to R$ तथा $(fog): R \to R$ दोनों ही विद्यमान हैं।

माना $x \in R$

तब $\quad gof \quad x \quad g \quad f \quad x \quad g \quad x^2 \quad 2 \quad \dfrac{x^2 \quad 2}{x^2 \quad 2 \quad 1} \quad \dfrac{x^2 \quad 2}{x^2 \quad 1}$

तथा $\quad (fog)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + 2 = \dfrac{x^2 + 2(x-1)^2}{(x-1)^2}$

उदाहरण-6. निम्न तीन फलनों के लिए साहचर्य गुणधर्म का सत्यापन कीजिए :

$$f: N \to Z_0, f(x) = 2x; g: \ Z_0 \to Q, g(x) = \frac{1}{x} \text{ तथा } h: Q \to R, h(x) = e^x.$$

हल : $\because \quad f: N \to Z_0, g: Z_0 \to Q, \ h: Q \to R$

$\because \quad (go\,f): N \to Q$ तथा $(hog): Z_0 \to R$ । अब $(hog): Z_0 \to R, \ f: N \to Z_0$

$\therefore \quad (hog)of: N \to R$

तथा $h: Q \to R, (go\,f): N \to Q \ \therefore ho(go\,f): N \to R$ इस प्रकार दोनों ही फलन $(hog)of$ तथा $ho(go\,f)$ समुच्चय N से R में परिभाषित हैं। अब हमें दिखाना है कि

$$[(ho\,g)of](x) = [ho(go\,f)](x), \quad \forall \ x \in N$$

अब $\quad [(hog)of](x) = (hog[f(x)]) = (hog)(2x) = h[g(2x)] = h\left(\dfrac{1}{2x}\right) = e^{1/2x} \qquad (1)$

तथा $\quad [ho(go\,f)](x) = h[(go\,f)(x)] = h[g(f(x))]$

$$= h[g(2x)] = h\left(\frac{1}{2x}\right) = e^{1/2x} \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से हम देखते हैं कि

$$[(hog)o\,f](x) = [ho(go\,f)](x).$$

अत: फलन f, g, h की साहचर्यता सत्यापित होती है।

प्रश्नमाला 1.1

1. यदि $f: R \to R$ तथा $g: R \to R$ दो फलन निम्न प्रकार से परिभाषित हो तो $(fog)(x)$ तथा $(gof)(x)$ ज्ञात कीजिए

   (i) $f(x) = 2x + 3, \ g(x) = x^2 + 5$ $\qquad$ (ii) $f(x) = x^2 + 8, \ g(x) = 3x^3 + 1$

   (iii) $f(x) = x, \ g(x) = |x|$ $\qquad$ (iv) $f(x) = x^2 + 2x + 3, g(x) = 3x - 4.$

2. यदि $A = \{a, b, c\}, \ B = \{u, v, w\}$

   तथा $f: A \to B$ तथा $g: B \to A$ निम्न प्रकार परिभाषित हो

   $$f = \{(a,v), (b,u), (c,w)\} \ ; \ g = \{(u,b), (v,a), (w,c)\}$$

   तो (fog) तथा (gof) ज्ञात कीजिए।

3. यदि $f:R^+ \to R^+$ तथा $g:R^+ \to R^+$ निम्न प्रकार परिभाषित हो

$$f(x)=x^2 \text{ तथा } g(x)=\sqrt{x}$$

तो gof तथा fog ज्ञात कीजिए। क्या ये तुल्य फलन है?

4. यदि $f:R\to R$ तथा $g:R\to R$ दो ऐसे फलन हैं कि $f(x)=3x+4$ तथा $g(x)=\frac{1}{3}(x-4)$ तो $(fog)(x)$ तथा $(gof)(x)$ ज्ञात कीजिए तथा $(gog)(1)$ का मान भी ज्ञात कीजिए।

5. यदि f,g,h तीन फलन R से R पर इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x)=x^2$, $g(x)=\cos x$ एवं $h(x)=2x+3$ तो $\{ho\,(gof)\}\sqrt{2\pi}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि f तथा g निम्न प्रकार परिभाषित हो तो $(gof)(x)$ ज्ञात कीजिए

   (i) $f:R\to R, f(x)=2x+x^{-2}$ $\qquad$ $g:R\to R, g(x)=x^4+2x+4.$

7. यदि $A=\{1,2,3,4\}$, $f:R\to R$, $f(x)=x^2+3x+1$

   $g:R\to R, g(x)=2x-3$ तब ज्ञात कीजिए:

   (i) $(fog)(x)$ $\qquad$ (ii) $(gof)(x)$ $\qquad$ (iii) $(fof)(x)$ $\qquad$ (iv) $(gog)(x)$.

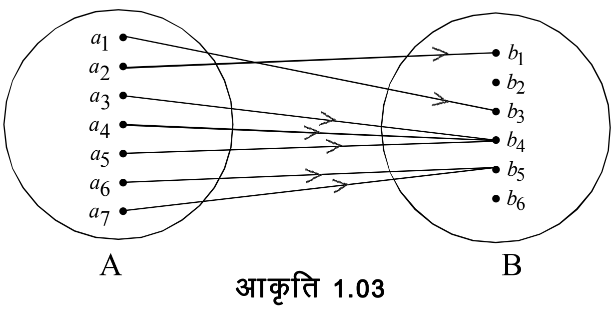
1.04 प्रतिलोम फलन (Inverse function)

(a) एक अवयव का प्रतिलोम (Inverse of an element)

माना कि A और B दो समुच्चय हैं तथा f, A से B में परिभाषित कोई फलन है। अर्थात् $f:A\to B$ हम देख चुके हैं कि यदि f के अन्तर्गत A का कोई अवयव 'a', B के अवयव 'b' से सम्बद्ध है तो b को a का f -प्रतिबिम्ब कहा जाता है तथा इसे $b=f(a)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अवयव 'a' को फलन f के अन्तर्गत 'b' का पूर्व–प्रतिबिम्ब या प्रतिलोम कहा जाता है तथा इसे $a=f^{-1}(b)$ से व्यक्त किया जाता है।

किसी फलन के अन्तर्गत किसी अवयव का प्रतिलोम एक अवयव हो सकता है, एक से अधिक अवयव हो सकते हैं या कोई भी अवयव नहीं हो सकता है। वास्तव में यह सब फलन के एकैकी, बहु–एकैकी, आच्छादक अथवा अन्तर्क्षेपी होने पर निर्भर करता है।

यदि फलन f को निम्न आकृति द्वारा परिभाषित किया जाए।



आकृति 1.03

तो हम देखते हैं कि $\quad f^{-1}(b_1)=a_2,$

$$f^{-1}(b_2)=\phi,\ f^{-1}(b_3)=a_1,$$

$$f^{-1}(b_4)=\{a_3,a_4,a_5\},\ f^{-1}(b_5)=\{a_6,a_7\},$$

$$f^{-1}(b_6)=\phi.$$

उदाहरणार्थ : यदि $A=\{-1,1,-2,2,3\}, B=\{1,4,6,9\}$ तथा $f: A \rightarrow B,\ f(x)=x^2$ द्वारा परिभाषित हो, तो

$$f^{-1}(1)=\{-1,1\},\ f^{-1}(4)=\{-2,2\},\ f^{-1}(6)=\phi \text{ तथा } f^{-1}(9)=\{3\}.$$

उदाहरणार्थ : यदि $f: C \rightarrow C,\ f(x)=x^2-1$ हो तो $f^{-1}(-5)$ तथा $f^{-1}(8)$ ज्ञात कीजिए।

हल : माना $f^{-1}(-5)=x$ तब $f(x)=-5$

$\Rightarrow$ $x^2-1=-5 \Rightarrow x^2 \quad 4 \Rightarrow x=\sqrt{-4}$

$\Rightarrow$ $x=\pm 2i$. दोनों ही C में है।

पुन : माना $f^{-1}(8)=x$ तब $f(x)=8.$

$\Rightarrow$ $x^2-1=8 \Rightarrow x^2=9,\ x=\pm 3$ दोनों ही C में हैं।

अत : $f^{-1}(8)=\{-3,3\}$

अर्थात् $f^{-1}(-5)=\{2i,-2i\}$ तथा $f^{-1}(8)=\{-3,3\}$.

(a) प्रतिलोम फलन (Inverse function)

माना A तथा B दो समुच्चय हैं तथा $f: A \rightarrow B$ एक फलन है। यदि किसी नियम के अन्तर्गत हम B के अवयवों को A में उनके पूर्व–प्रतिबिम्ब से सम्बद्ध करें तो हम पायेंगे कि B में कुछ अवयव ऐसे होंगें जो A के किसी भी अवयव से सम्बद्ध नहीं है। यह तब होगा जब आच्छादक नहीं है। इसलिए यदि B के सभी अवयवों को A के किसी न किसी अवयव से सम्बद्ध होना है तो f एक आच्छादक फलन होना चाहिये। इसी प्रकार f यदि एक बहु–एकी फलन है तब इस नियम के अनुसार B के कुछ अवयव A के एक से अधिक अवयवों से सम्बद्ध होंगें। अत : B का एक अवयव A के एक और केवल एक अवयव से तभी सम्बद्ध होगा यदि f एक एकैकी फलन हो।

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि $f: A \rightarrow B$ एक एकैकी आच्छादक फलन है तब हम B से A में एक नया फलन परिभाषित कर सकते हैं जिसके अन्तर्गत B का प्रत्येक अवयव y, A में अपने पूर्व–प्रतिबिम्ब $f^{-1}(y)$ से सम्बद्ध हो। इस फलन को f का प्रतिलोम फलन कहते हैं तथा इसे f^{-1} द्वारा व्यक्त किया जाता है।

परिभाषा : यदि $f: A \rightarrow B$ एक एकैकी आच्छादक फलन हो तो f का प्रतिलोम फलन f^{-1}, B से A में परिभाषित होने वाला वह फलन है जिसके अन्तर्गत प्रत्येक $b \in B$, एक अद्वितीय अवयव $a \in A$ से सम्बद्ध है जहां $f(a)=b$.

अत : $f^{-1}: B \rightarrow A,\ f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow f(a)=b$

क्रमित युग्मों के रूप में इसे $f^{-1}:\{(b,a) \mid (a,b) \in f\}$ से निरूपित करते हैं।

टिप्पणी : किसी फलन f का प्रतिलोम फलन f^{-1} तभी परिभाषित होगा जब f एकैकी आच्छादक है।

1.05 प्रतिलोम फलन का प्रान्त एवं परिसर (Domain and range of inverse function)

परिभाषा से स्पष्ट है कि

f^{-1} का प्रान्त $= f$ का परिसर

तथा f^{-1} का परिसर $= f$ का प्रांत

उदाहरणार्थ : यदि $A=\{1,2,3,4\},\ B=\{2,5,10,17\}$ तथा $f(x)=x^2+1$ हो तो

$$f(1)=2,\ f(2)=5,\ f(3)=10,\ f(4)=17$$

$\therefore$ $f=\{(1,2),(2,5),(3,10),(4,17)\}$

स्पष्टत : f एकैकी आच्छादक है। अत : इसका प्रतिलोम फलन $f^{-1}: B \rightarrow A$ विद्यमान होगा तथा

$$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(10,3),(17,4)\}.$$

उदाहरणार्थ : माना $f: R \rightarrow R, f(x) = 3x + 4$, तब यह आसानी से सिद्ध किया जा सकता है कि f एकैकी आच्छादक है।
अतः $f^{-1}: R \rightarrow R$ विद्यमान होगा।
माना $x \in R$ (f का प्रान्त) तथा $y \in R$ (f का सहप्रान्त)

माना $f(x) = y,$ अत : $x \quad f \; ^{1} \quad y$

अब $f(x) = y \Rightarrow 3x + 4 = y \Rightarrow x = \dfrac{y-4}{3}$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) = \frac{y-4}{3}$$

अत : $f^{-1}: R \rightarrow R, f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$ से परिभाषित होगा।

1.06 प्रतिलोम फलन के गुणधर्म (Properties of inverse functions)

प्रमेय 1.4 एकैकी आच्छादक फलन का प्रतिलोम अद्वितीय होता है (The inverse of a bijection is unique).
प्रमाण : माना $f: A \rightarrow B$ एक एकैकी आच्छादक फलन है तो सिद्ध करना है कि f का एक और केवल एक प्रतिलोम विद्यमान होगा।
यदि संभव हो तो माना $g: B \rightarrow A$ तथा $h: B \rightarrow A, f$ के दो प्रतिलोम फलन है। माना y, B का कोई अवयव है।

माना $g(y) = x_1$ तथा $h(y) = x_2$

अब $g \quad y \quad x_1 \quad \Rightarrow \quad f \quad x_1 \quad y$ [$\because g, f$ का प्रतिलोम फलन है]

तथा $h(y) = x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = y$ [$\because h, f$ का प्रतिलोम फलन है]

$\therefore \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$ [$\because f$ एकैकी है]

अर्थात् $g(y) = h(y), \quad \forall \; y \in B$

अत : $g = h$

अर्थात् f का प्रतिलोम अद्वितीय है।

प्रमेय 1.5 यदि $f: A \rightarrow B$ एकैकी आच्छादक फलन हो तथा $f^{-1}: B \rightarrow A, f$ का प्रतिलोम फलन हो तो $fof^{-1} = I_B$ तथा $f^{-1}of = I_A$, जहाँ I_A तथा I_B क्रमश : A तथा B के तत्समक फलन है।

प्रमाण : $f: A \rightarrow B$ तथा $f^{-1}: B \rightarrow A$

$\therefore \quad (fof^{-1}): B \rightarrow B$ तथा $(f^{-1}of): A \rightarrow A$

अब प्रत्येक $a \in A$ के लिए एक अद्वितीय $b \in B$ है।

जहाँ $f(a) = b$ या $f^{-1}(b) = a$

$\therefore \quad (fof^{-1})(b) = f\left[f^{-1}(b)\right] = f(a) = b$

$\therefore \quad (fof^{-1})(b) = b, \quad \forall \; b \in B$

$\therefore \quad fof^{-1} = I_B$

इसी प्रकार $(fof^{-1})(a) = f^{-1}\left[f(a)\right] = f^{-1}(b) = a$

$\therefore \quad (fof^{-1})(a) = a, \quad \forall \; a \in A$

$\therefore \quad f^{-1}of = I_A$.

प्रमेय 1.6 एकैकी आच्छादक फलन का प्रतिलोम भी एकैकी आच्छादक होता है (The inverse of a bijection is also a bijection).

प्रमाण : माना $f : A \to B$ एक एकैकी आच्छादक फलन है तथा $g : B \to A, f$ का प्रतिलोम फलन है। तो सिद्ध करना है कि g भी एकैकी आच्छादक होगा।

माना कि $a_1, a_2 \in A;\ b_1, b_2 \in B$ ऐसे अवयव है कि

$g(b_1) = a_1$ अर्थात् $f(a_1) = b_1$ [$\because g, f$ का प्रतिलोम फलन है]

तथा $g(b_2) = a_2$ अर्थात् $f(a_2) = b_2$ [$\because g, f$ का प्रतिलोम फलन है]

अब $g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$\Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow b_1 = b_2$

$\therefore g$ एकैकी है।

पुन : $a \in A \Rightarrow \exists\, b \in B$ जिसके लिए $f(a) = b$

अब $f(a) = b \Rightarrow g(b) = a$

$\therefore$ $a \in A \Rightarrow \exists\, b \in B$ इस प्रकार कि $g(b) = a$

$\therefore g$ आच्छादक है।

अत : प्रतिलोम फलन g भी एकैकी आच्छादक है।

प्रमेय 1.7 यदि फलन f और g दो ऐसे एकैकी आच्छादक फलन है कि संयुक्त फलन gof परिभाषित हो तो gof का प्रतिलोम फलन विद्यमान होगा तथा

$$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$$

प्रमाण : माना $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ दो एकैकी आच्छादक फलन हैं। दिया गया है कि $(gof) : A \to C$ परिभाषित है। अतः प्रमेय 1.2 के अनुसार gof भी एकैकी आच्छादक होगा। अतः संयुक्त फलन gof का प्रतिलोम फलन विद्यमान होगा तथा

$$(gof)^{-1} : C \to A$$

सिद्ध करना है कि $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

अब, $f : A \to B$ एकैकी आच्छादक है। $\Rightarrow$ $f^{-1} : B \to A$ विद्यमान है।

पुनः $g : B \to C$ एकैकी आच्छादक है। $\Rightarrow$ $g^{-1} : C \to B$ विद्यमान है।

$\therefore$ $(f^{-1}og^{-1}) : C \to A$ विद्यमान है।

इस प्रकार $(gof)^{-1}$ तथा $(f^{-1}og^{-1})$ के प्रान्त तथा सहप्रान्त समान है।

माना $a \in A, b \in B, c \in C$ ऐसे अवयव हैं कि

$f(a) = b$ तथा $g(b) = c$

$\therefore$ $(gof)(a) = g[f(a)] = g(b) = c$

$\Rightarrow$ $(gof)^{-1}(c) = a$ (1)

पुन : $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ (2)

$g(b) = c \Rightarrow g^{-1}(c) = b$ (3)

$\therefore$ $(f^{-1}og^{-1})(c) = f^{-1}[g^{-1}(c)] = f^{-1}(b)$ [(3) से]

$= a$ [(2) से] (4)

अत : (1) तथा (4) से C के किसी अवयव x के लिए

$$(gof)^{-1}(x)=\left(f^{-1}og^{-1}\right)(x)$$

इससे यह सिद्ध होता है कि

$$(gof)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. यदि $f:R\to R, f(x)=x^2+5x+9$ हो, तो $f^{-1}(8)$ तथा $f^{-1}(9)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि $\quad f^{-1}(8)=x \Rightarrow f(x)=8$

$\Rightarrow \quad x^2+5x+9=8 \Rightarrow x^2+5x+1=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-4}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

$\therefore \quad f^{-1}(8)=\left\{\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{21}\right),\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{21}\right)\right\}$

पुन : माना कि $\quad f^{-1}(9)=x \quad\Rightarrow\quad f(x)=9$

$\Rightarrow \quad x^2+5x+9=9 \quad\Rightarrow\quad x=0,\ x=-5$

$\therefore \quad f^{-1}(9)=\{0,-5\}.$

उदाहरण-8. यदि $f:R\to R, f(x)=x^2+1$ हो, तो $f^{-1}(-5)$ तथा $f^{-1}(26)$ ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि $f^{-1}(-5)=x$ तब $f(x)=-5$

$\Rightarrow \quad x^2+1=-5 \quad\Rightarrow\quad x^2=-6 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{-6}$

अब $\sqrt{-6}$ कोई वास्तविक संख्या नहीं है।

$\therefore \quad \pm\sqrt{-6}\notin R \qquad \therefore \quad f^{-1}(-5)=\phi$

पुन :माना $\quad f^{-1}(26)=x$ तब $f(x)=26$

$\Rightarrow \quad x^2+1=26 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$

$\therefore \quad f^{-1}(26)=\{-5,5\}$

उदाहरण-9. यदि $f:R\to R, f(x)=x^3+2$ हो तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी आच्छादक है। f का प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।

हल : माना $x_1,x_2\in R$ तब $f(x_1)=f(x_2)$

$$\Rightarrow x_1^3+2=x_2^3+2 \quad\Rightarrow x_1^3=x_2^3 \quad\Rightarrow x_1=x_2$$

अत : f एकैकी है।

पुन : माना $y\in R$ तब $\exists\ (y-2)^{1/3}\in R$ इस प्रकार है कि

$$f\left[(y-2)^{1/3}\right]=(y-2)+2=y$$

सहप्रान्त के प्रत्येक अवयव का प्रान्त में पूर्व–प्रतिबिम्ब विद्यमान है। अत : फलन आच्छादक है।

अत : f एकैकी आच्छादक फलन है।

क्योंकि f एकैकी आच्छादक फलन है तो $f^{-1}: R \to R$ निम्न प्रकार परिभाषित होगा

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

परन्तु $\quad f(x) = x^3 + 2 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 2 = y$

$$\Rightarrow \quad x = (y-2)^{1/3}$$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) = (y-2)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = (x-2)^{1/3}$

अत : $\quad f^{-1}: R \to R, f^{-1}(x) = (x-2)^{1/3}$.

उदाहरण-10. यदि $f:Q \quad Q, f \; x \quad 2x$ तथा $g:Q \quad Q$, $g(x) = x+2$ हो तो निम्न का सत्यापन कीजिए

$$(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$$

हल : चूंकि f व g दो रैखिक फलन हैं अत : f तथा g एकैकी आच्छादक फलन है। अत : इनके प्रतिलोम f^{-1} तथा g^{-1} विद्यमान है तथा

$$f^{-1} = Q \to Q, \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{2}, \qquad \forall\, x \in Q \qquad (1)$$

$$g^{-1} = Q \to Q, \quad g^{-1}(x) = x - 2 \quad \forall\, x \in Q \qquad (2)$$

हम जानते हैं कि दो एकैकी आच्छादक फलनों का संयुक्त फलन भी एकैकी आच्छादक होता है। अत : $gof \; :Q \quad Q$ भी एकैकी आच्छादक है तथा इसका प्रतिलोम फलन विद्यमान है एवं

$$(gof)^{-1} : Q \to Q \qquad \because \quad (gof)(x) = g[f(x)] = g(2x) = 2x + 2$$

$$\therefore \qquad (gof)^{-1}(x) = (x-2)/2 \qquad (3)$$

पुन : $\quad (f^{-1} o g^{-1}) : Q \to Q$

तथा $\quad (f^{-1} o g^{-1})(x) = f^{-1}[g^{-1}(x)] = f^{-1}(x-2)$ [(2) से]

$$= (x-2)/2 \qquad [(1) \text{ से } (4)]$$

(3) तथा (4) से $\quad gof \;\; ^1 \; x \quad f \; ^1 og \; ^1 \;\; x \; , \quad x \quad Q$

$$\therefore \qquad (gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}.$$

प्रश्नमाला 1.2

1. यदि $A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b,c\}$ हो तो A से B में चार एकैकी आच्छादक फलन परिभाषित कीजिए तथा उनके प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।
2. यदि $f: R \to R, f(x) = x^3 - 3$ हो तो सिद्ध कीजिए कि f^{-1} विद्यमान होगा तथा f^{-1} का सूत्र भी ज्ञात कीजिए और $f^{-1}(24)$ तथा $f^{-1}(5)$ के मान ज्ञात कीजिए।
3. यदि $f: R \to R$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

   (i) $f(x) = 2x - 3$ $\qquad$ (ii) $f(x) = x^3 + 5$.

   तो सिद्ध कीजिए कि दोनों स्थितियों में f एकैकी आच्छादक है और f^{-1} भी ज्ञात कीजिए।
4. यदि $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,5,7,9\}, C = \{7,23,47,79\}$ तथा $f: A \to B,\; f(x) = 2x+1, g: B \to C, g(x) = x^2 - 2$ हो, तो $(gof)^{-1}$ और $f^{-1} o g^{-1}$ को क्रमित युग्मों के रूप में लिखिये।

5. यदि $f:R\to R, f(x)=ax+b, a\neq 0$ से परिभाषित हो तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी आच्छादक फलन है। f^{-1} का सूत्र भी ज्ञात कीजिए।

6. यदि $f:R\to R, f(x)=\cos(x+2)$ हो, तो कि क्या f^{-1} विद्यमान है?

7. f^{-1} ज्ञात कीजिए (यदि विद्यमान हो) जबकि $f:A\to B$, जहाँ

(i) $A=\{0,-1,-3,2\}, B=\{-9,-3,0,6\}, f(x)=3x.$

(ii) $A=\{1,3,5,7,9\}, B=\{0,1,9,25,49,81\}, f(x)=x^2.$

(iii) $A=B=R,\ f(x)=x^3.$

1.07 द्विआधारी संक्रिया (Binary operation)

माना S एक अरिक्त समुच्चय है। $S\times S$ से S में परिभाषित किसी फलन को S में एक द्विआधारी संक्रिया कहते हैं। अर्थात् समुच्चय S में परिभाषित कोई द्विआधारी संक्रिया एक ऐसा नियम है जिसके आघार पर S के अवयवों के प्रत्येक क्रमित युग्म (a,b) के लिए S का एक अद्वितीय अवयव प्राप्त किया जा सकता है। सामान्यत : द्विआधारी संक्रिया को $,o$ अथवा $\oplus$ चिह्नों से निरूपित किया जाता है। संक्रिया के अन्तर्गत $(a,b)\in S\times S$ से सम्बद्ध होने वाले अवयव को $a*b$ से व्यक्त करते हैं।

परिभाषा : किसी समुच्चय S पर परिभाषित कोई द्विआधारी संक्रिया $*$ एक ऐसा नियम है जिसके आधार पर S के किन्हीं दो अवयवों के लिए S का ही एक अद्वितीय अवयव प्राप्त किया जा सके।

अर्थात् $$a\in S, b\in S \;\Rightarrow\; a*b\in S,\ \forall a,b\in S$$

उदाहरणार्थ 1. पूर्णांकों का योग $(+)$, व्यवकलन $(-)$ और गुणन $(\times)$ पूर्णांकों के समुच्चय Z में द्विआधारी संक्रियाएँ हैं जो Z के किन्हीं दो अवयवों a,b को क्रमश : Z के अद्वितीय अवयव $(a+b),(a-b)$ तथा ab से सम्बद्ध करती है।

2. किसी समुच्चय S के घात समुच्चय (Power set), $P(S)$ में समुच्चयों का संघ $(\bigcup)$ तथा सर्वनिष्ठ $(\bigcap)$ द्विआधारी संक्रियाएं हैं क्योंकि

$$A\in P(S),\ B\in P(S)\Rightarrow A\bigcup B\in P(S) \text{ तथा } A\bigcap B\in P(S)$$

3. परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में *, जो निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$a \quad b \quad \frac{ab}{2}, \qquad a,b \quad Q$$

Q में एक द्विआधारी संक्रिया है क्योंकि $a\in Q, b\in Q \Rightarrow ab/2 \in Q$

4. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $*$, जहां $*$ निम्न प्रकार परिभाषित हो :

$$a*b=a+b-ab, \qquad \forall\, a,b\in R$$

R में एक द्विआधारी संक्रिया है। क्योंकि

$$a\in R,\ b\in R \Rightarrow (a+b-ab)\in R$$

5. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में योग तथा गुणन एक द्विआधारी संक्रिया है क्योंकि

$$a\in N,\ b\in N \Rightarrow (a+b)\in N,\ \forall\, a,b\in N$$
$$a\in N,\ b\in N \Rightarrow (a\cdot b)\in N,\ \forall\, a,b\in N$$

परन्तु N में व्यवकलन तथा विभाजन द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

6. विभाजन, किसी भी समुच्चय Z,Q,R,C,N में एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है परन्तु यह Q_0, R_0 तथा C_0 पर द्विआधारी संक्रिया है।

7. माना S, A में परिभाषित सभी फलनों का समुच्चय हो तो "संयुक्त फलन" S में एक द्विआधारी संक्रिया है क्योंकि

$$f,g\in S \Rightarrow f:A\to A,\ g:A\to A$$

$\Rightarrow \qquad (gof): A \to A$

1.08 द्विआधारी संक्रिया के प्रकार (Types of binary operations)

(i) क्रमविनिमेयता (Commutativity)

माना S एक अरिक्त समुच्चय है जिसमें एक द्विआधारी संक्रिया $*$ परिभाषित है। यदि $a, b \in S$ तब हम जानते हैं कि $(a,b) \neq (b,a)$ जब तक $a = b$ न हो। अत : यह आवश्यक नहीं है कि $*$ के अन्तर्गत (a,b) तथा (b,a) के प्रतिबिम्ब समान हो। दूसरे शब्दों में यह सदैव आवश्यक नहीं है कि

$$a*b = b*a, \qquad \forall\, a,b, \in S$$

यदि $a*b = b*a,\ \forall\, a,b, \in S$ तब S में $*$ संक्रिया **क्रमविनिमेय संक्रिया** कहलाती है।

परिभाषा : किसी समुच्चय S में परिभाषित कोई द्विआधारी संक्रिया एक क्रमविनिमेय संक्रिया कहलाती है यदि $a*b = b*a,\ \forall\, a,b, \in S.$

उदाहरणार्थ 1. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में योग तथा गुणन क्रमविनिमेय संक्रियाएँ हैं परन्तु व्यवकलन क्रमविनिमेय नहीं है।

2. किसी समुच्चय S के घात समुच्चय $P(S)$ में समुच्चयों का संघ $(\cup)$ तथा सर्वनिष्ठ $(\cap)$ क्रमविनिमेय संक्रियाएँ है परन्तु समुच्चयों का अन्तर क्रमविनिमेय नहीं है।

(ii) साहचर्यता (Associativity)

माना कि किसी अरिक्त समुच्चय में कोई द्विआधारी संक्रिया $*$ परिभाषित है। माना $a,b,c, \in S.$ यदि हम $a*b*c$ पर विचार करें तो हम देखते हैं कि चूंकि द्विआधारी संक्रिया S के किन्हीं दो अवयवों के लिए ही परिभाषित है परन्तु यहाँ S के तीन अवयव विद्यमान हैं।

अत : हमें $a*(b*c)$ अथवा $(a*b)*c$ पर विचार करना चाहिए। यह आवश्यक नहीं कि

$a*(b*c) = (a*b)*c,\ \forall\ a, b, c \in S$ सदैव सत्य हो। यदि $a*(b*c) = (a*b)*c, \forall\, a,b,c \in S$ तब संक्रिया $*$ को साहचर्य संक्रिया कहते हैं।

परिभाषा : किसी समुच्चय S में परिभाषित संक्रिया $*$ साहचर्य संक्रिया कहलाती है यदि $a \quad b \quad c \quad\quad a \quad b \quad c, \quad a,b,c \quad S.$

उदाहरणार्थ 1. पूर्णांकों के समुच्चय Z में योग तथा गुणन की संक्रियाएँ साहचर्य हैं परन्तु व्यवकलन की नहीं क्योंकि

$$a \quad b \quad c \qquad a \quad b \quad c, \qquad a,b,c \quad Z$$

$$a \quad b \; c \qquad a \; b \quad c, \qquad \forall\, a,b,c \in Z$$

परन्तु $\qquad a-(b-c) \neq (a-b)-c$

2. किसी समुच्चय S के घात समुच्चय $P(S)$ में समुच्चयों का संघ तथा सर्वनिष्ठ साहचर्य संक्रियाएँ हैं क्योंकि किन्ही $A, B, C \in P(S)$ के लिए

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

तथा $\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

3. यदि A कोई अरिक्त समुच्चय हो तथा S, A में परिभाषित सभी फलनों का समुच्चय हो तब S में परिभाषित संक्रिया "संयुक्त फलन" एक साहचर्य संक्रिया है क्योंकि

$$(fog)\, oh = fo(goh), \forall\, f, g, h \in S.$$

(iii) द्विआधारी संक्रिया का तत्समक अवयव (Identity element for a binary operation)

माना कि $*$, समुच्चय S में एक द्विआधारी संक्रिया है। यदि S में एक ऐसा अवयव e विद्यमान है कि

$$a \quad e \quad e \quad a \quad a, \ \forall\, a \in S,$$

तो अवयव e को S में $*$ संक्रिया के लिए तत्समक अवयव कहते हैं।

उदाहरणार्थ 1. पूर्णांकों के समुच्चय Z में 0 और 1 क्रमश : योग एवं गुणन संक्रियाओं के तत्समक अवयव हैं क्योंकि

$a \in Z$ के लिए $$0 + a = a + 0 = a$$

तथा $$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

2. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में योग संक्रिया के लिए तत्समक अवयव विद्यमान नहीं है परन्तु गुणन संक्रिया के लिए 1 तत्समक अवयव है।

3. घात समुच्चय $P(S)$ में S एवं ϕ क्रमश : सर्वनिष्ठ एवं संघ संक्रियाओं के तत्समक अवयव है क्योंकि प्रत्येक $A \in P(S)$ के लिए

$$A \cap S = S \cap A = A \quad \text{तथा} \quad A \cup \phi = \phi \cup A = A.$$

4. परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में एक द्विआधारी संक्रिया $*$ निम्न प्रकार परिभाषित की गई है :

$$a * b = \frac{ab}{2}, \ \forall \ a, b \in Q$$

इस प्रक्रिया के लिए $2 \in Q$ तत्समक अवयव है क्योंकि प्रत्येक $a \in Q$ के लिए

$$2 * a = \frac{2 \cdot a}{2} = a \quad \text{तथा} \quad a * 2 = \frac{a \cdot 2}{2} = a.$$

प्रमेय 1.8 यदि किसी समुच्चय में एक द्विआधारी संक्रिया का तत्समक अवयव विद्यमान हो तो वह अद्वितीय होता है।

प्रमाण : यदि संभव हो तो माना कि समुच्चय S में संक्रिया $*$ के लिए e तथा e' दो तत्समक अवयव विद्यमान हैं।

$$e * e' = e' = e' * e \qquad [\because e, S \text{ में तत्समक है तथा } e' \in S] \qquad (1)$$

पुन : $$e' * e' = e = e * e' \qquad [\because e', S \text{ में तत्समक है तथा } e \in S] \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से $\quad e = e'$

अत : किसी संक्रिया का तत्समक अवयव, यदि विद्यमान हो, तो अद्वितीय होता है।

(iv) प्रतिलोम अवयव (Inverse element)

माना कि $*$, समुच्चय S में एक द्विआधारी संक्रिया है और e इसका तत्समक अवयव है। माना $a \in S$. यदि समुच्चय S में कोई ऐसा अवयव b विद्यमान हो कि

$$a * b = b * a = e$$

तब b को a का प्रतिलोम अवयव कहते हैं तथा इसे a^{-1} से निरूपित करते हैं।

यदि किसी अवयव a का प्रतिलोम अवयव S में विद्यमान हो तो a, व्युत्क्रमणीय अवयव (Invertible element) कहलाता है। अत :

$$a \in S \text{ व्युत्क्रमणीय है} \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1} \in S$$

टिप्पणी– माना कि समुच्चय S में $*$ द्विआधारी संक्रिया के लिए e तत्समक अवयव है तब $e * e = e * e = e$. अर्थात् यदि किसी समुच्चय में किसी संक्रिया के लिए तत्समक अवयव विद्यमान हो तो वह व्युत्क्रमणीय होता है तथा तत्समक अवयव का प्रतिलोम तत्समक अवयव ही होता है।

उदाहरणार्थ 1. पूर्णांकों के समुच्चय Z में, प्रत्येक पूर्णांक a के लिए $(-a) \in Z$, योग संक्रिया के लिए प्रतिलोम अवयव है क्योंकि

$a + (-a) = (-a) + a = 0$ (तत्समक)

अत : Z का प्रत्येक अवयव योग संक्रिया के लिए व्युत्क्रमणीय है।

2. परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में प्रत्येक अशून्य संख्या गुणन संक्रिया के लिए व्युत्क्रमणीय है तथा

$$a \in Q \ (a \neq 0) \Rightarrow a^{-1} = 1/a \quad \text{क्योंकि} \quad a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a = 1$$

3. घनात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q^+ में एक द्विआधारी संक्रिया निम्न प्रकार परिभाषित की गई है :

$$a * b = ab/2, \qquad \forall \ a, b \in Q^+$$

हम देख चुके हैं कि इस संक्रिया का तत्समक अवयव 2 है। इस संक्रिया के सापेक्ष $a \in Q^+$ का प्रतिलोम $(4/a) \in Q^+$ है क्योंकि

$$\frac{4}{a} * a = \frac{(4/a) \times a}{2} = 2 \text{ (तत्समक) तथा } \quad a * \frac{4}{a} = \frac{a \times (4/a)}{2} = 2 \text{ (तत्समक)}$$

प्रमेय 1.9 एक साहचर्य संक्रिया के सापेक्ष किसी व्युत्क्रमणीय अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

प्रमाण – माना कि $*$, समुच्चय S में एक साहचर्य द्विआधारी संक्रिया है जिसका तत्समक अवयव e है। माना कि a, S का एक व्युत्क्रमणीय अवयव है। यदि संभव हो तो माना कि S में b तथा c, a के दो प्रतिलोम अवयव है।

अब $\qquad b*(a*c) = b*e = b \qquad [\because c = a^{-1}]$

तथा $\qquad (b*a)*c = e*c = c \qquad [\because b = a^{-1}]$

परन्तु साहचर्य गुणधर्म से $\qquad b*(a*c) = (b*a)*c \quad$ अत : $\quad b = c$

अर्थात् प्रत्येक व्युत्क्रमणीय अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

1.09 माड्यूलो पद्धति में योग एवं गुणन की संक्रियाएं (Addition and multiplication operations in modulo system)

यदि a तथा b ऐसे पूर्णांक हो कि $(a-b)$ एक धनात्मक पूर्णांक m से विभाज्य हो तो इसे $a \equiv b$ (मॉड m) संकेत से व्यक्त करते है तथा "a सर्वांगसम b माड्यूलों m" या (a is congruent to b modulo m) पढ़ते हैं।

अत : $\qquad a \equiv b$ (मॉड m) $\quad \Leftrightarrow \quad m|(a-b)$

उदाहरणार्थ $\qquad 18 \equiv 6$ (मॉड 2) $\qquad \because 18-6=12, 2$ से विभाज्य है

$\qquad -14 \equiv 6$ (मॉड 4) $\qquad \because -14-6=-20, 4$ से विभाज्य है।

पुन : यदि m एक धनात्मक पूर्णांक है तथा a, b दो पूर्णांक हो तो विभाजन फलन विधि (Division algorithm) से अन्य दो पूर्णांक r, q ऐसे विद्यमान होंगें कि

$$a+b = mq + r, \quad 0 \le r < m$$

तब r को a और b के योग माड्यूलों m (Addition modulo m) का समशेष कहते हैं तथा इसे संकेत के रूप में $a+b = r \,(\text{mod}\, m)$ या $a +_m b = r$ से व्यक्त करते हैं।

अत : $\qquad a +_m b = \begin{cases} a+b, & \text{यदि } a+b < m \\ r, & \text{यदि } a+b \ge m \end{cases}$, जहाँ $r, a+b$ में m का भाग देने पर प्राप्त ऋणेत्तर शेषफल है।

उदाहरणार्थ $\qquad 2 +_4 3 = 1 \qquad [\because 2+3=5=1\times 4+1]$

$\qquad -10 +_4 3 = 1 \qquad [\because -10+3=-7=-2\times 4+1]$

इसी प्रकार यदि m एक धन पूर्णांक है तब किन्हीं दो पूर्णांकों a, b के लिए यदि

$$a \cdot b = mq + r, \qquad 0 \le r < m$$

तो r को a और b के गुणन माड्यूलों m (Multiplication modulo m) का समशेष कहते हैं। इसे संकेत रूप में $a \cdot b = r$ (मॉड m) या $a \times_m b = r$ से व्यक्त करते हैं।

अत : $\qquad a \times_m b = \begin{cases} ab, & \text{यदि } ab < m \\ r, & \text{यदि } ab \ge m \end{cases}$, जहाँ $r, a\,b$ में m का भाग देने पर प्राप्त ऋणेत्तर शेषफल है।

उदाहरणार्थ $\qquad 5 \times_4 3 = 3 \qquad [\because 15 = 4\times 3+3]$

$\qquad 5 \times_3 6 = 0 \qquad [\because 5\times 6 = 30 = 10\times 3+0]$

1.10 परिमित समूह के लिए संक्रिया सारणी (Composition table for a finite set)

यदि दिया गया समुच्चय परिमित (finite) हो तो उस पर परिभाषित किसी द्विआधारी संक्रिया के लिए एक सारणी तैयार की जा सकती है जिसे संक्रिया सारणी (Composition table) कहते हैं। सारणी बनाने की विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरणार्थ 1. $S=\{(1,\omega,\omega^2);\ x\}$ जहां ω, इकाई का काल्पनिक घनमूल है।

$\times$	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

2. $S=\{(0,1,2,3);\ +_4\}$

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

इस प्रकार प्राप्त संक्रिया सारणी से हमें निम्न परिणाम ज्ञात होते हैं :

(i) यदि सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित है तो परिभाषित संक्रिया उस समुच्चय में क्रमविनिमेय होती है।

(ii) यदि a_j से प्रारंभ होने वाली पंक्ति सबसे उपरी पंक्ति से संपाती है तथा a_j से प्रारंभ होने वाला स्तंभ सबसे बाई और के स्तम्भ से संपाती है तब a_j, समुच्चय S में संक्रिया का तत्समक अवयव है।

(iii) समुच्चय का कोई अवयव व्युत्क्रमणीय होगा यदि सारणी में उसके संगत पंक्ति तथा स्तम्भ में तत्समक अवयव स्थित हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-11. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $*$ संक्रिया निम्नानुसार परिभाषित है

$$a*b=a+b-ab,\quad \forall\ a,b\in R \text{ तथा } a\neq 1$$

(i) $*$ की क्रमविनिमेयता तथा साहचर्यता की जांच कीजिए।

(ii) $*$ का तत्समक अवयव, यदि विद्यमान हो, ज्ञात कीजिए।

(iii) $*$ के सापेक्ष R के व्युत्क्रमणीय अवयवों को ज्ञात कीजिए।

हल : (i) यदि $a,b\in R$ हो तो परिभाषानुसार

$a*b=a+b-ab=b+a-b\cdot a$ (संख्याओं के योग तथा गुणन की क्रमविनिमेयता से)

$=b*a$

$\therefore$ $*$ एक क्रमविनिमेय संक्रिया है।

पुन : $(a*b)*c=(a+b-ab)*c$

$=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)\cdot c$

$=a+b-ab+c-ac-bc+abc$

$=a+b+c-bc-ca-ab+abc$ (1)

तथा $a*(b*c)=a*(b+c-bc)$

$=a+(b+c-bc)-a\cdot(b+c-bc)$

$=a+b+c-bc-ca-ab+abc$ (2)

(1) तथा (2) से स्पष्ट है कि $(a*b)*c=a*(b*c)$

$\therefore$ $*$ एक साहचर्य संक्रिया है।

(ii) यदि संभव हो तो माना $*$ का तत्समक अवयव e हो तब किसी $a\in R$ के लिए,

$a*e=a$ (तत्समक की परिभाषा के अनुसार)

$\Rightarrow \qquad a+e-ae=a \quad \Rightarrow \quad e(1-a)=0$

$\Rightarrow \qquad e=0\in R$ $\qquad [\because a\neq 1]$

$*$ का तत्समक अवयव 0 है।

(iii) माना $a\in R$ यदि संभव हो तो माना कि a का प्रतिलोम अवयव x है,
तब परिभाषा के अनुसार

$a*x=0$ (तत्समक)

$\Rightarrow \qquad a+x-ax=0 \qquad \Rightarrow \quad x(a-1)=a$

$\Rightarrow \qquad x=\dfrac{a}{a-1}\in R, \qquad \because \; a\neq 1$

$\therefore \qquad a\in R\,(a\neq 1)$ व्युत्क्रमणीय है।

उदाहरण-12. यदि $S=\{(a,b)|a,b\in R,\; a\neq 0\}$ तथा S में एक संक्रिया $*$ निम्न प्रकार परिभाषित हो : $(a,b)*(c,d)=(ac,bc+d)$ तब

(i) $*$ की क्रमविनिमेयता तथा साहचर्यता की जांच कीजिए।

(ii) $*$ का तत्समक अवयव, यदि विद्यमान हो, ज्ञात कीजिए।

(iii) $*$ के सापेक्ष S के व्युत्क्रमणीय अवयवों को ज्ञात कीजिए तथा व्युत्क्रमणीय अवयव का प्रतिलोम अवयव ज्ञात कीजिए।

हल : (i) माना $(a,b),(c,d)\in S$

तब $(a,b)*(c,d)=(ac,bc+d)$ तथा $(c,d)*(a,b)=(ca,da+b)$

इस प्रकार $\qquad (a,b)*(c,d)\neq(c,d)*(a,b)$

$\therefore$ संक्रिया $*$ क्रमविनिमेय नहीं है।

पुन : माना $(a,b),(c,d),(e,f)\in S$

अब $\qquad [(a,b)*(c,d)]*(e,f)=(ac,bc+d)*(e,f)$

$=(ace,(bc+d)e+f)=(ace,bce+de+f)$ $\qquad (1)$

तथा $(a,b)*[(c,d)*(e,f)]=(a,b)*(ce,de+f)$
$=(ace,bce+de+f)$

$\therefore$ (1) व (2) से $\quad [(a,b)*(c,d)]*(e,f)=(a,b)*[(c,d)*(e,f)]$ $\qquad (2)$

अत : $*$ एक सहचारी संक्रिया है।

(ii) माना S में तत्समक अवयव (x,y) हो, तब $(a,b)\in S$ के लिए

$(a,b)*(x,y)=(a,b)$ [तत्समक की परिभाषा से]

$\Rightarrow \qquad (ax,bx+y)=(a,b)$

$\Rightarrow \qquad ax=a$ तथा $bx+y=b$

अब $\qquad ax=a \qquad \Rightarrow \qquad x=1$ $\qquad [\because a\neq 0]$

तथा $\quad bx+y=b \qquad \Rightarrow \qquad b+y=b \qquad [\because x=1]$

$\Rightarrow \qquad y=0$

अत : $\qquad (x,y)=(1,0)\in S$

$\therefore$ S का तत्समक अवयव $(1,0)$ है

क्योंकि $(a,b)*(1,0)=(a,b)$ तथा $(1,0)*(a,b)=(a,b)$.

(iii) माना $(a,b)\in S$ और (a,b) का प्रतिलोम अवयव (x,y) हो तब प्रतिलोम की परिभाषा के अनुसार

$$(a,b)*(x,y)=(1,0) \quad [\text{तत्समक}]$$

$\Rightarrow$ $$(ax, bx+y)=(1,0)$$

$\Rightarrow$ $$ax=1,\ bx+y=0$$

$ax=1,\ \Rightarrow \quad x=(1/a) \quad (a\neq 0)$

तथा $bx+y=0 \Rightarrow y=(-b/a)\ (a\neq 0)$

अत: (a,b) का प्रतिलोम $(1/a,-b/a)$ है।

उदाहरण-13. यदि $S=\{A,B,C,D\}$ जहाँ $A=\phi, B=\{a,b\}\ C=\{a,c\}, D=\{a,b,c\}$ सिद्ध कीजिए कि समुच्चयों का संघ $\bigcup, S$ में एक द्विआधारी संक्रिया है परन्तु समुच्चयों का सर्वनिष्ठ $\bigcap, S$ में द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

हल: हम देखते हैं कि

$$A\cup B=\phi\cup\{a,b\}=\{a,b\}=B,\ A\cup C=C, A\cup D=D$$

$$B\cup C=\{a,b\}\cup\{a,c\}=\{a,b,c\}=D$$

$$B\cup D=\{a,b\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}=D,\ C\cup D=D$$

इस प्रकार में $\cup, S$ एक द्विआधारी संक्रिया है पुन: $B\cap C=\{a,b\}\cap\{a,c\}=\{a\}\notin S$ अत: $\cap, S$ में द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

प्रश्नमाला 1.3

1. कारण सहित बताइए कि $*$ की निम्न परिभाषाओं में से कौनसी उनके सम्मुख दिए गए समुच्चय में एक द्विआधारी संक्रिया है और कौन सी नहीं
   (i) $a*b=a$, N में
   (ii) $a*b=a+b-3$, N में
   (iii) $a*b=a+3b$, N में
   (iv) $a*b=a/b$, Q में
   (v) $a*b=a-b$, R में।
2. निम्न में से प्रत्येक के लिए ज्ञात कीजिए कि संक्रिया $*$ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है या नहीं
   (i) N में $*$ जहां $a*b=2^{ab}$
   (ii) N में $*$ जहां $a*b=a+b+a^2b$
   (iii) Z में $*$ जहां $a*b=a-b$
   (iv) Q में $*$ जहां $a*b=ab+1$
   (v) R में $*$ जहां $a*b=a+b-7$
3. यदि पूर्णांकों के समुच्चय Z में एक संक्रिया $*, a*b=a+b+1, \forall a,b\in Z$ द्वारा परिभाषित हो तो सिद्ध कीजिए कि $*$, क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है। इसका तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए। किसी पूर्णांक का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।
4. समुच्चय $R-\{1\}$ पर एक द्विआधारी संक्रिया निम्न प्रकार परिभाषित है :
   $$a*b=a+b-ab,\ \forall\, a,b\in R-\{1\}$$
   सिद्ध कीजिए कि $*$ क्रमविनिमेय तथा सहचार्य है। तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए तथा किसी अवयव a का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।
5. समुच्चय R_0 में चार फलन निम्न प्रकार परिभाषित है :
   $$f_1(x)=x,\ f_2(x)=-x,\ f_3(x)=1/x,\ f_4(x)=-1/x$$
   'फलनों का संयुक्त' संक्रिया के लिए f_1, f_2, f_3, f_4 की संक्रिया सारणी बनाइए। तत्समक अवयव तथा प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नमाला–1

1. यदि $f:R\to R, f(x)=2x-3;\ g:R\to R, g(x)=x^3+5$ हो तब $(fog)^{-1}(x)$ का मान होगा

(क) $\left(\frac{x+7}{2}\right)^{1/3}$ (ख) $\left(x-\frac{7}{2}\right)^{1/3}$ (ग) $\left(\frac{x-2}{7}\right)^{1/3}$ (घ) $\left(\frac{x-7}{2}\right)^{1/3}$.

2. यदि $f(x)=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{y}$, तो $f(y)$ का मान होगा

(क) x (ख) $x-1$ (ग) $x+1$ (घ) $1-x$.

3. यदि $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$ हो तो $f\left[f\{f(x)\}\right]$ बराबर है

(क) x (ख) $1/x$ (ग) $-x$ (घ) $-1/x$.

4. यदि $f(x)=\cos(\log x)$ हो तो $f(x)\cdot f(y)-\frac{1}{2}\left[f(x/y)+f(x\cdot y)\right]$ बराबर है

(क) -1 (ख) 0 (ग) $1/2$ (घ) -2.

5. यदि $f:R\to R, f(x)=2x+1$ और $g:R\to R, g(x)=x^3$, तो $(gof)^{-1}(27)$ बराबर है

(क) 2 (ख) 1 (ग) -1 (घ) 0.

6. यदि $f:R\to R$ तथा $g:R\to R$, जहां $f(x)=2x+3$ तथा $g(x)=x^2+1$ तब $(gof)(2)$ का मान है

(क) 38 (ख) 42 (ग) 46 (घ) 50.

7. यदि समुच्चय Q_0 पर एक संक्रिया $*, a*b=ab/2,\ \forall\, a,b\in Q_0$ द्वारा परिभाषित की जाये तो इस संक्रिया का तत्समक अवयव है

(क) 1 (ख) 0 (ग) 2 (घ) 3.

8. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में एक द्विआधारी संक्रिया $a*b=1+ab,\ \forall a,b\in R$ द्वारा परिभाषित है। तब संक्रिया $*$ है

(क) क्रमविनिमेय पर साहचर्य नहीं (ख) साहचर्य पर क्रमविनिमेय नहीं

(ग) न साहचर्य न क्रमविनिमेय (घ) साहचर्य तथा क्रमविनिमेय।

9. पूर्णांकों के समुच्चय Z में व्यवकलन (subtraction) एक ऐसी संक्रिया है जो

(क) क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है। (ख) साहचर्य परन्तु क्रमविनिमेय नहीं

(ग) न क्रमविनिमेय न साहचर्य (घ) क्रमविनिमेय पर साहचर्य नहीं।

10. पूर्णांकों के समुच्च्य Z में एक संक्रिया $*$, $a*b=a+b-ab,\ \forall a,b\in Z$ द्वारा परिभाषित है। इस संक्रिया के सापेक्ष किसी अवयव $a(\neq 1)$ का प्रतिलोम है

(क) $\frac{a}{a-1}$ (ख) $\frac{a}{1-a}$ (ग) $\frac{a-1}{a}$ (घ) $\frac{1}{a}$

11. R में परिभाषित निम्न में से कौन सी संक्रिया क्रमविनिमेय है

(क) $a*b=a^2b$ (ख) $a*b=a^b$ (ग) $a*b=a-b+ab$ (घ) $a*b=a+b+a^2b$

12. निम्न तीन फलनों के लिए संयुक्त फलन संक्रिया के लिए साहचर्य नियम का सत्यापन कीजिए

$$f:N\to Z_0,\ f(x)=2x\ ;\ g:Z_0\to Q,\ g(x)=1/x\ ;\ h:Q\to R,\ h(x)=e^x$$

13. यदि $f:R^+\to R^+$ तथा $g:R^+\to R^+$ निम्न प्रकार परिभाषित हो

$f(x)=x^2, g(x)=\sqrt{x}$ तो gof तथा fog ज्ञात कीजिए। क्या ये फलन तुल्य है?

14. यदि $f: R \to R, f(x) = \cos(x+2)$ हो तो ज्ञात कीजिए कि f प्रतिलोमी फलन है या नहीं कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

15. यदि $A = \{-1, 1\}$ तथा A में परिभाषित दो फलन f तथा g है जहां $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, तो सिद्ध कीजिए कि g^{-1} विद्यमान है जबकि f^{-1} नहीं। g^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

16. यदि $f : R \to R$ तथा $g : R \to R$ ऐसे फलन है कि $f(x) = 3x + 4$ तथा $g(x) = \frac{(x-4)}{3}$ तो $(fog)(x)$ तथा $(gof)(x)$ ज्ञात कीजिए। साथ ही $(gog)(1)$ का मान भी ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि f तथा g दो फलन हों तो उनका संयुक्त फलन gof तभी परिभाषित होगा जब f का परिसर, g के प्रान्त का उपसमुच्चय हो।
2. संयुक्त फलन द्वारा क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन करना आवश्यक नहीं है।
3. संयुक्त फलन साहचर्य नियम का पालन करता है अर्थात् $(fog)oh = fo(goh)$
4. दो एकैकी आच्छादक फलनों का संयुक्त फलन भी एकैकी आच्छादक होता है।
5. एकैकी आच्छादक फलन का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।
6. एकैकी आच्छादक फलन का प्रलिोम भी एकैकी आच्छादक होता है।
7. $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$
8. किसी समुच्चय A में एक द्विआधारी संक्रिया $A \times A$ से A में परिभाषित फलन है।
9. समुच्चय S में संक्रिया $*$ के लिए यदि कोई ऐसा अवयव e विद्यमान हो कि $a*e = e*a = a, \ \forall a \in S$ तो e को संक्रिया $*$ का तत्समक अवयव कहते हैं।
10. S में $*$ संक्रिया के लिए किसी अवयव a का प्रतिलोम S में विद्यमान ऐसा अवयव b है जहाँ $a*b = b*a = e$.
11. अवयव a के प्रतिलोम को a^{-1} से निरूपित किया जाता है।
12. किसी समुच्चय S में $*$ संक्रिया के लिए किसी अवयव का प्रतिलोम तभी होगा जब S में $*$ संक्रिया के लिए तत्समक अवयव विद्यमान हो।
13. यदि किसी समुच्चय S में $*$ संक्रिया के लिए
$$a*(b*c) = (a*b)*c, \ \forall a, b, c \in S$$
हो तो $*$ संक्रिया साहचर्य कहलाती है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 1.1

1. (*i*) $(gof)(x) = 4x^2 + 12x + 14, (fog)(x) = 2x^2 + 13$ (*ii*) $(gof)(x) = 3(x^2+8)^3 + 1, (fog)(x) = 9x^6 + 6x^3 + 9$

(*iii*) $(gof)(x) = |x|, (fog)(x) = |x|$ (*iv*) $(gof)(x) = 3x^2 + 6x - 13, (fog)(x) = 9x^2 - 18x + 5$

2. $fog = \{(u,u),(v,v),(w,w)\};\ gof = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

3. $(fog)(x) = x, (gof) = x,$ हाँ तुल्य फलन है।

4. $(fog)(x) = x, (gof) = x, (gog)(1) = -5/3$

5. 5

6. (*i*) $(gof)(x) = (2x + x^{-2})^4 + 2(2x + x^{-2}) + 4$

7. (*i*) $(fog)(x) = 4x^2 - 6x + 1$ (*ii*) $(gof)(x) = 2x^2 + 6x - 1$

(*iii*) $(fog)(x) = (x)^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$ (*iv*) $(gog)(x) = 4x - 9$

प्रश्नमाला 1.2

1. $f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\};\ f_1^{-1} = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$

$f_2 = \{(1,a),(2,c),(3,b),(4,d)\};\ f_2^{-1} = \{(a,1),(c,2),(b,3),(d,4)\}$

$f_3 = \{(1,d),(3,b),(2,a)(4,c)\};\ f_3^{-1} = \{(d,1),(b,3),(a,2),(c,4)\}$

$f_4 = \{(1,a),(3,a),(2,b)(4,c)\};\ f_4^{-1} = \{(a,1),(a,3),(b,2),(c,4)\}$

2. $f^{-1}(x) = (3+x)^{1/3}, f^{-1}(24) = 3, f^{-1}(5) = 2$

3. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}, f^{-1}(x) = (x-5)^{1/3}$

4. $(gof)^{-1} = \{(7,1),(23,2),(47,3),(79,4)\} = f^{-1}og^{-1}$

5. $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

6. नहीं

7. (*i*) $f^{-1} = \{(-9,-3),(-3,-1),(0,0),(6,2)\}$ (*ii*) f^{-1} विद्यमान नहीं है। (*iii*) $f^{-1}(x) = x^{1/3}$

प्रश्नमाला 1.3

1. (*i*) हाँ (*ii*) नहीं (*iii*) हाँ (*iv*) नहीं (*v*) हाँ

1. (*i*) क्रमविनिमेय परन्तु सहचारी नहीं (*ii*) न क्रमविनिमेय न सहचारी
(*iii*) न क्रमविनिमेय न सहचारी (*iv*) क्रमविनिमेय पर सहचारी नहीं
(*v*) क्रमविनिमेय एवं सहचारी

3. $e = -1,\ a^{-1} = -(a+2)$

4. $e = 0,\ a^{-1} = \dfrac{a}{a-1}$

विविध प्रश्नमाला—1

1. (घ) 2. (घ) 3. (क) 4. (ख) 5. (ख) 6. (घ) 7. (ग)

8. (क) 9. (ग) 10. (क) 11. (ग) 13. $(fog)(x) = (gof)(x) = x$ 14. नहीं

15. $g^{-1}(x) = \dfrac{2}{\pi}\sin^{-1} x$

16. $(fog)(x) = (gof)(x) = x;\ (gog)(1) = \dfrac{-5}{3}$