बॉडमास
(Bodmas)

❑ सरलीकरण सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण अध्याय है क्योंकि गणित की सारी गणनाएं-जोड़, घटाव, गुणा, भाग, का, कोष्ठक इत्यादि सरलीकरण के अंतर्गत आती हैं। जब किसी प्रश्न में एक ही साथ कोष्ठक (Bracket), जोड़ (Addition), घटाव (Subtraction), गुणा (Multiplication), भाग (Division) और का (of) की क्रिया संपन्न करनी होती है, तो इन क्रियाओं को BODMAS के क्रम में संपन्न किया जाता है अर्थात् प्रश्न के व्यंजक में जोड़, घटाव, गुणा, भाग इत्यादि क्रियाओं का क्रम चाहे जो भी हो हल करने का क्रम इस प्रकार होगा–

1. कोष्ठक (Bracket), **2.** का (of), **3.** भाग (Division), **4.** गुणा (Multiplication), **5.** जोड़ (Addition) और 6. घटाव (Subtraction) इसका अर्थ यह है कि सबसे पहले कोष्ठक हल करते हैं, इसके बाद 'का' को हल करने की बारी आती है। 'का' का अर्थ गुणा होता है। जैसे- 5 का $\frac{1}{4}$ का अर्थ है $5\times\frac{1}{4}$। 'का' को हल करने के बाद भाग की क्रिया और भाग की क्रिया के बाद गुणा करते हैं। इसके बाद जोड़ की क्रिया की जाती है। सबसे अंत में घटाव की क्रिया संपन्न होती है। इस क्रम को निम्न रूप से याद किया जा सकता है–

'का' को पहले तोड़ कर, ता पीछे दो भाग ।
गुणा करो, धन जोड़ो, ऋण को दो घटाय ।।

उपर्युक्त क्रियाओं में सभी का प्रत्येक प्रश्न में होना अनिवार्य नहीं है। कोई भी क्रिया कभी भी अनुपस्थित रह सकती है तब भी हल करने का क्रम BODMAS ही होता है।

जैसे- $17 + 5 \div [5$ का $\frac{1}{3} \times 2 + 7 - 13 \div \frac{1}{2}]$ को हल करने के लिए सबसे पहले कोष्ठक हल होगा अर्थात् हल करने का क्रम BODMAS होगा। परंतु यदि संख्या 18–5 का $6\frac{1}{2} \times 5$ हो, तो इसमें कोष्ठक, भाग और जोड़ की क्रिया अनुपस्थित है। इसलिए BODMAS के अनुसार शुरुआत '**का**' से करेंगे। का के बाद भाग की बारी होती है परंतु भाग की क्रिया अनुपस्थित है। अतः गुणा की क्रिया करेंगे और इसके बाद घटाव की क्रिया।

कोष्ठक की क्रिया उस समय जटिल बन जाती है जब कोष्ठक के अंदर कोष्ठक आए रहते हैं। कुल चार प्रकार के कोष्ठक होते हैं–

नाम	संकेत
1. रेखा कोष्ठक (Vinculum या Bar Bracket)	'—'
2. छोटा कोष्ठक (Circular Bracket)	'( )'
3. मझला कोष्ठक (Curly Bracket)	'{ }'
4. बड़ा कोष्ठक (Box Bracket)	'[ ]'

जब कोष्ठक के अंदर कोष्ठक आते हैं तब सबसे पहले अंदर वाले कोष्ठक को सरल करते हैं और क्रमशः अंदर से बाहर हल किया जाता है अर्थात् जो कोष्ठक सबसे बाहर रहता है वह सबसे अंत में हल किया जाता है।

☞ **एक उदाहरणार्थ प्रश्न देखें**

प्रश्न- $[4 \div \{2+1-(3\div\overline{1+2})\}]$ को सरल कीजिए।

हलः $[4 \div \{2+1-(3\div\overline{1+2})\}]$

$=\left[4\div\left\{2+1-(3\div3)\right\}\right]$

[क्योंकि सबसे अंदर रेखा कोष्ठक है। अतः सर्वप्रथम इसी को हल किया गया है जो $\overline{1+2}=3$ होगा]

$=[4\div\{2+1-1\}]$

[यहां छोटे कोष्ठक $(3\div3)$ का हल $3\div3=1$ हुआ। इसके बाद मझले कोष्ठक में पहले जोड़ की क्रिया (2 + 1) को किया जाएगा इसके बाद घटाव की]

$=[4\div\{3-1\}]=[4\div2]$

$=2 \Rightarrow$ **उत्तर**

[मझले कोष्ठक को हल करके भाग किया गया]

❑ सूत्रों के द्वारा प्रश्नों को सरल करना–

सूत्र किसी बड़ी समस्या को अत्यंत सरल बनाने के साधन होते हैं और बीजगणितीय सूत्र तो इस कार्य में इतने महत्त्वपूर्ण व उपयोगी होते हैं कि इनकी मदद गणित के हर विभाग में ली जाती है। निम्नलिखित बीजगणितीय सूत्र प्रश्न को सरल करने में अत्यंत लाभकारी होंगे-

1. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

या (**अंकों के उदाहरण स्वरूप**)

$(5+7)^2 = 5^2+7^2+2.5.7$

$(12)^2 = 25+49+70$
$144 = 144$

देखें–

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ कैसे होता है?

$(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b)$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \\ \hline \end{array}$$

अतः $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ होगा। $\Rightarrow$ **उत्तर**

2. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

या (**अंकों के उदाहरण स्वरूप**)

$(8-3)^2 = 8^2 + 3^2 - 2.8.3$

$(5)^2 = 64 + 9 - 48$

$25 = 25$

देखें-

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ कैसे होता है?

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$$\begin{array}{l} a-b \\ \times\, a-b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad -ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

अत: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ होगा। $\Rightarrow$ **उत्तर**

3 (i) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

या (**अंकों के उदाहरण स्वरूप**)

$(8+3)^2 = (8-3)^2 + 4.8.3$

$(11)^2 = 5^2 + 96$

$121 = 25 + 96$

$121 = 121$

देखें-

$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ कैसे होता है?

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ होता है।

यदि 4ab दोनों तरफ जोड़ते हैं, तो

$(a-b)^2 + 4ab = a^2 + b^2 - 2ab + 4ab$

$(a-b)^2 + 4ab = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$

अत: $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ भी होगा।

(ii) $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

या (**अंकों के उदाहरण स्वरूप**)

$(8-3)^2 = (8+3)^2 - 4.8.3$

$(5)^2 = (11)^2 - 96$

$25 = 121 - 96$

$25 = 25$

देखें-

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ कैसे होता है?

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ होता है। यदि 4ab दोनों तरफ घटाते हैं तो

$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab$

$= a^2 + b^2 - 2ab$

$= (a-b)^2$

अत: $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ भी होगा।

4. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

या

$(2+3+4)^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 2(2.3+3.4+4.2)$

$(9)^2 = 4+9+16+2(6+12+8)$

$81 = 4+9+16+2(26)$

$81 = 29 + 52$

$81 = 81$

देखें-

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ कैसे होता है?

$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ \times\, a+b+c \\ \hline a^2 + ab + ac \\ \quad + ab \quad + b^2 + bc \\ \qquad\quad + ac + bc + c^2 \\ \hline a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\ \hline \end{array}$$

$a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

अत:

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ होगा।

5(i) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

या (**अंकों के उदाहरण स्वरूप**)

$(3+2)^3 = 3^3 + 2^3 + 3.3.2(3+2)$

$(5)^3 = 27 + 8 + 18.5$

$125 = 35 + 90$

$125 = 125$

देखें-

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ कैसे होता है?

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

$= (a+b)^2 (a+b)$

[$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ होता है।

$= (a^2 + b^2 + 2ab)\,(a+b)$

अब $a^2 + b^2 + 2ab$

$$\begin{array}{l} \times\ a + b \\ \hline a^3 + ab^2 + 2a^2b \\ \quad + a^2b + b^3 + 2ab^2 \\ \hline a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 \\ \hline \end{array}$$

$= a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

अतः $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ होगा।

5(ii) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

या (**अंकों के उदाहरण स्वरूप**)

$3^3 + 2^3 = (3+2)^3 - 3.3.2(3+2)$

$27 + 8 = 125 - 18 \times 5$

$35 = 125 - 90$

$35 = 35$

6(i) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

या

$(3-2)^3 = 3^3 - 2^3 - 3.3.2(3-2)$

$1^3 = 27 - 8 - 18$

$1 = 27 - 26$

$1 = 1$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ कैसे होता है?

$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$

$= (a^2 + b^2 - 2ab)(a-b)$

$[(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ होता है]

अब $a^2 + b^2 - 2ab$

$$\begin{array}{l} + a - b \\ \hline a^3 + ab^2 - 2a^2b \\ \quad + 2ab^2 - a^2b - b^3 \\ \hline a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3 \\ \hline \end{array}$$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

अतः $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ होगा

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

या

$3^3 - 2^3 = (3-2)^3 + 3.3.2(3-2)$

$27 - 8 = (1)^3 + 18$

$19 = 19$

7. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

या

$2^3 + 3^3 + 4^3 - 3.2.3.4$

$= (2+3+4)(2^2 + 3^2 + 4^2 - 2.3 - 3.4 - 4.2)$

$8 + 27 + 64 - 72 = 9(4 + 9 + 16 - 6 - 12 - 8)$

$99 - 72 = 9 \times (29 - 26)$

$27 = 9 \times 3$

$27 = 27$

8. यदि $a + b + c = 0$, तो

$a^3 + b^3 + c^3 = 3.a.b.c$

या $(2)^3 + (3)^3 + (-5)^3 = 3.(2).(3).(-5)$

$8 + 27 - 125 = -90$

$35 - 125 = -90$

$-90 = -90$

9. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

या

$4^2 - 3^2 = (4+3)(4-3)$

$16 - 9 = 7 \times 1$

$7 = 7$

देखें-

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (कैसे होता है?)

$$\begin{array}{l} a + b \\ \times a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 + 0 - b^2 \\ \hline \end{array}$$

अतः $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ होगा।

सदैव ध्यान दें-

1. यदि कोई संख्या $0.\overline{a}$ के रूप में हो, तो इसका अर्थ है $0.\overline{a} = 0.aaa\ldots\ldots\infty$

इसका संक्षिप्त मान $\frac{a}{9}$ होगा।

इसी तरह दो अंक की संख्या $0.\overline{ab}$ हो, तो इसका संक्षिप्त मान $= \frac{ab}{99}$ होगा।

इसी प्रकार दशमलव चिह्न के बाद जितने अंक की संख्या होगी उसके हर के रूप में संख्या 9 उतनी ही बार होगी।

कैसे ?

$0.\bar{a} = 0.aaaa.......\infty$

(दोनों तरफ 10 से गुणा करने पर)

$0.\bar{a} \times 10 = (0.aaaa.....\infty) \times 10$

$0.\bar{a} \times 10 = a.aaaa.....\infty$

(10 से गुणा करने पर दशमतव एव अंक आगे हो गया)

$10.\bar{a} = a + .\bar{a}$

(.aaa......∞ को संक्षिप्त रूप $.\bar{a}$ लिखा गया)

$10.\bar{a} - .\bar{a} = a$

($.\bar{a}$ का पक्षांतर किया गया)

$.\bar{a}\ (10-1) = a$

($.\bar{a}$ कॉमन लिया गया)

$.\bar{a} \times 9 = a$

$.\bar{a} = \frac{a}{9}$

इसी प्रकार-

$0.\overline{ab} = .abababab.....\infty$

$100 \times 0.\overline{ab} = (.ababababab.....\infty) \times 100$

(दोनों तरफ 100 से गुणा करने पर)

$100 \times 0.\overline{ab} = ab.abab\ ab.......\infty$

(100 से गुणा करने पर दसमलव दो अंक आगे हो गया)

$100\ (0.\overline{ab}) = ab + .\overline{ab}$

(.ababababab....... ∞ को संक्षिप्त रूप $.\overline{ab}$ लिखा गया)

$100\ (0.\overline{ab}) - .\overline{ab} = ab$

($.\overline{ab}$ का पक्षांतर किया गया)

$.\overline{ab}\ (100-1) = ab$

($.\overline{ab}$ कॉमन लिया गया)

$.\overline{ab} \times 99 = ab$

$.\overline{ab} = \frac{ab}{99}$

☞ **एक उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-**

प्रश्न- $0.\bar{3} + 0.\overline{45} = ?$

हल : $0.\bar{3} + 0.\overline{45} = \frac{3}{9} + \frac{45}{99}$

$= \frac{33+45}{99}$

$= \frac{78}{99}$ या $\frac{26}{33}$ या $0.\overline{78}$

2. $0.\overline{abc}$ के परिवर्तन के नियम-

यदि संख्या $0.\overline{abc}$ के रुप में हो तो संख्या को भिन्न के रूप में $\frac{abc}{999}$ लिखा जाता है। अर्थात दशमलव के दांयीं ओर (बार) का चिन्ह हटाकर (दशमलव को भी) उतनी ही संख्या में नीचे 9 लिख दिया जाता है।

जैसे $0.\overline{345} = \frac{345}{999}$

3. $0.ab\bar{c}$ के परिवर्तन के नियम-

यदि संख्या $0.ab\bar{c}$ के रूप में हो तो संख्या को भिन्न के रूप में परिवर्तन $\frac{(abc-ab)}{900}$ के रूप में परिवर्तित किया जाता है अर्थात c के ऊपर लगे बार चिन्ह को हटाकर नीचे 9 से भाग दिया गया तथा दशमलव के दांयीं ओर जिन संख्याओं पर बार का चिन्ह नहीं लगा रहता उसे संख्या में घटाकर नीचे संख्या के दांयीं ओर उतनी ही संख्या में 0 बढ़ा देते हैं।

जैसे $0.34\bar{5} = \frac{345-34}{900} = \frac{311}{900}$

कैसे ?

$0.ab\bar{c} = 0.abcccc.......\infty$ .....**(समी. 1)**

$0.ab\bar{c} \times 1000 = abc.cccc.....\infty$

(समी. 1 में दोनों तरफ 1000 से गुणा करने पर)

$0.ab\bar{c} \times 1000 = abc.\bar{c}$ .....**(समी. 2)**

(.cccc ....∞ को $\bar{c}$ के रूप में रखने पर

$.ab\bar{c} \times 100 = ab.cccc.......\infty$

(समी. 1 में दोनों तरफ 100 से गुणा करने पर)

$.ab\bar{c} \times 100 = ab.\bar{c}$ ....**(समी. 3)**

(.cccc ....∞ को $\bar{c}$ के रूप में रखने पर

$0.ab\bar{c} \times 1000 - 0.ab\bar{c} \times 100 = abc.\bar{c} - ab.\bar{c}$

(समी. 2 से समी. 3 घटाने पर)

$.ab\bar{c}\ (1000-100) = abc.\bar{c} - ab.\bar{c}$

$.ab\bar{c} \times 900 = abc - ab$

$.ab\bar{c} = \frac{abc-ab}{900}$

4. $0.a\overline{bc}$ के परिवर्तन के नियम-

नियम 2 की तरह $0.a\overline{bc}$ में परिवर्तन होता है अर्थात $0.a\overline{bc} = \frac{abc-a}{990}$

अर्थात संख्या में बार का चिन्ह हटाकर नीचे उतनी ही संख्या में 9 लिख दिया गया जिस पर बार का चिन्ह था तथा दशमलव के दांयीं ओर जिस संख्या पर बार का चिन्ह नहीं है उतनी संख्या में नीचे शून्य बढ़ा दिय गया है।

कैसे ?

$.a\overline{bc} = .abcbcbc.......\infty$ .....(समी. 1)

$.a\overline{bc} \times 1000 = abc.bcbc \ldots\ldots \infty$

(समी. 1 में 1000 से गुणा करने पर)

$.a\overline{bc} \times 1000 = abc.\overline{bc}$ .....(समी. 2)

(.bcbc ....∞ को . $\overline{bc}$ के रूप में रखने पर)

$.a\overline{bc} \times 10 = a.bcbcbc \ldots\ldots \infty$

(समी. 1 में 10 से गुणा करने पर)

$.a\overline{bc} \times 10 = a.\overline{bc}$ .....(समी. 3)

(.bc bc bc bc को . $\overline{bc}$ के रूप में रखने पर)

$.a\overline{bc} \times 1000 - .a\overline{bc} \times 10 = abc.\overline{bc} - a.\overline{bc}$

(समी. 2 से समी. 3 घटाने पर)

$.a\overline{bc}\,(1000 - 10) = abc - a$

$.a\overline{bc} \times 990 = abc - a$

$$.a\overline{bc} = \frac{(abc - a)}{990}$$

नोट- यदि संख्या 6.345 इस प्रकार रहती है तो पूर्णांक को पहले अलग कर परिवतर्तित करते हैं।

देखें- $6.\overline{345} = 6 + 0.\overline{345}$

$$= 6 + \frac{345-3}{990}$$

$$= 6 + \frac{342}{990}$$

$$= 6 + \frac{171}{495}$$

$$= 6\frac{171}{495}$$

☞ **अब उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-**

प्रश्न : $0.\overline{63} + 0.\overline{37} + 0.\overline{80} = ?$

हल : $0.\overline{63} + 0.\overline{37} + 0.\overline{80}$

$$= \frac{63}{99} + \frac{37}{99} + \frac{80}{99}$$

$$= \frac{63+37+80}{99} = \frac{180}{99}$$

$$= 1\frac{81}{99} = 1.\overline{81}$$

☞ **एक और उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-**

प्रश्न : $0.34\overline{67} + 0.13\overline{33} = ?$

हल : $0.34\overline{67} + 0.13\overline{33}$

$$= \frac{3467-34}{9900} + \frac{1333-13}{9900}$$

$$= \frac{3433}{9900} + \frac{1320}{9900}$$

$$= \frac{4753}{9900}$$

या $= \dfrac{4753+48-48}{9900}$

[अंश में संख्या 48 जोड़ा गया फिर घटाया गया]

$$= \frac{4801-48}{9900} = 0.48\overline{01}$$

परीक्षोपयोगी प्रश्न

1. $[5\times3 + \{49 \div 7 \times 6 - (28 \div 7)\}]$ का सरलतम मान ज्ञात कीजिए।

(a) 58 (b) 53
(c) 43 (d) 67

उत्तर—(b)

$[5\times 3 + \{49 \div 7 \times 6 - (28 \div 7)\}]$

$= [5\times 3 + \{49 \div 7 \times 6 - 4\}]$

[छोटा कोष्ठक $(28 \div 7 = 4)$ हल किया गया]

$$= \left[5\times3 + \left\{\frac{49}{7}\times 6 - 4\right\}\right]$$

[मझोला कोष्ठक में $49 \div 7$ को $\frac{49}{7}$ लिखा गया]

$= [15 + \{7\times 6 - 4\}]$

[मझोला कोष्ठक में BODMAS नियम का प्रयोग करके हल किया गया]

$= [15 + \{42 - 4\}]$

$= 15 + 38$

$= 53$

2. $$\frac{3\frac{1}{3} \text{ का } \frac{3}{5} - \frac{1}{2}}{3\frac{1}{3} \text{ का} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)} = ?$$

(a) $5\frac{1}{2}$ (b) $3\frac{1}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $4\frac{1}{2}$

उत्तर—(d)

यदि अंश और हर को बारी-बारी से हल किया जाए तो हल बहुत सुविधाजनक होगा-

देखें-

$$\text{अंश} = 3\frac{1}{3}\text{ का }\frac{3}{5}-\frac{1}{2} = \frac{10}{3}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$$

[सर्वप्रथम 'का' को हल किया गया है और 'का' का अर्थ गुणा होता है]

$$= \frac{2}{1}-\frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{हर} = 3\frac{1}{3}\text{ का}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{10}{3}\text{ का}\left(\frac{6-5}{10}\right)$$

[छोटा कोष्ठक $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)$ को हल किया गया]

$$= \frac{10}{3}\text{ का }\frac{1}{10}$$

$$= \frac{10}{3}\times\frac{1}{10} = \frac{1}{3}$$

['का' का अर्थ गुणा होता है]

$$\text{अब पूरी राशि} = \frac{3\frac{1}{3}\text{ का }\frac{3}{5}-\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}\text{ का}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2}\times\frac{3}{1} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

[जब एक भिन्न में किसी दूसरी भिन्न से भाग देना हो, तो भाज्य में भाजक को उलट कर गुणा कर देते हैं]

3. $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\times\left[\frac{5}{8}-\frac{6}{16}\right]$ का सरलतम मान बताइए।

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{5}{4}$

उत्तर—(b)

$$\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\times\left[\frac{5}{8}-\frac{6}{16}\right] = \frac{5}{8}+\frac{1}{2}\times\left[\frac{10-6}{16}\right]$$

$$= \frac{5}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{16}$$

[सर्वप्रथम कोष्ठक को हल किया गया]

$$= \frac{5}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{8}+\frac{1}{8} = \frac{5+1}{8}$$

[दोनों भिन्नों को जोड़ा गया जिसके हर समान हैं। अतः अंशों का योग बटा हर किया गया]

$$= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

4. $48\div 12\times\left(\frac{9}{8}\text{ का }\frac{4}{3}\div\frac{3}{4}\text{ का }\frac{2}{3}\right) = ?$

(a) 6 (b) 9

(c) 10 (d) 12

उत्तर—(d)

$$48\div 12\times\left(\frac{9}{8}\text{ का }\frac{4}{3}\div\frac{3}{4}\text{ का }\frac{2}{3}\right)$$

$$= 48\div 12\times\left(\frac{9}{8}\times\frac{4}{3}\div\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)$$

['का' का अर्थ गुणा होता है तथा वह भाग के पहले हल किया जाता है]

$$= 48\div 12\times\left(\frac{3}{2}\div\frac{1}{2}\right)$$

$$= 48\div 12\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{1}\right)$$

$$= 48\div 12\times 3$$

[छोटा कोष्ठक को हल किया गया]

$$= 4\times 3 = 12$$

5. $5.75-\frac{3}{7}\times 15\frac{3}{4}+2\frac{2}{35}\div 1.44 = ?$

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{7}{3}$ (d) $\frac{7}{4}$

उत्तर—(a)

$$5.75-\frac{3}{7}\times 15\frac{3}{4}+2\frac{2}{35}\div 1.44$$

$$= 5.75-\frac{3}{7}\times\frac{63}{4}+\frac{72}{35}\div\frac{144}{100}$$

[1.44 को $\frac{144}{100}$ लिखा गया है एवं $15\frac{3}{4} = \frac{63}{4}$ तथा $2\frac{2}{35} = \frac{72}{35}$ लिखा गया]

$$= 5.75-\frac{3}{7}\times\frac{63}{4}+\frac{72}{35}\times\frac{100}{144}$$

$$= \frac{5.75}{1}-\frac{27}{4}+\frac{10}{7}$$

$$= \frac{23-27}{4}+\frac{10}{7}$$

$$= \frac{10}{7}-\frac{1}{1}$$

$$= \frac{10-7}{7} = \frac{3}{7}$$

BODMAS नियमानुसार कुछ हल सहित प्रश्न

प्रश्न 1. $8\frac{1}{4}-4\frac{1}{5}+2.8+\frac{4}{A}-2.32=5.33$,

तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $8\frac{1}{4}-4\frac{1}{5}+2.8+\frac{4}{A}-2.32=5.33$

$$\frac{33}{4}-\frac{21}{5}+2.8+\frac{4}{A}-2.32=5.33$$

$$\frac{4}{A}=5.33+\frac{21}{5}+2.32-2.8-\frac{33}{4}$$

(पक्षांतर करने पर)

$$\frac{4}{A}=\frac{26.65+21+11.60}{5}-2.8-\frac{33}{4}$$

[पहले जोड़ की क्रिया की जाती है इसलिए तीनों पदों को जोड़ा गया है]

$$=\frac{59.25}{5}-2.8-\frac{33}{4}$$

$$=11.85-2.8-\frac{33}{4}$$

$$=\frac{47.40-11.2-33}{4}=\frac{3.2}{4}$$

$$\frac{4}{A}=\frac{3.2}{4}$$

अब तिर्यक गुणा करने पर

$$A\times 3.2=4\times 4$$

$$A=\frac{4\times 4}{3.2}=\frac{4\times 4\times 10}{32}$$

[3.2 को पूर्णांक बनाने के लिए 10 से अंश एवं हर में गुणा किया गया]

$$=\frac{10}{2}=5\Rightarrow \text{उत्तर}$$

अतः A का मान 5 होगा।

प्रश्न 2. $\frac{(25\times 24)+28\times 10}{240\div 60+60\div 5}=?$

हल : पहले अंश को हल करते हैं-

अंश $=(25\times 24)+28\times 10$

$=600+280=880$

अब हर $=240\div 60+60\div 5$

$$=\frac{240}{60}+\frac{60}{5}=4+12=16$$

[भिन्नों के अंश में हर से भाग की तत्पश्चात क्रिया की गई है]

दिया गया व्यंजक-

$$\frac{(25\times 24)+28\times 10}{240\div 60+60\div 5}=\frac{880}{16}=55\Rightarrow \text{उत्तर}$$

प्रश्न 3. $\dfrac{5}{8+\dfrac{6}{8-\dfrac{10}{11}}}$ को सरल कीजिए।

हल : $\dfrac{5}{8+\dfrac{6}{8-\dfrac{10}{11}}}=\dfrac{5}{8+\dfrac{6}{\dfrac{88-10}{11}}}$

$$=\dfrac{5}{8+\dfrac{6}{\dfrac{78}{11}}}$$

$$=\dfrac{5}{8+6\times\dfrac{11}{78}}$$

[इस प्रकार के प्रश्नों में सबसे नीचे दी गई संख्या से हल करना प्रारंभ करते हैं अर्थात् सबसे नीचे $8-\frac{10}{11}$ है। अतः सबसे पहले इसे हल किया गया]

$$=\dfrac{5}{8+\dfrac{11}{13}}$$

[अब $8+\frac{11}{13}$ को पहले हल करेंगे]

$$=\dfrac{5}{\dfrac{8\times 13+11}{13}}$$

$$=\dfrac{5}{\dfrac{104+11}{13}}=\dfrac{5}{\dfrac{115}{13}}$$

$$\left[\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}}=a\times\dfrac{c}{b}\text{ के रूप में }\dfrac{5}{\dfrac{115}{13}}\text{ को लिखा गया}\right]$$

$$=5\times\frac{13}{115}=\frac{13}{23}\Rightarrow \text{उत्तर}$$

प्रश्न 4. $5\frac{1}{3}\div 1\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}\left[10+\dfrac{3}{\left(1-\frac{1}{5}\right)}\right]$ का

सरलतम मान ज्ञात कीजिए।

हल : $5\frac{1}{3}\div 1\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}\left[10+\dfrac{3}{\left(1-\frac{1}{5}\right)}\right]$

$$=\frac{16}{3}\div\frac{11}{9}\times\frac{1}{4}\left[10+\dfrac{3}{\left(\dfrac{5-1}{5}\right)}\right]$$

$$= \frac{16}{3} \div \frac{11}{9} \times \frac{1}{4}\left[10 + \frac{3}{\frac{4}{5}}\right]$$

$$= \frac{16}{3} \div \frac{11}{9} \times \frac{1}{4}\left[10 + \frac{3\times 5}{4}\right]$$

$$= \frac{16}{3} \div \frac{11}{9} \times \frac{1}{4}\left[\frac{40+15}{4}\right]$$

[सर्वप्रथम अंदर वाले कोष्ठक $\left(1-\frac{1}{5}\right)$ को हल किया गया]

$$= \frac{16}{3} \div \frac{11}{9} \times \frac{1}{4} \times \frac{55}{4}$$

[अब बड़े कोष्ठक को हल किया गया]

$$= \frac{16}{3} \times \frac{9}{11} \times \frac{1}{4} \times \frac{55}{4}$$

[$\frac{16}{3}$ में $\frac{11}{9}$ से भाग है। अतः $\frac{16}{3}$ में $\frac{11}{9}$ को उलट कर गुणा किया गया]

$$= 3 \times 5 = 15 \Rightarrow$$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 7+2$$

[$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ रखा गया]

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 9$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 3^2$$

अतः $x + \frac{1}{x} = 3$

[दोनों पक्षों की घातें समान हैं, तो आधार भी समान होंगे]

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = 3^3$ **[दोनों पक्षों का घन करने पर]**

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x+\frac{1}{x}\right) = 27$$

[$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ का प्रयोग किया गया]

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\times 3 = 27$$

[$x + \frac{1}{x} = 3$ रखा गया]

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 = 18$$

[पक्षांतर करके हल किया गया]

अतः $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$, तो $x^4 + \frac{1}{x^4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x + \frac{1}{x} = 3$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर—

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = (3^2)$$

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x.\frac{1}{x} = 9$ या $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 - 2$$

[2 को दाएं पक्षांतरित किया गया]

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

अब पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (7)^2$$

$$\left(x^2\right)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 2\times x^2 \times \frac{1}{x^2} = 49$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 49$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 49 - 2$$

पक्षांतर किया गया

$x^4 + \frac{1}{x^4} = 47 \Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 7. यदि $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 5$, तो

(i) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ तथा (ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 5$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर–

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=5^2$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2.\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}=25$$

$$x+\frac{1}{x}+2=25$$

$$x+\frac{1}{x}=25-2\Rightarrow x+\frac{1}{x}=23 \quad ....(1)$$

(i) समीकरण (1) के दोनों पक्षों का घन करने पर-

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=(23)^3$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3.x\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=12167$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\times 23=12167$$

$$\left[\boldsymbol{x+\frac{1}{x}=23}\ \text{रखा गया}\right]$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=12167-69$$

अतः $x^3+\frac{1}{x^3}=12098\Rightarrow$ **उत्तर**

(ii) समीकरण (1) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर–

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(23)^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2.x.\frac{1}{x}=529$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=529$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=529-2$$

अतः $x^2+\frac{1}{x^2}=527\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 8. यदि $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$, तो $x^3-\frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$

सूत्र $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ का प्रयेग $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ में करते हैं।

अतः $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4.x.\frac{1}{x}$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-4=5-4$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1^2$$

$$x-\frac{1}{x}=1 \quad ....(1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का घन करने पर-

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=1^3$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}-3.x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)=1$$

[सूत्र- $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ का प्रयोग किया गया]

$$x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=1$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}-3(1)=1$$

$$\left[\text{समीकरण (1) से }\ \boldsymbol{x-\frac{1}{x}=1}\ \text{रखा गया}\right]$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}-3=1\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}=1+3$$

$x^3-\frac{1}{x^3}=4\Rightarrow$ **उत्तर**

प्रश्न 9. यदि $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4$, तो $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=(4)^2$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2.\ \frac{x}{y}.\frac{y}{x}=16$$

[सूत्र- $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ का प्रयोग किया गया]

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2=16\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=16-2=14$$

अतः $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=14 \quad\Rightarrow$ **उत्तर**