

A Complete Book of Advanced maths

**For All UPSC, CSAT, SSC, MBA, CDS, NDA,
CPF & Railway....Entrance Exam**

(Strictly according to the latest syllabus and exam oriented prescribed by given syllabus)

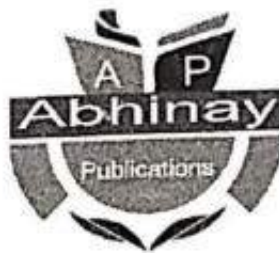
By

ABHINAY SHARMA

Motivator

Entertainer

Teacher



ABHINAY PUBLICATIONS, Delhi - 110009

बीजगणित (Algebra)

बीजगणित (Algebra)

बहुपद (Polynomial) द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) मूल समीकरण (Basic Identity)

व्यंजक (Expression): - चर के बीच सम्बंध

$$\text{ex: } y = x + z^2 + w^2$$

जहाँ y, x, z , और w चर हैं तथा x, z, w स्वतन्त्र चर हैं जबकि y अस्वतन्त्र चर है क्योंकि इसका मान x, z, w पर निर्भर कर रहा है।

बहुपद (Polynomial)

बहुपद एक ऐसा व्यंजक है जिसमें एक ही चर होता है तथा उस चर की घात धनात्मक पूर्णांक होनी चाहिए।

Ex.1 निम्न में से कौन सा बहुपद है।

(a) $x^3 + y^2$

(b) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(c) $x + \sqrt{x}$

(d) $x^3 + x^2 + x$

Ans. (d) $x^3 + x^2 + x$

विकल्प (i) में दो चर हैं। विकल्प (ii) में चर की घात ऋणात्मक है। विकल्प (iii) में चर की घात भिन्न है। विकल्प (iv) में एक ही घात है जिसकी घात धनात्मक पूर्णांक है।

बहुपद की कोटि (Degree of Polynomial): -

चर की अधिकतम घात को बहुपद की कोटि कहते हैं।

Ex. (i) $x^4 + x^3 + x^2$ (ii) $x^2 + x^3 + 1$

कोटि = 4

कोटि = 3

बहुपद के प्रकार Types of Polynomial :-

1. Linear Polynomial (रेखीय बहुपद)

$$\Rightarrow \text{कोटि} = 1 \quad (\text{eg. } x + 1, 3x + 2)$$

2. Quadratic Polynomial (द्विघात बहुपद)

$$\Rightarrow \text{कोटि} = 2 \quad (\text{eg. } x^2 + x + 1, x^2 + 3)$$

3. Cubic Polynomial (त्रिघात बहुपद)

$$\Rightarrow \text{कोटि} = 3 \quad (\text{eg. } x^3 + x^2 + 1, x^3 + 8)$$

व्यंजक या बहुपद का गुणनखंडीकरण

(Factorization of Polynomial or expression):-

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

3. $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

Ex.2 (i) $xa + ya + xz + yz$
 $= a(x + y) + z(x + y)$
 $= (x + y)(a + z)$

(ii) $x^2 + 5x + 6$
 $= x^2 + 3x + 2x + 6$
 $= x(x + 3) + 2(x + 3)$
 $= (x + 3)(x + 2)$

(iii) $x^2 + 7xy + 12y^2$
 $= x^2 + 3xy + 4xy + 12y^2$
 $= x(x + 3y) + 4y(x + 3y)$
 $= (x + 3y)(x + 4y)$

Ex.3 यदि $\frac{5x^2 - 3y^2}{xy} = \frac{11}{2}$ है, तब $\frac{x}{y}$ का धनात्मक मान क्या

होगा?

Solⁿ. $2(5x^2 - 3y^2) = 11xy$

$$10x^2 - 6y^2 = 11xy$$

$$10x^2 - 11xy - 6y^2 = 0$$

$$10x^2 - 15xy + 4xy - 6y^2 = 0$$

$$5x(2x - 3y) + 2y(2x - 3y) = 0$$

$$(2x - 3y)(5x + 2y) = 0$$

$$2x - 3y = 0 \text{ or } 5x + 2y = 0$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \text{ (धनात्मक) और } \frac{x}{y} = \frac{-2}{5} \text{ (ऋणात्मक)}$$

Ex.4 निम्न में से $x^8 + x^4 + 1$ का गुणनखण्ड नहीं है।

(a) $(x^2 + 1 + x)$

(b) $(x^2 + 1 - x)$

(c) $(x^4 + 1 - x^2)$

(d) $x^2 - 1 + x$

Solⁿ. (d) $x^8 + x^4 + 1 + x^4 - x^4$
 $= (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2$
 $= (x^4 + 1 + x^2)(x^4 + 1 - x^2)$
 $= (x^4 + 1 + 2x^2 - x^2)(x^4 + 1 - x^2)$
 $= [(x^2 + 1)^2 - x^2][x^4 + 1 - x^2]$
 $= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)(x^4 + 1 - x^2)$

Ex.5 यदि $x = a^2 + b^2$ और $y = ab\sqrt{2}$

तो $\frac{a^4 + b^4}{a^2 - ab\sqrt{2} + b^2}$ का मान क्या होगा?

(a) $x + y$ (b) $x - 2y$

(c) $x - y$ (d) $x + 2y$

Solⁿ. (a) $a^4 + b^4 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2$
 $= (a^2 + b^2)^2 - (ab\sqrt{2})^2$

$= (a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})$

$\Rightarrow \frac{a^4 + b^4}{a^2 - ab\sqrt{2} + b^2}$

$= \frac{(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})}{a^2 - ab\sqrt{2} + b^2}$

$= a^2 + b^2 + ab\sqrt{2} = x + y$

या

$\Rightarrow x = a^2 + b^2$

$x^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$ व $y^2 = 2a^2b^2$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = a^4 + b^4$

$\Rightarrow \frac{a^4 + b^4}{a^2 - ab\sqrt{2} + b^2} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

Ex.6 यदि $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 12$, $a^2 + ab + b^2 = 4$ है, तब ab का मान क्या होगा?

Solⁿ. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = 12$

$(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = 12$

$(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) = 12$

$a^2 + b^2 - ab = 3$... (i)

$a^2 + b^2 + ab = 4$... (ii)

समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर

$2ab = 1 \Rightarrow ab = \frac{1}{2}$

Ex.7 यदि $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ और $a^2 + b^2 + ab = 4$ है, तब ab का मान क्या होगा?

Solⁿ. हम यह प्रश्न बिना गुणनखण्ड किये हल कर सकते हैं।

$a^2 + b^2 + ab = 4$

$a^2 + b^2 = 4 - ab$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$(a^2 + b^2)^2 = (4 - ab)^2$

$a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = 16 + a^2b^2 - 8ab$

$a^4 + b^4 + a^2b^2 = 16 - 8ab$

$8 = 16 - 8ab$ ($\because a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$)

$8ab = 8 \Rightarrow ab = 1$

Ex.8 यदि $x^4 + y^4 = 19$ और $x + y = 1$ है, तब $x^2y^2 - 2xy$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $x + y = 1$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$(x + y)^2 = 1$

$x^2 + y^2 + 2xy = 1$

$x^2 + y^2 = 1 - 2xy$ (पुनः वर्ग करने पर)

$(x^2 + y^2)^2 = (1 - 2xy)^2$

$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 1 + 4x^2y^2 - 4xy$

$19 + 2x^2y^2 = 1 + 4x^2y^2 - 4xy$

$18 = 2x^2y^2 - 4xy \Rightarrow x^2y^2 - 2xy = 9$

गुणनखण्ड प्रमेय (Factor theorem)

यदि $(x - a)$, $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है, तब $f(a) = 0$

उदा. $(x^2 - 2x + 1)$ का $(x - 1)$ एक गुणनखण्ड है ?

चरण I : गुणनखण्ड = 0 रखने पर

$x - 1 = 0$ है, तब $x = 1$

चरण II : फलन में x का मान रखने पर

$x = 1$ समीकरण $x^2 - 2x + 1$ में रखने पर

$(1)^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

अतः $(x^2 - 2x + 1)$, का $(x - 1)$ गुणनखण्ड है।

Ex.9 $x^{29} - x^{26} - x^{23} + 1$ का गुणनखण्ड होगा?

(a) $(x - 1)$ लेकिन $(x + 1)$ नहीं

(b) $(x + 1)$ लेकिन $(x - 1)$ नहीं

(c) $(x + 1)$ और $(x - 1)$ दोनों

(d) न तो $(x + 1)$ और न ही $(x - 1)$

Ex. $(x-1)=0$ और $(x+1)=0$

$x=1$ और $x=-1$ का मान रखने पर

$$\Rightarrow 1^{29} - 1^{26} - 1^{23} + 1 \Rightarrow (-1)^{29} - (-1)^{26} - (-1)^{23} + 1$$

$$= 1 - 1 - 1 + 1 = + - 1 - 1 + 1 + 1$$

$$= 0 = 0$$

Ans. $(x+1)$ और $(x-1)$ दोनों

Ex. 10 यदि $(x-2)$, बहुपद (x^2+kx+4) का एक गुणखण्ड है, तब k का मान क्या होगा?

Solⁿ. $x-2=0$

$$x=2$$

$$\text{तब, } (2)^2 + k(2) + 4 = 0$$

$$2k = -8 \Rightarrow k = -4$$

Ex. 11 यदि (x^3+ax^2+2x+3) , $(x+1)$ से पूर्णतः भाग हो जाता है, तब a का मान क्या होगा?

Solⁿ. $x+1=0$

$$\Rightarrow x = -1$$

$$\text{तब, } (-1)^3 + a(-1)^2 + 2(-1) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + a - 2 + 3 = 0$$

$$a = 0$$

Ex. 12 यदि $(x+1)$ और $(x-1)$, (ax^3+bx^2+3x+5) का गुणखण्ड है, तब a और b का मान क्या होगा?

Solⁿ. यदि $x+1=0$

$$x = -1$$

$$\text{तब } a(-1)^3 + b(-1)^2 + 3(-1) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow -a + b - 3 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow -a + b = -2 \quad \dots(i)$$

$$\text{यदि } x-1=0$$

$$x = 1$$

$$\text{तब } a(1)^3 + b(1)^2 + 3(1) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow a + b + 3 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow a + b = -8 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$$2b = -8 - 2 = -10$$

$$b = -5 \text{ समीकरण (i) में रखने पर तब, } a = -3$$

Ex. 13 $(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3$ का मान क्या होगा?

(a) $24xyz$

(b) $27xyz$

(c) $3xyz$

(d) 0

Solⁿ. माना $F(x, y, z) = (x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 \dots(i)$

यदि हम $F(x, y, z)$ में $x=0$ रखते हैं, तब $F(x, y, z) = 0$ है, इसलिए x , $F(x, y, z)$ का गुणखण्ड होगा।

इसी प्रकार, $y=0$ और $z=0$, $F(x, y, z)$ में रखते हैं, तब $F(x, y, z) = 0$ होगा। इसी प्रकार से y, z भी $F(x, y, z)$ का गुणखण्ड होगा।

$$F(x, y, z) = Kxyz$$

$$(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 = Kxyz$$

अब हम $x=y=z=1$, K के मान के लिए सर्वसमिका में रख सकते हैं।

$$27 - 1 - 1 - 1 = K \Rightarrow K = 24$$

$$\Rightarrow F(x, y, z) = 24xyz$$

शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem):-

यदि $(x-a)$, $f(x)$ का भाग कर देता है, तब

$$\text{शेषफल (R)} = f(a)$$

चरण 1. भागफल = 0

$$x - a = 0$$

चरण 2. $x = a$ फलन में रखने पर

$$\text{तब, शेषफल (R)} = f(a)$$

Ex 14 $\frac{x^2-7x+15}{x-3}$ का शेषफल क्या होगा?

Solⁿ. $x-3=0 \Rightarrow x=3$

$$R = (3)^2 - 7(3) + 15$$

$$= 9 - 21 + 15 = 3$$

Ex. 15 यदि (x^2+x+4) , $(x-1)$ से विभाजित होता है, तब इसका शेषफल क्या होगा?

Solⁿ. $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$R = (1)^2 + 1 + 4 = 6$$

Ex. 16 यदि $(x^{11} + 3)$, $(x + 1)$ से विभाजित हो रहा है, तब इसका शेषफल क्या होगा?

Solⁿ. $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
 $R = (-1)^{11} + 3 = -1 + 3 = 2$

Ex. 17 यदि $(x^{51} + 51)$, $(x + 1)$ से विभाजित है, तब इसका शेषफल क्या होगा?

Solⁿ. $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
 $R = (-1)^{51} + 51 = 50$

Ex. 18 यदि $(x^{40} + 3)$, $(x^4 + 1)$ से विभाजित है, तब इसका शेषफल क्या होगा?

Solⁿ. $x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = -1$
 $R = (x^4)^{10} + 3 = (-1)^{10} + 3$
 $= 1 + 3 = 4$

Ex. 19 यदि $(x^{35} + 3)$, $(x^5 + 1)$ से विभाजित है, तब इसका शेषफल क्या होगा?

Solⁿ. $x^5 + 1 = 0 \Rightarrow x^5 = -1$
 $R = (x^5)^7 + 3 = (-1)^7 + 3 = -1 + 3 = 2$

Ex. 20 यदि $(x^2 + bx + 7)$, $(x - 1)$ से विभाजित है, और इसका बचा हुआ शेषफल 12 है, तब b का मान क्या होगा?

Solⁿ. $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
 $R = (1)^2 + b(1) + 7$
 $12 = b + 8$ ($\because R = 12$)
 $b = 4$

Ex. 21 यदि $(2x^2 + kx + 8)$, $(x + 2)$ से विभाजित है और बचा हुआ शेषफल $3k$ है, तब k का मान क्या होगा?

Solⁿ. $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
 $R = 2(-2)^2 + (-2)k + 8 = 8 - 2k + 8$
 $3k = 16 - 2k$
 $5k = 16$

$\Rightarrow k = \frac{16}{5}$

Ex. 22 यदि $(x^2 + 4x + k)$, $(x - 2)$ से विभाजित है और बचा हुआ शेषफल $2x$ है, तब k का मान क्या होगा?

Solⁿ. $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
 $R = (2)^2 + 4(2) + k$
 $2x = 4 + 8 + k$
 $4 = 12 + k$ ($\because R = 2x = 2 \times 2 = 4$)
 $4 - 12 = k$
 $k = -8$

लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक का सिद्धान्त:
(LCM & HCF of Polynomial):

महत्तम समापवर्तक (HCF):

बहुपद $h(x)$ दो या दो से अधिक बहुपदों का HCF या GCD (म.स.) होगा यदि बहुपद $h(x)$ को कोटि अधिकतम तथा दिये गये बहुपदों को पूर्णतः विभाजित करता है। HCF में अधिकतम कोटि वाले पद का गुणांक धनात्मक लिया जाता है।

दो या दो से अधिक बहुपदों का HCF निकालने के लिए निम्न तरीके का अनुसरण करें—

चरण I: प्रत्येक बहुपद को घातों के गुणनफल के अखण्डनीय गुणनखण्डों के रूप में सरल कर लें।

चरण II: यदि कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है तो HCF 1 होगा। यदि कुछ उभयनिष्ठ अखण्डनीय गुणनखण्डों का छोटे से छोटा चर घातांक (प्रतिपादक) गुणनखण्ड रूप में ज्ञात कर लें।

चरण III: चरण II में ज्ञात किये गये सबसे छोटे चर घातांक व उभयनिष्ठ अखण्डनीय गुणनखण्डों की गुणा करके HCF प्राप्त करते हैं।

लघुत्तम समापवर्त्य (LCM):

एक बहुपद $p(x)$ दो या दो से अधिक बहुपदों का LCM होगा यदि इस बहुपद की कोटि न्यूनतम है, जोकि दिये गये बहुपदों को पूर्णतः विभाजित करता है। LCM ज्ञात करने के लिए दिये गये तीन चरणों का अनुसरण करें।

चरण I: प्रत्येक बहुपद को घातों के गुणनफल के अखण्डनीय गुणनखण्डों के रूप में सरल कर लें।

चरण II: दिये गये बहुपद के अखण्डनीय गुणनखण्डों की सूची बना लें। तथा प्रत्येक गुणनखण्ड के लिए अधिकतम चर घातांकीय गुणनखण्डों के रूप में ज्ञात कर लें।

चरण III: चरण II में ज्ञात किये अधिकतम चर घातांक व अखण्डनीय गुणनखण्डों की गुणा करके LCM प्राप्त करते हैं।

Ex. 23 दिये गये बहुपदों $30(x^2 - 3x + 2)$ तथा $50(x^2 - 2x + 1)$ का म.स. (HCF) ज्ञात करें।

Solⁿ. माना $f(x) = 30(x^2 - 3x + 2)$,
 $g(x) = 50(x^2 - 2x + 1)$.

$$f(x) = 2 \times 3 \times 5 \times (x-1) \times (x-2)$$

$$g(x) = 2 \times 5^2 \times (x-1)^2$$

$$\text{HCF} = 2^1 \times 5^1 \times (x-1)^1$$

$$= 10(x-1)$$

Ex. 24 म.स. (HCF) ज्ञात कीजिए।

$$f(x) = 33(2x+3)^2(3x-4)^3(4x-5)^4$$

$$\text{और } g(x) = 22(x+1)(2x+3)(4x-5)^2(4x^2-9)$$

Solⁿ. $f(x) = 3 \times 11(2x+3)^2(3x-4)^3(4x-5)^4$

$$g(x) = 2 \times 11(x+1)(2x+3)(4x-5)^2(2x-3)(4x-5)^2$$

$$= 2 \times 11(x+1)(2x+3)^2(2x-3)(4x-5)^2$$

$$\text{HCF} = 11^1 \times (2x+3)^2 \times (4x-5)^2$$

$$= 11(2x+3)^2(4x-5)^2$$

Ex. 25 दिये गये बहुपदों का HCF ज्ञात करें।

$$f(x) = 6(x^3 + 3x^2)(x^2 - 16)(x^2 + 9x + 18) \text{ व}$$

$$g(x) = 8(x^4 + 4x^3)(x^2 + 6x + 9)^2.$$

Solⁿ. $f(x) = 6(x^3 + 3x^2)(x^2 - 16)(x^2 + 9x + 18)$

$$= 2 \times 3 \{x^2(x+3)\} \{(x-4)(x+4)\} \{(x+6)(x+3)\}$$

$$= 2 \times 3x^2(x+3)^2(x-4)(x+4)(x+6)$$

$$g(x) = 8(x^4 + 4x^3)(x^2 + 6x + 9)^2$$

$$= 2^3(x^3(x+4))\{(x+3)^2\}^2$$

$$= 2^3x^3(x+4)(x+3)^4$$

$$\text{HCF} = 2x^2(x+3)^2(x+4).$$

Ex. 26 दिये गये बहुपदों का ल.स. (LCM) ज्ञात करें।

$$f(x) = 4(x-1)^2(x^2 + 6x + 8) \text{ व}$$

$$g(x) = 10(x-1)(x+2)(x^2 + 7x + 10).$$

Solⁿ. $f(x) = 2^2 \times (x-1)^2 \times (x+2) \times (x+4)$,

$$g(x) = 2 \times 5 \times (x-1) \times (x+2) \times (x+5) \times (x+2)$$

$$= 2 \times 5 \times (x-1) \times (x+2)^2 \times (x+5)$$

$$\text{LCM} = 2^2 \times 5^1 \times (x-1)^2 \times (x+2)^2 \times (x+4)^1 \times (x+5)^1$$

$$= 20(x-1)^2(x+2)^2(x+4)(x+5)$$

Ex. 27 बहुपदों $(x^2 + 2bx + 3b + 3)$ तथा $(x^2 + x - 5b)$ का म.स. $(x+5)$ है, तो b का मान ज्ञात कीजिए।

Solⁿ. $(x+5)$ दिये गये बहुपदों का म.स. है, इसका मतलब $(x+5)$ दिये गये बहुपदों का एक गुणनखण्ड है।

$f(-5)$ का मान दिये गये बहुपदों में शून्य के बराबर होगा।

$$(-5)^2 + 2b(-5) + 3b + 3 = 0$$

$$28 - 7b = 0 \Rightarrow b = 4$$

$$\text{और } (-5)^2 + (-5) - 5b = 0$$

$$20 - 5b = 0 \Rightarrow b = 4$$

ऊपर दिये गये दोनों समीकरण $b = 4$ हल देते हैं

Ex. 28 सिद्धान्त $P(x) = (x+1)^2(x+2)$

$Q(x) = (x+1)(x-2)$ है, तब LCM और HCF का मान ज्ञात कीजिए।

Solⁿ. $\text{LCM} = (x+1)^2(x+2)(x-2) = (x+1)^2(x^2-4)$

$$\text{HCF} = (x+1)$$

नोट: दो बहुपदों का गुणनफल LCM व HCF के गुणनफल के बराबर होता है।

$$P(x) \times Q(x) = \text{LCM} \times \text{HCF}$$

Ex. 29 दो बहुपद $P(a)$ और $Q(a)$ का HCF $(a+1)$ और LCM (a^3+a^2-a-1) है। यदि $P(a)=(a^2-1)$ है, तब $Q(a)$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $P(a) \times Q(a) = \text{LCM} \times \text{HCF}$

$$\Rightarrow Q(a) = \frac{(a^3+a^2-a-1) \times (a+1)}{a^2-1}$$

$$= \frac{[a^2(a+1)-1(a+1)](a+1)}{(a^2-1)}$$

$$= \frac{(a+1)(a^2-1)(a+1)}{(a^2-1)}$$

$$Q(a) = (a+1)^2$$

Ex. 30 $(x^3+3x^2y+2xy^2)$ और $(x^4+6x^3y+8x^2y^2)$ का HCF का मान ज्ञात कीजिए।

Solⁿ. $P(x) = x^3+3x^2y+2xy^2$

$$= x[x^2+3xy+2y^2]$$

$$= x[x^2+2xy+xy+2y^2]$$

$$= x[x(x+2y)+y(x+2y)]$$

$$= x(x+2y)(x+y)$$

$$Q(x) = x^4+6x^3y+8x^2y^2$$

$$= x^2[x^2+6xy+8y^2]$$

$$= x^2[x^2+4xy+2xy+8y^2]$$

$$= x^2[x(x+4y)+2y(x+4y)]$$

$$= x^2(x+2y)(x+4y)$$

$$\text{HCF} = x(x+2y)$$

Ex. 31 $(10x^3-10x^2-5x+9)$ और $(30x^3-61x^2-24x+10)$ का HCF क्या होगा?

$$(a) \ 31x^2+29x+17$$

$$(b) \ 31x^2+9x+17$$

$$(c) \ 31x^2-9x-27$$

$$(d) \ 30x^2-11x+11$$

Solⁿ. HCF कभी भी बहुपदों के अन्तर से अधिक नहीं हो सकता है।

HCF बहुपदों का अन्तर या अन्तर का गुणनखण्ड होता है।

$$P(x) = 30x^3 - 30x^2 - 15x + 27$$

$$Q(x) = 30x^3 - 61x^2 - 24x + 10$$

$$\begin{array}{r} - \quad + \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$\text{अन्तर,} = 31x^2 + 9x + 17$$

विकल्पों के अनुसार,

हम देख सकते हैं, HCF $(31x^2+9x+17)$ होगा।

द्विघात समीकरण (QUADRATIC EQUATION)

एक बीजगणितीय व्यंजक जो इस प्रकार है : $ax^2+bx+c=0$,

जहाँ $a \neq 0, b, c \in R$ को द्विघात समीकरण कहते हैं।

द्विघात समीकरण के मूल

(Root of the Quadratic Equation:)

द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल α [वास्तविक या समिश्र (जटिल)] इस प्रकार है कि $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ तो $(x-\alpha)$, ax^2+bx+c का एक गुणनखण्ड होगा।

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{सिद्ध: } \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

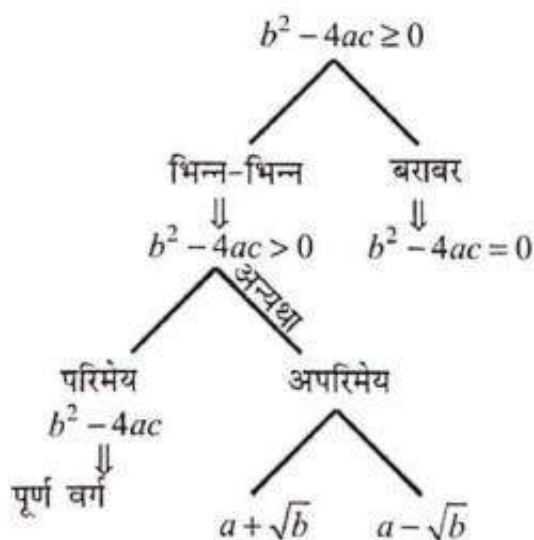
नोट: a, b व c द्विघात समीकरण के गुणांक हैं, तथा व्यंजक b^2-4ac को विविक्तक कहते हैं, तथा इस D द्वारा निरूपित किया जाता है।

मूलों की प्रकृति (Nature of Roots):-

x का वह मान जहाँ समीकरण का मान शून्य हो।

1. मूल काल्पनिक: $b^2-4ac \leq 0$

2. मूल वास्तविक: $b^2 - 4ac \geq 0$



मूलों का योग व गुणनफल: माना दो मूल α व β हैं तब

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ और } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

मूलों का योग: $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

मूलों का गुणनफल: $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

तो, $ax^2 + bx + c = 0$ को हम लिख सकते हैं

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (\text{मूलों का योग})x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$$

- यदि मूल α व β एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं तो $a = c$
- यदि α व β का मान आपस में बराबर तथा चिन्ह विपरीत है, तो $b = 0$
- यदि a, b व c परिमेय संख्याएँ हैं, तथा $a + \sqrt{b}$ द्विघात समीकरण का एक मूल है, तो दूसरा मूल इसके संयुग्मी $a - \sqrt{b}$ तथा विपरीततया: (Vice-Versa)

Ex. 32 द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका एक मूल $3 + \sqrt{3}$ है।

Solⁿ. यदि एक मूल $3 + \sqrt{3}$ है, तो इसका दूसरा मूल $3 - \sqrt{3}$ होगा।

$$\text{मूलों का योग} = (3 + \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3}) = 6$$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 6$$

सूत्र प्रयोग से,

$$x^2 - (\text{मूलों का योग})x + (\text{मूलों का गुणनफल}) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$$

Ex. 33 समीकरण $2x^2 - 7x + 12 = 0$ के दो मूल α व β हैं,

$$\text{तो } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = ?$$

Solⁿ. $2x^2 - 7x + 12 = 0$

मानक समी. $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 2, b = -7 \text{ और } c = 12$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{7}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = 6$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \times 6}{6}$$

$$= \frac{\frac{49}{4} - 12}{6} = \frac{49 - 48}{4 \times 6} = \frac{1}{24}$$

Ex. 34 समीकरण $x^2 - \sqrt{3} = 0$ के मूलों का गुणनफल होगा।

Solⁿ. मानक समी. $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 1, b = 0 \text{ व } c = -\sqrt{3}$$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\sqrt{3}$$

उभयनिष्ठ मूलों की शर्त (Condition for common Roots)

माना दो द्विघात समीकरण

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \quad \dots(i)$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \quad \dots(ii)$$

(A) यदि एक मूल उभयनिष्ठ है, तो

$$\Rightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$$

(B) यदि दो मूल उभयनिष्ठ हैं, तो

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Ex. 35 यदि समीकरण $x^2 + 2x - 3 = 0$ तथा $x^2 + 3x - m = 0$

का एक मूल उभयनिष्ठ है, तो m का मान होगा।

Solⁿ. $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$ के प्रयोग से

$$(1.3 - 1.2)[2.(-m) - 3.(-3)] = [(-3).1 - (-m).1]^2$$

$$(3 - 2)(-2m + 9) = (-3 + m)^2$$

$$-2m + 9 = 9 + m^2 - 6m$$

$$m^2 - 4m = 0$$

$$m(m - 4) = 0$$

$$m = 4 \quad (\because m \neq 0)$$

Ex. 36 m के किस मान के लिए समी. $4x^2 + 6mx + 9 = 0$ के मूल बराबर होंगे।

Solⁿ. $ax^2 + bx + c = 0$ मानक समी. से तुलना करने पर

$$a = 4, b = 6m \text{ व } c = 9$$

यदि मूल समीकरण समान हो: $\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$$\Rightarrow (6m)^2 - 4(4)(9) = 0$$

$$\Rightarrow 36m^2 = 144$$

$$\Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

(द्विघात समीकरण का अधिकतम व न्यूनतम मान)
MAX^M & MIN^M VALUE OF QUADRATIC EQUATION:

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

(A). जब $a > 0$ तो व्यंजक का मान न्यूनतम होगा

$$\text{न्यूनतम मान} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

(B). जब $a < 0$ व्यंजक का मान अधिकतम होगा

$$\text{अधिकतम मान} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

दिये गये समीकरण के मूलों को परिवर्तित कर नये द्विघात समीकरण की संरचना-

Ex. 37 यदि α व β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha + 2$ व $\beta + 2$ हैं।

Solⁿ. माना $y = \alpha + 2$

$$\Rightarrow \alpha = y - 2$$

α समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का मूल है, तो इसलिए

$\alpha = y - 2$ इस समीकरण में रखने पर

$$\Rightarrow a(y - 2)^2 + b(y - 2) + c = 0$$

y को x द्वारा परिवर्तित करने पर

$$a(x - 2)^2 + b(x - 2) + c = 0$$

अतः यह एक अभीष्ट समीकरण है,

Ex. 38 यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β हैं, तो

वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{1}{\alpha}$ व $\frac{1}{\beta}$ हैं।

Solⁿ. माना $y = \frac{1}{x}$ [हम ले सकते हैं $y = \frac{1}{x}$]

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{y}$$

α समी. $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल है, इसलिए $\alpha = \frac{1}{y}$

समीकरण में रखने पर

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{y}\right)^2 + b\left(\frac{1}{y}\right) + c = 0$$

$$\Rightarrow a + by + cy^2 = 0$$

y को x द्वारा परिवर्तित करने पर

$$a + bx + cx^2 = 0$$

अतः यह अभीष्ट समीकरण है।

Ex. 39 यदि α व β समी. $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो वह

f) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ के लिए K का मान ज्ञात करें, f का मान $\alpha^2 + \beta^2$ है।

Solⁿ. माना $y = \alpha^2$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{y}$$

α समी. $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल है इसलिए α

$= \sqrt{y}$ समी. में रखने पर

$$\Rightarrow a(\sqrt{y})^2 + b(\sqrt{y}) + c = 0$$

$$\Rightarrow b(\sqrt{y}) = -a(\sqrt{y})^2 - c = -ay - c$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$b^2y = a^2y^2 + c^2 + 2acy$$

$$a^2y^2 + (2ac - b^2)y + c^2 = 0$$

y को x द्वारा परिवर्तित करने पर

$$a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$$

अतः यह अभीष्ट समीकरण है,

Ex. 40 यदि $\sqrt{3x^2 - 12x + 19} + \sqrt{3x^2 - 12x - 11} = 6$

है, तब $\sqrt{3x^2 - 12x + 19} - \sqrt{3x^2 - 12x - 11} = ?$

(a) 3

(b) 4

(c) 5

(d) 6

Solⁿ. $\sqrt{3x^2 - 12x + 19} + \sqrt{3x^2 - 12x - 11} = 6$... (i)

$$\sqrt{3x^2 - 12x + 19} - \sqrt{3x^2 - 12x - 11} = t \text{ (Let) ... (ii)}$$

समीकरण (i) और (ii) को गुणा करने पर

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 19 - 3x^2 + 12x + 11 = 6t$$

$$\Rightarrow 6t = 30 \Rightarrow t = 5$$

Ex. 41 यदि $x = 2 - 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ है, तब $x^3 - 6x^2 + 18x + 18$ का मान क्या होगा?

(a) 22

(b) 33

(c) 40

(d) 45

Solⁿ. (c) $x - 2 = 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}$

दोनों पक्षों का घन करने पर

$$\Rightarrow x^3 - 8 - 3(x-2)(x-2) = 2^2 - 2^1 - 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 - 6x(x-2) = 4 - 2 - 3 \times 2(x-2)$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 - 6x^2 + 12x = 2 - 6x + 12$$

$$\Rightarrow x^3 - 8 - 6x^2 + 12x + 6x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 18x = 22$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 18x + 18 = 22 + 18$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 18x + 18 = 40$$

Ex. 42 यदि $x - y = \frac{x+y}{9} = \frac{xy}{6}$ है, तब xy का मान क्या

होगा?

(a) $\frac{4}{3}$

(b) $\frac{9}{5}$

(c) $\frac{9}{10}$

(d) $\frac{1}{3}$

Solⁿ.(b) $x - y = \frac{x+y}{9} = \frac{xy}{6} = k$ (माना)

$$x - y = k$$

$$x + y = 9k$$

$$2x = 10k \text{ (दोनों समीकरण को जोड़ने पर)}$$

$$\Rightarrow x = 5k$$

$$\Rightarrow y = 4k$$

$$\therefore \frac{xy}{6} = k \Rightarrow \frac{5k \cdot 4k}{6} = k$$

$$10k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow xy = 6k = \frac{9}{5}$$

Ex. 43 समीकरण $lx^2 + nx + n = 0$ के मूलों का अनुपात $p : q$

है, तब $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}}$ का मान क्या होगा?

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 0

Solⁿ.(d) $lx^2 + nx + n = 0$ माना मूल α व β हैं

$$\alpha + \beta = \frac{-n}{l} \text{ व } \alpha\beta = \frac{n}{l}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \text{ (दिया है)}$$

$$\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\frac{-n}{l} + \frac{n}{l}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{0}{\sqrt{\alpha\beta}} = 0$$

मूल सर्वसमिकाएँ (BASIC IDENTITY)

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

Type - 1 (सूत्रों पर आधारित)

Ex. 44 यदि $a + b + c = 6$,

$a^2 + b^2 + c^2 = 16$ है, तब $ab + bc + ca$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$$36 = 16 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = 10$$

Ex. 45 यदि $a + b + c = 3$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

$a^2 + b^2 + c^2 = 6$ है, तब abc का मान क्या होगा?

Solⁿ. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

$$ab + bc + ca = 2abc$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$9 = 6 + 2(2abc)$$

$$\Rightarrow 3 = 4abc \Rightarrow abc = \frac{3}{4}$$

Ex. 46 यदि $a^3 + b^3 = 0$ है, तब $a + b$ का मान क्या होगा?

(i) $\sqrt{3ab}$

(ii) $\sqrt{2ab}$

(iii) $3ab$

(iv) $\sqrt{4ab}$

Solⁿ.

$$\Rightarrow (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 0 + 3ab(a+b)$$

$$(a+b)^2 = 3ab$$

$$a+b = \sqrt{3ab}$$

Ex. 47 यदि $a^4 + b^4 = a^2b^2$ है, तब $a^6 + b^6$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3$
 $= (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2)$
 $= (a^2 + b^2)(a^2b^2 - a^2b^2)$
 $= 0$

Ex. 48 यदि $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} = 1$ और $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 0$

है, तब $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. माना $x = \frac{p}{a}$, $y = \frac{q}{b}$ और $z = \frac{r}{c}$

तब $x + y + z = 1$

और $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow xy + yz + xz = 0$

$$\Rightarrow (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$$

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(0)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

अतः $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} = 1$

Ex. 49 $x + y = 2z$ दिया है, तब

(a) $\frac{x}{x-z} + \frac{y}{y-z} = ?$

(i) 0

(ii) 1

(iii) 2

(iv) 3

(b) $\frac{x}{x-z} + \frac{z}{y-z} = ?$

(i) 1

(ii) 2

(iii) 3

(iv) 4

Solⁿ. (a) $x + y = z + z$
 $x - z = z - y$

$$\Rightarrow \frac{x}{z-y} + \frac{y}{y-z} = \frac{x}{z-y} - \frac{y}{z-y}$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{z-y} = \frac{2z-y-y}{z-y}$$

$$= \frac{2(z-y)}{(z-y)} = 2$$

या

माना $x = 0$ तब $y = 2z$

(a) $\frac{x}{x-z} + \frac{y}{y-z} = 0 + \frac{2z}{2z-z} = 2$

(b) $\frac{x}{x-z} + \frac{z}{y-z} = 0 + \frac{z}{2z-z} = 1$

Ex. 50 $x + \frac{1}{y} = 1$ तथा $y + \frac{1}{z} = 1$ दिया है, तब,

(1) $z + \frac{1}{x} = ?$

(2) $xyz = ?$

(3) $(x + y + z) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = ?$

Sol. $\therefore x = 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{y}{y-1}$

और $\frac{1}{z} = 1 - y \Rightarrow z = \frac{1}{1-y}$

$\therefore$ (1) $z + \frac{1}{x} = \frac{1}{1-y} + \frac{y}{y-1} = \frac{1-y}{1-y} = 1$

$\therefore$ (2) $xyz = \frac{(y-1)}{y} \times y \times \frac{1}{(1-y)} = -1$

$\therefore$ (3) $(x + y + z) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$
 $= \left(x + \frac{1}{y}\right) + \left(y + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{x}\right)$
 $= 1 + 1 + 1 = 3$

Ex. 51 यदि $\left(x + \frac{1}{y}\right) = \left(y + \frac{1}{z}\right) = \left(z + \frac{1}{x}\right)$ तथा $(x \neq y \neq z)$

तब xyz का मान क्या होगा?

(i) 1

(ii) -1

(iii) ± 1

(iv) 3

Solⁿ. $x - y \neq 0$, $y - z \neq 0$ और $z - x \neq 0$

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y-z}{zy} \quad \dots(i)$$

$$y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z-x}{xz} \quad \dots(ii)$$

$$z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy} \quad \dots(iii)$$

समीकरण (i), (ii) और (iii) की गुणा करने पर

$$(x-y)(y-z)(z-x) = \frac{(y-z)}{yz} \times \frac{(z-x)}{zx} \times \frac{(x-y)}{xy}$$

$$1 = \frac{1}{(xyz)^2} \Rightarrow xyz = \pm 1$$

Ex. 52 यदि $\frac{a-b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c-a}{b} = 1$ और $(b+c-a \neq 0)$ है, तब निम्न में से इसका संबंध किससे है?

(i) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(ii) $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

(iii) $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(d) इसमें से कोई नहीं

Solⁿ. $\frac{a-b}{c} + \frac{b+c}{a} = 1 - \frac{c-a}{b}$

$$\frac{ab - b^2 + c^2 - ac}{bc} = \frac{a - b - c}{a}$$

$$\frac{a(b-c) - (b^2 - c^2)}{bc} = \frac{a - b - c}{a}$$

$$\frac{a(b-c) - (b-c)(b+c)}{bc} = \frac{(a-b-c)}{a}$$

$$\frac{(b-c)(a-b-c)}{bc} = \frac{(a-b-c)}{a}$$

$$\frac{b-c}{bc} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

विधि 2 : Ist व IInd पद से 1 घटाने पर तथा IIIrd पद में 1 जोड़ने पर क्योंकि हम अंश में $b+c-a$ चाहते हैं

$$\frac{a-b}{c} - 1 + \frac{b+c}{a} - 1 + \frac{c-a}{b} + 1 = 1 - 1 - 1 + 1$$

$$\frac{a-b-c}{c} + \frac{b+c-a}{a} + \frac{c-a+b}{b} = 0$$

$$-\frac{b+c-a}{c} + \frac{b+c-a}{a} + \frac{b+c-a}{b} = 0$$

$$(b+c-a) \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$\left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0 \quad (\because b+c-a \neq 0)$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Ex. 53 दिया है, $pq + qr + rp = 0$ तो

(1) $\frac{1}{p^2 - qr} + \frac{1}{q^2 - rp} + \frac{1}{r^2 - pq} = ?$

(2) $\frac{p^2}{p^2 - qr} + \frac{q^2}{q^2 - rp} + \frac{r^2}{r^2 - pq} = ?$

Solⁿ. (1) $-qr = pq + rp$, $-rp = pq + qr$ और $-pq = qr + rp$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2 - qr} + \frac{1}{q^2 - rp} + \frac{1}{r^2 - pq}$$

$$= \frac{1}{p^2 + pq + rp} + \frac{1}{q^2 + pq + qr} + \frac{1}{r^2 + qr + rp}$$

$$= \frac{1}{p(p+q+r)} + \frac{1}{q(p+q+r)} + \frac{1}{r(p+q+r)}$$

$$= \frac{1}{p+q+r} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right]$$

$$= \frac{1}{p+q+r} \left[\frac{pq + qr + rp}{pqr} \right]$$

$$= \frac{1}{p+q+r} (0) = 0$$

Solⁿ. (2) $\frac{p^2}{p^2 - qr} + \frac{q^2}{q^2 - rp} + \frac{r^2}{r^2 - pq}$

$$= \frac{p^2}{p^2 + pq + rp} + \frac{q^2}{q^2 + pq + qr} + \frac{r^2}{r^2 + qr + rp}$$

$$= \frac{p^2}{p(p+q+r)} + \frac{q^2}{q(p+q+r)} + \frac{r^2}{r(p+q+r)}$$

$$= \frac{p+q+r}{p+q+r} = 1$$

द्वितीय विधि $\because pq + qr + rp = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$
माना $p = q = -2$ और $r = 1$ रख सकते हैं

$$(1). \frac{1}{p^2 - qr} + \frac{1}{q^2 - rp} + \frac{1}{r^2 - pq}$$

$$= \frac{1}{(-2)^2 - (-2)(1)} + \frac{1}{(-2)^2 - (1)(-2)} + \frac{1}{(1)^2 - (-2)(-2)}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{-3} = 0$$

$$(2). \frac{p^2}{p^2 - qr} + \frac{q^2}{q^2 - rp} + \frac{r^2}{r^2 - pq}$$

$$= \frac{(-2)^2}{(-2)^2 - (-2)(1)} + \frac{(-2)^2}{(-2)^2 - (1)(-2)} + \frac{(1)^2}{(1)^2 - (-2)(-2)}$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{-3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

Ex. 54 यदि $(x + y + z)^x = a^x$, $(x + y + z)^y = a^y$

$(x + y + z)^z = a^z$ है, तब $x = ?$

(a) केवल $(x + y + z) = a$

(b) $x = y = z = \frac{a}{3}$

(c) $x = y = z = 2a$

(d) $x = y = z = a$

Solⁿ. $(x + y + z)^x = a^x$... (i)

$(x + y + z)^y = a^y$... (ii)

$(x + y + z)^z = a^z$... (iii)

तीनों समीकरणों का गुणनफल करने पर

$$\Rightarrow (x + y + z)^{x+y+z} = a^{x+y+z}$$

घात की तुलना करने पर

$$\Rightarrow x + y + z = a \quad \dots (iv)$$

$x + y + z = a$ का मान तीनों समीकरणों में रखने पर

$$a^x = a^x \Rightarrow x = y$$

$$a^y = a^y \Rightarrow y = z$$

$$a^z = a^z \Rightarrow z = x$$

अब हम कह सकते हैं।

$x = y = z$ समीकरण (iv) में रखने पर

$$\Rightarrow 3x = a$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{3} \Rightarrow x = y = z = \frac{a}{3}$$

Ex. 55 यदि $x(x + y + z) = 4$, $y(x + y + z) = 16$

$z(x + y + z) = 29$ और x, y व z एक धनात्मक संख्या है, तब x, y व z का मान क्या होगा?

Solⁿ. $x(x + y + z) = 4$... (i)

$y(x + y + z) = 16$... (ii)

$z(x + y + z) = 29$... (iii)

सभी समीकरणों को जोड़ने पर

$$(x + y + z)(x + y + z) = 49$$

$$(x + y + z)^2 = 49$$

$$(x + y + z) = \pm 7$$

धनात्मक मान लेने पर

$$x + y + z = 7$$

समीकरण (i), (ii) और (iii) से

$$7x = 4, \quad 7y = 16, \quad 7z = 29$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{7} \Rightarrow y = \frac{16}{7} \Rightarrow z = \frac{29}{7}$$

Ex. 56 यदि $(x + y)^2 = 21 + z^2$, $(y + z)^2 = 32 + x^2$

और $(z + x)^2 = 28 + y^2$ है, तब $x + y + z$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $(x + y)^2 - z^2 = 21$

$$\Rightarrow (x + y + z)(x + y - z) = 21 \quad \dots (1)$$

$$(y + z)^2 - x^2 = 32 \quad \dots (2)$$

$$\Rightarrow (y + z + x)(y + z - x) = 32 \quad \dots (2)$$

$$(z + x)^2 - y^2 = 28 \quad \dots (3)$$

$$\Rightarrow (z + x + y)(z + x - y) = 28 \quad \dots (3)$$

तीनों समीकरणों को जोड़ने पर

$$(x + y + z)[(x + y - z) + (y + z - x) + (z + x - y)] = 81$$

$$(x + y + z)^2 = 81$$

$$\Rightarrow x + y + z = \pm 9$$

Type - 2

(A). दिया है: $x + \frac{1}{x} = 2$

निष्कर्ष: $x = 1$

$$\text{सिद्ध: } \frac{x^2 + 1}{x} = 2$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

Ex. 57 यदि $x + \frac{1}{x} = 2$, तो

(i) $x^{11} + \frac{1}{x^{11}} = ?$

(ii) $x^{112} - \frac{1}{x^{112}} = ?$

Solⁿ. (i) $x^{11} + \frac{1}{x^{11}} = (1)^{11} + \frac{1}{(1)^{11}} = 2$

(ii) $x^{112} - \frac{1}{x^{112}} = (1)^{112} - \frac{1}{(1)^{112}} = 0$

Ex. 58 $m + \frac{1}{m-2} = 4$, तब

(i) $(m-2)^{111} + \frac{1}{(m-2)^{111}} = ?$

(ii) $m^2 + m + 1 = ?$

Solⁿ. $(m-2) + \frac{1}{(m-2)} = 2$

तब $(m-2) = 1 \Rightarrow m = 3$

(i) $(m-2)^{111} + \frac{1}{(m-2)^{111}} = (1)^{111} + \frac{1}{(1)^{111}} = 2$

(ii) $m^2 + m + 1 = (3)^2 + 3 + 1 = 13$

Ex. 59 यदि $m + \frac{1}{m+2} = 0$, तब

(i) $(m+2)^{112} + \frac{1}{(m+2)^{112}} = ?$

(ii) $m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = ?$

Solⁿ. $(m+2) + \frac{1}{(m+2)} = 2$

तब $(m+2) = 1 \Rightarrow m = -1$

(i) $(m+2)^{112} + \frac{1}{(m+2)^{112}} = (1)^{112} + \frac{1}{(1)^{112}} = 2$

(ii) $m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$

(B). दिया है: $x + \frac{1}{x} = -2$

निष्कर्ष: $x = -1$

सिद्ध: $\frac{x^2+1}{x} = -2x$

$\Rightarrow x^2 + 1 = -2x$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

Ex. 60 $x + \frac{1}{x} = -2$, तब

(i) $x^{11} + \frac{1}{x^{11}} = ?$

(ii) $x^{112} + \frac{1}{x^{112}} = ?$

(iii) $x^{112} - \frac{1}{x^{112}} = ?$

(iv) $x^{11} + \frac{1}{x^{12}} = ?$

Solⁿ. (i) $x^{11} + \frac{1}{x^{11}} = (-1)^{11} + \frac{1}{(-1)^{11}} = -1 - 1 = -2$

(ii) $x^{112} + \frac{1}{x^{112}} = (-1)^{112} + \frac{1}{(-1)^{112}} = 1 + 1 = 2$

(iii) $x^{112} - \frac{1}{x^{112}} = (-1)^{112} - \frac{1}{(-1)^{112}} = 1 - 1 = 0$

(iv) $x^{11} + \frac{1}{x^{12}} = (-1)^{11} + \frac{1}{(-1)^{12}} = -1 + 1 = 0$

Ex. 61 यदि $m + \frac{1}{m+2} = -4$, तब

(i) $(m+2)^{111} + \frac{1}{(m+2)^{111}} = ?$

(ii) $m^2 + m + 1 = ?$

Solⁿ. $(m+2) + \frac{1}{(m+2)} = -2 \Rightarrow (m+2) = -1$
 $\Rightarrow m = -3$

(i) $(m+2)^{111} + \frac{1}{(m+2)^{111}} = (-1)^{111} + \frac{1}{(-1)^{111}} = -1 - 1 = -2$

(ii) $m^2 + m + 1 = (-3)^2 + (-3) + 1 = 9 - 3 + 1 = 7$

Ex. 62 यदि $m + \frac{1}{m-2} = 0$, तब

$$(i) (m-2)^{12} + \frac{1}{(m-2)^{11}} = ?$$

$$(ii) m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = ?$$

$$\text{Sol}^n. (m-2) + \frac{1}{(m-2)} = -2 \Rightarrow m-2 = -1$$

$$\Rightarrow m = 1$$

$$(i) (m-2)^{12} + \frac{1}{(m-2)^{11}} = (-1)^{12} + \frac{1}{(-1)^{11}} = 1 - 1 = 0$$

$$(ii) m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = (1)^5 + (1)^4 + (1)^3 + (1)^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$$(C). \text{ दिया है : } x + \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{निष्कर्ष: (a) } x^3 = -1$$

(b) यदि दो पदों का की घातों में 3 का अन्तर है, तो दोनों पदों का योग शून्य होगा।

$$\text{eg. } x^{12} + x^9 = 0, x^{10} + x^7 = 0$$

$$\text{सिद्ध: } \frac{x^2 + 1}{x} = 1$$

$$x^2 + 1 = x \quad \dots(i)$$

दोनों पक्षों में x से गुणा करने पर

$$x^3 + x = x^2$$

$$x^3 = x^2 - x [\because x^2 - x = -1 \text{ समीकरण (i) से}]$$

$$x^3 = -1$$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 + x^0 = 0$$

(घातों में 3 का अन्तर है, तो योगफल शून्य होगा)

Ex. 63 यदि $x + \frac{1}{x} = 1$, तब

$$(i) x^9 + \frac{1}{x^9} = (x^3)^3 + \frac{1}{(x^3)^3} = (-1)^3 + \frac{1}{(-1)^3} = -1 - 1 = -2$$

$$(ii) x^{12} + \frac{1}{x^{12}} = (x^3)^4 + \frac{1}{(x^3)^4} = (-1)^4 + \frac{1}{(-1)^4} = 1 + 1 = 2$$

$$(iii) x^{23} + \frac{1}{x^{23}} = \frac{x^{24}}{x} + \frac{x}{x^{24}} = \frac{(x^3)^8}{x} + \frac{x}{(x^3)^8} = \frac{(-1)^8}{x} + \frac{x}{(-1)^8} = \frac{1}{x} + x = 1 \text{ (दिया है)}$$

$$(iv) x^{10} + \frac{1}{x^{10}} = x \cdot x^9 + \frac{1}{x \cdot x^9} = x \cdot (x^3)^3 + \frac{1}{x \cdot (x^3)^3} = x(-1)^3 + \frac{1}{x(-1)^3} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -1 \text{ (दिया है)}$$

Ex. 64 यदि $x + \frac{1}{x} = 1$, तब

$$(a) x^{103} + x^{100} + x^{90} + x^{87} + x^{50} + x^{47} + x^9 + x^6 + x^3 + 3$$

$$= \overset{3}{x^{103}} + \overset{3}{x^{100}} + \overset{3}{x^{90}} + \overset{3}{x^{87}} + \overset{3}{x^{50}} + \overset{3}{x^{47}} + x^9 + x^6 + x^3 + 3 = 0 + 0 + 0 + 0 + (-1) + 3 = 2$$

$$(b) x^{82} + x^{68} + x^{55} + x^{35} + x^{30} + x^{27} + x^{21} + x^3 + 2$$

$$= x \cdot (x^3)^{27} + \frac{(x^3)^{23}}{x} + x \cdot (x^3)^{18} + \frac{x^{36}}{x} + 0 + (x^3)^7 + (-1) + 2$$

$$= -x - \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x} - 1 - 1 + 2 = 0$$

(D). दिया है: $x + \frac{1}{x} = -1$

निष्कर्ष: $x^3 = 1$

Ex. 65 यदि $a + \frac{1}{a} = -1$ है, तब $a^3 + 3$ का मान क्या होगा?

$$\text{Sol}^n. \Rightarrow a^3 + 3 \\ = 1 + 3 \Rightarrow 4$$

Ex. 66 यदि $x + \frac{1}{x} = -1$, तब

$$(1) \quad x^{12} + \frac{1}{x^{12}} = ? \quad (2) \quad x^{27} + \frac{1}{x^{27}} = ?$$

$$(3) \quad x^{23} + \frac{1}{x^{23}} = ? \quad (4) \quad x^{10} + \frac{1}{x^{10}} = ?$$

$$(5) \quad x^{51} + x^{45} + x^{21} + x^{15} + x^3 + 2 = ?$$

$$\text{Sol}^n. (1) \quad x^{12} + \frac{1}{x^{12}} = (x^3)^4 + \frac{1}{(x^3)^4} = 1 + 1 = 2$$

$$(2) \quad x^{27} + \frac{1}{x^{27}} = (x^3)^9 + \frac{1}{(x^3)^9} = 1 + 1 = 2$$

$$(3) \quad x^{23} + \frac{1}{x^{23}} = \frac{x^{24}}{x} + \frac{x}{x^{24}} = \frac{(x^3)^8}{x} + \frac{x}{(x^3)^8} \\ = \frac{1}{x} + x = -1$$

$$(4) \quad x^{10} + \frac{1}{x^{10}} = x \cdot x^9 + \frac{1}{x \cdot x^9} = x \cdot (x^3)^3 + \frac{1}{x \cdot (x^3)^3} \\ = x + \frac{1}{x} = -1$$

$$(5) \quad x^{51} + x^{45} + x^{21} + x^{15} + x^3 + 2 \\ = (x^3)^{17} + (x^3)^{15} + (x^3)^7 + (x^3)^5 + x^3 + 2 \\ = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7$$

(E). दिया है: $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ या $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$ या

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

निष्कर्ष: (a) $x^6 = -1$

(b) यदि दो पदों की घातों में 6 का अन्तर है तो दोनों पदों का योग शून्य होगा।

$$\text{Ex. 67} \quad x^{18} + x^{12} = 0, x^{20} + x^{14} = 0$$

सिद्ध: दोनों पक्षों का घन करने पर: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow x^6 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^6 + x^0 = 0$$

$$\Rightarrow x^6 = -1$$

Ex. 68 यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ तब,

$$(1) \quad x^{506} + x^{500} + x^{206} + x^{200} + x^{100} + x^{94} + x^{50} + x^{44} + \\ x^{18} + x^{12} + x^6 + 3$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + (-1) + 3 = 2$$

$$(2) \quad x^{67} + x^{53} + x^{43} + x^{29} + x^{24} + x^{18} + x^6 + 3$$

$$= x \cdot x^{66} + \frac{x^{54}}{x} + x \cdot x^{42} + \frac{x^{30}}{x} + 0 + x^6 + 3$$

$$= x \cdot (x^6)^{11} + \frac{(x^6)^9}{x} + x \cdot (x^6)^7 + \frac{(x^6)^5}{x} - 1 + 3$$

$$= -x - \frac{1}{x} - x - \frac{1}{x} + 2$$

$$= -\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 2$$

$$= -\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2 = 2(1 - \sqrt{3})$$

$$(3) \quad x^{54} + x^{30} + x^{18} + x^6 + 4$$

$$= (x^6)^9 + (x^6)^5 + (x^6)^3 - 1 + 4$$

$$= -1 - 1 - 1 - 1 + 4 = 0$$

Ex. 69 यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$, तब

$$(1) \quad x^{102} + \frac{1}{x^{102}} = (x^6)^{17} + \frac{1}{(x^6)^{17}} = -1 - 1 = -2$$

$$(2) \quad x^{48} + \frac{1}{x^{48}} = (x^6)^8 + \frac{1}{(x^6)^8} = 1 + 1 = 2$$

$$(3) \quad x^{17} + \frac{1}{x^{17}} = \frac{x^{18}}{x} + \frac{x}{x^{18}} = \frac{(x^6)^3}{x} + \frac{x}{(x^6)^3} \\ = \frac{-1}{x} - x = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\sqrt{3}$$

$$(4) \quad x^{25} + \frac{1}{x^{25}} = x \cdot x^{24} + \frac{1}{x \cdot x^{24}} \\ = x \cdot (x^6)^4 + \frac{1}{x \cdot (x^6)^4} = x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$$

$$(5) \quad x^{26} + \frac{1}{x^{26}} = x^2 \cdot x^{24} + \frac{1}{x^2 \cdot x^{24}} \\ = x^2 \cdot (x^6)^4 + \frac{1}{x^2 \cdot (x^6)^4} = x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$(6) \quad x^{117} + \frac{1}{x^{117}} = x^3 \cdot x^{114} + \frac{1}{x^3 \cdot x^{114}} \\ = x^3 \cdot (x^6)^{19} + \frac{1}{x^3 \cdot (x^6)^{19}} = -x^3 - \frac{1}{x^3} \\ = -\left[\frac{x^6 + 1}{x^3}\right] = -\left[\frac{-1 + 1}{x^3}\right] = 0 \\ \text{या} \\ = \frac{x^{234} + 1}{x^{117}} = \frac{(x^6)^{39} + 1}{x^{117}} = \frac{-1 + 1}{x^{117}} = 0$$

(F) दिया है: $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$

निष्कर्ष: (a) $x^6 = -1$

(b) यदि दो पदों की घातों का अन्तर 6 है तो दोनों पदों का योग शून्य होगा।

eg. $x^{18} + x^{12} = 0, x^{20} + x^{14} = 0$

Ex. 70 यदि $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$, तब

$$(1) \quad x^{17} + \frac{1}{x^{17}} = \frac{x^{18}}{x} + \frac{x}{x^{18}} = \frac{(x^6)^3}{x} + \frac{x}{(x^6)^3} = -\frac{1}{x} - x \\ = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{3}$$

$$(2) \quad x^{25} + \frac{1}{x^{25}} = x \cdot x^{24} + \frac{1}{x \cdot x^{24}} = x \cdot (x^6)^4 + \frac{1}{x \cdot (x^6)^4} \\ = x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$$

(G) दिया है: $x + \frac{1}{x} = a$

(तो x की न्यूनतम घात पृष्टी जायेगी।)

Ex. 71 यदि $x + \frac{1}{x} = 3$, है तब—

$$(1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$$

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad (\text{दोनों पक्षों का वर्ग करने पर})$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (3)^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 9$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$(2) \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = ?$$

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad (\text{दोनों पक्षों का घन करने पर})$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (3)^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3) = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

$$(3) \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \quad (\text{दोनों पक्षों का वर्ग करने पर})$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = (7)^2 - 2 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$$

$$(4) \quad x^5 + \frac{1}{x^5} = ?$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 7 \times 18$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x^5} = 126$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 126 - \left(\frac{1}{x} + x\right) = 126 - 3$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$$

$$(5) \quad x^6 + \frac{1}{x^6} = ?$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18 \quad (\text{दोनों पक्षों का वर्ग करने पर})$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = (18)^2 - 2 = 324 - 2$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 322$$

Ex. 72 यदि $\frac{x^2-1}{x} = \sqrt{5}$ और x एक धनात्मक संख्या है,

तब $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ के दोनों पक्षों में वर्ग करने पर

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

अतः $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9$ (दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर)

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = 7 \times 3 = 21$$

Ex. 73 यदि $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$ तो $x^3 - \frac{1}{x^3} = ?$

Solⁿ. $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 324$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 324 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 16 \text{ (के दोनों पक्षों में से 2 घटाने पर)}$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 16 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 4$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = 64 \text{ (के दोनों पक्षों का घन करने पर)}$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 64$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3(4) = 64$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = 64 + 12 = 76$$

Ex. 74(A) यदि $(x-a)(x-b)=1$ और $a-b+5=0$ है, तब

$$(x-a)^3 - \frac{1}{(x-a)^3} = ?$$

- (a) 125
(c) 0

- (b) -125
(d) 140

Solⁿ. (d) $(x-a)(x-b)=1 \Rightarrow (x-b) = \frac{1}{(x-a)}$

$$(x-a-5) = \frac{1}{(x-a)} \quad (\because a+5=b)$$

$$(x-a) - \frac{1}{(x-a)} = 5 \text{ (दोनों पक्षों का घन करने पर)}$$

$$(x-a)^3 - \frac{1}{(x-a)^3} - 3(5) = 125$$

$$(x-a)^3 - \frac{1}{(x-a)^3} = 140$$

विधि:-2 प्रश्न व उत्तर दोनों ही 'b' पर निर्भर नहीं है अतः $b=0$ रख सकते हैं अब प्रश्न होंगे $(x-a)(x)=1$ व $a+5=0$

$$\text{तो } (x-a)^3 - \frac{1}{(x-a)^3} = ?$$

Solⁿ. $(x-a)(x)=1 \Rightarrow (x-a) = \frac{1}{x} \Rightarrow 5 = \frac{1}{x} - x$

$$\Rightarrow (x-a)^3 - \frac{1}{(x-a)^3}$$

$$= \frac{1}{x^3} - x^3 = \left(\frac{1}{x} - x\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - x\right)$$

$$= (5)^3 + 3(5)$$

$$= 140$$

Ex. 74(B) यदि $x^2 + x = 5$ है, तब $(x+3)^3 + \frac{1}{(x+3)^3} = ?$

Solⁿ. दोनों पक्षों में $(2x+1)$ जोड़ने पर

$$x^2 + x + 2x + 1 = 5 + 2x + 1$$

$$x^2 + 3x + 1 = 6 + 2x$$

$$x(x+3) + 1 = 2(x+3)$$

दोनों पक्षों को $(x+3)$ से भाग देने पर

$$x + \frac{1}{x+3} = 2 \text{ (दोनों पक्षों में 3 जोड़ने पर)}$$

$$(x+3) + \frac{1}{(x+3)} = 2 + 3 = 5$$

दोनों पक्षों का घन करने पर

$$(x+3)^3 + \frac{1}{(x+3)^3} + 3 \cdot (5) = 5^3$$

$$(x+3)^3 + \frac{1}{(x+3)^3} = 125 - 15 = 110$$

Type - 3

सोचिए यदि $x+y=0$ तो x या y ऋणात्मक होने चाहिए लेकिन यदि $x^2+y^2=0$ तो दोनों x व y शून्य होंगे क्योंकि न तो x और ना ही y ऋणात्मक हो सकता है।

इसलिए यदि ,

दिया है : $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ तो

निष्कर्ष : $x = y = z = 0$

या

दिया है : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$ तब

निष्कर्ष : $x = a, y = b$ व $z = c$

Ex. 75 यदि $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ तो $x + y = ?$

Solⁿ. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$

$$\begin{array}{cc} \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$x = 1 \quad y = 2$$

$$\Rightarrow x + y = 1 + 2 = 3$$

Ex. 76 यदि $(a-2)^2 + (b-3)^2 + (c-11)^2 = 0$ है, तब

$$\sqrt{a+b+c} = ?$$

- | | |
|---------------|---------|
| (i) 4 | (ii) -4 |
| (iii) ± 4 | (iv) 16 |

Solⁿ. $(a-2)^2 + (b-3)^2 + (c-11)^2 = 0$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$a = 2 \quad b = 3 \quad c = 11$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b+c} = \sqrt{2+3+11} = \sqrt{16} = 4$$

Ex. 77 यदि $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a-b+c) - 3$ है, तब $a - b + c = ?$

Solⁿ. $a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 2b - 2c + 3 = 0$

$$(a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = 0$$

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-1)^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$a = 1 \quad b = -1 \quad c = 1$$

$$\Rightarrow a - b + c = 1 + 1 + 1 = 3$$

Ex. 78 यदि $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a + 2b - 2c) - 9$ है, तब $a + b + c = ?$

Solⁿ. $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b + 4c + 9 = 0$

$$(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 4b + 4) + (c^2 + 4c + 4) = 0$$

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c+2)^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -2$$

$$\Rightarrow a + b + c = 1 + 2 - 2 = 1$$

Ex. 79 यदि $5x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 1 = 0$ है, तब x, y का मान क्या होगा?

Solⁿ. $(x^2 + 2x + 1) + (4x^2 + 4xy + y^2) = 0$

$$(x+1)^2 + (2x+y)^2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$x = -1 \quad 2x = -y \quad \text{या} \quad y = -2x$$

$$y = -2(-1) = 2$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad \text{या} \quad y = 2$$

Ex. 80 यदि $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 5 = 0$ है, तब $x^{12} + y + z^{30}$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + z^2 = 0$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ (x+1)^2 & + & (y+2)^2 & + & z^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x = -1 \quad y = -2 \quad z = 0$$

$$\Rightarrow x^{12} + y + z^{30} = (-1)^{12} - 2 + 0 = 1 - 2 = -1$$

Ex. 81 यदि $(x+y-z-1)^2 + (z+x-y-2)^2 + (z+y-x-4)^2 = 0$ है, तब $x+y+z$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $(x+y-z-1)^2 + (z+x-y-2)^2 + (z+y-x-4)^2 = 0$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x+y-z=1 \quad z+x-y=2 \quad z+y-x=4$$

तीनों समीकरणों को जोड़ने पर

$$x+y-z+z+x-y+z+y-x=1+2+4$$

$$\Rightarrow x+y+z=7$$

Type - 4

(A) सूत्र: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

Ex. 82 यदि $a = 297, b = 298, c = 299$ है, तब $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ का मान क्या होगा?

$$\text{Sol}^n. a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2] = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

(B) दिया है: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

निष्कर्ष: $a = b = c$

सिद्ध: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$$\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\frac{1}{2}[(a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca)] = 0$$

$$\Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow$$

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$$

$$[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow$$

$$0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$$

$$a = b \quad b = c \quad c = a$$

$$a = b = c$$

Ex. 83 यदि $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ है, तब $\frac{a+c}{b} = ?$

Solⁿ. यदि $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$$a = b = c$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b} = \frac{a+a}{a} = \frac{2a}{a} = 2$$

Ex. 84 यदि $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ है, तब

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = ?$$

Solⁿ. $a = b = c$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 2 + 2 + 2 = 6$$

(2) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = ?$

Solⁿ. $= \frac{a}{a+a} + \frac{a}{a+a} + \frac{a}{a+a}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(3) $\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) = ?$

Solⁿ. $= 6 \times \frac{3}{2} = 9$

(C). दिया है: $a + b + c = 0$

निष्कर्ष: $a + b = -c, b + c = -a$ & $c + a = -b$

Ex. 85 यदि $a + b + c = 0$, तब $\frac{a+b}{c} = ?$

Solⁿ. $\therefore a + b = -c$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{-c}{c} = -1$$

Ex. 86 यदि $a + b + c = 0$ है, तब

(a). $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = ?$

Solⁿ. $\frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b}$
 $= -1 - 1 - 1 = -3$

(b). $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = ?$

Solⁿ. $\frac{a}{-a} + \frac{b}{-b} + \frac{c}{-c}$
 $= -1 - 1 - 1 = -3$

(c). $\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) = ?$

Solⁿ. $-3 \times -3 = 9$

Type - 5

(A) सूत्र: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
 $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
 $= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

Ex. 87 यदि $a = b = 333$, $c = 334$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$
 $= \frac{1}{2}(333 + 333 + 334)[(0)^2 + (-1)^2 + (1)^2]$
 $= \frac{1}{2} \times 1000 \times 2 = 1000$

Ex. 88 यदि $a = 20$, $b = 25$, $c = 15$ है, तब

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} = ?$$

Solⁿ. $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$
 $= \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$
 $= (a + b + c) = 20 + 25 + 15 = 60$

Ex. 89 यदि $a = 25$, $b = 15$, $c = -10$ है, तब

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2} \text{ का मान क्या होगा?}$$

Solⁿ. $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}$
 $= \frac{\frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}$
 $= \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(25 + 15 - 10)$
 $= 15$

(B)

(1) यदि $a + b + c = 0$ तब, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
 या $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

(2) यदि $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ तो दो स्थितियाँ संभव हैं।

(a) $a + b + c = 0$

(b) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \Rightarrow a = b = c$

Ex. 90 यदि $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ और a, b, c एक धनात्मक संख्या है तब निम्न से कौन सा विकल्प सही है?

(a) $a + b + c = 0$

(b) $a = b = c$

Solⁿ. $a = b = c$ ($\because$ धनात्मक संख्याओं का योगफल शून्य नहीं हो सकती)

Ex. 91 यदि $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ और a, b, c एक भिन्न संख्याएं हैं, तो निम्न में से कौन सा सत्य है?

(a) $a + b + c = 0$

(b) $a = b = c$

Solⁿ. $a + b + c = 0$ ($\because$ भिन्न संख्याएं समान नहीं हो सकती)

Ex. 92 यदि $a + b + c = 0$ है, तब $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = ?$

Solⁿ. $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$

या

माना मान इस प्रकार है $a + b + c = 0$

$$a = -1, b = -1, c = 2$$

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = \frac{1}{-2} + \frac{1}{-2} + \frac{4}{1} = 3$$

Ex. 93 यदि $a + b + c = 0$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

दोनों पक्षों में $3abc$ जोड़ने पर

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = 3abc + 3abc$$

$$= 6abc$$

Ex. 94 $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = ?$

Solⁿ. $\because (a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$

$$\therefore (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

Ex. 95 $\frac{(x^2-y^2)^3 + (y^2-z^2)^3 + (z^2-x^2)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3} = ?$

(a) $3(x+y)(y+z)(z+x)$

(b) $3(x+y)(y+z)(z-x)$

(c) $(x+y)(y+z)(z+x)$

(d) $9(x+y)(y+z)(z+x)$

Solⁿ. $\because (x^2-y^2) + (y^2-z^2) + (z^2-x^2) = 0$

$$\therefore (x^2-y^2)^3 + (y^2-z^2)^3 + (z^2-x^2)^3 = 3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$$

$$\because (x-y) + (y-z) + (z-x) = 0$$

$$\therefore (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2-y^2)^3 + (y^2-z^2)^3 + (z^2-x^2)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3} = \frac{3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{3(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= \frac{3(x+y)(x-y)(y+z)(y-z)(z+x)(z-x)}{3(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$= (x+y)(y+z)(z+x)$$

Ex. 96. $(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3$ का गुणनखण्ड क्या होगा?

(a) $(a+b)(a-b)$ (b) $(a+b)(a+b)$

(c) $(a-c)(a-c)$ (d) $(b-c)(b-c)$

Solⁿ. $\because (a^2-b^2) + (b^2-c^2) + (c^2-a^2) = 0$

$$\therefore (a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3 = 3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$$

$$= 3(a-b)(a+b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)$$

$$\therefore (a+b)(a-b) \text{ एक गुणनखण्ड है।}$$

Ex. 97 यदि $x+y+z=2s$ है, तब $(s-x)^3 + (s-y)^3 + 3(s-x)(s-y)z$ का मान क्या होगा?

(a) z^3 (b) $-z^3$
(c) 0 (d) $2z^3$

Solⁿ. $0 = (s-x) + (s-y) + (-z)$

$$[\because a+b+c=0 \text{ तब } a^3+b^3+c^3-3abc=0]$$

$$(s-x)^3 + (s-y)^3 + (-z)^3 - 3(s-x)(s-y)(-z) = 0$$

$$(s-x)^3 + (s-y)^3 - z^3 + 3(s-x)(s-y)z = 0$$

$$(s-x)^3 + (s-y)^3 + 3(s-x)(s-y)z = z^3$$

विधि-2 उत्तर 's' पर निर्भर नहीं है तो हम $s=0$ रख सकते हैं

अब प्रश्न होगा यदि $x+y+z=0$ तो $(-x)^3 + (-y)^3 + 3(-x)(-y)z = -x^3 - y^3 + 3xyz = ?$

$$\because x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz=0$$

$$\Rightarrow z^3 = -x^3 - y^3 + 3xyz$$

Ex. 98 यदि $a=1.21, b=2.23$ और $c=3.44$ है, तब $a^3+b^3-c^3+3abc$ का मान क्या होगा?

(a) $6ab$ (b) $6abc$
(c) 1 (d) 0

Solⁿ. $\because a+b+(-c)=0$ तब $a^3+b^3+(-c)^3-3ab(-c)=0$

$$\Rightarrow a^3+b^3-c^3+3abc=0$$

Ex. 99 यदि $a=5.431, b=2.121$ और $c=-7.552$ है, तब $a^3+b^3+c^3+3abc$ का मान क्या होगा?

Solⁿ. $\because a+b+c=0$ तब $a^3+b^3+c^3=3abc$

दोनों पक्षों में $3abc$ जोड़ने पर

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+3abc=3abc+3abc=6abc$$

Ex. 100 यदि $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{1}{c^3}$ है, तो निम्न में से कौन सा सत्य है?

(a) $a^3+b^3+c^3=3abc$

(b) $a+b+c=3abc$

(c) $(a+b-c)^3+27abc=0$

(d) $(a+b+c)^3+27abc=0$

Solⁿ. $\Rightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{1}{c^3} = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a^3}\right)^3 + \left(\frac{1}{b^3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{c^3}\right)^3 = 3\left(\frac{1}{a^3}\right)\left(\frac{1}{b^3}\right)\left(-\frac{1}{c^3}\right)$$

$$a+b-c = 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}(-c)^{\frac{1}{3}} \text{ (दोनों पक्षों का घन करने पर)}$$

$$\Rightarrow (a+b-c)^3 = -27abc$$

$$\Rightarrow (a+b-c)^3 + 27abc = 0$$

Ex. 101 यदि $a^2 + b^2 = c^2$ है, तब $\frac{a^6 + b^6 - c^6}{a^2 b^2 c^2} = ?$

Solⁿ. हम जानते हैं कि $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ यदि $a + b + c = 0$

$$\therefore a^2 + b^2 + (-c^2) = 0$$

$$\therefore (a^2)^3 + (b^2)^3 + (-c^2)^3 = 3a^2 b^2 (-c^2)$$

$$a^6 + b^6 - c^6 = -3a^2 b^2 c^2$$

$$\frac{a^6 + b^6 - c^6}{a^2 b^2 c^2} = \frac{-3a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} = -3$$

द्वितीय विधि : $a = b = 1$ और $c = \sqrt{2}$ का मान रखने पर

$$[\therefore 1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2]$$

$$\Rightarrow \frac{a^6 + b^6 - c^6}{a^2 b^2 c^2} = \frac{(1)^6 + (1)^6 - (\sqrt{2})^6}{(1)^2 (1)^2 (\sqrt{2})^2} = \frac{1+1-8}{2} = -3$$

Type-6

1 जोड़ने और 1 घटाने पर आधारित प्रश्न

Ex. 102 यदि $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$

$$\text{है, तब } \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = ?$$

Solⁿ. प्रत्येक में से 1 घटाने पर

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a} - 1 + \frac{1}{1+b} - 1 + \frac{1}{1+c} - 1 = 1 - 1 - 1 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{1+a} + \frac{-b}{1+b} + \frac{-c}{1+c} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = 2$$

द्वितीय विधि :

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1 \quad \dots(i)$$

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = t \text{ (माना)} \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$$\Rightarrow \frac{1+a}{1+a} + \frac{1+b}{1+b} + \frac{1+c}{1+c} = 1+t$$

$$1+1+1 = 1+t$$

$$\therefore = 2$$

Ex. 103 यदि $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{1009}{z+1009} = 1$

$$\text{है, तब } \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+1009} = ?$$

Solⁿ. प्रत्येक में से 1 घटाने पर

$$\frac{1}{x+1} - 1 + \frac{2}{y+2} - 1 + \frac{1009}{z+1009} - 1 = 1 - 1 - 1 - 1$$

$$\frac{-x}{x+1} + \frac{-y}{y+2} + \frac{-z}{z+1009} = -2$$

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+1009} = 2$$

Ex. 104 यदि $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{y-b} + \frac{c}{z-c} = 2$

$$\text{है, तब } \frac{x}{x-a} + \frac{y}{y-b} + \frac{z}{z-c} = ?$$

Solⁿ. प्रत्येक में 1 जोड़ने पर

$$\frac{a}{x-a} + 1 + \frac{b}{y-b} + 1 + \frac{c}{z-c} + 1 = 2 + 1 + 1 + 1$$

$$\frac{x}{x-a} + \frac{y}{y-b} + \frac{z}{z-c} = 5$$

Ex. 105 यदि $\frac{a}{x-1} + \frac{4b}{y-2b} + \frac{9c}{z-3c} = 6-a$

$$\text{है, तब } \frac{ax}{x-1} + \frac{2y}{y-2b} + \frac{3z}{z-3c} = ?$$

Solⁿ. $\frac{a}{x-1} + a + \frac{4b}{y-2b} + 2 + \frac{9c}{z-3c} + 3 = 6 - a + a + 2 + 3$

$$\frac{ax}{x-a} + \frac{2y}{y-2b} + \frac{3z}{z-3c} = 11$$

Ex. 106 यदि $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$

$$\text{है, तब } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \text{ का मान क्या होगा?}$$

Solⁿ. दोनों पक्षों में $(a + b + c)$ गुणा करने पर

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(a+b+c)}{c+a} + \frac{c(a+b+c)}{a+b} = a+b+c$$

$$\frac{a^2+a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2+b(c+a)}{c+a} + \frac{c^2+c(a+b)}{a+b} = a+b+c$$

$$\frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c = a+b+c$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

विधि:-2 हम रख सकते हैं $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{1}{3}$ तब

$$3a = b+c, 3b = c+a \text{ \& } 3c = a+b$$

$$\text{तीनों सम्बन्धों को जोड़ने पर} \Rightarrow a+b+c=0$$

$$\text{इसका मतलब } b+c=-a, c+a=-b \text{ व } a+b=-c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = a \left(\frac{a}{b+c} \right) + b \left(\frac{b}{c+a} \right) + c \left(\frac{c}{a+b} \right)$$

$$= -a - b - c = 0$$

Ex.107 यदि $\frac{a^2-bc}{a^2+bc} + \frac{b^2-ac}{b^2+ac} + \frac{c^2-ab}{c^2+ab} = 1$ तब

$$\frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ac} + \frac{c^2}{c^2+ab} = ?$$

Solⁿ. प्रत्येक पद में 1 जोड़ने पर

$$\left(\frac{a^2-bc}{a^2+bc} + 1 \right) + \left(\frac{b^2-ac}{b^2+ac} + 1 \right) + \left(\frac{c^2-ab}{c^2+ab} + 1 \right) = 1+1+1+1$$

$$\left(\frac{2a^2}{a^2+bc} \right) + \left(\frac{2b^2}{b^2+ac} \right) + \left(\frac{2c^2}{c^2+ab} \right) = 4$$

$$\frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ac} + \frac{c^2}{c^2+ab} = 2$$

Type-7

(समिति में अधिकतम स्थितियों में उत्तर = 1)

Ex.108 दिया है,

$$a^2 = b+c, b^2 = c+a \text{ \& } c^2 = a+b$$

$$\text{या } \frac{a^2}{b+c} = \frac{b^2}{c+a} = \frac{c^2}{a+b} = 1$$

$$\text{तब (1). } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = ?$$

$$\text{Sol}^n. \frac{a^2}{b+c} = 1 \dots (i)$$

$$b^2 = c+a \dots (ii)$$

$$c^2 = a+b \dots (iii)$$

a, b और c क्रमशः तीनों समीकरणों के दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$a+a^2 = (b+c) + a = k \text{ (माना)}$$

$$b+b^2 = (c+a) + b = k \text{ (माना)}$$

$$c+c^2 = (a+b) + c = k \text{ (माना)}$$

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{a}{a(1+a)} + \frac{b}{b(1+b)} + \frac{c}{c(1+c)}$$

$$= \frac{a}{a+a^2} + \frac{b}{b+b^2} + \frac{c}{c+c^2}$$

$$= \frac{a}{k} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k} = \frac{a+b+c}{k} = \frac{k}{k} = 1$$

द्वितीय विधि:-

$$\text{मान } a=b=c=2 \text{ को जाँच } a^2=b+c, b^2=c+a$$

$$\text{व } c^2=a+b \text{ में करने पर, ये मान ऊपर दिये गये समी.}$$

$$\text{को संतुष्ट करते हैं इसलिए प्रश्न में रखने पर}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$(2) \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = ?$$

Solⁿ. $a=b=c=2$ का मान रखने पर

$$\Rightarrow \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = \frac{2}{1+2} + \frac{2}{1+2} + \frac{2}{1+2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Ex. 109 यदि $\frac{x^2}{by+cz} = \frac{y^2}{ax+cz} = \frac{z^2}{ax+by} = 1$ है, तब

$$(1) \frac{a}{x+a} + \frac{b}{y+b} + \frac{c}{z+c} = ?$$

$$(2) \frac{x}{x+a} + \frac{y}{y+b} + \frac{z}{z+c} = ?$$

Solⁿ. (1). $x^2 = by + cz$... (i)
 $y^2 = ax + cz$... (ii)
 $z^2 = ax + by$... (iii)

ax, by और cz क्रमशः तीनों समीकरणों के दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$ax + x^2 = (by + cz) + ax = k \text{ (माना)}$$

$$by + y^2 = (ax + cz) + by = k \text{ (माना)}$$

$$cz + z^2 = (ax + by) + cz = k \text{ (माना)}$$

$$\frac{a}{x+a} + \frac{b}{y+b} + \frac{c}{z+c}$$

$$= \frac{ax}{x(x+a)} + \frac{by}{y(y+b)} + \frac{cz}{z(z+c)}$$

$$= \frac{ax}{ax+x^2} + \frac{by}{by+y^2} + \frac{cz}{cz+z^2}$$

$$= \frac{ax}{k} + \frac{by}{k} + \frac{cz}{k}$$

$$= \frac{ax+by+cz}{k} = \frac{k}{k} = 1$$

द्वितीय विधि: $x=y=z=2$ और $a=b=c=1$, समीकरण

$x^2 = by + cz$, $y^2 = ax + cz$ और $z^2 = ax + by$ में जाँच करने पर, ये मान समी. को संतुष्ट करते हैं अतः हम प्रश्न में रख सकते हैं

$x=y=z=2$ और $a=b=c=1$ का मान रखने पर

$$\Rightarrow \frac{a}{x+a} + \frac{b}{y+b} + \frac{c}{z+c}$$

$$= \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$(2) \Rightarrow \frac{x}{x+a} + \frac{y}{y+b} + \frac{z}{z+c}$$

$$= \frac{2}{2+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Ex. 110 यदि $\frac{x^2}{by+cz} = \frac{y^2}{ax+cz} = \frac{z^2}{ax+by} = 2$

$$(1) \frac{a}{x+2a} + \frac{b}{y+2b} + \frac{c}{z+2c} = ?$$

$$(2) \frac{x}{x+2a} + \frac{y}{y+2b} + \frac{z}{z+2c} = ?$$

Solⁿ. 1 $x^2 = 2by + 2cz$... (i)

$$y^2 = 2ax + 2cz$$
 ... (ii)

$$z^2 = 2ax + 2by$$
 ... (iii)

2ax, 2by और 2cz क्रमशः तीनों समीकरणों के दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$2ax + x^2 = (2by + 2cz) + 2ax = k \text{ (माना)}$$

$$2by + y^2 = (2ax + 2cz) + 2by = k \text{ (माना)}$$

$$2cz + z^2 = (2ax + 2by) + 2cz = k \text{ (माना)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x+2a} + \frac{b}{y+2b} + \frac{c}{z+2c}$$

$$= \frac{ax}{x(x+2a)} + \frac{by}{y(y+2b)} + \frac{cz}{z(z+2c)}$$

$$= \frac{ax}{2ax+x^2} + \frac{by}{2by+y^2} + \frac{cz}{2cz+z^2}$$

$$= \frac{ax}{k} + \frac{by}{k} + \frac{cz}{k} \quad \therefore \begin{pmatrix} 2ax + 2by + 2cz = k \\ ax + by + cz = k/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ax+by+cz}{k} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

द्वितीय विधि :

मान $x=y=z=4$ और $a=b=c=1$, समीकरण $x^2 = 2by + 2cz$, $y^2 = 2ax + 2cz$ व $z^2 = 2ax + 2by$

में जाँच करने पर, ये मान समी. को संतुष्ट करते हैं,
अतः प्रश्न में मानों को रखने पर

$x = y = z = 4$ और $a = b = c = 1$ का मान रखने पर

$$\Rightarrow \frac{a}{x+2a} + \frac{b}{y+2b} + \frac{c}{z+2c}$$

$$= \frac{1}{4+2(1)} + \frac{1}{4+2(1)} + \frac{1}{4+2(1)}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(2). $\frac{x}{x+2a} + \frac{y}{y+2b} + \frac{z}{z+2c}$

$$= \frac{4}{4+2(1)} + \frac{4}{4+2(1)} + \frac{4}{4+2(1)}$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{4}{6} + \frac{4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Ex III. यदि $xy + yz + zx = 1$

है, तब $\frac{x+y}{1-xy} + \frac{y+z}{1-yz} + \frac{z+x}{1-zx}$ का मान क्या होगा?

(a) $x + y + z$ (b) xyz

(c) 1 (d) $\frac{1}{xyz}$

Solⁿ. $\frac{x+y}{1-xy} + \frac{y+z}{1-yz} + \frac{z+x}{1-zx}$

$$= \frac{x+y}{yz+zx} + \frac{y+z}{xy+zx} + \frac{z+x}{xy+yz}$$

$$= \frac{(x+y)}{z(x+y)} + \frac{(y+z)}{x(y+z)} + \frac{(z+x)}{y(x+z)}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{xyz}$$

Type-8

(इस प्रकार के प्रश्न का उत्तर = 2 होता है)

Ex. 112 $x = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ है, तब $\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}} + \frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}} = ?$

Solⁿ. $x = \frac{\sqrt{240}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{20}\sqrt{12}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$$\frac{x}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

योगान्तरानुपात नियम लागू करने पर

$$\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \quad \dots(i)$$

$$\frac{x}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

योगान्तरानुपात नियम लागू करने पर

$$\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$$\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}} + \frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})} = 2$$

Type - 9

यदि $xy = 1$ है, तब $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}$ का मान 1 होगा

$$\begin{aligned} \text{सिद्ध: } \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} &= \frac{1+y+1+x}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{x+y+2}{x+y+xy+1} = \frac{x+y+2}{x+y+2} = 1 \end{aligned}$$

Ex. 113 यदि $x = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ है, तब

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}$$

(i) 0

(ii) 1

(iii) 2

(iv) -1

Solⁿ. यहाँ $xy = 1$ तो $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1$

$$\left(\because xy = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{3-2} = 1 \right)$$

Ex. 114. यदि $x = \frac{\sqrt{87}-\sqrt{71}}{\sqrt{55}+\sqrt{39}}$ और $y = \frac{\sqrt{87}+\sqrt{71}}{\sqrt{55}-\sqrt{39}}$ है,

$$\text{तब } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = ?$$

Solⁿ. यहाँ $xy = 1$ तब $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1$

$$\left(\because xy = \frac{\sqrt{87}-\sqrt{71}}{\sqrt{55}+\sqrt{39}} \cdot \frac{\sqrt{87}+\sqrt{71}}{\sqrt{55}-\sqrt{39}} = \frac{87-71}{55-39} = 1 \right)$$

वीजगणितीय फलनों का अधिकतम एवं न्यूनतम मान

फलन	अधिकतम मान	न्यूनतम मान
x	∞	$-\infty$
x^2	∞	$\boxed{0}$
$-x$	∞	$-\infty$
$-x^2$	$\boxed{0}$	$-\infty$

$\Rightarrow$ जब x^2 का गुणांक धनात्मक है, तो वह न्यूनतम मान ही पूछेगा (अधिकतम मान अनन्त) या अपरिमित होगा)

$\Rightarrow$ जब x^2 का गुणांक ऋणात्मक है, तो वह अधिकतम मान ही पूछेगा (न्यूनतम मान -ve अपरिमित होगा।

नोट-1 यदि व्यंजक $10+X^2$ के रूप में है, तो न्यूनतम मान 10 होगा जब $X=0$.

नोट-2 यदि व्यंजक $10-X^2$ के रूप में है, तो अधिकतम मान 10 होगा जब $X=0$.

Ex. 115 $12+(x-2)^2$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

Solⁿ. जब $x-2=0 \Rightarrow x=2$ हो, तब इसका न्यूनतम मान 12 होगा।

Ex. 116 $15-(x-3)^2$ का अधिकतम मान क्या होगा?

Solⁿ. जब $x-3=0 \Rightarrow x=3$ हो, तब इसका अधिकतम मान 15 होगा।

Ex. 117 यदि $5-(3a-2b)^2$ का मान अधिकतम होगा, जब

$$\frac{a}{b} = ?$$

Solⁿ. व्यंजक $5-(3a-2b)^2$ का मान अधिकतम होगा जब $\Rightarrow 3a-2b=0$

$$\Rightarrow 3a=2b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

नोट: प्रश्न $x^2-6x+19$ के रूप में पूछा जायेगा

Solⁿ. $x^2-6x+19$

$$= 10+x^2+9-6x = 10+(x-3)^2$$

$$\text{न्यूनतम मान} = 10 \text{ जब } x-3=0 \Rightarrow x=3$$

लेकिन इस प्रकार के प्रश्नों में पूर्ण वर्ग बनाते समय हम परेशानी महसूस करते हैं। इसलिए हम अवकलन का तरीका प्रयोग कर सकते हैं। लेकिन इस प्रकार न सोचें कि यह तरीका आसान है इसके लिए तीन तथ्यों का ध्यान रखें।

चरण 1-दिये गये समीकरण का अवकलन करें

अवकलन (i) x^2 का $2x$

(ii) x का 1

(iii) अचर का शून्य

चरण 2- अवकलन को शून्य के बराबर रखें तथा x का मान ज्ञात करें।

चरण 3- x का मान वास्तविक समीकरण में रखकर न्यूनतम व अधिकतम मान ज्ञात करें।

नोट: द्विघात समीकरण में यह सोचने की आवश्यकता नहीं है कि मान अधिकतम है या न्यूनतम। यदि x का गुणांक धनात्मक है तो न्यूनतम मान पूछा जायेगा और x का गुणांक ऋणात्मक है तो अधिकतम मान पूछा जायेगा। अवकलन के तरीके द्वारा अभीष्ट मान ज्ञात किया जा सकता है।

इस तरीके का प्रयोग पिछले प्रश्न में करने पर

$$x^2 - 6x + 19$$

$$\text{अवकलन} = 0$$

$$2x - 6 + 0 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$x = 3$ समीकरण (i) रखने पर

$$\text{न्यूनतम मान} = (3)^2 - 6(3) + 19$$

$$= 9 - 18 + 19 = 10$$

⇒ यदि आप इस तरीके नहीं समझ पाते हैं तो द्विघात समीकरण में दिये गये दो सूत्रों का प्रयोग करके अधिकतम व न्यूनतम मान ज्ञात कर लें।

Ex. 118 $3x^2 - 6x + 11$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

$$\text{Sol}^n. \text{ अवकलन} = 0$$

$$6x - 6 + 0 = 0$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

$3x^2 - 6x + 11$ में $x = 1$ रखने पर

$$\text{न्यूनतम मान} = 3(1)^2 - 6(1) + 11$$

$$= 3 - 6 + 11 = 8$$

Ex. 119 $13 - 4x - x^2$ का अधिकतम मान क्या होगा?

$$\text{Sol}^n. \text{ अवकलन} = 0$$

$$0 - 4 - 2x = 0$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

$x = -2$ in $13 - 4x - x^2$ का मान रखने पर

$$\text{अधिकतम मान} = 13 - 4(-2) - (-2)^2$$

$$= 13 + 8 - 4 = 17$$

Ex. 120 यदि $15 - 7x - 2x^2$ का मान अधिकतम है, जब $x = ?$

$$\text{Sol}^n. \text{ अवकलन} = 0$$

$$0 - 7 - 4x = 0$$

$$4x = -7$$

$$x = -\frac{7}{4}$$

Ex. 121 यदि $4x^2 - 16x + 17$ का मान न्यूनतम है, जब $x = ?$

$$\text{Sol}^n. \text{ अवकलन} = 0$$

$$8x - 16 + 0 = 0$$

$$8x = 16 \Rightarrow x = 2$$

Ex. 122 $(9-x)(2-x)$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

$$\text{Sol}^n. (9-x)(2-x) = 18 - 9x - 2x + x^2$$

$$= x^2 - 11x + 18$$

$$\text{अवकलन} = 0$$

$$2x - 11 + 0 = 0$$

$$2x = 11$$

$$x = \frac{11}{2}$$

$(9-x)(2-x)$ में $x = \frac{11}{2}$ रखने पर

$$\text{न्यूनतम मान} = \left(9 - \frac{11}{2}\right)\left(2 - \frac{11}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{-7}{2}\right) = -\frac{49}{4}$$

Ex. 123 $(6-x)(x+4)$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{Sol}^n. \Rightarrow (6-x)(x+4) = 6x + 24 - x^2 - 4x$$

$$= -x^2 + 2x + 24$$

$$\text{अवकलन} = 0$$

$$-2x + 2 + 0 = 0$$

$$-2x + 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$(6-x)(x+4)$ में $x = 1$ रखने पर

$$\text{अधिकतम मान} = (6-1)(1+4)$$

$$= 5 \times 5 = 25$$

(B) यदि व्यंजक $x^2 + \frac{1}{x^2}$ के रूप में है तो व्यंजक का

न्यूनतम मान कैसे ज्ञात करते हैं $x \in \mathbb{R}$ या $x + \frac{1}{x}$ यदि $x + \text{ve}$ है।

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 + 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$$

$$\text{न्यूनतम मान} = 2, \text{ जब } \left(x - \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

Ex. 124 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 3$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

$$\text{Sol}^n. x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 = 2 - 3 = -1$$

Ex. 125 $x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} - 3$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

$$\text{Sol}^n. x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} - 3 = (x^2 + 1) + \frac{1}{(x^2 + 1)} - 3 - 1$$

$$= (x^2 + 1) + \frac{1}{(x^2 + 1)} - 4$$

$$\text{न्यूनतम मान} = 2 - 4 = -2$$

Ex. 126 यदि $\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = 2 - x^2$, x के कितने मान संभव हैं।

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

Solⁿ. माना $X = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\Rightarrow X + \frac{1}{X} = 2 - x^2$$

$$X + \frac{1}{X} \text{ का न्यूनतम मान} = 2$$

$$\Rightarrow X + \frac{1}{X} \geq 2 \Rightarrow 2 - x^2 \geq 2$$

$$\Rightarrow 0 \geq x^2 \text{ या } x^2 \leq 0$$

यह केवल संभव है, जब $x = 0$

x के लिए केवल 1 मान संभव है।

(C) यदि $x + y$ दिया है, तो $x = y$ पर xy का मान अधिकतम होगा।

eg. $x + y = k$ (दिया है) तो xy का अधिकतम मान $xy = k^2/4$ क्योंकि $x = y = k/2$

सिद्ध: हम लिख सकते हैं

$$\Rightarrow xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

xy का मान अधिकतम होगा जब

$$\text{यदि } \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = y \text{ तो } xy \text{ का अधिकतम मान होगा।}$$

Ex. 127 यदि $x + y = 6$ है, तब xy का अधिकतम मान क्या होगा?

Solⁿ. $x + y = 6 \Rightarrow x = y = 3$

$$xy \text{ का अधिकतम मान} = 3 \times 3 = 9$$

Ex. 128 यदि $a + b + c + d = 1$ तो $ab + bc + cd + da$ का अधिकतम मान होगा।

Solⁿ. $a + b + c + d = 1 \Rightarrow a = b = c = d = \frac{1}{4}$

$$\left(\begin{array}{cccc} ab & + & bc & + & cd & + & da \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a = b & b = c & c = d & d = a \end{array} \right)$$

$ab + bc + cd + da$ का अधिकतम मान

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

Ex. 129 यदि $x + y + z = 21$ तो $(x-2)(y-1)(z+9)$ का अधिकतम मान होगा।

Solⁿ. हमें $(x-2)(y-1)(z+9)$ अतः $(x-2) = (y-1) = (z+9) = k$ का अधिकतम मान ज्ञात करना है। (माना) तो $x = 2 + k$, $y = 1 + k$ और $z = k - 9$, इन मानों को रखने पर

$$x = 2 + k, y = 1 + k \text{ और } z = k - 9 \text{ दिये गये समीकरणों में}$$

$$x + y + z = 21$$

$$2 + k + 1 + k + k - 9 = 21 \Rightarrow 3k = 21 + 9 - 2 - 1$$

$$3k = 27 \Rightarrow k = 9$$

$$\text{अतः अधिकतम मान } (x-2)(y-1)(z+9) = k.k.k = k^3 = (9)^3 = 729$$

द्वितीय विधि : $\because x + y + z = 21$

$$(x-2) + (y-1) + (z+9) = 21 - 2 - 1 + 9 = 27$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$\text{अधिकतम मान } (x-2)(y-1)(z+9) = 9 \times 9 \times 9 = 729$$

(D) यदि xy दिया है, तो $x + y$ न्यूनतम होगा जब $x = y$ (x व y घनात्मक संख्याएँ हैं)

eg. $xy = k$ (दिया है) तो $x + y = 2\sqrt{k}$ का न्यूनतम

मान क्योंकि $x = y = \sqrt{k}$

सिद्ध:

$$xy = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$$

$$x + y = x + \frac{k}{x} = x + \frac{k}{x} - 2\sqrt{k} + 2\sqrt{k}$$

$$= \left(x - \frac{k}{x}\right)^2 + 2\sqrt{k}$$

$$\text{तब न्यूनतम मान} = 2\sqrt{k}$$

$$\text{जब } \left(x - \frac{k}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{x} \Rightarrow x^2 = k$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{k}$$

Ex. 130 यदि $xy = 16$ है, तब $x + y$ न्यूनतम मान क्या होगा?

Solⁿ. $x = y = k$ (माना)

$$xy = 16 \Rightarrow k.k = 16 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$$

$$\text{न्यूनतम मान } x + y = 4 + 4 = 8$$

Ex. 131 यदि $(x-7)(y-10)(z-12) = 1000$ है, तब

$(x+y+z)$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

Solⁿ. $\Rightarrow (x-7) = (y-10) = (z-12) = k$ (माना)

$$\Rightarrow k.k.k = 1000 \Rightarrow k^3 = 1000 \Rightarrow k = 10$$

$$\Rightarrow (x-7) = 10 \Rightarrow x = 17$$

$$\Rightarrow (y-10) = 10 \Rightarrow y = 20$$

$$\Rightarrow (z-12) = 10 \Rightarrow z = 22$$

$$\text{न्यूनतम मान } (x+y+z) = 17 + 20 + 22 = 59$$

प्रश्नावली - (बहुपद और द्विघात समीकरण)

1. यदि $(x-2)$, $(x^2+3qx-2q)$ का गुणनखण्ड है, तब q का मान क्या होगा?
 (a) 2 (b) -2
 (c) -1 (d) 1
2. यदि (x^3+6x^2+4x+k) , $(x+2)$ से पूर्णतः विभाजित है, तब k का मान क्या होगा?
 (a) -6 (b) -7
 (c) -8 (d) -10
3. माना $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ तब $f(x)$ का इनमें से कौन सा गुणनखण्ड नहीं है।
 (a) $x-1$ (b) $x-2$
 (c) $x+3$ (d) $x-3$
4. यदि $(x+t)$, (x^2+px+q) और (x^2+lx+m) दोनों का गुणनखण्ड है, तब ' t ' का मान क्या होगा?
 (a) $m-q$ (b) $l-p$
 (c) $\frac{l-p}{m-q}$ (d) $\frac{m-q}{l-p}$
5. $(x^{29}-x^{25}+x^{13}-1)$ निम्न में से किससे विभाजित होगा?
 (a) $(x-1)$ और $(x+1)$ दोनों से
 (b) $(x-1)$ से, पर $(x+1)$ से नहीं
 (c) $(x+1)$ से, पर $(x-1)$ से नहीं
 (d) न ही $(x-1)$ और न ही $(x+1)$ से
6. k के किस मान के लिए $(x-1)$, (x^3-k) का एक गुणनखण्ड होगा?
 (a) -1 (b) 1
 (c) 8 (d) -8
7. यदि $(x^{100}+2x^{99}+k)$, $(x+1)$ से विभाजित है, तब k का क्या मान होगा?
 (a) 1 (b) -3
 (c) 2 (d) -2
8. यदि (x^3-5x^2+4p) , $(x+2)$ से विभाजित है, तब p का क्या मान होगा?
 (a) 7 (b) -2
 (c) 3 (d) -7
9. यदि $(x-a)$, $(x^3-3x^2a+2a^2x+b)$ का एक गुणनखण्ड है, तब b का मान क्या होगा?
 (a) 0 (b) 2
 (c) 1 (d) 3
10. यदि $(x+6)$ दिये गए समीकरण x^3+3x^2+4x+k का एक हल है तो k का मान ज्ञात करें।
 (a) 66 (b) 33
 (c) 132 (d) 36
11. यदि $(x+2)$ और $(x-1)$, (x^3+10x^2+mx+n) के गुणनखण्ड हैं, तब m और n का मान क्या होगा?
 (a) $m=5, n=-3$ (b) $m=17, n=-8$
 (c) $m=7, n=-18$ (d) $m=23, n=-19$
12. (x^3-6x+7) को $(x+1)$ द्वारा भाग देने पर शेषफल क्या होगा?
 (a) 2 (b) 12
 (c) 0 (d) 7
13. यदि $(x^5-9x^2+12x-14)$ को $(x-3)$ द्वारा भाग देने पर शेषफल क्या होगा?
 (a) 184 (b) 56
 (c) 2 (d) 1
14. $(x^4-3x^3+2x^2-5x+7)$ को $(x-2)$ द्वारा भाग देने पर शेषफल क्या होगा?
 (a) 3 (b) -3
 (c) 2 (d) 0

15. यदि $(5x^3 + 5x^2 - 6x + 9)$ को $(x+3)$ द्वारा भाग देने पर शेषफल क्या होगा?
 (a) 135 (b) -135
 (c) 63 (d) -63
16. यदि $(x^{11} + 1)$ को $(x+1)$ द्वारा भाग देने पर शेषफल क्या होगा?
 (a) 2 (b) 0
 (c) 11 (d) 12
17. यदि $(2x^3 + 5x^2 - 4x - 6)$ को $(2x+1)$ द्वारा भाग देने पर शेषफल क्या होगा?
 (a) $-\frac{13}{2}$ (b) 3
 (c) -3 (d) 6
18. यदि $(x^3 + 5x^2 + 10k)$ को $(x^2 + 2)$ से भाग दिया जाता है तो शेषफल $-2x$ बचता है, तब k का मान क्या होगा?
 (a) -2 (b) -1
 (c) 1 (d) 2
19. $(x^2 - 1 - 2a - a^2)$ का गुणनखण्ड क्या होगा?
 (a) $(x-a+1)(x-a-1)$
 (b) $(x+a-1)(x-a+1)$
 (c) $(x+a+1)(x-a-1)$
 (d) इनमें से कोई नहीं
20. $(x^2 - 8x - 20)$ का गुणनखण्ड क्या होगा?
 (a) $(x+10)(x-2)$ (b) $(x-10)(x+2)$
 (c) $(x-5)(x+4)$ (d) $(x+5)(x-4)$
21. $(x^2 - xy - 72y^2)$ का गुणनखण्ड क्या होगा?
 (a) $(x-8y)(x+9y)$
 (b) $(x-9y)(x+8y)$
 (c) $(x-y)(x+72y)$
 (d) $(x-6y)(x+12y)$
22. $(x^2 - 11xy - 60y^2)$ का गुणनखण्ड क्या होगा?
 (a) $(x+15y)(x-4y)$
 (b) $(x-15y)(x+4y)$
 (c) $(15x+y)(4x-y)$
 (d) इनमें से कोई नहीं
23. $(x^n - a^n)$, $(x-a)$ से विभाजित होगा यदि
 (a) n के सभी मान के लिए
 (b) n के केवल सम मान के लिए
 (c) n के केवल विषम मान के लिए
 (d) n के केवल अभान्य मान के लिए
24. $(x^n - a^n)$, $(x+a)$ से विभाजित होगा यदि
 (a) n के सभी मान के लिए
 (b) n के केवल सम मान के लिए
 (c) n के केवल विषम मान के लिए
 (d) n के केवल अभान्य मान के लिए
25. क्या $(x^n + a^n)$, $(x+a)$ द्वारा विभाजित है?
 (a) n के सभी मान के लिए
 (b) n के केवल सम मान के लिए
 (c) n के केवल विषम मान के लिए
 (d) n के केवल अभान्य मान के लिए
26. k के किस मान के लिए समीकरणों $6x - 2y = 3$ तथा $kx - y = 2$ का एक अद्वितीय हल होगा।
 (a) $k \neq 2$ (b) $k \neq 3$
 (c) $k \neq 5$ (d) $k \neq 4$
27. k के किस मान के लिए समीकरणों $5x + 2y = 3$ तथा $x + ky = -7$ एक असंगत निकाय होगा।
 (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$
 (c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$
28. k के किस मान के लिए समीकरणों $2x + 3y - 5 = 0$ तथा $4x + ky - 10 = 0$ के अनेक हल होंगे?
 (a) $k = 5$ (b) $k = 6$
 (c) $k = 7$ (d) $k = 8$

29. दिये गये रेखीय समीकरणों $4x - 3y = 7$ तथा $7x + 5y = 2$ के हल ज्ञात कीजिए।
 (a) $x = 1, y = 1$ (b) $x = -1, y = 1$
 (c) $x = -1, y = -1$ (d) $x = 1, y = -1$
30. दिये हुए समीकरण $x - y = 0.9$ और $\frac{11}{2(x+y)} = 1$ का हल क्या होगा?
 (a) $x = 3.2, y = 2.3$ (b) $x = 1, y = 0.1$
 (c) $x = 2, y = 1.1$ (d) इनमें से कोई नहीं
31. दिये हुए समीकरण का हल होगा।
 $\frac{3x - y + 1}{3} = \frac{2x + y + 2}{5} = \frac{3x + 2y + 1}{6}$
 (a) $x = 2, y = 1$ (b) $x = 1, y = 1$
 (c) $x = -1, y = -1$ (d) $x = 1, y = 2$
32. समीकरण $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{5}{12}$ तथा $\frac{x}{2} + y = 1$ को हल करने पर $(x + y)$ का मान क्या होगा?
 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$
 (c) 2 (d) $\frac{5}{2}$
33. यदि $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{9}{xy}$ और $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \frac{21}{xy}$, जहाँ $x \neq 0, y \neq 0$ है, तब x और y का मान क्या होगा?
 (a) 0 और 1 (b) 1 और 2
 (c) 2 और 3 (d) 1 और 3
34. दिये गये समीकरणों $x + \frac{1}{y} = 2$ और $2xy - 3y = -2$ के कितने हल होंगे।
 (a) 0 (b) 1
 (c) 2 (d) इनमें से कोई नहीं
35. 6 किताब तथा 4 कलम का मूल्य 34 रु है तथा 5 किताब तथा 5 कलम का मूल्य 30 रु. है, तो 1 किताब व 1 कलम का मूल्य क्रमशः होगा।
 (a) 1 और 5 (b) 5 और 1
 (c) 6 और 1 (d) 1 और 6
36. यदि 3 कुर्सी तथा 2 द्यूब का मूल्य 1200 रु. है तथा 5 कुर्सी व 3 द्यूब का मूल्य 1900 रु. है, तो 2 कुर्सी व 2 द्यूब का मूल्य ज्ञात कीजिए।
 (a) 700 (b) 900
 (c) 1000 (d) 1100
37. यदि $x + 2y \leq 3, x > 0$ और $y > 0$ है, तब इसका हल क्या होगा?
 (a) $x = -1, y = 2$ (b) $x = 2, y = 1$
 (c) $x = 1, y = 1$ (d) $x = 0, y = 0$
38. समीकरण $4^x + 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$, में x का क्या मान होगा?
 (a) 1, 2 (b) 3, 4
 (c) 2, 3 (d) 1, 3
39. समीकरण $(a + b + x)^{-1} = a^{-1} + b^{-1} + x^{-1}$ का मूल क्या होगा?
 (a) a, b (b) $-a, b$
 (c) $a, -b$ (d) $-a, -b$
40. यदि इस समीकरण $lx^2 + nx + n = 0$ के मूलों का अनुपात $p : q$ है, तब $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}}$ का मान क्या होगा?
 (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 0
41. यदि $x = 11$ है, तब $x^5 - 12x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 12x - 1$ का मान क्या होगा?
 (a) 10 (b) 11
 (c) 12 (d) 0
42. यदि $\frac{5x - 7y + 15}{1} = \frac{3x - 2y + 1}{8} = \frac{11x - 6y + 10}{9}$ है, तब $(x + y)$ का मान क्या होगा?
 (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) -3
43. यदि $\frac{2x - 13y + 1}{2} = \frac{x + 4y + 8}{3} = \frac{4x - 7y + 2}{5}$ है, तब $(x + 2y)$ का मान क्या होगा?
 (a) 3 (b) 2
 (c) 7 (d) -2

44. यदि $x = 2t$ और $y = \frac{2t-1}{3}$ है, तब t का मान क्या होगा, जब $x = y$
- (a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{4}$
(c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{2}$
45. यदि $(8x^2 - 15y^2) : xy = 14 : 1$ है, तब $\frac{x}{y}$ का धनात्मक मान क्या होगा?
- (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$
(c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{7}{2}$
46. यदि a, b एक परिमेय संख्या है और $(a-1)(\sqrt{2}+3) = (b\sqrt{2}+a)$ है, तब $(a+b)$ का मान क्या होगा?
- (a) 2 (b) 5
(c) 5 (d) 3
47. x के किस मान के लिए दिया गया समीकरण $\sqrt{4x-9} + \sqrt{4x+9} = 5 + \sqrt{7}$ संतुष्ट होगा।
- (a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ (b) 4
(c) $\sqrt{5}$ (d) $2\sqrt{3}$
48. यदि $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{3}a - b$ (a, b एक परिमेय संख्या है, तब $(a-b)$ का मान क्या होगा?
- (a) 1 (b) -1
(c) -2 (d) 2
49. यदि $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} + \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 34$ है, तब x ($x < 0$) का मान क्या होगा?
- (a) -1 (b) -2
(c) -3 (d) -4
50. यदि $x^2 - x(a+b) + (a-1)(b+1) = 0$ का एक गुणनखण्ड $(x-a+1)$ है, तो दूसरा गुणनखण्ड होगा।
- (a) $x-b$ (b) $x-a-b$
(c) $x-b+1$ (d) $x-b-1$
51. $x^2 + 4y^2 + 4y - 4xy - 2x - 8$ का क्या गुणनखण्ड होगा?
- (a) $(x-2y-4)$ और $(x-2y+2)$
(b) $(x-y+2)$ और $(x-4y+4)$
(c) $(x-y+2)$ और $(x-4y-4)$
(d) $(x+2y-4)$ और $(x+2y+2)$
52. बहुपदों $p(x)$ व $q(x)$ का म.स. $2x(x+2)$ तथा ल.स. $24x(x+2)^2(x-2)$ । यदि $p(x) = 8x^3 + 32x^2 + 32x$ तो $q(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।
- (a) $x^3 - 16x$ (b) $6x^3 - 24x$
(c) $12x^3 + 24x$ (d) $12x^3 - 24x$
53. यदि $2\sqrt{3}$ समीकरण $x^2 + px - 6 = 0$ का एक मूल है तथा समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल बराबर हैं, तो q का मान ज्ञात कीजिए।
- (a) $3/4$ (b) $2/3$
(c) $4/3$ (d) $3/2$
54. यदि $12^{2b+4} = 3^{3b} \cdot 4^{b+8}$ है, तब b का मान ज्ञात कीजिए।
- (a) +4 (b) 2
(c) आँकड़े अपर्याप्त हैं। (d) इनमें से कोई नहीं
55. यदि $x^2 - 1$ बहुपद $f(x) = 2x^3 + Ax^2 + Bx + 3$ का एक गुणनखण्ड है, तो $A^2 - B^2$ का मान ज्ञात कीजिए।
- (a) 5 (b) 6
(c) -6 (d) 0
56. समीकरण $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c}$ के मूलों का योग शून्य है, तो समीकरण के मूलों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
- (a) $-\frac{(a+b)}{2}$ (b) $\frac{(a+b)}{2}$
(c) $-\frac{(a^2+b^2)}{2}$ (d) $\frac{(a^2+b^2)}{2}$

57. यदि $(3x^3 - 2x^2y - 13xy^2 + 10y^3)$ को $(x - 2y)$ से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल ज्ञात कीजिए।
 (a) 0 (b) x
 (c) $y + 5$ (d) $x - 3$
58. यदि $x^3 - 27$ तथा $x^3 + 4x^2 + 12x + k$ का म.स. एक द्विघातीय बहुपद है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।
 (a) 27 (b) 9
 (c) 3 (d) 4
59. यदि $x^{40} + 2$ को $x^4 + 1$ द्वारा विभाजित किया जाता है, तो शेषफल ज्ञात कीजिए।
 (a) 1 (b) 2
 (c) 4 (d) 3
60. k के किस न्यूनतम पूर्णांक मान के लिए समीकरण $x^2 - 2(k-1)x + (2k+1) = 0$ के मूल बराबर होंगे।
 (a) 1 (b) $-\frac{1}{2}$
 (c) 4 (d) 0
61. समीकरण $3^{2x^2-7x+7} = 9$ के वास्तविक मूलों की संख्या होगी।
 (a) 3 (b) 1
 (c) 2 (d) 4
62. निम्न में से कौन सा समीकरण $x^{16} + x^8 + 1$ का एक गुणनखण्ड नहीं है।
 (a) $x^2 + x + 1$ (b) $x^2 + 1 - x$
 (c) $x^2 + 1$ (d) $x^4 - x^2 + 1$
63. यदि $ax^2 + bx + c = a(x-p)^2$ तो a, b, c के बीच संबंध होगा।
 (a) $b^2 = 4ac$ (b) $2b = a + c$
 (c) $abc = 1$ (d) $b^2 = ac$
64. निम्न असमिका $11x - 61 \leq 5$ का हल होगा।
 (a) $-6 \leq x \leq 6$ (b) $-6 \leq x \leq 0$
 (c) $x \leq 6$ (d) $0 \leq x \leq 6$
65. समीकरण $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ का प्रसार करने पर x^2 का गुणांक होगा।
 (a) 2 (b) -2
 (c) 1 (d) -1
66. x के किस मान पर समीकरण $16\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3 = \frac{a+x}{a-x}$ संतुष्ट होगा।
 (a) $a/2$ (b) $a/3$
 (c) $3a$ (d) (b) व (c) दोनों
67. यदि $ax^2 + bx + c$ तथा $bx^2 + ax + c$ का म.स. $(x+1)$ है, तो c का मान ज्ञात कीजिए।
 (a) -1 (b) 1
 (c) 0 (d) ज्ञात नहीं किया जा सकता।
68. यदि $2x^2 - 7x + 12 = 0$ के दो मूल α और β , है तो $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ का मान ज्ञात करें?
 (a) $\frac{97}{24}$ (b) $\frac{7}{2}$
 (c) $\frac{1}{24}$ (d) $\frac{7}{24}$
69. यदि $3x^3 - kx^2 + 4x + 16, \left(x - \frac{k}{2}\right)$ से पूर्णतः विभाज्य है तब $k = ?$
 (a) 4 (b) -4
 (c) 2 (d) 0
70. यदि $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{9}{xy}$ और $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \frac{21}{xy}$ जहाँ $x \neq 0$ और $y \neq 0$, तब $x + y = ?$
 (a) -1 (b) 4
 (c) 0 (d) 1
71. यदि $4^x + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$ तब $x = ?$
 (a) $1/2$ (b) $3/2$
 (c) $5/2$ (d) 1
72. परिमेय मूल ज्ञात करें यदि बहुपद $f(x) = 3x^4 - 15x^3 + 17x^2 + 5x - 6$ का एक मूल $\frac{1}{\sqrt{3}}$ है।
 (a) -3, 2 (b) 3, 2
 (c) 3, -2 (d) -3, -2

73. यदि $(x^3 + 3x^2 - kx + 4)$ को $(x - 2)$ से भाग दिया जाय तो शेषफल k बचता है। तो k का मान होगा?
 (a) 8 (b) 2
 (c) 4 (d) 6
74. समीकरण $\sqrt{\frac{x}{x+3}} - \sqrt{\frac{x+3}{x}} = -\frac{3}{2}$ का हल होगा।
 (a) 1 (b) 2
 (c) 4 (d) -2
75. समीकरण $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}} = 2 - x^2$ के कितने हल होंगे।
 (a) 0 (b) 1
 (c) 2 (d) 4
76. यदि विस्तार $3a(3a + 2c) - 4b(b + c)$ का एक गुणनखण्ड $(3a - 2b)$ है तो दूसरा गुणनखण्ड होगा।
 (a) $2(a + b + c)$ (b) $(3a + 2b + 2c)$
 (c) $(3a - 2b + 2c)$ (d) $(3a + 2b - 2c)$
77. यदि $x = 3$, समीकरण $3x^2 + (k - 1)x + 9 = 0$, का हल है तो k का मान ज्ञात करें।
 (a) 13 (b) -13
 (c) 11 (d) -11
78. समीकरण $x^2 - 7x + 10 = 0$ और $x^2 - 10x + 16 = 0$ का उभयनिष्ठ मूल होगा।
 (a) -2 (b) 3
 (c) 5 (d) 2
79. यदि α, β समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$, के मूल हैं तो चतुष्फल समीकरण का मान ज्ञात करें जिनका मूल $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ है।
 (a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ (b) $6x^2 + 5x + 1 = 0$
 (c) $6x^2 - 5x - 1 = 0$ (d) $6x^2 + 5x - 1 = 0$
80. समीकरण $x^2 - 6x + k = 0$ के मूल α , तथा β हैं, तो k का कौन सा मान समीकरण $3\alpha + 2\beta = 20$ का संतुष्ट करेगा।
 (a) 8 (b) -8
 (c) 16 (d) -16
81. यदि समीकरण $x^2 + 2x - 3 = 0$ और $x^2 + 3x - k = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ है, तब k का अशून्य मान होगा।
 (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 4
82. m के किस धनात्मक मान के लिए समीकरण $12x^2 + mx + 5 = 0$ का मूल $3 : 2$ के अनुपात में होगा।
 (a) $5\sqrt{10}$ (b) $-\frac{5\sqrt{10}}{2}$
 (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{12}{5}$
83. यदि $x^2 - 3kx + k^2 = 0$ के मूल α और β हैं तब k का मान ज्ञात करें जबकि $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{7}{4}$
 (a) $\pm \frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$
 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं
84. यदि समीकरण $x^2 + kx + 12 = 0$ के मूल α, β हैं जहाँ $\alpha - \beta = 1$ तो k का मान होगा।
 (a) 0 (b) ± 5
 (c) ± 1 (d) ± 7
85. k का मान ज्ञात करें जहाँ समीकरण $3x^2 + (2x + 1)x - k - 5 = 0$ के मूलों का योग मूलों के गुणनफल के बराबर है।
 (a) -4 (b) 6
 (c) 2 (d) 8
86. यदि समीकरण $2^{2y-3} = 65(2^y - 1) + 57$ तब y का मान ज्ञात करें?
 (a) ± 3 (b) ± 1
 (c) ± 2 (d) ± 4

99. निम्न में $x(x+a)(x+2a)(x+3a)$ क्या जोड़ा जाए ताकि योग एक पूर्ण वर्ग हो।
 (a) $9a^2$ (b) $4a^2$
 (c) a^4 (d) इनमें से कोई नहीं
100. निम्न में $(1-x)(1+x^2)$ क्या जोड़ा जाए कि योग x^3 के बराबर हो।
 (a) $2x^3 + 3x^2 + x + 1$
 (b) $2x^3 - x^2 + x - 1$
 (c) $a + b + c = abc$
 (d) $-x^2 + x - 1$
101. $5px - 10qy + 2rpx - 4qry$ का/के गुणनखण्ड हैं।
 (a) केवल $(5+2r)$
 (b) केवल $(px-2qy)$
 (c) $(5+2r)$ और $(px-2qy)$ दोनों
 (d) न ही $(5+2r)$ और न ही $(px-2qy)$
102. $(x^4 + xy^3 + x^3y + xz^3 + y^4 + yz^3)$ विभाज्य है।
 (a) केवल $(x+y)$ द्वारा
 (b) केवल $(x^3 + y^3 + z^3)$ द्वारा
 (c) $(x+y)$ और $(x^3 + y^3 + z^3)$ दोनों द्वारा
 (d) उपरोक्त में से कोई नहीं
103. यदि व्यंजको $px^3 + 3x^2 - 3$ तथा $2x^3 - 5x + p$ को $(x-4)$ द्वारा विभाजित करने पर समान शेष बचता है, तो p का मान ज्ञात कीजिए।
 (a) 1 (b) -1
 (c) -2 (d) 2
104. यदि समीकरण $(a^2 - bc)x^2 + 2(b^2 - ac)x + (c^2 - ab) = 0$ के मूल बराबर हैं, जहाँ $b \neq 0$ तो निम्न में कौन-सा सही है।
 (a) $a + b + c = abc$
 (b) $a^2 + b^2 + c^2 = 0$
 (c) $a^3 + b^3 + c^3 = 0$
 (d) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

105. यदि α तथा β समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ के मूल हैं, तो

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha - \beta)} \text{ किसके बराबर होगा।}$$

- (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$
 (c) $\frac{4}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

106. यदि बहुपदों $x^3 + 2x^2 - 5bx - 7$ तथा $x^3 + bx^2 - 12x + 6$ को क्रमशः $x+1$ तथा $x-2$ से विभाजित किया जाता है, तो क्रमशः शेषफल K_1 व K_2 हैं। यदि $2K_1 + K_2 = 6$ तो b का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) 2 (b) -1
 (c) 4 (d) -2

107. यदि $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - ax + b$ को $x-1$ तथा $x+1$ द्वारा विभाजित करने पर क्रमशः शेषफल 5 व 19 है, तो बहुपद को $x-2$ से विभाजित करने पर शेषफल होगा।

- (a) 10 (b) 12
 (c) -1 (d) 8

108. यदि $x-2$ तथा $x-\frac{1}{2}$ समीकरण $ax^2 + 5x + b$ के गुणनखण्ड

हैं, तो $\frac{a}{b}$ का मान होगा।

- (a) 1 (b) 2
 (c) -1 (d) 3

109. यदि α व β समीकरण $3x^2 - 6x + 2 = 0$ के मूल हैं, तो

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + 2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 3\alpha\beta = ?$$

- (a) 6 (b) 8
 (c) 5 (d) 12

110. यदि α व β समीकरण $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = 2\frac{1}{6}$ के मूल

हैं, तो $\alpha + \beta$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 8
 (c) 5 (d) 6

उत्तरमाला

- | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1. (c) | 2. (c) | 3. (c) | 4. (d) | 5. (b) | 6. (b) | 7. (a) | 8. (a) | 9. (a) |
| 10. (c) | 11. (c) | 12. (b) | 13. (a) | 14. (b) | 15. (d) | 16. (b) | 17. (c) | 18. (c) |
| 19. (c) | 20. (b) | 21. (b) | 22. (b) | 23. (a) | 24. (b) | 25. (c) | 26. (b) | 27. (a) |
| 28. (b) | 29. (d) | 30. (a) | 31. (b) | 32. (b) | 33. (d) | 34. (a) | 35. (b) | 36. (c) |
| 37. (c) | 38. (c) | 39. (d) | 40. (d) | 41. (a) | 42. (b) | 43. (c) | 44. (b) | 45. (b) |
| 46. (a) | 47. (b) | 48. (a) | 49. (c) | 50. (d) | 51. (a) | 52. (b) | 53. (a) | 54. (a) |
| 55. (a) | 56. (c) | 57. (a) | 58. (b) | 59. (d) | 60. (c) | 61. (c) | 62. (c) | 63. (a) |
| 64. (c) | 65. (c) | 66. (b) | 67. (d) | 68. (c) | 69. (b) | 70. (b) | 71. (b) | 72. (b) |
| 73. (a) | 74. (a) | 75. (b) | 76. (b) | 77. (d) | 78. (d) | 79. (a) | 80. (d) | 81. (d) |
| 82. (a) | 83. (a) | 84. (d) | 85. (a) | 86. (a) | 87. (c) | 88. (a) | 89. (b) | 90. (a) |
| 91. (b) | 92. (a) | 93. (c) | 94. (d) | 95. (c) | 96. (d) | 97. (d) | 98. (a) | 99. (c) |
| 100. (b) | 101. (c) | 102. (c) | 103. (a) | 104. (d) | 105. (b) | 106. (a) | 107. (a) | 108. (a) |
| 109. (d) | 110. (a) | | | | | | | |

mathswithson

हल एवं संकेत

Solⁿ. 1 $(x^2 + 3qx - 2q)$, का $(x - 2)$ एक गुणनखण्ड है।

$$\text{इसलिए, } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$x = 2$ समी. $(x^2 + 3qx - 2q)$ में रखने तथा 0 के बराबर करने पर

$$\therefore (2)^2 + 3 \cdot q \cdot 2 - 2q = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 6q - 2q = 0 \Rightarrow 4 + 4q = 0$$

$$4q = -4 = 0 \Rightarrow q = -1$$

Solⁿ. 2 गुणनखण्ड $\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow$ में $x = -2$ (रखने पर)

$$\therefore (-2)^3 + 6(-2)^2 + 4(-2) + k = 0$$

$$\Rightarrow -8 + 24 - 8 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = -8$$

Solⁿ. 3 संकेत: विकल्प की सहायता से

Solⁿ. 4 $(x + t)$ दोनों समीकरणों का एक गुणनखण्ड है $x = -t$ दोनों समीकरणों में रखने पर

$$\Rightarrow (-t)^2 + p(-t) + q = 0$$

$$t^2 - pt + q = 0 \quad \dots(i)$$

$$\Rightarrow (-t)^2 + l(-t) + m = 0$$

$$t^2 - lt + m = 0 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से

$$t^2 - pt + q = t^2 - lt + m$$

$$lt - pt = m - q$$

$$\Rightarrow t(l - p) = m - q \Rightarrow t = \frac{m - q}{l - p}$$

Solⁿ. 5 तर्क: विकल्प की सहायता से

Solⁿ. 6 $x - 1 = 0$ में $\Rightarrow x = 1$ रखने पर

$$1^3 - k = 0$$

$$1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

Solⁿ. 7 $x + 1 = 0$ में $\Rightarrow x = -1$ रखने पर

$$x^{100} + 2x^{99} + k = 0$$

$$(-1)^{100} + 2(-1)^{99} + k = 0$$

$$1 - 2 + k = 0 \Rightarrow -1 + k = 0$$

$$k = 1$$

Solⁿ. 8 $x + 2 = 0 \Rightarrow$ में $x = -2$ रखने पर

$$x^3 - 5x^2 + 4p = 0$$

$$(-2)^3 - 5(-2)^2 + 4p = 0$$

$$-8 - 20 + 4p = 0$$

$$-28 + 4p = 0 \Rightarrow 4p = 28$$

$$p = 7$$

Solⁿ. 9 $x - a = 0 \Rightarrow$ में $x = a$ का मान रखने पर

$$x^3 - 3x^2a + 2a^2x + b = 0$$

$$a^3 - 3a^2a + 2a^2a + b = 0$$

$$a^3 - 3a^3 + 2a^3 + b = 0$$

$$b = 0$$

Solⁿ. 10 संकेत: प्रश्न 9 की तरह हल करना है।

Solⁿ. 11 $(x + 2)$ व $(x - 1)$ समीकरण $x^3 + 10x^2 + mx + n$, के गुणनखण्ड हैं इसलिए $x = -2$ व $x = 1$ समीकरण में रखने पर

$$(-2)^3 + 10(-2)^2 + m(-2) + n = 0$$

$$-8 + 40 - 2m + n = 0$$

$$-2m + n + 32 = 0$$

$$-2m + n = -32 \quad \dots(i)$$

$x = 1$ रखने पर

$$(1)^3 + 10(1)^2 + m \cdot 1 + n = 0$$

$$1 + 10 + m + n = 0$$

$$m + n = -11 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) में से (ii) को घटाने पर

$$-2m + n = -32$$

$$m + n = -11$$

$$- \quad - \quad +$$

$$-3m = -21$$

$$\Rightarrow m = 7$$

$$7 + n = -11$$

$$\Rightarrow n = -18$$

Solⁿ. 12 $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x=-1$ समीकरण में रखने पर

$$R = x^3 - 6x + 7 = (-1)^3 - 6(-1) + 7$$

$$= -1 + 6 + 7$$

शेषफल = 12

Solⁿ. 13 $x-3=0 \Rightarrow x=3$

समीकरण $x^5 - 9x^2 + 12x - 14$ में $x=3$ रखने पर

$$R = (3)^5 - 9(3)^2 + 12(3) - 14$$

$$R = 243 - 81 + 36 - 14$$

$$R = 279 - 95$$

$$R = 184$$

Solⁿ. 14 $x-2=0 \Rightarrow x=2$

समीकरण $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ में $x=2$ रखने पर

$$R = 2^4 - 3(2)^3 + 2(2)^2 - 5(2) + 7$$

$$R = 16 - 24 + 8 - 10 + 7$$

$$R = 31 - 34 = -3$$

Solⁿ. 15 $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

समीकरण $5x^3 + 5x^2 - 6x + 9$ में $x=-3$ रखने पर

$$R = 5(-3)^3 + 5(-3)^2 - 6(-3) + 9$$

$$R = -135 + 45 + 18 + 9$$

$$R = -135 + 72 = -63$$

Solⁿ. 16 $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x^{11} + 1$ में $x=-1$ रखने पर

$$R = (-1)^{11} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Solⁿ. 17 $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 6$$

$$R = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 6$$

$$R = -2 \times \frac{1}{8} + \frac{5}{4} + \frac{4}{2} - 6$$

$$R = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} + 2 - 6$$

$$R = \frac{4}{4} - 4 = -3$$

Solⁿ. 18 $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$

$x^3 + 5x^2 + 10k$ में $x^2 = -2$ रखने पर

$$R = x^3 + 5x^2 + 10k = -2x \quad (\text{दिया है})$$

$$\Rightarrow (-2)x + 5(-2) + 10k = -2x$$

$$\Rightarrow -10 + 10k = 0 \Rightarrow k = 1$$

Solⁿ. 19 $x^2 - 1 - 2a - a^2 = [x^2 - (a^2 + 1 + 2a)]$

$$= [x^2 - (a+1)^2] = (x+a+1)(x-a-1)$$

Solⁿ. 20 $x^2 - 8x - 20 = x^2 - 10x + 2x - 20$

$$= x(x-10) + 2(x-10)$$

$$= (x-10)(x+2)$$

Solⁿ. 21 $x^2 - 9xy + 8xy - 72y^2$

$$= x(x-9y) + 8y(x-9y)$$

$$= (x+8y)(x-9y)$$

Solⁿ. 22 $x^2 - 11xy - 60y^2$

$$= x^2 - 15xy + 4xy - 60y^2$$

$$= x(x-15y) + 4y(x-15y)$$

$$= (x+4y)(x-15y)$$

Solⁿ. 23 $x^n - a^n$, n_1 के सभी मानों के लिए $(x-a)$ द्वारा विभाजित है

(हम $x=a$, $x^n - a^n$ में रखकर देख सकते हैं।)

Solⁿ. 24 संकेत: प्रश्न 23 की तरह हल करें

Solⁿ. 25 संकेत: प्रश्न 23 की तरह हल करें

Solⁿ. 26 $6x - 2y = 3$

$$kx - y = 2$$

अद्वितीय हल के लिए, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\therefore \frac{6}{k} \neq \frac{-2}{-1} \Rightarrow \boxed{k \neq 3}$$

Solⁿ. 27 रेखीय समीकरणों असंगत होंगे इसका मतलब समीकरण का कोई हल नहीं होगा।

जब कोई हल नहीं, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

$$\therefore \frac{5}{1} = \frac{2}{k} \Rightarrow k = \frac{2}{5}$$

Solⁿ. 28 $2x + 3y - 5 = 0, 4x + ky - 10 = 0$

अनन्त हलों के लिए

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\therefore \frac{2}{4} = \frac{3}{k} \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

Solⁿ. 29 $4x - 3y = 7$... (i)

$7x + 5y = 2$... (ii)

समीकरण (i) को 5 समीकरण (ii) को 3 से गुणा करने पर

$20x - 15y = 35$... (iii)

$21x + 15y = 6$... (iv)

समीकरण (iii) और (iv) को जोड़ने पर

$20x - 15y = 35$

$21x + 15y = 6$

$41x = 41 \Rightarrow x = 1$

$x = 1$ समीकरण (i) में रखने पर

$\Rightarrow 4(1) - 3y = 7 \Rightarrow -3y = 3$

$\Rightarrow y = -1$

अतः $x = 1, y = -1$

Solⁿ. 30 $x - y = 0.9 \Rightarrow x - y = \frac{9}{10}$... (i)

$\frac{11}{2(x+y)} = 1 \Rightarrow x + y = \frac{11}{2}$... (ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$x - y = \frac{9}{10}$

$x + y = \frac{11}{2}$

$2x = \frac{9}{10} + \frac{11}{2} = \frac{9 + 55}{10}$

$\Rightarrow 2x = \frac{64}{10}$

$\Rightarrow x = 3.2$

$x = 3.2$ समीकरण (i) में रखने पर

$\Rightarrow 3.2 - y = 0.9$

$\Rightarrow y = 3.2 - 0.9 = 2.3$

Solⁿ. 31 $\frac{3x - y + 1}{3} = \frac{2x + y + 2}{5}$

$\Rightarrow 15x - 5y + 5 = 6x + 3y + 6$

$\Rightarrow 9x - 8y = 1$... (i)

पुनः, $\frac{3x - y + 1}{3} = \frac{3x + 2y + 1}{6}$

$\Rightarrow 18x - 6y + 6 = 9x + 6y + 3$

$\Rightarrow 9x - 12y = -3$... (ii)

समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर

$9x - 12y = -3$

$9x - 8y = 1$

$\begin{array}{r} - \quad + \quad - \\ \hline -4y = -4 \Rightarrow y = 1 \end{array}$

$y = 1$ समीकरण (i) में रखने पर

$9x - 8(1) = 1$

$9x = 9$

$\boxed{x = 1, y = 1}$

Solⁿ. 32 $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{5}{12}$

$\frac{3x + 4y}{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow 3x + 4y = 5$... (i)

$\frac{x}{2} + y = 1 \Rightarrow x + 2y = 2$... (ii)

समीकरण (ii) को 2 से गुणा करने पर

$2x + 4y = 4$... (iii)

समीकरण (i) में से (iii) को घटाने पर

$3x + 4y = 5$

$2x + 4y = 4$

$\begin{array}{r} - \quad - \quad - \\ \hline x = 1 \end{array}$

समीकरण (ii) में मान रखने पर

$1 + 2y = 2$

$2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$x + y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\text{Sol}^n. 33 \quad \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{9}{xy}$$

$$\Rightarrow 2y + 3x = 9 \quad \dots(i)$$

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \frac{21}{xy}$$

$$\Rightarrow 4y + 9x = 21 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) को 2 से गुणा करने पर

$$4y + 6x = 18$$

$$4y + 9x = 21$$

$$\begin{array}{r} - \\ -3x \\ \hline \end{array} = -3 \Rightarrow x = 1$$

समीकरण (i) में x का मान रखने पर

$$2y + 3(1) = 9$$

$$\Rightarrow 2y = 6 \quad \Rightarrow y = 3$$

$$\text{Sol}^n. 34 \quad x + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow xy + 1 = 2y \Rightarrow xy = 2y - 1$$

xy का मान समी. $(2xy - 3y) = -2$ में रखने पर

$$2(2y - 1) - 3y = -2 \Rightarrow y = 0$$

लेकिन समी. (i) से y का मान शून्य नहीं हो सकता
अतः, दोनों समीकरणों का कोई हल नहीं होगा या
शून्य हल होंगे।

$$\text{Sol}^n. 35 \quad 6 \text{ पुस्तक} + 4 \text{ पेंसिल} = 34 \quad \dots(i)$$

$$5 \text{ पुस्तक} + 5 \text{ पेंसिल} = 30$$

$$\Rightarrow \text{पुस्तक} + \text{पेंसिल} = 6 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (ii) को 4 से गुणा करने पर

$$4 \text{ पुस्तक} + 4 \text{ पेंसिल} = 24 \quad \dots(iii)$$

समीकरण (i) में से (iii) को घटाने पर

$$6b + 4p = 34$$

$$4b + 4p = 24$$

$$\begin{array}{r} - \\ - \\ \hline \end{array}$$

$$2b = 10$$

प्रत्येक पुस्तक की कीमत = 5 रु.

समीकरण (ii) में मान रखने पर

$$5 + \text{पेंसिल} = 6$$

प्रत्येक पेंसिल की कीमत = 1 रु.

$$\text{Sol}^n. 36 \quad 3 \text{ कुर्सी} + 2 \text{ द्यूब} = 1200 \quad \dots(i)$$

$$5 \text{ कुर्सी} + 3 \text{ द्यूब} = 1900 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) को 3 से और समीकरण (ii) को 2 से
गुणा करने पर, उसके बाद घटाने पर

$$9 \text{ कुर्सी} + 6 \text{ द्यूब} = 3600$$

$$10 \text{ कुर्सी} + 6 \text{ द्यूब} = 3800$$

$$\begin{array}{r} - \\ - \\ \hline \end{array}$$

$$- \text{कुर्सी} = -200$$

$$\text{कुर्सी} = 200 \text{ रु.}$$

समीकरण (i) में मान रखने पर

$$3 \times 200 + 2 \text{ द्यूब} = 1200$$

$$2 \text{ द्यूब} = 1200 - 600 = 600$$

$$\text{द्यूब} = 300 \text{ रु.}$$

$$\therefore 2 \text{ कुर्सी व } 2 \text{ द्यूब की कीमत} = 2 \times 200 + 2 \times 300$$

$$= 400 + 600 = 1000 \text{ रु.}$$

$$\text{Sol}^n. 37 \quad x + 2y \leq 3, x > 0 \text{ व } y > 0$$

यह स्पष्ट है कि एक हल होगा-

$$x = 1 \text{ व } y = 1$$

$$1 + 2(1) \leq 3 \Rightarrow 3 \leq 3$$

Solⁿ. 38 संकेत: विकल्प की सहायता से समी. को सन्तुष्ट करें।

Solⁿ. 39 संकेत: विकल्प की सहायता से समी. को सन्तुष्ट करें।

$$\text{Sol}^n. 40 \quad lx^2 + nx + n = 0$$

माना समी. के मूल α , तथा β हैं।

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}, \alpha + \beta = \frac{-n}{l} \text{ व } \alpha\beta = \frac{n}{l}$$

$$\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{n}{l}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha\beta} = \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{\frac{-n}{l} + \frac{n}{l}}{\sqrt{\frac{n}{l}}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{n}{l}}} = 0$$

Solⁿ. 41. $x^5 - 12x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 12x - 1$
 $= x^5 - 11x^4 - x^4 + 11x^3 + x^3 - 11x^2 - x^2 + 11x + x - 1$
 $= x^4(x-11) - x^3(x-11) + x^2(x-11) - x(x-11) + 11 - 1$
 $\therefore x = 11 \Rightarrow x - 11 = 0$
 $= 11 - 1 = 10$

Solⁿ. 42. $\frac{5x-7y+15}{1} = \frac{3x-2y+1}{8} = \frac{11x-6y+10}{9} = k$

$5x - 7y + 15 = k \quad \dots(i)$

$3x - 2y + 1 = 8k \quad \dots(ii)$

$11x - 6y + 10 = 9k \quad \dots(iii)$

समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने के बाद समीकरण (iii) में से घटाने पर

$3x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow x + y = 2$

Solⁿ. 43. संकेत : प्रश्न 42 की तरह हल करें।

Solⁿ. 44. $x = 2t$ व $y = \frac{2t-1}{3}$

जब $x = y$, तब

$2t = \frac{2t-1}{3}$

$6t = 2t - 1$

$4t = -1$

$t = -\frac{1}{4}$

Solⁿ. 45. $\frac{(8x^2 - 15y^2)}{xy} = 14$

$8x^2 - 15y^2 = 14xy$

$8x^2 - 14xy - 15y^2 = 0$

$8x^2 - 20xy + 6xy - 15y^2 = 0$

$4x(2x - 5y) + 3y(2x - 5y) = 0$

$(4x + 3y)(2x - 5y) = 0$

$\therefore 2x - 5y = 0 \Rightarrow 2x = 5y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{2}$

Solⁿ. 46. $(a-1)(\sqrt{2}+3) = b\sqrt{2}+a$

$(a-1)\sqrt{2} + 3a - 3 = b\sqrt{2} + a$

(दोनों पक्षों में तुलना करने पर)

$a - 1 = b \Rightarrow a - b = 1$

.....(i)

$3a - 3 = a \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$a = \frac{3}{2}$ समीकरण (i) में रखने पर

तब, $b = \frac{1}{2}$

अब, $a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

Solⁿ. 47. $\sqrt{4x-9} + \sqrt{4x+9} = 5 + \sqrt{7} = \sqrt{25} + \sqrt{7}$

तुलना करने पर

$4x + 9 = 25 \Rightarrow x = 4$

या

$4x - 9 = 7 \Rightarrow x = 4$

Solⁿ. 48. $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{4})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3}}$

$= \sqrt{(\sqrt{4} - \sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

अब,

$\therefore 2 - \sqrt{3} = \sqrt{3}a - b$

तुलना करने पर

$a = -1$ और $b = -2$

$\therefore a - b = -1 + 2 = 1$

Solⁿ. 49. $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 34$

$\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + (x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})} = 34$

$\frac{x^2 + x^2 - 1 + x^2 + x^2 - 1}{x^2 - (x^2 - 1)} = 34$

$4x^2 - 2 = 34 \Rightarrow 4x^2 = 36$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

अतः $x = -3$ ($\because x < 0$)

Solⁿ. 50. $x^2 - x(a+b) + (a-1)(b+1) = 0$

एक मूल $\Rightarrow (x - a + 1) = 0$

$$x = a - 1$$

$$\text{मूलों का योग} = \alpha + \beta = -\frac{B}{A} = -(a+b)$$

$$a-1+\beta = a+b \Rightarrow \beta = b+1$$

अतः दूसरा मूल $(x-b-1)$ होगा।

Solⁿ. 51. संकेत: विकल्प से हल करें

Solⁿ. 52. संकेत: उदा. 25 देखें

Solⁿ. 53. संकेत: उदा. 36 देखें

Solⁿ. 54. संकेत: घातों की तुलना करने पर

Solⁿ. 55. संकेत: प्रश्न 9 की तरह हल करें।

$$\text{Sol}^n. 56. \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c}$$

माना मूल α व $-\alpha$ है

समीकरण में $x = \alpha$ और $-\alpha$ दिया है।

$$\frac{1}{\alpha+a} + \frac{1}{\alpha+b} = \frac{1}{c} \text{ और } \frac{1}{-\alpha+a} + \frac{1}{-\alpha+b} = \frac{1}{c}$$

ऊपर दिये गये दोनों समीकरणों की तुलना करने पर

$$\frac{1}{\alpha+a} + \frac{1}{\alpha+b} = \frac{1}{-\alpha+a} + \frac{1}{-\alpha+b}$$

$$\frac{1}{\alpha+a} - \frac{1}{-\alpha+a} = \frac{1}{-\alpha+b} - \frac{1}{\alpha+b}$$

हल करने पर,

$$\text{मूलों का गुणनफल} = -\alpha^2 = -\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\text{Sol}^n. 57. x-2y=0 \Rightarrow x=2y$$

$$\begin{aligned} \therefore 3x^3 - 2x^2y - 13xy^2 + 10y^3 \\ 3(2y)^3 - 2(2y)^2y - 13(2y)y^2 + 10y^3 \\ 24y^3 - 8y^3 - 26y^3 + 10y^3 \\ 34y^3 - 34y^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{शेषफल} = 0$$

Solⁿ. 58. संकेत: Ex. 27 देखें

$$\text{Sol}^n. 59. x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^{40} + 2 &= (x^4)^{10} + 2 = (-1)^{10} + 2 \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Sol}^n. 60. x^2 - 2(k-1)x + (2k+1) = 0 \text{ के मूल बराबर हैं, तो}$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\therefore [-2(k-1)]^2 - 4(1)(2k+1) = 0$$

$$4(k^2 + 1 - 2k) - 4(2k+1) = 0$$

$$4k^2 + 4 - 8k - 8k - 4 = 0$$

$$4k^2 - 16k = 0$$

$$4k - 16 = 0$$

$$4k = 16 \Rightarrow k = 4$$

$$\text{Sol}^n. 61. 3^{2x^2-7x+7} = 9 = 3^2$$

संकेत: घातों की तुलना करके हल करने पर या हम विकल्पों के मान समीकरण में रख सकते हैं।

$$\text{Sol}^n. 62. x^{16} + x^8 + 1 = (x^8)^2 + 2x^8 + 1 - x^8$$

$$= [(x^8 + 1)^2 - (x^4)^2]$$

$$= [(x^8 + x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1)]$$

$$= [(x^4)^2 + 2x^4 + 1 - x^4] [x^8 - x^4 + 1]$$

$$= [(x^4 + 1)^2 - (x^2)^2] (x^8 - x^4 + 1)$$

$$= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$$

$$= [(x^2)^2 + 2x^2 + 1 - x^2] (x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$$

$$= [(x^2 + 1)^2 - x^2] (x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$$

$$= (x^2 + 2x + 1 - x)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$$

$$= [(x+1)^2 - (\sqrt{x})^2] (x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$$

$$= (x + 1 + \sqrt{x})(x + 1 - \sqrt{x})(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)$$

$$\therefore x^2 + 1 \text{ एक गुणनखण्ड नहीं है।}$$

$$\text{Sol}^n. 63. ax^2 + bx + c = a(x-p)^2$$

$$= a(x^2 + p^2 - 2xp)$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = ax^2 + ap^2 - 2axp$$

दोनों तरफ तुलना करने पर

$$a = a, b = -2ap \Rightarrow p = \frac{b}{-2a} \text{ तथा } c = ap^2$$

p का मान रखने पर

$$c = a \times \left(\frac{b}{-2a} \right)^2 = a \times \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\boxed{b^2 = 4ac}$$

Solⁿ. 64. $11x - 61 \leq 5$

$$11x \leq 66 \Rightarrow x \leq 6$$

असमिका का समीकरण

Solⁿ. 65. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$

$$x^2 \text{ का गुणांक } = 1$$

Solⁿ. 66. $16 \left(\frac{a-x}{a+x} \right)^3 = \frac{a+x}{a-x}$

$$16(a-x)^4 = (a+x)^4$$

वर्गमूल करने पर हम पाते हैं

$$4(a-x)^2 = (a+x)^2$$

पुनः वर्गमूल करने पर

$$2(a-x) = a+x$$

$$2a - 2x = a + x$$

$$a = 3x$$

$$x = \frac{a}{3}$$

Solⁿ. 67. $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$ax^2 + bx + c = a(-1)^2 + b(-1) + c = 0$$

$$\Rightarrow a - b + c = 0 \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा } bx^2 + ax + c = 0$$

$$b(-1)^2 - a + c = 0$$

$$\Rightarrow b - a + c = 0 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) की तुलना करने पर

$$a - b + c = b - a + c$$

अतः c का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता।

Solⁿ. 68. $2x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\alpha + \beta = \left(-\frac{7}{2} \right) = -\frac{7}{2} \quad \dots(i)$$

$$\text{और } \alpha\beta = \frac{12}{2} = 6 \quad \dots(ii)$$

अब,

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

समीकरण (i) व (ii) का मान रखने पर

$$\therefore \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(-\frac{7}{2} \right)^2 - 2(6)}{6} = \frac{\frac{49}{4} - 12}{6} = \frac{49 - 48}{4 \times 6} = \frac{1}{24}$$

Solⁿ. 69. $x - \frac{k}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{2}$

$$3x^3 - kx^2 + 4x + 16 = 0$$

$$3\left(\frac{k}{2}\right)^3 - k\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{k}{2}\right) + 16 = 0$$

$$\frac{3}{8}k^3 - \frac{k^3}{4} + 2k + 16 = 0$$

$$\frac{3k^3 - 2k^3}{8} + 2k + 16 = 0$$

$$\frac{k^3}{8} + 2k + 16 = 0$$

$$k^3 + 16k + 128 = 0$$

विकल्प से: $k = -4$ समीकरण को संतुष्ट करता है।

Solⁿ. 70. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{9}{xy} \Rightarrow \frac{2y + 3x}{xy} = \frac{9}{xy}$

$$3x + 2y = 9 \quad \dots(i)$$

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \frac{21}{xy} \Rightarrow \frac{4y + 9x}{xy} = \frac{21}{xy}$$

$$\Rightarrow 9x + 4y = 21 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) को 2 से गुणा करने और समीकरण (ii) से घटाने पर

$$9x + 4y = 21$$

$$6x + 4y = 18$$

$$- - -$$

$$3x = 3$$

$$\Rightarrow x = 1$$

समीकरण (i) में $x = 1$ रखने पर

$$3 + 2y = 9 \Rightarrow 2y = 6$$

$$y = 3$$

$$\therefore x + y = 1 + 3 = 4$$

Solⁿ. 71. संकेत: दिये गये समीकरण में मान रखने पर

$$\text{Sol}^n. 72. f(x) = 3x^4 - 15x^3 + 17x^2 + 5x - 6$$

$$\text{यदि एक मूल } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ तो दूसरा मूल } \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{मूलों का योग} = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a} = -\frac{-15}{3} = 5$$

$$\gamma + \delta = 5 \quad \dots(i)$$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \alpha\beta\gamma\delta = -\frac{e}{a} = -\frac{-6}{3} = 2$$

$$\gamma\delta = 6 \quad \dots(ii)$$

$$\text{हल करने पर, } \gamma = 3, \delta = 2$$

$$\text{Sol}^n. 73. x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

अब,

$$x^3 + 3x^2 - kx + 4 = k$$

$$(2)^3 + 3(2)^2 - k(2) + 4 = k$$

$$8 + 12 - 2k + 4 = k$$

$$24 = 3k$$

$$\boxed{k = 8}$$

$$\text{Sol}^n. 74. \sqrt{\frac{x}{x+3}} - \sqrt{\frac{x+3}{x}} = -\frac{3}{2}$$

माना $x = 1$ है।

$\therefore$ L.H.S.

$$\sqrt{\frac{x}{x+3}} - \sqrt{\frac{x+3}{x}} = \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{4}{1}}$$

$$= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} = \text{R.H.S.}$$

Solⁿ. 75. संकेत: उदा. 126 देखें

$$\text{Sol}^n. 76. 3a(3a+2c) - 4b(b+c) = 9a^2 + 6ac - 4b^2 - 4bc$$

$$= 9a^2 - 4b^2 + 6ac - 4bc$$

$$= (3a-2b)(3a+2b) + 2c(3a-2b)$$

$$= (3a-2b)(3a+2b+2c)$$

तब दूसरा गुणनखण्ड $(3a+2b+2c)$ होगा

Solⁿ. 77. समीकरण $[3x^2 + (k-1)x + 9 = 0]$ में $x = 3$ रखने पर

$$3(3)^2 + (k-1)3 + 9 = 0$$

$$27 + 3k - 3 + 9 = 0$$

$$3k + 33 = 0$$

$$3k = -33$$

$$\boxed{k = -11}$$

Solⁿ. 78. संकेत: Ex. 35 देखें

$$\text{Sol}^n. 79. \text{माना, } y = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{1}{y}$$

α , समी. $x^2 - 5x + 6 = 0$ का एक मूल है, इसलिए

$\alpha = \frac{1}{y}$ समी. में रखने पर

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{y}\right) + 6 = 0$$

$$1 - 5y + 6y^2 = 0$$

y को x द्वारा परिवर्तित करने पर

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\text{Sol}^n. 80. x^2 - 6x + k = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 6 \text{ व } \alpha\beta = k$$

हल करने पर $\alpha + \beta = 6$ और $3\alpha + 2\beta = 20$

$\Rightarrow \alpha = 8, \beta = -2$ (इन मानों को $\alpha\beta = k$ में रखने पर)

$$8 \times (-2) = k \Rightarrow k = -16$$

Solⁿ. 81. संकेत: उदा. 35 देखें

$$\text{Sol}^n. 82. 12x^2 + mx + 5 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{m}{12} \text{ व } \alpha\beta = \frac{5}{12}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2} \text{ (माना } \alpha = 3k \text{ व } \beta = 2k)$$

$$(3k)(2k) = \frac{5}{12} \Rightarrow k^2 = \frac{5}{72} \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{2}}$$

$$(3k + 2k) = -\frac{m}{12} \Rightarrow 5k = -\frac{m}{12}$$

$$m = -60k = -60\left(-\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{10}$$

Solⁿ. 83. $x^2 - 3kx + k^2 = 0$

$$\alpha + \beta = 3k \quad \dots(i)$$

$$\alpha\beta = k^2 \quad \dots(ii)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{7}{4}$$

समीकरण (i) और (ii) से

$$(-3k)^2 - 2k^2 = \frac{7}{4}$$

$$9k^2 - 2k^2 = \frac{7}{4}$$

$$7k^2 = \frac{7}{4}$$

$$k = \pm \frac{1}{2}$$

Solⁿ. 84. $x^2 + kx + 12 = 0$

$$\alpha + \beta = -k \quad \dots(i)$$

$$\alpha\beta = 12 \quad \dots(ii)$$

$$\alpha - \beta = 1 \text{ (दिया है)} \quad \dots(iii)$$

समीकरण (i) और (iii) को जोड़ने पर

$$\alpha + \beta = -k$$

$$\frac{\alpha - \beta = 1}{2\alpha = 1 - k}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1-k}{2}$$

समीकरण (iii) α का मान रखने पर

$$\frac{1-k}{2} - \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1-k}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1-k-2}{2} = \frac{-1-k}{2}$$

समीकरण (ii) में α और β का मान रखने पर

$$\alpha\beta = 12$$

$$\frac{1-k}{2} \times \frac{-1-k}{2} = 12$$

$$(k-1)(k+1) = 48$$

$$k^2 = 49 \Rightarrow k = \pm 7$$

Solⁿ. 85. $5x^2 + x - k - 5 = 0$

$$\alpha + \beta = \alpha\beta$$

$$-\frac{1}{5} = -\frac{k+5}{5} \Rightarrow k+5 = 1 \Rightarrow k = -4$$

Solⁿ. 86. संकेत: दिये गये समी. में विकल्पों के मान रखने पर

Solⁿ. 87. माना $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 7} = y$

$$x^2(y-1) + x(2y-2) + 7y-1 = 0$$

$$x \text{ वास्तविक है, तो } b^2 - 4ac \geq 0$$

$$(4y^2 + 4 - 8y) - 4(y-1)(7y-1) \geq 0$$

$$(y^2 + 1 - 2y) - (7y^2 - 8y + 1) \geq 0$$

$$-6y^2 + 6y \geq 0$$

$$y(1-y) \geq 0 \Rightarrow y(y-1) \leq 0$$

$$\text{अतः } y \in [0, 1]$$

Solⁿ. 88. $\alpha + \beta = -\frac{1}{6}, \alpha\beta = -\frac{1}{3}$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \left(\frac{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}} \right) = -\frac{25}{12}$$

Solⁿ. 89. सूत्र द्वारा $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
 $(5x^2 + 14x + 2)^2 - (4x^2 - 5x + 7)^2$
 $= (9x^2 + 9x + 9)(x^2 + 19x - 5)$
 $= 9(x^2 + x + 1)(x^2 + 19x - 5)$

यदि इसको $(x^2 + x + 1)$ द्वारा विभाजित किया जाता है, तो शेषफल शून्य होगा।

Solⁿ. 90. संकेत: उदा. 4 देखें

Solⁿ. 91. माना मूल α व $\frac{1}{\alpha}$ हैं

$$\Rightarrow \text{मूल उत्पादक} = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1 = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{k}{7} = 1 \Rightarrow k = 7$$

Solⁿ. 92. $x^2 - 9x + k = 0$

माना मूल α और 2α हैं

$$\alpha + 2\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\alpha \cdot 2\alpha = k \Rightarrow k = 2\alpha^2 = 18$$

Solⁿ. 93. संकेत: विकल्पों के मान समी. में रखें

Solⁿ. 94. संकेत: शेषफल प्रमेय को समझें (तथा पहले a व b का मान ज्ञात करें)

Solⁿ. 95. संकेत: विकल्पों की सहायता से।

Solⁿ. 96. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} = \frac{xab}{a^2 - b^2}$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x - y$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x - \frac{xab}{a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow x \left(\frac{a^2 - b^2 - ab}{a^2 - b^2} \right) = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$x = \frac{a^4 - b^4}{ab(a^2 - b^2 - ab)}$$

Solⁿ. 97. जब मूल एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं, तो

$$\alpha\beta = \frac{C}{A} = 1$$

$$\alpha\beta = \frac{C}{A} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$$

$$\text{अतः, } c = a$$

Solⁿ. 98. $a^2b^2x^2 - (a^2 + b^2)x + 1 = 0$

$$\alpha + \beta = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\text{अतः } \alpha = \frac{1}{a^2}, \beta = \frac{1}{b^2}$$

Solⁿ. 99. x के स्थान पर कुछ भी रखेंगे

$$\text{माना } x = a$$

$$x(x+a)(x+2a)(x+3a) = a(a+a)(a+2a)(a+3a) = 24a^4$$

अतः, पूर्ण वर्ग बनाने के लिए a^4 जोड़ना होगा

Solⁿ. 100. माना $(1-x)(1+x^2)$ में t जोड़ने पर x^3 प्राप्त होगा।

$$t + (1-x)(1+x^2) = x^3$$

$$t + 1 + x^2 - x - x^3 = x^3$$

$$t = 2x^3 - x^2 + x - 1$$

Solⁿ. 101. $5px - 10qy + 2rpx - 4qry$

$$= 5px + 2rpx - 10qy - 4qry$$

$$= px(5 + 2r) - 2qy(5 + 2r)$$

$$= (5 + 2r)(px - 2qy)$$

Solⁿ. 102. $x^4 + xy^3 + x^3y + xz^3 + y^4 + yz^3$

$$= x(x^3 + y^3 + z^3) + y(x^3 + y^3 + z^3)$$

$$= (x^3 + y^3 + z^3)(x + y)$$

Solⁿ. 103. संकेत: शेषफल प्रमेय द्वारा

Solⁿ. 104. संकेत: यदि मूल बराबर है, तो $B^2 - 4AC = 0$

Solⁿ. 105. $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 1$ व $\alpha\beta = -1$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha - \beta)} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2}$$

$$= \frac{1 + 2}{(1)(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)} = \frac{3}{(3 + 2)} = \frac{3}{5}$$

Solⁿ. 106. संकेत: शेषफल प्रमेय द्वारा

Solⁿ. 107. संकेत: शेषफल प्रमेय द्वारा

Solⁿ. 108. संकेत: शेषफल प्रमेय द्वारा

Solⁿ. 109. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{3} = 2$ व $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + 2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 3\alpha\beta$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + 3\alpha\beta$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + 2\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + 3\alpha\beta$$

$$= \frac{(2)^2 - 2 \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} + 2\left(\frac{2}{2/3}\right) + 3 \times \frac{2}{3} = 12$$

Solⁿ. 110. $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = 2\frac{1}{6}$

$$\frac{x + 1 - x}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{13}{6}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\frac{1}{x - x^2} = \frac{169}{36}$$

$$x - x^2 = \frac{36}{169}$$

$$x^2 - x + \frac{36}{169} = 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1}$$

$$\alpha + \beta = 1$$

प्रश्नावली - (मूल सर्वसमिकाएँ)

1. यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ है, तब $x^9 + \frac{1}{x^9}$ का मान क्या होगा?
 (a) 0 (b) 4
 (c) 2 (d) 6
2. यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ है, तब $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ का मान क्या होगा?
 (a) 0 (b) 6
 (c) 2 (d) 4
3. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$ है, तब $x^4 + \frac{1}{x^4}$ का मान क्या होगा?
 (a) 49 (b) 42
 (c) 38 (d) 47
4. यदि $x + \frac{1}{x} = 5$ है, तब $x^5 + \frac{1}{x^5}$ का मान क्या होगा?
 (a) 2525 (b) 2550
 (c) 2500 (d) 2700
5. यदि $x^2 - 2x + 1 = 0$ है, तब $\frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2}{x}$ का मान क्या होगा?
 (a) 0 (b) 2
 (c) 3 (d) 4
6. यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ है, तब $\frac{10x}{3x^2 - 4x + 3}$ का मान क्या होगा?
 (a) 0 (b) 5
 (c) 3 (d) 4
7. यदि $x + \frac{1}{x} = 5$ है, तब $\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3}$ का मान क्या होगा?
 (a) 115 (b) 110
 (c) 140 (d) 125
8. यदि $x^2 - 7x + 1 = 0$ है, तब $\frac{20x}{5x^2 - 15x + 5}$ का मान क्या होगा?
 (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 4
9. यदि $2x + \frac{1}{3x} = 5$ है, तब $16x^2 + \frac{4}{9x^2}$ का मान क्या होगा?
 (a) $\frac{284}{3}$ (b) $\frac{84}{3}$
 (c) $\frac{184}{3}$ (d) 3
10. यदि $x + \frac{1}{x} = -2$ है, तब $x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है—
 (a) 0 (b) 2
 (c) -2 (d) -5
11. यदि $5a + \frac{1}{3a} = 5$ है, तब $9a^2 + \frac{1}{25a^2}$ का मान क्या होगा?
 (a) 0 (b) 5
 (c) 7.8 (d) 4
12. यदि $x - \frac{1}{x-3} = 0$ है, तब $(x-3)^2 + \frac{1}{(x-3)^2}$ का मान क्या होगा?
 (a) 9 (b) 7
 (c) 11 (d) 14
13. यदि $x^2 + \frac{1}{x^2+1} = 6$ है, तब $(x^2+1)^2 + \frac{1}{(x^2+1)^2}$ का मान क्या होगा?
 (a) 0 (b) 5
 (c) 47 (d) 4

14. यदि $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$ है, तब $x^2 + y^2$ का मान

क्या होगा?

- (a) 2 (b) 4
(c) 8 (d) 16

15. यदि $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 0$ है, तब $x^2 + y^2$ का मान

क्या होगा?

- (a) 0 (b) 4
(c) 8 (d) 16

16. यदि $\frac{2p}{p^2 - 2p + 1} = \frac{1}{4}$, $p \neq 0$ है, तब $p + \frac{1}{p}$ का मान

क्या होगा?

- (a) 4 (b) 5
(c) 10 (d) 12

17. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$ है, तब $x^{2006} + x^{2003} + x^{90} + x^{84} + x^{14} + x^{12} + x^6 + 1$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) 84 (d) 206

18. यदि $x + \frac{1}{x} = 5$ है, तब $\frac{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1}{x^4 + 1}$ का मान

क्या होगा?

- (a) $\frac{43}{23}$ (b) $\frac{47}{21}$
(c) $\frac{41}{23}$ (d) $\frac{45}{21}$

19. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $\frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) 3 (b) -1
(c) 1 (d) -3

20. यदि $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$ है, तब $x^{11} + y^{35}$ का मान क्या होगा?

- (a) -1 (b) 0
(c) 1 (d) 2

21. यदि $a^2 + b^2 + 2b + 4a + 5 = 0$ है, तब $\frac{a-b}{a+b}$ का मान क्या होगा?

- (a) 3 (b) -3
(c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

22. यदि $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ है, तब $x - y$ का मान क्या होगा?

- (a) 4 (b) -4
(c) 0 (d) 8

23. यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ है, तब $x^{17} + \frac{1}{x^{17}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) $\sqrt{3}$ (b) $-\sqrt{3}$
(c) 1 (d) 0

24. यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ है, तब $x^6 - \frac{1}{x^6} + 2$ का मान क्या होगा?

- (a) $\sqrt{3}$ (b) 2
(c) 1 (d) 0

25. यदि $x^2 + x + 1 = 0$ है, तब $x^3 + 1$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) -1

26. यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ है, तब $x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$ का मान क्या होगा?

- (a) -1 (b) -2
(c) 1 (d) 2

27. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$ है, तब

$x^{206} + x^{200} + x^{90} + x^{84} + x^{18} + x^{12} + 1$ का मान क्या होगा?

- (a) 84 (b) 206
(c) 0 (d) 1

28. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{3}$ है, तब

$x^{506} + x^{500} + x^{206} + x^{200} + x^{90} + x^{84} + x^{18} + x^{12}$

का मान क्या होगा

- (a) 84 (b) 206
(c) 0 (d) 1

29. यदि $x = (a+b-c)$, $y = (b+c-a)$ और $z = (c+a-b)$ है, तब $(x-a)^3 + (y-b)^3 + (z-c)^3$ का मान क्या होगा?

- (a) $3(x-a)(y-b)(z-c)$ (b) $3xyz$
(c) $(x-a)(y-b)(z-c)$ (d) $3abc$

30. यदि $a+b+c=0$ है, तब $\frac{a+b}{c} - \frac{2b}{c+a} + \frac{b+c}{a}$ का मान क्या होगा?

- (a) -1 (b) 0
(c) 1 (d) 2

31. यदि $a+b+c=0$ है, तब

$$\frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(a+c)(b+c)} + \frac{1}{(b+a)(c+a)}$$

का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 0
(c) -1 (d) -2

32. $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a^2b - ab^2} = ?$

- (a) $\frac{1}{a-b}$ (b) $\frac{2}{a-b}$
(c) $\frac{4}{a-b}$ (d) $\frac{1}{ab}$

33. यदि $4x = 8y$ है, तब $\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

34. यदि $x + \frac{1}{x} = a$ है, तब $x^3 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$ का मान क्या होगा?

- (a) $a^3 + a^2$
(b) $a^3 + a^2 - 5a$
(c) $a^3 + a^2 - 3a - 2$
(d) $a^3 + a^2 - 4a - 2$

35. यदि $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$ और $x > 1$ है, तब $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान क्या होगा?

- (a) 54 (b) 18
(c) 72 (d) 36

36. यदि $\frac{x^2-1}{x} = 2\sqrt{3}$ है, तब $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = ?$

- (a) 21 (b) 15
(c) 56 (d) 12

37. यदि $x+y=a$ और $xy=b^2$ है, तब $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ का मान a और b के पद में ज्ञात कीजिए-

- (a) $(a^2 + 4b^2)a$ (b) $a^3 - 3b^2$
(c) $a^3 - 4b^2a$ (d) $a^3 + 3b^2$

38. यदि $a=298$, $b=297$, $c=296$ है, तब $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ का मान क्या होगा?

- (a) 4 (b) 5
(c) 3 (d) -3

39. यदि $a = 874, b = 875, c = 877$ है, तब $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ का मान क्या होगा?

- (a) 4 (b) 5
(c) 3 (d) 7

40. यदि $a = 9, b = 10, c = 11$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान क्या होगा?

- (a) 70 (b) 50
(c) 30 (d) 90

41. यदि $a = 115, b = 116, c = 117$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान क्या होगा?

- (a) 1404 (b) 2044
(c) 1044 (d) 2444

42. यदि $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 0$ है, तब $a + b$ का मान क्या होगा?

- (a) 5 (b) -3
(c) -2 (d) 3

43. यदि $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 0$ है, तब $a + b + c$ का मान क्या होगा?

- (a) -6 (b) -3
(c) -2 (d) 6

44. यदि $(a+1)^2 + (b+2)^2 + (c+3)^2 + (d+4)^2 = 0$ है, तब $a + b + c + d$ का मान क्या होगा?

- (a) 10 (b) -30
(c) 24 (d) -10

45. यदि $a^2 + b^2 + 4a + 6b + 13 = 0$ है, तब $a + b$ का मान क्या होगा?

- (a) -5 (b) -3
(c) 5 (d) 6

46. यदि $a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 6b - 8c + 29 = 0$ है, तब $a + b + c$ का मान क्या होगा?

- (a) -9 (b) -3
(c) 5 (d) 9

47. यदि $a^2 + b^2 + c^2 + 2(a + b + c) + 3 = 0$ है, तब $(a + b + c)$ का मान क्या होगा?

- (a) 9 (b) 3
(c) -3 (d) -9

48. $\frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ का मान क्या है?

- (a) 9 (b) -3
(c) 3 (d) -9

49. यदि $x^a x^b x^c = 1$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3$ का मान क्या होगा?

- (a) $a + b + c$ (b) $3abc$
(c) 9 (d) $-3abc$

50. यदि $x = a(b-c), y = b(c-a)$ & $z = c(a-b)$ है, तब

$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{3abc}{xyz}$ (b) $\frac{abc}{xyz}$
(c) $\frac{3xyz}{abc}$ (d) 1

51. यदि $x = y(b-c), y = z(c-a)$ और $z = x(a-b)$ है, तब

$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3}$ का मान क्या होगा?

- (a) -9 (b) -3
(c) 1 (d) 3

52. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $\frac{1}{abc} \{(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3\}$ का मान क्या होगा?

- (a) 9 (b) -3
(c) 3 (d) -9

53. यदि $b - a = 1$ है, तब $a^3 - b^3 + 3ab = ?$

- (a) 1 (b) 0
(c) 3 (d) -1

54. यदि $x + y + z = 10, x^2 + y^2 + z^2 = 30$ है, तब $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान क्या होगा?

- (a) 50 (b) -50
(c) 60 (d) -60

55. यदि $x + y + z = 9, x^2 + y^2 + z^2 = 35$ है, तब $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान क्या होगा?

- (a) 105 (b) 108
(c) 109 (d) 125

56. यदि $a = 25, b = 15, c = -10$ है, तब

$$\frac{(a)^3 + (b)^3 + (c)^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2} \text{ का मान क्या होगा?}$$

- (a) 30 (b) -15
(c) -30 (d) 15

57. यदि $a = -5, b = -6, c = 10$ है, तब

$$\frac{(a)^3 + (b)^3 + (c)^3 - 3abc}{(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)} \text{ का मान क्या होगा?}$$

- (a) -1 (b) 1
(c) 21 (d) 18

58. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$ का मान क्या होगा?

- (a) -1 (b) 1
(c) 0 (d) 18

59. $\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} +$

$$\frac{1}{(c-a)(a-b)} = ?$$

- (a) abc (b) 1
(c) 0 (d) $-abc$

60. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $(a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b)$ का मान क्या होगा?

- (a) $3abc$
(b) $3(ab+bc+ca)$
(c) $3(ab-bc-ca)$
(d) इनमें से कोई नहीं

61. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}$ का मान क्या होगा?

- (a) 2 (b) -1
(c) 0 (d) $-abc$

62. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 - bc}$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

63. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $\frac{a^2 - bc}{b^2 - ca}$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

64. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

65. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4 + b^4 + c^4}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{4}$

66. यदि $a + b + c = 0$ है, तब $\frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} +$

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} \text{ का मान क्या होगा?}$$

- (a) 0 (b) 1
(c) 3 (d) $a + b + c$

67. यदि $a(a+2) = a + b + c, b(b+2) = a + b + c$ और $c(c+2) = a + b + c$ है, तब

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \text{ का मान क्या होगा?}$$

- (a) -1 (b) 2
(c) 1 (d) 0

68. यदि $a + b + c = 2s$ है, तब $\frac{(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ का मान क्या होगा?
- (a) 1 (b) 0
(c) $a^2 + b^2 + c^2$ (d) 2
69. यदि $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1$, ($x, y \neq 0$) है, तब $2(x^3 + y^3) = ?$
- (a) 2 (b) 1
(c) -1 (d) 0
70. यदि $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$, ($x, y \neq 0$) है, तब $\{x^3 + y^3 + 3xy(x + y)\} = ?$
- (a) 1 (b) 0
(c) -1 (d) 2
71. यदि $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ है, तब $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} = ?$
- (a) 18 (b) 36
(c) 24 (d) 12
72. यदि $\frac{11}{x+11} + \frac{23}{y+23} + \frac{239}{z+239} = 2$ है, तब $\frac{x}{x+11} + \frac{y}{y+23} + \frac{z}{z+239}$ का मान क्या होगा?
- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 4
73. यदि x, y, z धनात्मक पूर्णांक है, $x^2 + y^2 = 45$ और $y^2 + z^2 = 40$ है, तब $of x + y + z$ का मान ज्ञात कीजिए।
- (a) 11 (b) 10
(c) 20 (d) 15
74. यदि $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{7} = \frac{xy}{5}$ है, तब xy का मान क्या होगा?
- (a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$
(c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$
75. यदि $x = 2 \cdot 2^{103} + 2^{104}$ है, तब $x^3 - 6x^2 + 18x + 18$ का मान क्या होगा?
- (a) 22 (b) 40
(c) 33 (d) 45
76. यदि $x = b + c - 2a$, $y = c + a - 2b$, $z = a + b - 2c$ है, तब $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$ का मान क्या होगा?
- (a) $a + b + c$ (b) $a + b - c$
(c) 0 (d) $a - b + c$
77. यदि $pq(p + q) = 1$ है, तब $\frac{1}{p^3 q^3} - p^3 - q^3$ का मान क्या होगा?
- (a) 1 (b) -2
(c) 3 (d) 0
78. यदि $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = a - b\sqrt{6}$ है, तब a और b का मान क्या होगा?
- (a) $a = 1, b = 4$
(b) $a = 2, b = 3$
(c) $a = 4, b = 1$
(d) $a = 2, b = -5/6$
79. यदि $\frac{5 + \sqrt{3}}{7 - 4\sqrt{3}} = 47a + \sqrt{3}b$ है, तब a और b का मान क्या होगा?
- (a) $a = 3, b = 5$ (b) $a = 1, b = 27$
(c) $a = 7, b = 3$ (d) $a = 2, b = 7$
80. यदि $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ और $y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ है, तब $x^2 + y^2$ का मान क्या होगा?
- (a) 96 (b) 98
(c) 90 (d) 100
81. यदि $a = 3.23, b = 5.95$ और $c = 2.72$ है, तब $of a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$ का मान क्या होगा?
- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

82. यदि $5^{\sqrt{x}} + 12^{\sqrt{x}} = 13^{\sqrt{x}}$ है, तब x का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{25}{4}$ (b) 4
(c) 9 (d) 16

83. $(x^{b+c})^{b-c} \cdot (x^{c+a})^{c-a} \cdot (x^{a+b})^{a-b}$ ($x \neq 0$) का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) 1 (b) 2
(c) -1 (d) 0

84. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = ?$

- (a) 0 (b) 1
(c) x^{abc} (d) $x^{(a+b+c)}$

85. $\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{a-c}}$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) x^{a-b-c} (d) इनमें से कोई नहीं

86. $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b} \cdot \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c}$ का मान क्या

होगा?

- (a) 1 (b) x^{abc}
(c) $x^{(a+b+c)}$ (d) $x^{(ab+bc+ca)}$

87. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = ?$

- (a) 1 (b) $\frac{1}{x^{abc}}$

(c) $\frac{1}{x^{ab+bc+ca}}$

(d) इनमें से कोई नहीं

88. यदि $a = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ और $b = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ है, तब

$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{5}{3}$

89. यदि $x = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ और $y = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$ है, तब $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$ का मान क्या होगा?

- (a) 14 (b) 16
(c) 10 (d) 18

90. यदि $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 21$ और $a^2 + ab + b^2 = 7$ है, तब ab का मान क्या होगा?

- (a) -1 (b) 0
(c) 2 (d) 1

91. यदि $a + b + c = 0$ है, तब

$$\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$$

का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 0
(c) abc (d) x

92. यदि $\frac{7x-3}{x} + \frac{7y-3}{y} + \frac{7z-3}{z} = 0$ है, तब

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ का मान क्या होगा

- (a) 7 (b) 9
(c) 1 (d) 0

93. यदि $2^x = 4^y = 8^z$ और $\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} = 4$ है, तब x का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{7}{16}$ (b) $\frac{16}{7}$
(c) $\frac{8}{16}$ (d) $\frac{6}{16}$

94. यदि $\frac{x^2}{by+cz} = \frac{y^2}{cz+ax} = \frac{z^2}{ax+by} = 4$ है, तब

$\frac{a}{4a+x} + \frac{b}{4b+y} + \frac{c}{4c+z}$ का मान क्या होगा?

- (a) -1 (b) $\frac{1}{4}$
(c) 1 (d) -2

95. यदि $\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + \frac{a}{x} = \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} + \frac{b}{x}$, ($b \neq a$) है, तब x का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{ab}{a+b}$ (b) 1
(c) $\frac{a}{a+b}$ (d) $\frac{b}{a+b}$

96. यदि $x^2 - 2xy + 5y^2 - 4y + 1 = 0$ है, तब x और y का मान क्या होगा?

- (a) $x = 1/2, y = 2$
(b) $x = 1/2, y = 1/2$
(c) $x = 1, y = -1$
(d) $x = 2, y = 1$

97. यदि $a^x = b$, $b^y = c$ और $xyz = 1$ है, तब c^z का मान क्या होगा?

- (a) a (b) b
(c) ab (d) a/b

98. यदि $(3.7)^x = (0.037)^y = 10000$ है, तब $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 2
(c) $1/2$ (d) $1/4$

99. यदि $p^x = r^y = m$ और $r^x = p^y = n$ है, तब निम्नलिखित में से कौन सा सही है?

- (a) $xw = yz$ (b) $xz = yw$
(c) $x + y = w + z$ (d) $x - y = w - z$

100. $x(y-z)(y+z) + y(z-x)(z+x) + z(x-y)(x+y)$ का मान क्या होगा?

- (a) $(x+y)(y+z)(z+x)$
(b) $(x-y)(x-z)(z-y)$
(c) $(x+y)(z-y)(x-z)$
(d) $(y-x)(z-y)(x-z)$

101. यदि $a = \frac{1+x}{2-x}$ है, तब $\frac{1}{a+1} + \frac{2a+1}{a^2-1}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{(1+x)(2+x)}{2x-1}$ (b) $\frac{(1-x)(2-x)}{x+1}$
(c) $\frac{(1+x)(2-x)}{2x-1}$ (d) $\frac{(1-x)(2-x)}{2x+1}$

102. यदि $\frac{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}{4(x-y)(y-z)(z-x)}$ है तब इसका मान क्या होगा?

- (a) $-\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$
(c) $\frac{3}{4}$ (d) 0

103. यदि $x = (b-c)(a-d)$, $y = (c-a)(b-d)$, $z = (a-b)(c-d)$ है, तब $x^3 + y^3 + z^3$ का मान क्या होगा?

- (a) xyz (b) $2xyz$
(c) $3xyz$ (d) $-3xyz$

104. यदि $x^2 + 2 = 2x$ है, तब $x^4 - x^3 + x^2 + 2$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) -1 (d) $\sqrt{2}$

105. यदि $2^x = 3^y = 6^z$ है, तब $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

106. यदि $(x^2 + y^2)(p^2 + q^2) = (xp + yq)^2$ है, तब इनमें से कौन सही है?

- (a) $xy = pq$ (b) $px = yq$
 (c) $xq = yp$
 (d) इनमें से कोई नहीं

107. यदि $x^2 + 8y^2 + 9z^2 - 4xy - 12yz = 0$ तब—

- (a) $x = y = z$
 (b) $3x = 2y = z$
 (c) $x = 2y = 3z$
 (d) $x + 2\sqrt{2}y + 3z = 0$

108. यदि $a = 89, b = -69, c = 8$ है, तब

$9(a + b)^2 + 49c^2 - 42(a + b)c$ का मान क्या होगा?

- (a) 2 (b) 4
 (c) 16 (d) 0

109. यदि $x = \frac{p+q}{p-q}$ और $y = \frac{p-q}{p+q}$ है, तब $\frac{x-y}{x+y}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{p^2 + q^2}{2pq}$ (b) $\frac{2pq}{p^2 + q^2}$
 (c) $\frac{2pq}{p^2 - q^2}$ (d) $\frac{2(p^2 - q^2)}{pq}$

110. $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1) = ?$

- (a) $2^{256} - 1$ (b) $2^{256} + 1$
 (c) $2^{128} - 1$ (d) $2^{128} + 1$

111. यदि $x + y + z = 0$ है, तब

$[(y-z-x)/2]^3 + [(z-x-y)/2]^3 + [(x-y-z)/2]^3$ का मान क्या होगा?

- (a) $24xyz$ (b) $-24xyz$
 (c) $3xyz$ (d) xyz

112. यदि $ax + by = 6, bx - ay = 2$ & $x^2 + y^2 = 4$ है, तब $(a^2 + b^2)$ का मान क्या होगा?

- (a) 2 (b) 4
 (c) 5 (d) 10

113. यदि $a = 3 + 2\sqrt{2}$ है, तब $\frac{a^6 + a^4 + a^2 + 1}{a^3}$ का मान

क्या होगा?

- (a) 204 (b) 212
 (c) 192 (d) 240

114. यदि $x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 2(y-x)$ है, तब $x^3 + y^3 + z^3$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 0
 (c) 2 (d) 3

115. यदि $a^3b = abc = 180$ और a, b, c भिन्नतमक संख्याएँ हैं, तब c का मान क्या होगा?

- (a) 4 (b) 25
 (c) 110 (d) 1

116. यदि $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ है, तब $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ का मान क्या होगा?

- (a) 2 (b) 3
 (c) $2\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{3}$

117. यदि $(a^2 + b^2)^3 = (a^3 + b^3)^2$ है, तब $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$
 (c) $-\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$

118. यदि $x \neq 0, y \neq 0$ & $z \neq 0$ और

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$ है, तब x, y, z के

बीच क्या संबंध होगा?

- (a) $x = y = z$ (b) $x + y + z = 0$
 (c) $x + y = z$ (d) $x + y = z = 0$

119. यदि $p - 2q = 4$ है, तब $p^3 - 8q^3 - 24pq - 64$ का मान क्या होगा?

- (a) 2 (b) 0
 (c) 3 (d) -1

120. यदि $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$ और a, b, c परिमेय संख्याएँ हैं, तब $a + b + c$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

121. यदि $a^3 - b^3 - c^3 = 0$ है, तब $a^9 - b^9 - c^9 - 3a^3b^3c^3$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) -1

122. यदि $\frac{4x-3}{x} + \frac{4y-3}{y} + \frac{4z-3}{z} = 0$ है, तब

$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$ का मान क्या होगा?

- (a) 18 (b) 6
(c) 8 (d) 12

123. यदि $(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 0$ है, तब

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16}$ का मान क्या होगा?

- (a) 12 (b) 9
(c) 3 (d) 1

124. यदि $x = \sqrt[3]{5} + 2$ है, तब $x^3 - 6x^2 + 12x - 13$ का मान क्या होगा?

- (a) -1 (b) 1
(c) 2 (d) 0

125. यदि $(x+a)(x+b) = 1$ और $a-b+5 = 0$ है, तब

$(x+a)^3 - \frac{1}{(x+a)^3}$ का मान क्या होगा?

- (a) -140 (b) 110
(c) -110 (d) 140

126. यदि $\sqrt{x} = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ है, तब $x^2 - 16x + 6$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) -2
(c) 2 (d) 4

127. $\sqrt{2\sqrt[3]{4}\sqrt{2\sqrt[3]{4}\sqrt{2\sqrt[3]{4}\dots\dots\dots}}} = ?$

- (a) 2 (b) 2^2
(c) 2^3 (d) 2^5

128. $(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3$ का एक गुणक क्या होगा?

- (a) $(a+b)(a-b)$
(b) $(a+b)(a+b)$
(c) $(a-b)(a-b)$
(d) $(b-c)(b-c)$

129. यदि $a-b = 3$ और $a^3 - b^3 = 117$ है, तब $|a+b|$ का मान क्या होगा?

- (a) 3 (b) 5
(c) 7 (d) 9

130. यदि $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ जहाँ $a+b+c \neq 0$, $abc \neq 0$ है, तब $(a+b)(b+c)(c+a) = ?$

- (a) 0 (b) 1
(c) -1 (d) 2

131. x का वह मान करें जिस पर $2 - 3x - 4x^2$ का मान अधिकतम होगा?

- (a) $\frac{41}{46}$ (b) $-\frac{41}{16}$
(c) $\frac{3}{8}$ (d) $-\frac{3}{8}$

132. $(8-x)(4-x)$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

- (a) -4 (b) 4
(c) 6 (d) -6

133. $(a+b-2c)^3 + (b+c-2a)^3 + (c+a-2b)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) $(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$
(b) $2(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$
(c) $3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$
(d) $-3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$

134. यदि $\frac{5x}{2x^2+5x+1} = \frac{1}{3}$ है, तब $\left(x + \frac{1}{2x}\right)$ का मान क्या होगा?

- (a) 10 (b) 20
(c) 5 (d) 15

135. यदि $x^3 + \frac{3}{x} = 4(a^3 + b^3)$ और $3x + \frac{1}{x^3} = 4(a^3 - b^3)$ है, तब $4(a^2 - b^2)$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 4

136. यदि $x + y + z = 0$ है, तब

$$\frac{(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 - 17xyz}{10(x+y)(y+z)(z+x)} = ?$$

- (a) $3xyz$ (b) 4
(c) 0 (d) 2

137. यदि $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = -1$, $xyz = -1$ है, तब $x^3 + y^3 + z^3$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 0
(c) -2 (d) -1

138. यदि $a^2 + 4b^2 + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 5$ है, तब $a^2 + b^2$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) -1
(c) 2 (d) 0

139. इस व्यंजक $\frac{\left(x + \frac{1}{y}\right)^a \left(x - \frac{1}{y}\right)^b}{\left(y + \frac{1}{x}\right)^a \left(y - \frac{1}{x}\right)^b}$ का सरलीकरण

कोजिए।

- (a) $\left(\frac{y}{x}\right)^{a+b}$ (b) $\left(\frac{x}{y}\right)^{a+b}$
(c) $\left(\frac{y}{x}\right)^{a-b}$ (d) $\left(\frac{x}{y}\right)^{a-b}$

140. यदि $a^b = b^a$ है, तब $\left(\frac{a}{b}\right)^{a/b}$ का मान क्या होगा?

- (a) $a^{\left(\frac{b}{a}-1\right)}$ (b) $a^{\left(\frac{a}{b}-1\right)}$
(c) $a^{\frac{a}{b}}$ (d) $a^{\frac{b}{a}}$

141. $\frac{a^{1/2} + a^{-1/2}}{1-a} + \frac{1-a^{-1/2}}{1+\sqrt{a}} = ?$

- (a) $\frac{a}{a-1}$ (b) $\frac{3+a}{(1-a)}$
(c) $\frac{2}{a-1}$ (d) $\frac{2}{1-a}$

142. यदि $x = \frac{2pq}{1+q^2}$ है, तब $\frac{\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x}}{\sqrt{p+x} - \sqrt{p-x}} = ?$

- (a) p (b) $p-q$
(c) $1/q$ (d) $2q$

143. यदि $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ और $x-y = 4\sqrt{2}$ है, तब $(x^2 + y^2)$ का मान क्या होगा?

- (a) 30 (b) 32
(c) 34 (d) 38

144. यदि $a = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-3}$ और $b = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-3}$ है, तब $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ का मान क्या होगा?

- (a) $48\sqrt{2}$ (b) $50\sqrt{3}$
(c) 1 (d) 5

145. यदि $a = x+y$, $b = x-y$, $c = x+2y$ है, तब $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ का मान क्या होगा?

- (a) $4y^2$ (b) $7y^2$
(c) $6y^2$ (d) $5y^2$

146. यदि $x+y+z = 13$ है, तब $(x-2)(y+1)(z-3)$ का अधिकतम मान क्या होगा?

- (a) 54 (b) 25
(c) 27 (d) 30

147. यदि $\sqrt{28-6\sqrt{3}} = \sqrt{3}a+b$ है, तब $(a-b) = ?$
(जहाँ a, b परिमेय संख्या है।)
(a) -2 (b) 2
(c) 4 (d) -1
148. यदि $a \neq b$ निम्न से कौन-सा विकल्प सही है ?
(a) $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$
(b) $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$
(c) $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$
(d) उपरोक्त सभी
149. यदि $a+b=1$, $b+c=2$ और $c+a=3$ है, तब $(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$ का मान क्या होगा?
(a) 3.5 (b) 18
(c) 7 (d) 9
150. यदि $(a+b+2c+3d)(a-b-2c+3d) = (a-b+2c-3d)(a+b-2c-3d)$ है, तब $2bc$ का मान क्या होगा?
(a) $3ad$ (b) $\frac{3}{2}$
(c) a^2d^2 (d) $\frac{3a}{2d}$
151. यदि $2s = a+b+c$ है, तब $(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2 - a^2 - b^2 - c^2$ का मान क्या होगा?
(a) -1 (b) 1
(c) 2 (d) 0
152. यदि $a^{1/m} = b^{1/n} = c^{1/p}$ और $abc = 1$ है, तब $(m+n+p)$ का मान क्या होगा?
(a) 0 (b) 2
(c) 1 (d) -2
153. यदि $2s=9$ है, तब $s^2 + (s-1)^2 + (s-3)^2 + (s-5)^2$ का मान क्या होगा?
(a) 9 (b) 25
(c) 45 (d) 35
154. यदि p, q और r इस तरह है कि $p+q=r$ और $pq=30$ है, तब $p^3+q^3-r^3$ का मान क्या होगा?
(a) 0 (b) 90
(c) +90
(d) ज्ञात नहीं किया जा सकता
155. यदि $x+y=\sqrt{3}$ और $x-y=\sqrt{2}$ है, तब $8xy(x^2+y^2)$ का मान क्या होगा?
(a) $\frac{5}{9}$ (b) 5
(c) $\frac{5}{2}$ (d) $\sqrt{6}$
156. यदि $2a+3b=4$ है, तब $8a^3+27b^3+72ab$ का मान क्या होगा?
(a) 54 (b) 48
(c) 72 (d) 64
157. यदि $x + \frac{2}{x} = 3$ है, तब $\frac{x^2+x+2}{x^2(3-x)}$ का मान क्या होगा?
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3
158. यदि $x=ay$ और $y=bx$ है, तब $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = ?$
(a) 0 (b) 1
(c) -1 (d) 2
159. यदि $a = \frac{4}{3}$ है, तब $27a^3 - 108a^2 + 144a - 317$ का मान क्या होगा?
(a) 261 (b) -253
(c) -245 (d) 0
160. यदि $a+b=5$ और $a^2+b^2=13$ है, तब $a-b$ का मान क्या होगा?
(a) 1 (b) -3
(c) 2 (d) -1

161. यदि $x^2 + x - 6 = 0$ और $x^2 + 6x + 9 = 0$ है तब x का मान क्या होगा?
 (a) 2 (b) 3
 (c) -2 (d) -3
162. यदि $x + \frac{1}{x} = 3$ है, तब $\frac{x^3 + \frac{1}{x}}{x^2 - x + 1}$ का मान क्या होगा?
 (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$
 (c) $\frac{7}{2}$ (d) $\frac{11}{2}$
163. यदि $ax + by = 3$, $bx - ay = 4$ और $x^2 + y^2 = 1$ है, तब $a^2 + b^2$ का मान क्या होगा?
 (a) 17 (b) 16
 (c) 9 (d) 25
164. यदि $a + b + c = 15$ और $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ है, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान क्या होगा?
 (a) 200 (b) 180
 (c) 190 (d) 210
165. यदि $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$ है, तब $a^3 + b^3 = ?$
 (a) 0 (b) -1
 (c) 1 (d) 2
166. यदि $2x = a + \sqrt{\frac{4b^3 - a^3}{3a}}$ और $2y = a - \sqrt{\frac{4b^3 - a^3}{3a}}$ है, तब $x^3 + y^3$ का मान क्या होगा?
 (a) a (b) b
 (c) a^3 (d) b^3
167. यदि $a - b = 2$ और $ab = 15$ है, तब $(a^2 - b^2)(a^3 - b^3)$ का मान क्या होगा?
 (a) 1450 (b) 1500
 (c) 1528 (d) 1568
168. यदि $4x - 5z = 16$ और $xz = 12$ है, तब $64x^3 - 125z^3$ का मान क्या होगा?
 (a) 15610 (b) 15616
 (c) 15618 (d) 15620
169. यदि $x + y + z = 15$ और $xy + yz + zx = 75$ है, तब $\frac{x+4y+z}{3z}$ का मान क्या होगा?
 (a) 1 (b) 0
 (c) 2 (d) -1
170. यदि $a^2 + b^2 = 2$ और $c^2 + d^2 = 1$ है, तब $(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$ का मान क्या होगा?
 (a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{1}{2}$
 (c) 1 (d) 2
171. यदि $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2$ है, तब a, b और c के बीच क्या संबंध है?
 (a) $a = b = c$ (b) $a = b \neq c$
 (c) $a < b < c$ (d) $a > b > c$
172. यदि $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$ है, तब $x^{26} + \frac{1}{x^{26}}$ का मान क्या होगा?
 (a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{1}{2}$
 (c) 1 (d) 2
173. यदि $\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2}}}}} = 32^n$ है, तब a का मान क्या होगा?
 (a) $\frac{41}{160}$ (b) $\frac{41}{80}$
 (c) 1 (d) 2
174. यदि $a^2 = 2$ है, तब $(a+1)$ का मान क्या होगा?
 (a) $\frac{a-1}{3-2a}$ (b) $\frac{a-1}{3+2a}$
 (c) $\frac{a+1}{3+2a}$ (d) $\frac{a+1}{3+2a}$

175. यदि $(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r = (a+b-c)s$ है, तब $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{1}{p}$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) $a+b+c$

176. यदि $x(x-3) = -1$ है, तब $x^3(x^3-18)$ का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) -1

177. यदि $x = \frac{p+q+r}{3}$ है, तब $(x-p)^3 + (x-q)^3 + (x-r)^3 - 3(x-p)(x-q)(x-r)$ का मान क्या होगा?

- (a) pqr (b) $p+q+r$
(c) 0 (d) 3

178. यदि $a^2 + b^2 = 2(a-2b) - 5$ है, तब $a^3 + b^3 + 3ab$ का मान क्या होगा?

- (a) -13 (b) 13
(c) 0
(d) ज्ञात नहीं किया जा सकता

179. यदि $x + \frac{1}{x} = -1$ और $y + \frac{1}{y} = 2$ है, तब $(x)^3 + (y)^3$ का मान क्या होगा?

- (a) 2 (b) 1
(c) 0 (d) -2

180. यदि $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ और a, b, c धनात्मक पूर्णांक है तब $\frac{2a+7b+9c}{a+2b+3c} = ?$

- (a) $\frac{4}{9}$ (b) 1
(c) 3
(d) ज्ञात नहीं किया जा सकता

181. यदि $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} = 1$, $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 1$, $pqr = -1$, $abc = 1$, p, q, r और $a, b, c \neq 0$ है, तब

$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}$ का मान क्या होगा?

- (a) -1 (b) 0
(c) 3 (d) 2

182. यदि $x = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ है, तब $\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}} + \frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

183. यदि $x = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ है, तब $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} + \frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

184. यदि $x = \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ है, तब $\frac{x+\sqrt{8}}{x-\sqrt{8}} + \frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

185. यदि $x = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ है, तब $\frac{x+2\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}} + \frac{x+2\sqrt{3}}{x-2\sqrt{3}} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

186. यदि $x = \frac{4ab}{a+b}$ है, तब $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

187. यदि $x = \frac{12pq}{p+q}$ है, तब $\frac{x+6p}{x-6p} + \frac{x+6q}{x-6q} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

188. यदि $x = \frac{6pq}{p+q}$ है, तब $\frac{x+3p}{x-3p} + \frac{x+3q}{x-3q} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

189. यदि $x = \frac{8ab}{a+b}$ है, तब $\frac{x+4a}{x-4a} + \frac{x+4b}{x-4b} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

190. यदि $(x+y)^2 - z^2 = 4$, $(y+z)^2 - x^2 = 9$, $(z+x)^2 - y^2 = 36$ है, तब $(x+y+z)$ का मान क्या होगा?

- (a) 7 (b) -7
(c) ± 7 (d) 49

191. यदि $x = \sqrt{\frac{5+1}{5-1}}$ है, तब $5x^2 - 5x - 1$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 5
(c) 3 (d) 4

192. यदि $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है, तब $\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
(c) $\sqrt{3}$ (d) 2

193. यदि $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है, तब $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = ?$

- (a) $-\sqrt{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $-\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

194. यदि $\frac{x^2}{by+cz} = \frac{y^2}{cz+ax} = \frac{z^2}{ax+by} = \frac{1}{5}$ है, तब

$\frac{5a}{5x+a} + \frac{5b}{5y+b} + \frac{5c}{5z+c}$ का मान क्या होगा?

- (a) 5 (b) 2
(c) 1 (d) $\frac{1}{5}$

195. यदि $a+b+c=0$ ($a \neq b \neq c$) है, तब

$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab}$ का मान क्या

होगा?

- (a) 0 (b) $a+b+c$
(c) 1 (d) abc

196. यदि $xy = r$, $xz = r^2$, $yz = r^3$, $x+y+z = 13$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 91$ है, तब $\frac{z}{y}$ का मान क्या होगा?

- (a) 3 (b) $\frac{7}{3}$
(c) 4 (d) $\frac{13}{3}$

197. यदि $xy + yz + zx = xyz$ है, तब

$\frac{x+y}{xy(z-1)} + \frac{y+z}{yz(x-1)} + \frac{z+x}{zx(y-1)}$ का मान क्या होगा?

- (a) $-\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) 0 (d) 1

198. यदि $a+b+c = 2$ और $ab+bc+ca = -1$ है, तब $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$ का मान क्या होगा?

- (a) 5 (b) 10
(c) 15 (d) 25

199. यदि $\frac{b}{y} + \frac{z}{c} = 1$ और $\frac{c}{z} + \frac{x}{a} = 1$ है, तब $\frac{a}{x} + \frac{y}{b}$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) -1 (d) 2

200. यदि $x + \frac{2}{y} = 1$ और $y + \frac{1}{z} = 2$ है, तब $z + \frac{1}{2x}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) 2
(c) 1 (d) 6

201. यदि $a^x = m$, $a^y = n$ और $a^z = (m^x \cdot n^y)^z$ है, तब $xyz = ?$

- (a) 0 (b) 2
(c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

202. यदि $\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sqrt{3}$ और $\left(\frac{1}{3}\right)^m = \sqrt{2}$ है, तब $\frac{mk}{2}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

203. यदि $b = 36$ है, तब $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{b-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ का मान क्या होगा?

- (a) आँकड़े अप्रयाप्त (b) 12
(c) 6 (d) 0

204. यदि $x \in \mathbb{R}$ है, तब $(\sqrt{3}-x+5)(\sqrt{3}+x-5)$ का अधिकतम मान क्या होगा?

- (a) $\sqrt{3}$ (b) 5
(c) 3 (d) $\sqrt{3}+5$

205. यदि $x = \frac{\sqrt{93}+\sqrt{19}}{\sqrt{97}-\sqrt{23}}$ और $y = \frac{\sqrt{93}-\sqrt{19}}{\sqrt{97}+\sqrt{23}}$ है, तब

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}$ का मान क्या होगा?

- (a) 93 (b) 2
(c) 1 (d) 0

206. यदि $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ है, तब $(2x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 26x - 28)$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) $6\sqrt{6}$
(c) $3\sqrt{6}$ (d) $\sqrt{6}$

207. यदि $\frac{5}{3^{2/3} - 6^{1/3} + 2^{2/3}} = a\sqrt[3]{3} + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{6}$ है,

तब $a+b+c$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

208. यदि a, b वास्तविक संख्या और $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} - \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{a+b} = 4$ है, तब x का मान

क्या होगा, यदि $\frac{a^x+b^x}{a^2-b^2} = 2$

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) 2
(c) $\frac{3}{2}$ (d) 1

209. यदि $\frac{76}{4+\sqrt{7}+\sqrt{11}} = p+q\sqrt{7}+r\sqrt{11}+s\sqrt{77}$ है,

तब $p+q+r+s = ?$

- (a) 6 (b) 4
(c) 9 (d) 8

210. यदि $x = 4 + \sqrt{11} + \sqrt{7}$ है, तब $x^4 - 16x^3 + 60x^2 + 32x$ का मान क्या होगा?

- (a) 244 (b) 264
(c) 280 (d) 304

211. यदि $5^a + 2^{b+1} = 189$ और $5^{a+1} + 2^{b-2} = 633$ है, तब $a+b$ का मान क्या होगा?

- (a) 8 (b) 7
(c) 10 (d) 9

212. यदि $\frac{x-a^2}{b+c} + \frac{x-b^2}{c+a} + \frac{x-c^2}{a+b} = 4(a+b+c)$ है, तब x का मान क्या होगा?

- (a) $(a+b+c)^2$ (b) $a^2+b^2+c^2$
(c) $ab+bc+ca$
(d) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

213. $\frac{1}{1+p^{a-b}+p^{a-c}} + \frac{1}{1+p^{b-a}+p^{b-c}} + \frac{1}{1+p^{c-a}+p^{c-b}}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) 2
(c) 1 (d) -3

214. $p + \sqrt{p^2 + \sqrt{p^4 + \sqrt{p^8 + \sqrt{p^{16}}}}} \dots \infty$ का मान ज्ञात करें।

- (a) $p \left(\frac{\sqrt{5}+2}{2} \right)$ (b) $p \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$
(c) $\frac{p}{1+\sqrt{p}}$ (d) $p \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)$

215. यदि $x = \sqrt[4]{4\sqrt[4]{4\sqrt[4]{4}}} \dots \infty = 32^a$ है, तब $a = ?$

- (a) $\frac{2}{15}$ (b) $\frac{4}{15}$
(c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{1}{5}$

216. यदि $y = \frac{x^2 - 10x + 64}{x^2 + 10x + 64}$ तब y का न्यूनतम मान होगा?

- (a) $\frac{13}{3}$ (b) $\frac{13}{4}$
(c) $\frac{3}{13}$ (d) $\frac{4}{13}$

217. यदि $p = \sqrt{5} - 2$ है, तब $p^4 + 16p^2 + 8p^3 + 4 = ?$

- (a) 3 (b) 5
(c) 1 (d) 0

218. यदि $x = 2y + 6$ तब $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216 = ?$

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) -1

219. यदि $p = 2 - a$ है, तब $a^3 + 6ap + p^3 - 6 = ?$

- (a) 1 (b) 0
(c) 2 (d) 4

220. यदि $x^4 + y^4 = 17$ और $x + y = 1$ है, तब $x^2y^2 - 2xy$ का मान क्या होगा?

- (a) 8 (b) 10
(c) 12 (d) 16

221. यदि $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = k$ है, तब $k = ?$

- (a) 1 (b) -1
(c) 2 (d) इसमें से कोई नहीं

222. यदि $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ है, तब

$$\frac{ax - by}{(a+b)(x-y)} + \frac{by - cz}{(b+c)(y-z)} + \frac{cz - ax}{(c+a)(z-x)}$$

का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 2
(c) 1 (d) 3

223. $\frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}$

का मान क्या होगा?

- (a) abc (b) $a+b+c$
(c) $ab+bc+ca$ (d) 3

224. $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2 - c^2 - a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{(c-a)(c-b)}$

का मान क्या होगा?

- (a) abc (b) $a+b+c$
(c) 2 (d) 0

225. यदि $x^2 + y^2 = z + 1$, $y^2 + z^2 = x + 1$,
 $z^2 + x^2 = y + 1$ है, तब xyz का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) 1 (b) $-\frac{1}{8}$
 (c) 1 या $\frac{1}{8}$ (d) 1 या $-\frac{1}{8}$

226. $\frac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}}}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$
 (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) 3

227. $\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$ का अधिकतम मान क्या होगा?

- (a) 3 (b) $\frac{1}{3}$
 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

228. $\frac{(a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4}{a+b+c}$

का मान क्या होगा?

- (a) $3abc$ (b) $4abc$
 (c) $6abc$ (d) $12abc$

229. $\frac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)} + \frac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$

का मान क्या होगा?

- (a) $a+b+c$ (b) 3
 (c) $a^2+b^2+c^2$ (d) abc

230. $\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a} + \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$

का मान क्या होगा?

- (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 4

231. यदि $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$ है, तब $x^{67} + x^{23} + x^{43} + x^{29} + x^{24} + x^{12} + x^6 + 3$ का मान क्या होगा?

- (a) $\sqrt{3}$ (b) 0
 (c) $2(2-\sqrt{3})$ (d) $2(2+\sqrt{3})$

232. यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ है, तब $x^{52} + x^{46} + x^{32} + x^{26} + x^{21} + x^{15} + x^8 + x^3 + 4$ का मान क्या होगा?

- (a) 0 (b) 3
 (c) 4 (d) 2

233. यदि $(ab-b+1)=0$ और $(bc-c+1)=0$ है, तब $(a-ac)$ का मान क्या होगा?

- (a) -1 (b) 0
 (c) 1 (d) 2

234. यदि $a+b+c=20$ और $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 30$ है, तब

$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$ का मान क्या होगा?

- (a) 597 (b) 600
 (c) 599

(d) सरल नहीं किया जा सकता

235. यदि $\frac{b-c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a-b}{c} = 1$ और $a-b+c \neq 0$ है, तब इनमें से कौन सा सम्बंध सही होगा?

- (a) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (b) $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c}$
 (c) $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ (d) $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

236. यदि $\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{z}{w}\right)$ है, तब $(xy + zw)^2$ का मान क्या होगा?

- (a) $(x^2 + z^2)(y^2 + w^2)$
(b) $x^2y^2 + z^2w^2$
(c) $x^2w^2 + y^2z^2$
(d) $(x^2 + w^2)(y^2 + z^2)$

237. यदि $x = \frac{a}{b+c}$, $y = \frac{b}{a+c}$ और $z = \frac{c}{a+b}$ है, तब

- $xy + yz + zx + 2xyz = ?$
(a) 2
(b) $(a+b)(b+c)(c+a)$
(c) 0
(d) 1

238. $\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+2}}}} = x$ का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) 1
(b) 3
(c) 6
(d) 12

239. $\frac{1}{x^2+5x+10}$ का अधिकतम मान होगा?

- (a) $\frac{15}{2}$
(b) 1
(c) $\frac{4}{15}$
(d) 2

240. यदि x, y धनात्मक पूर्णांक है और $x + y = 1$ है, तब

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

- (a) 12
(b) 20
(c) 12.5
(d) 13.3

241. यदि $p^2 = q^2 = r^2$ और $\frac{p}{q} = \frac{q}{r}$ है, तब $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)b$ का मान क्या होगा?

- (a) 1
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{3}{4}$
(d) 2

242. यदि $x^2(x+y+z) = 36$, $y^2(x+y+z) = 46$, $z^2(x+y+z) = 63$, $xy(x+y+z) = 111$, $yz(x+y+z) = 99$, $zx(x+y+z) = 82$ है, तब x का मान क्या होगा?

- (a) 6
(b) 7
(c) 2
(d) 4

243. यदि $x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$, $z = \frac{c-a}{c+a}$ है, तब $\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y} \cdot \frac{1+z}{1-z}$ का मान क्या होगा?

- (a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

244. यदि $x = 5$ & $y = z$ और x, y व z धनात्मक पूर्णांक है तब $x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)$ का अधिकतम मान क्या होगा?

- (a) 0
(b) 25
(c) 50
(d) -5

245. यदि x, y, z वास्तविक संख्या है एवं $x + 2y + z = -6$, तब $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2yz$ का अधिकतम मान होगा?

- (a) 12
(b) 8
(c) -12
(d) 6

246. यदि $a^x = bc$, $b^y = ac$, $c^z = ab$ है, तब

$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$ का मान क्या होगा?

- (a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

247. यदि $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ है, तब $xy + yz + zx$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{(a+b+c)^2}{x^2+y^2+z^2}$

(b) $\frac{x^2(a+b+c)^2 - a^2(x^2+y^2+z^2)}{2a^2}$

(c) $\frac{ax+by+cz}{(a+b+c)^2}$

(d) 3

248. यदि $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ है, तब $\frac{x^m + y^m + z^m + w^m}{x^{-m} + y^{-m} + z^{-m} + w^{-m}}$ का मान क्या होगा?

(a) $\frac{x}{y}$

(b) 1

(c) $(xyzw)^{m/2}$

(d) $(xyzw)^m$

249. यदि $\sqrt{13x^3 - 14x + 29} + \sqrt{13x^3 - 14x - 21} = 10$

है, तब $\sqrt{13x^3 - 14x + 29} - \sqrt{13x^3 - 14x - 21}$

का मान क्या होगा?

(a) 3

(b) 4

(c) 5

(d) 6

250. यदि $\frac{x^2}{by+cz} = \frac{y^2}{cz+ax} = \frac{z^2}{ax+by} = \frac{1}{3}$

है, तब $\frac{a}{a+3x} + \frac{b}{b+3y} + \frac{c}{c+3z}$ का मान क्या होगा?

(a) 1

(b) 2

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{3}$

251. यदि $x = \left(a + \sqrt{a^2 + b^3}\right)^{1/3} + \left(a - \sqrt{a^2 + b^3}\right)^{1/3}$

है, तब $x^3 + 3bx - 2a$ का मान क्या होगा?

(a) $2a^3$

(b) $-2a^3$

(c) 0

(d) 1

252. यदि $a = \frac{xy}{x+y}$, $b = \frac{xz}{x+z}$, $c = \frac{yz}{y+z}$ और a , b और $c \neq 0$ है, तो x का मान ज्ञात करो।

(a) $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$

(b) $\frac{2abc}{ab-ac+bc}$

(c) $\frac{2abc}{ab+bc+ac}$

(d) $\frac{2abc}{ab-ac-bc}$

253. यदि $\frac{x-a^2}{b^2+c^2} + \frac{x-b^2}{c^2+a^2} + \frac{x-c^2}{a^2+b^2} = 3$ है, तब x का मान क्या होगा?

(a) $a^2 + b^2$

(b) $a^2 + b^2 + c^2$

(c) $a^2 - b^2 - c^2$

(d) $a^2 + b^2 - c^2$

254. यदि $(x-5)(y+6)(z-8) = 1331$ है, तब $(x+y+z)$ का न्यूनतम मान क्या होगा?

(a) 40

(b) 33

(c) 19

(d) गैर अद्वितीय

255. यदि a, b, c और d चार धनात्मक संख्याएँ हैं और $a+b+c+d=4$ है, तब $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ का अधिकतम मान क्या होगा?

(a) 32

(b) 8

(c) 16

(d) 81

256. यदि x, y, z तीन धनात्मक पूर्णांक हैं और $x+y+z$

$= 1$ है, तब $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)$ का न्यूनतम मान होगा?

(a) 16

(b) 8

(c) 4

(d) 1

257. यदि a, b, c धनात्मक पूर्णांक हैं, तब $(a+b+c)$

$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ का न्यूनतम मान होगा?

(a) 1

(b) 9

(c) 12

(d) इनमें से कोई नहीं

258. यदि a, b, c धनात्मक पूर्णांक है तब—

$$\frac{(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)}{abc} \text{ का न्यूनतम}$$

मान क्या होगा?

- (a) 3 (b) 9
(c) 27 (d) 1

259. यदि $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{9}{8}} - \sqrt{\frac{8}{9}} \right)$ है, तब $\frac{18\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$ का

मान क्या होगा?

- (a) 16 (b) 17
(c) 19 (d) 20

260. यदि $\sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ है, तब $a + b + c$ का मान क्या होगा?

- (a) $\sqrt{10}$ (b) 10
(c) 11 (d) $\sqrt{11}$

261. यदि $x + \frac{1}{x} = 2a, y + \frac{1}{y} = 2c, x - \frac{1}{x} = 2b$ और

$y - \frac{1}{y} = 2d$ है, तब $xy + \frac{1}{xy}$ का मान क्या होगा?

- (a) $ac + bd$ (b) $ac - bd$
(c) $2(ac - bd)$ (d) $2(ac + bd)$

262. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान ज्ञात करें, यदि $(s-a), (s-b), (s-c)$ की जगह क्रमशः a, b, c है, जहाँ $3s = (a+b+c)$

- (a) 0 (b) $3abc$
(c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
(d) इनमें से कोई नहीं

263. $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

- (a) $3abc$
(b) $(a-b)(b-c)(c-a)$
(c) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
(d) $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$

264. $a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)$ का मान ज्ञात कीजिए—

- (a) $3a^2b^2c^2$
(b) $(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$
(c) $-(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$
(d) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)$

265. $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$ का मान ज्ञात कीजिए

- (a) $(a+b)(b+c)(c+a)$
(b) $(a-b)(b-c)(c-a)$
(c) 0
(d) abc

266. $(bc + ca + ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$ का मान क्या होगा?

- (a) $3abc(a+b)(b+c)(c+a)$
(b) $(a+b)(b+c)(c+a)$
(c) $(a-b)(b-c)(c-a)$
(d) $24abc$

267. $(a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4$ का मान क्या होगा?

- (a) $12abc(a+b+c)$
(b) $abc(a+b+c)$
(c) 2 (d) abc

268. $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2 - c^2 - a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{(c-a)(c-b)} = ?$

- (a) 2 (b) 1
(c) 3 (d) 4

269. यदि $a+b+c=0$ है, तब $\frac{2(a^4 + b^4 + c^4)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = ?$

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

270. यदि $x + \frac{1}{x} = 5$ और $x^2 + \frac{1}{x^3} = 8$ है, तब $x^3 + \frac{1}{x^2}$

का मान क्या होगा?

- (a) 125 (b) 215
(c) 256 (d) 525

271. यदि $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ है, तब

$7a^2 + 11ab - 7b^2$ का मान क्या होगा?

- (a) 109 (b) $11+56\sqrt{3}$
(c) $56\sqrt{3}$ (d) $11-56\sqrt{3}$

272. जब $2x = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$, तब $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{a-1}{2}$ (b) $\frac{a+1}{2}$
(c) $\frac{a}{2}$ (d) $\frac{a-2}{2}$

273. यदि $\frac{x^3+1}{x^2-1} = x + \sqrt{\frac{6}{x}}$ है तब $x + \frac{1}{x}$ का मान क्या होगा?

- (a) $\frac{13}{6}$ (b) $\frac{6}{13}$
(c) 3 (d) $\frac{4}{3}$

274. यदि $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3}$ और $x+y=10$ है, तब x और y का मान ज्ञात कीजिए।

(a) $x=3, y=3$

(b) $x=9, y=1$

(c) $x = \frac{9}{2}, y=1$

(d) $x=3, y=2$

275. यदि $x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ है, तब $\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} - \frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = ?$

- (a) 2 (b) 1
(c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (d) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

276. यदि $(x+1)(x+2) + \frac{1}{x(x-1)} = 0$ है, तब $x^2+x=?$

- (a) 4 (b) 1
(c) 9 (d) 0

277. यदि $x^2+xy+y^2=84$ और $x-\sqrt{xy}+y=6$ है, तब x^3+y^3 का मान क्या होगा?

- (a) 72 (b) 520
(c) 512 (d) 600

278. यदि $x^4+x^2y^2+y^4=931$ & $x^2-xy+y^2=19$ है, तब $2x^2+3y^2$ का मान क्या होगा?

- (a) 52 (b) 50
(c) 62 (d) 77

279. यदि $x^3+y^3+z^3=a^3$, $x^2+y^2+z^2=a^2$ और $x+y+z=a$, तब xyz का मान क्या होगा?

- (a) a (b) 0
(c) a^2 (d) a^3

उत्तरमाला

1. (c)	2. (b)	3. (d)	4. (a)	5. (d)	6. (b)	7. (a)	8. (a)	9. (a)
10. (c)	11. (c)	12. (c)	13. (c)	14. (c)	15. (a)	16. (c)	17. (a)	18. (a)
19. (d)	20. (a)	21. (c)	22. (c)	23. (b)	24. (b)	25. (c)	26. (c)	27. (d)
28. (c)	29. (a)	30. (b)	31. (b)	32. (c)	33. (a)	34. (c)	35. (d)	36. (c)
37. (c)	38. (c)	39. (d)	40. (d)	41. (c)	42. (d)	43. (d)	44. (d)	45. (a)
46. (d)	47. (c)	48. (c)	49. (b)	50. (c)	51. (d)	52. (b)	53. (d)	54. (b)
55. (b)	56. (d)	57. (b)	58. (c)	59. (c)	60. (b)	61. (c)	62. (c)	63. (b)
64. (d)	65. (c)	66. (a)	67. (c)	68. (a)	69. (d)	70. (b)	71. (a)	72. (b)
73. (a)	74. (c)	75. (b)	76. (c)	77. (c)	78. (d)	79. (b)	80. (b)	81. (a)
82. (b)	83. (a)	84. (b)	85. (b)	86. (a)	87. (a)	88. (b)	89. (b)	90. (c)
91. (a)	92. (a)	93. (a)	94. (b)	95. (a)	96. (b)	97. (a)	98. (c)	99. (a)
100. (b)	101. (c)	102. (c)	103. (c)	104. (a)	105. (a)	106. (c)	107. (c)	108. (c)
109. (b)	110. (c)	111. (c)	112. (d)	113. (a)	114. (b)	115. (d)	116. (c)	117. (b)
118. (a)	119. (b)	120. (a)	121. (c)	122. (c)	123. (c)	124. (d)	125. (a)	126. (c)
127. (a)	128. (a)	129. (c)	130. (a)	131. (d)	132. (a)	133. (c)	134. (c)	135. (d)
136. (d)	137. (a)	138. (a)	139. (b)	140. (b)	141. (d)	142. (c)	143. (c)	144. (c)
145. (b)	146. (c)	147. (c)	148. (c)	149. (c)	150. (a)	151. (d)	152. (a)	153. (d)
154. (c)	155. (b)	156. (d)	157. (c)	158. (b)	159. (b)	160. (a)	161. (d)	162. (c)
163. (d)	164. (b)	165. (a)	166. (d)	167. (d)	168. (b)	169. (c)	170. (d)	171. (a)
172. (c)	173. (a)	174. (a)	175. (c)	176. (d)	177. (c)	178. (a)	179. (a)	180. (c)
181. (c)	182. (b)	183. (b)	184. (b)	185. (b)	186. (b)	187. (b)	188. (b)	189. (b)
190. (c)	191. (d)	192. (b)	193. (d)	194. (a)	195. (c)	196. (a)	197. (d)	198. (b)
199. (b)	200. (a)	201. (c)	202. (a)	203. (b)	204. (c)	205. (c)	206. (b)	207. (c)
208. (c)	209. (d)	210. (d)	211. (a)	212. (a)	213. (c)	214. (b)	215. (a)	216. (c)
217. (b)	218. (a)	219. (c)	220. (a)	221. (b)	222. (d)	223. (c)	224. (c)	225. (d)
226. (c)	227. (b)	228. (d)	229. (a)	230. (c)	231. (d)	232. (a)	233. (c)	234. (a)
235. (a)	236. (a)	237. (d)	238. (b)	239. (c)	240. (c)	241. (d)	242. (c)	243. (a)
244. (b)	245. (a)	246. (c)	247. (b)	248. (c)	249. (c)	250. (a)	251. (c)	252. (a)
253. (b)	254. (a)	255. (c)	256. (b)	257. (b)	258. (c)	259. (b)	260. (b)	261. (d)
262. (a)	263. (c)	264. (c)	265. (a)	266. (a)	267. (a)	268. (a)	269. (d)	270. (a)
271. (b)	272. (a)	273. (a)	274. (b)	275. (c)	276. (b)	277. (b)	278. (d)	279. (b)

Solⁿ. (तर्क): प्र. 1 से प्र. 4 (Type-2 देखें)

Solⁿ 5. $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ है, तब

$$\frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2}{x} = \frac{1+1+1+1}{1} = 4$$

Solⁿ 6. (तर्क): Type-2 (($x=1$ रखने पर)

Solⁿ 7. $\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3} = \frac{x^6}{x^3} + \frac{x^4}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}$

$$= x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 110 + 5 = 115$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 5 \text{ और } \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (5)^3$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 125$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 125 - 3 \times 5 = 110$$

Solⁿ 8. $x^2 - 7x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 1 = 7x$

$$\Rightarrow \frac{20x}{5x^2 - 15x + 5} = \frac{20x}{5(x^2 + 1) - 15x}$$

$$\Rightarrow \frac{20x}{5 \times 7x - 15x} = \frac{20x}{35x - 15x} = \frac{20x}{20x} = 1$$

Solⁿ 9. $2x + \frac{1}{3x} = 5$

[दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर]

$$4x + \frac{2}{3x} = 10$$

[दोनों पक्षों का वर्ग करने पर]

$$\left(4x + \frac{2}{3x}\right)^2 = (10)^2$$

$$16x^2 + \frac{4}{9x^2} + \frac{16}{3} = 100$$

$$16x^2 + \frac{4}{9x^2} = 100 - \frac{16}{3} = \frac{284}{3}$$

Solⁿ 10. (संकेत): $x = -1$ रखने पर

Solⁿ 11. (संकेत): $5a + \frac{1}{3a} = 5$

(दोनों पक्षों में $\frac{3}{5}$ से गुणा करके दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

Solⁿ 12. $x - \frac{1}{x-3} = 0$

$$(x-3) - \frac{1}{(x-3)} = -3$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(x-3)^2 + \frac{1}{(x-3)^2} - 2 = 9$$

$$(x-3)^2 + \frac{1}{(x-3)^2} = 9 + 2 = 11$$

Solⁿ 13. (तर्क): (प्रश्न 12 की तरह)

Solⁿ 14. $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$$

(टाइप 3 का अध्ययन करें)

अतः

$$x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1$$

$$y - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{y} \Rightarrow y^2 = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2$$

Solⁿ 15. $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 0$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2} + 2\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$$

(टाइप 3 का अध्ययन करें)

अतः

$$x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = -1$$

$$y - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{y} \Rightarrow y^2 = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 0$$

Solⁿ 16. $\frac{2p}{p^2 - 2p + 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow p^2 - 2p + 1 = 4 \times 2p = 8p$

दोनों पक्षों में p से भाग देने पर

$$p - 2 + \frac{1}{p} = 8 \Rightarrow p + \frac{1}{p} = 10$$

Solⁿ 17. (संकेत): टाइप-1 (E) देखें

Solⁿ 18. $x + \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (5)^2 - 2 = 23$

$$= \frac{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1}{x^4 + 1}$$

$$= \frac{x^2 \left(x^2 + 3x + 5 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{23 + 3(5) + 5}{23} = \frac{43}{23}$$

Solⁿ 19. $\therefore a + b + c = 0$

$\therefore a + b = -c, b + c = -a, \& c + a = -b$ तब

$$\frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

$$= \frac{3(-c)(-a)(-b)}{abc} = -3$$

Solⁿ प्र. 20 से प्र. 22 (संकेत): देखें टाइप-3

Solⁿ प्र. 23 से प्र. 24 (संकेत): देखें टाइप-1(E)

Solⁿ प्र. 25 (संकेत): देखें टाइप-1(D)

Solⁿ प्र. 26 (संकेत): देखें टाइप-1(C)

Solⁿ प्र. 27 से प्र. 28 (संकेत): देखें टाइप-1(E)

Solⁿ प्र. 29. $x = (a+b-c), y = (b+c-a)$ और $z = (c+a-b)$

यहाँ, $x + y + z = a + b + c$

यदि $(x-a) + (y-b) + (z-c) = 0$, तब

$$(x-a)^3 + (y-b)^3 + (z-c)^3 = 3(x-a)(y-b)(z-c)$$

Solⁿ 30. $a + b + c = 0$

इसका मतलब $a + b = -c, b + c = -a$ और $c + a = -b$

$$\text{है, तब } \frac{a+b}{c} - \frac{2b}{c+a} + \frac{b+c}{a} = \frac{-c}{c} - \frac{2b}{-b} + \frac{-a}{a} = 0$$

Solⁿ 31. $a + b + c = 0$

$$= \frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(a+c)(b+c)} + \frac{1}{(b+a)(c+a)}$$

$$= \frac{c+a+a+b+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= 0$$

या हम $a=2, b=-1, c=-1$ रख सकते हैं

$$= \frac{1}{(2-1)(-1-1)} + \frac{1}{(2-1)(-1-1)} + \frac{1}{(-1+2)(-1+2)}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 0$$

$$\text{Sol}^n 32. \quad \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a^2b - ab^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + 2ab - (a^2 + b^2 - 2ab)}{ab(a-b)}$$

$$= \frac{4ab}{ab(a-b)} = \frac{4}{a-b}$$

$$\text{Sol}^n 33. \quad 4x = 8y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{तो } \frac{x}{y} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{Sol}^n 34. \quad x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= a^3 - 3a + a^2 - 2$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = a \text{ का घन व वर्ग करने पर,}$$

हम पाते हैं कि,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a \text{ तथा } x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

$$\text{माना } a=2 \text{ रखने पर तब } x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{अतः } x^3 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$a=2$ सभी विकल्पों में रखने पर

$$(a) 12 \quad (b) 2$$

$$(c) 4 \quad (d) 2$$

अतः विकल्प (c) सही है।

Solⁿ प्र. 35 से प्र. 36 (संकेत): देखें टाईप-1(G)

$$\text{Sol}^n 37. \quad x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 - xy(x+y)$$

$$= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) - 4xy(x+y)$$

$$= (x+y)^3 - 4xy(x+y) = a^3 - 4ab^2$$

[$x+y=a, xy=b^2$ रखने पर]

Solⁿ प्र. 38 से प्र. 39 (तर्क): देखें टाईप-4

Solⁿ प्र. 40 से प्र. 41 (तर्क): देखें टाईप-5

Solⁿ प्र. 42 से प्र. 47 (तर्क): देखें टाईप-3

Solⁿ 48.

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^3 + (b-a)^3 + (c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 3$$

$$\text{Sol}^n 49. \quad x^a \cdot x^b \cdot x^c = 1$$

$$\Rightarrow x^{a+b+c} = x^0 \Rightarrow a+b+c=0$$

$$\text{है, तब } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\text{Sol}^n 50. \quad x = a(b-c), y = b(c-a) \text{ \& } z = c(a-b),$$

$$\text{यहाँ, } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

$$\text{अतः } \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = 3 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c} = \frac{3xyz}{abc}$$

Solⁿ 51. प्र. 50 की तरह

$$\text{Sol}^n 52. \quad \frac{1}{abc} [(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3]$$

$$= \frac{1}{abc} [(0)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)]$$

$$= \frac{1}{abc} (-3abc) = -3$$

$$(\because \text{यदि } a+b+c=0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc)$$

$$\text{Sol}^n 53. \quad \because b-a=1 \Rightarrow b-a-1=0 \text{ है, तब}$$

$$(b)^3 + (-a)^3 + (-1)^3 - 3(b)(-a)(-1) = 0$$

$$b^3 - a^3 - 1 - 3ab = 0 \text{ या } a^3 - b^3 + 3ab = -1$$

Solⁿ 54. $x + y + z = 10, x^2 + y^2 + z^2 = 30$
 $\therefore (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$
 $(10)^2 = 30 + 2(xy + yz + zx)$

$\therefore xy + yz + zx = 35$ है, तब
 $\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
 $= (10)(30 - 35) = -50$

Solⁿ 55. (तर्क) : प्र. 54 की तरह

Solⁿ 56.
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(25 + 15 - 10) = 15$$

Solⁿ 57.
$$\frac{(a)^3 + (b)^3 + (c)^3 - 3abc}{(ab+bc+ca - a^2 - b^2 - c^2)}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{-(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}$$

$$= -(a+b+c) = -(-5 - 6 + 10) = 1$$

Solⁿ 58. $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$
 $\Rightarrow (-c)(-a)(-b) + abc = -abc + abc = 0$
 $(\because a+b+c=0 \therefore a+b=-c, b+c=-a \text{ और } c+a=-b)$

Solⁿ 59.
$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$= \frac{c-a+a-b+b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

Solⁿ 60. $(a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b)$
 $= ab - ac - b^2 + bc + bc - ba - c^2 + ac + ca - cb - a^2 + ab$
 $= -(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
 $= 3(ab + bc + ca)$
 $[\because a+b+c=0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)]$

Solⁿ 61.
$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}$$

$$= \frac{a+b+c}{abc} = 0 \quad (\because a+b+c=0)$$

Solⁿ 62. $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a$
 (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)
 $\Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = a^2$
 $\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 - 2bc$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 - bc} = \frac{a^2 + a^2 - 2bc}{a^2 - bc} = \frac{2(a^2 - bc)}{a^2 - bc} = 2$$

द्वितीय-विधि: a, b, c इस प्रकार लेते हैं कि $a+b+c=0$
 $a=1, b=-1, c=0$ है, तो

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 - bc} = \frac{1+1+0}{1-0} = 2$$

Solⁿ 63. $a+b+c=0$ इसलिए $a=1, b=-1, c=0$ रखने पर

$$\therefore \frac{a^2 - bc}{b^2 - ca} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

Solⁿ 64. $a+b+c=0$ इसलिए $a=1, b=-1, c=0$ रखने पर

$$\therefore \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} = \frac{(1+1+0)^2}{1+0+0} = 4$$

Solⁿ 65. $a+b+c=0$ तब $a=1, b=-1, c=0$ रखने पर

$$\therefore \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^4 + b^4 + c^4} = \frac{1+0+0}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Solⁿ 66. $\because a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^2 = (-c)^2$
 $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$

उसी तरह से, $b^2 + c^2 - a^2 = -2bc$
 $c^2 + a^2 - b^2 = -2ac$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$$

$$= \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ca} = \frac{-c-b-a}{2abc}$$

$$= -\frac{(a+b+c)}{2abc} = 0$$

द्वितीय विधि:

$a=2, b=-1, c=-1$ रखने पर

$$\frac{1}{4+1-1} + \frac{1}{1+1-4} + \frac{1}{1+4-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{4} = 0$$

Solⁿ 67. $\therefore a(a+2) = a+b+c$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} = \frac{1}{a+2} \quad \dots(i)$$

$$\therefore b(b+2) = a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a+b+c} = \frac{1}{b+2} \quad \dots(ii)$$

$$\therefore c(c+2) = a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a+b+c} = \frac{1}{c+2} \quad \dots(iii)$$

समीकरण (i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \\ &= \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 \end{aligned}$$

Solⁿ 68.

$$\begin{aligned} & \frac{(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{s^2 + a^2 - 2as + s^2 + b^2 - 2sb + s^2 + c^2 - 2sc + s^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ & \quad (\because a+b+c=2s) \\ &= \frac{4s^2 + (a^2 + b^2 + c^2) - 2s(a+b+c)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{4s^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2s(2s)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{4s^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 4s^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \end{aligned}$$

द्वितीय विधि

$\therefore$ उत्तर s पर निर्भर नहीं है, इसलिए हम $s=0$ रख सकते हैं, तब

$$\begin{aligned} &= \frac{(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \end{aligned}$$

Solⁿ 69. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = xy$
 $\therefore 2(x^3 + y^3) = 2[(x+y)(x^2 + y^2 - xy)] = 0$

Solⁿ 70. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = -2$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = -2xy$
 $\Rightarrow (x^2 + y^2 + 2xy) = 0 \Rightarrow (x+y)^2 = 0$

अतः $x = -y$ है, तब

$$x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = (-y)^3 + y^3 + 3xy(-y+y) = 0$$

Solⁿ 71. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 = 3^3$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} + 3 \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 27$$

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} + 3 \cdot 1 \cdot (3) = 27 \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} = 27 - 9 = 18$$

Solⁿ 72. $\frac{11}{x+11} + \frac{23}{y+23} + \frac{239}{z+239} = 2$

प्रत्येक समीकरण में से 1 घटाने पर

$$\frac{11}{x+11} - 1 + \frac{23}{y+23} - 1 + \frac{239}{z+239} - 1 = 2 - 1 - 1 - 1$$

$$\frac{11-x-11}{x+11} + \frac{23-y-23}{y+23} + \frac{239-z-239}{z+239} = -1$$

$$\frac{-x}{x+11} + \frac{-y}{y+23} + \frac{-z}{z+239} = -1$$

$$\frac{x}{x+11} + \frac{y}{y+23} + \frac{z}{z+239} = 1$$

Solⁿ 73. $x^2 + y^2 = 45, y^2 + z^2 = 40$

पहले समीकरण में से दूसरे को घटाने पर

$$(x^2 + y^2) - (y^2 + z^2) = 45 - 40$$

$x^2 - z^2 = 5$ यदि x, y, z पूर्णांक है, तब $x = 3$ और $z = 2$ रखने पर

$$\Rightarrow 3^2 - 2^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 = 45 \text{ से}$$

$$3^2 + y^2 = 45 \Rightarrow y^2 = 45 - 9 = 36 \Rightarrow y = 6$$

$$\therefore x + y + z = 3 + 6 + 2 = 11$$

Solⁿ 74. $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{7} = \frac{xy}{5} = k$

$$x - y = 3k \text{ व } x + y = 7k$$

है, तब

$$x = 5k \text{ व } y = 2k$$

$$xy = 5k$$

$$(5k)(2k) = 5k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\text{है, तब } xy = \frac{5}{2}$$

Solⁿ 75. $x = 2 - 2^{1/3} + 2^{2/3} \Rightarrow x - 2 = 2^{2/3} - 2^{1/3}$

दोनों पक्षों का घन करने पर

$$(x - 2)^3 = (2^{2/3} - 2^{1/3})^3$$

$$x^3 - 8 - 3x \cdot 2(x - 2) = 2^2 - 2^1 - 3 \cdot 2^{2/3} \cdot 2^{1/3} (2^{2/3} - 2^{1/3})$$

$$x^3 - 8 - 6x^2 + 12x = 4 - 2 - 3 \cdot 2 \cdot (x - 2)$$

$$(\because x - 2 = 2^{2/3} - 2^{1/3})$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 2 - 6x + 12$$

$$x^3 - 6x^2 + 18x = 14 + 8 = 22$$

दोनों पक्षों में 18 जोड़ने पर

$$x^3 - 6x^2 + 18x + 18 = 22 + 18 = 40$$

Solⁿ 76. $x = b + c - 2a, y = c + a - 2b$ & $z = a + b - 2c$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x + y)^2 - z^2$$

$$\Rightarrow (x + y + z)(x + y - z)$$

$$= (b + c - 2a + c + a - 2b + a + b - 2c)(b + c - 2a + c + a - 2b - a - b + 2c)$$

$$= (0)(4c - 2a - 2b)$$

$$= 0$$

Solⁿ 77. $p + q = \frac{1}{pq}$ (दोनों पक्षों का घन करने पर)

$$(p + q)^3 = \frac{1}{p^3 q^3} \Rightarrow p^3 + q^3 + 3pq(p + q) = \frac{1}{p^3 q^3}$$

$$p^3 + q^3 + 3 = \frac{1}{p^3 q^3} \Rightarrow \frac{1}{p^3 q^3} - p^3 - q^3 = 3$$

$$(\because pq(p + q) = 1)$$

Solⁿ 78. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = a - b\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = a - b\sqrt{6}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 6}{18 - 12} = a - b\sqrt{6}$$

$$\frac{12 + 5\sqrt{6}}{6} = a - b\sqrt{6}$$

$$2 + \frac{5}{6}\sqrt{6} = a - b\sqrt{6}$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर,

$$a = 2$$

$$b = -\frac{5}{6}$$

Solⁿ 79. (संकेत): Q. 78 देखें।

Solⁿ 80. $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$

$$= \frac{3 + 2 + 2\sqrt{6}}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

इसी प्रकार,

$$y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 5 - 2\sqrt{6} \text{ तथा } xy = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x + y)^2 - 2xy = (10)^2 - 2 = 98$$

Solⁿ 81. $a = 3.23, b = 5.95$ और $c = 2.72$

$$\text{यहाँ } a - b + c = 0$$

$$\text{तो } a^3 - b^3 + c^3 + 3abc \text{ का मान } = 0$$

Solⁿ 82. हम जानते हैं की $5^2 + 12^2 = 13^2$... (i)

$$5^{\sqrt{x}} + 12^{\sqrt{x}} = 13^{\sqrt{x}} \quad \dots \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) से समीकरण (i) की तुलना करने पर

$$\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

Solⁿ 83. $(x^{b+c})^{b-c} \cdot (x^{c+a})^{c-a} \cdot (x^{a+b})^{a-b}$

$$= x^{b^2-c^2} \cdot x^{c^2-a^2} \cdot x^{a^2-b^2}$$

$$= x^{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2} = x^0 = 1$$

Solⁿ 84. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$

$$= (x^{a-b})^{a+b} \cdot (x^{b-c})^{b+c} \cdot (x^{c-a})^{c+a}$$

$$= x^{a^2-b^2} \cdot x^{b^2-c^2} \cdot x^{c^2-a^2} = 1$$

द्वितीय विधि : ($\because$ उत्तर a, b, c पर निर्भर नहीं है अतः हम a, b व c को शून्य के बराबर रख सकते हैं)

$$\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$$

Solⁿ 85.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{a-c}} \\ &= \frac{1}{x^{-a}(x^a+x^b+x^c)} + \frac{1}{x^{-b}(x^a+x^b+x^c)} + \frac{1}{x^{-c}(x^a+x^b+x^c)} \\ &= \frac{x^a}{(x^a+x^b+x^c)} + \frac{x^b}{(x^a+x^b+x^c)} + \frac{x^c}{(x^a+x^b+x^c)} \\ &= \frac{x^a+x^b+x^c}{(x^a+x^b+x^c)} = 1 \end{aligned}$$

द्वितीय विधि:

($a=0, b=0, c=0$ और $a=b=c$ का मान रखने पर)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(1+x^0+x^0)} + \frac{1}{(1+x^0+x^0)} + \frac{1}{(1+x^0+x^0)} \\ &= \frac{1}{1+1+1} + \frac{1}{1+1+1} + \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

Solⁿ 86. $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b} \cdot \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c}$

$$= (x^{b-c})^{(b+c)-a} \cdot (x^{c-a})^{(c+a)-b} \cdot (x^{a-b})^{(a+b)-c}$$

$$= (x)^{(b^2-c^2)-ab+ac} \cdot (x)^{(c^2-a^2)-bc+ba} \cdot (x)^{(a^2-b^2)-ac+bc}$$

$$= (x)^{b^2-c^2-ab+ac+c^2-a^2-bc+ba+a^2-b^2-ac+bc} = x^0 = 1$$

Solⁿ 87. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$$= (x^{a-b})^{\frac{1}{ab}} \cdot (x^{b-c})^{\frac{1}{bc}} \cdot (x^{c-a})^{\frac{1}{ca}}$$

$$= (x)^{\frac{a-b}{ab}} \cdot (x)^{\frac{b-c}{bc}} \cdot (x)^{\frac{c-a}{ca}}$$

$$= x^{\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{c}} = x^0 = 1$$

Solⁿ 88. $a = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}, b = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \Rightarrow ab = 1$

और $a+b = \frac{(\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$$= \frac{5+1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2 - (1)^2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\therefore \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{a^2+2ab+b^2-ab}{a^2+2ab+b^2-3ab}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - ab}{(a+b)^2 - 3ab}$$

$$= \frac{3^2 - 1}{3^2 - 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Solⁿ 89. $a = 1$ रखने पर, तब

$$x = 2, y = 0$$

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = (2)^4 + (0)^4 - 2(2)^2(0)^2 = 16$$

Solⁿ 90. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 21$

$$a^2 + b^2 = 7 - ab$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = 49 + a^2b^2 - 14ab$$

$$a^4 + b^4 + a^2b^2 = 49 - 14ab$$

$$21 = 49 - 14ab$$

$$14ab = 28$$

$$ab = 2$$

Solⁿ 91. $a = b = c = 0$ का मान रखने पर—

$$= \frac{1}{x^0 + \frac{1}{x^0} + 1} + \frac{1}{x^0 + \frac{1}{x^0} + 1} + \frac{1}{x^0 + \frac{1}{x^0} + 1}$$

$$= \frac{1}{1+1+1} + \frac{1}{1+1+1} + \frac{1}{1+1+1}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Solⁿ 92. $\frac{7x-3}{x} + \frac{7y-3}{y} + \frac{7z-3}{z} = 0$

भाग देने पर—

$$\Rightarrow 7 - \frac{3}{x} + 7 - \frac{3}{y} + 7 - \frac{3}{z} = 0$$

$$\Rightarrow 21 = 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$$

Solⁿ 93. $2^x = 4^y = 8^z$

$$\Rightarrow 2^x = 2^{2y} = 2^{3z}$$

$$\Rightarrow x = 2y = 3z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} + \frac{1}{4\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{4\left(\frac{x}{3}\right)} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{4x} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2+2+3}{4x} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4x} = 4 \Rightarrow x = \frac{7}{16}$$

Solⁿ 94. (संकेत): टाइप-7 देखें

Solⁿ 95. $\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + \frac{a}{x} = \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} + \frac{b}{x}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-b}} - \frac{\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}} = \frac{b}{x} - \frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x-a-x+b}{\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}} = \frac{b-a}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \frac{b-a}{x}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{(x-a)(x-b)} \text{ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)}$$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 - x(a+b) + ab$$

$$\Rightarrow x(a+b) = ab \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$

Solⁿ 96. $x^2 - 2xy + y^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 0$

$$(x-y)^2 + (2y-1)^2 = 0$$

$$x-y=0 \Rightarrow x=y$$

$$2y-1=0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ और } x = \frac{1}{2}$$

Solⁿ 97. $a^x = b, b^y = c, xyz = 1$
 $\therefore c^z = (b^y)^z = (b)^{yz} = (a^x)^{yz} = a^{xyz} = a$

Solⁿ 98. हम जानते हैं कि
 $a^x = b$ तो $a = b^{1/x}$ (e.g. $a^2 = 3 \Rightarrow a = 3^{1/2}$)
 $\therefore (3.7)^x = (0.037)^y = 10000 = 10^4$
 $\Rightarrow (3.7) = 10^{4/x}$... (i)
 $\Rightarrow (0.037) = 10^{4/y}$... (ii)
 समीकरण (i) में समीकरण (ii) से भाग करने पर

$$\frac{3.7}{0.037} = \frac{10^{\frac{4}{x}}}{10^{\frac{4}{y}}} \Rightarrow 100 = 10^{\frac{4}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$10^2 = 10^{4\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)} \quad (\text{घातों की तुलना करने पर})$$

$$4\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Solⁿ 99. $p^x = r^y = m \Rightarrow r = p^{x/y}$
 $r^w = p^z = n \Rightarrow r = p^{z/w}$
 घात से तुलना करने पर

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \Rightarrow xw = yz$$

Solⁿ 100. $x(y-z)(y+z) + y(z-x)(z+x) + z(x-y)(x+y)$
 $= x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$
 $= xy^2 - xz^2 + yz^2 - yx^2 + zx^2 - zy^2$
 $= xy^2 - yx^2 - xz^2 + yz^2 + zx^2 - zy^2$
 $= -xy(x-y) - z^2(x-y) + z(x-y)(x+y)$
 $= (x-y)[-xy - z^2 + z(x+y)]$
 $= (x-y)(-xy + zx - z^2 + zy)$
 $= (x-y)[-x(y-z) + z(y-z)]$
 $= (x-y)(y-z)(z-x)$

द्वितीय विधि :

($x=0, y=1, z=2$ प्रश्न और सभी विकल्पों में रखने पर)

$$0+1(2-0)(2+0)+2(0-1)(0+1)=4-2=2$$

विकल्प (a): $(0+1)(1+2)(2+0)=6$

विकल्प (b): $(0-1)(0-2)(2-1)=2$

विकल्प (c): $(0+1)(2-1)(0-2)=-2$

विकल्प (d): $(1-0)(2-1)(0-2)=-2$

अतः विकल्प (b) सही है।

Solⁿ 101. $\frac{1}{a+1} + \frac{2a+1}{a^2-1} = \frac{a-1+2a+1}{a^2-1}$

$$= \frac{3a}{a^2-1} = \frac{3a}{a\left(a-\frac{1}{a}\right)} = \frac{3}{a-\frac{1}{a}}$$

$$a = \frac{1+x}{2-x} \text{ रखने पर}$$

$$= \frac{3}{\frac{1+x}{2-x} - \frac{2-x}{1+x}} = \frac{3(2-x)(1+x)}{(1+x)^2 - (2-x)^2} = \frac{3(2-x)(1+x)}{6x-3}$$

$$= \frac{(2-x)(1+x)}{2x-1}$$

द्वितीय विधि $x=1$ रखने पर

$$a = \frac{1+1}{2-1} = 2$$

तब $\frac{1}{a+1} + \frac{2a+1}{a^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2$

(सभी विकल्पों में $x=1$ रखने पर)

विकल्प (a) $\Rightarrow \frac{(1+x)(2+x)}{2x-1} = \frac{(1+1)(2+1)}{1} = 6$

विकल्प (b) $\Rightarrow \frac{(1-x)(2-x)}{x+1} = \frac{(1-1)(2-1)}{1+1} = 0$

विकल्प (c) $\Rightarrow \frac{(1+x)(2-x)}{2x-1} = \frac{(1+1)(2-1)}{1} = 2$

विकल्प (d) $\Rightarrow \frac{(1-x)(2-x)}{2x+1} = \frac{(1-1)(2-1)}{2 \times 1 + 1} = 0$

अतः विकल्प (c) सही है।

Solⁿ 102. (संकेत): type - 5 देखें

Solⁿ 103. $x=(b-c)(a-d), y=(c-a)(b-d), z=(a-b)(c-d)$
 $\therefore x+y+z=0$

$$\therefore x^3+y^3+z^3=3xyz$$

Solⁿ 104. $x^2+2=2x \Rightarrow x^2=2x-2$
 $\Rightarrow x^4-x^3+x^2+2=(x^2)^2-x(x^2)+(x^2+2)$
 $= (2x-2)^2-x(2x-2)+2x$
 $= 4x^2+4-8x-2x^2+2x+2x$
 $= 2x^2+4-4x$
 $= 2(x^2+2)-4x=2(2x)-4x$
 $= 0$

Solⁿ 105. $2^x = 3^y = 6^{-z} = k$
 $2 = k^{1/x}, 3 = k^{1/y}$ और $6 = k^{-1/z}$
 $\Rightarrow 2 \times 3 = k^{-1/z}$
 $k^{1/x} \times k^{1/y} = k^{-1/z}$

$$k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{-1/z}$$

घात से तुलना करने पर

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

Solⁿ 106. $(x^2 + y^2)(p^2 + q^2) = (xp + yq)^2$

$$x^2 p^2 + y^2 p^2 + x^2 q^2 + y^2 q^2 = x^2 p^2 + y^2 q^2 + 2xypq$$

$$x^2 q^2 + y^2 p^2 - 2xypq = 0$$

$$(xq - yp)^2 = 0 \Rightarrow xq = yp$$

Solⁿ 107. $x^2 + 8y^2 + 9z^2 - 4xy - 12yz = 0$

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 4y^2 + 9z^2 - 12yz = 0$$

$$(x - 2y)^2 + (2y - 3z)^2 = 0$$

type - 3 देखें

$$x - 2y = 0 \text{ और } 2y - 3z = 0$$

$$x = 2y = 3z$$

Solⁿ 108. $9(a+b)^2 + 49c^2 - 42(a+b)c$

$$= [3(a+b) - 7c]^2 = [3(89 - 69) - 7 \times 8]^2$$

$$= (3 \times 20 - 56)^2 = (60 - 56)^2$$

$$= 16$$

Solⁿ 109. $x = \frac{p+q}{p-q}$ और $y = \frac{p-q}{p+q}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{(p+q)^2}{(p-q)^2}$$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा,

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{(p+q)^2 + (p-q)^2}{(p+q)^2 - (p-q)^2} = \frac{p^2 + q^2}{2pq}$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{x+y} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

Solⁿ 110. सूत्र द्वारा $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$

$$\begin{aligned} &= (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1) \\ &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &\quad (2^{32}+1)(2^{64}+1) \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1) \\ &= (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1) \\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1) \\ &= (2^{32}-1)(2^{32}+1)(2^{64}+1) \\ &= (2^{64}-1)(2^{64}+1) \\ &= 2^{128} - 1 \end{aligned}$$

Solⁿ 111. $x + y + z = 0$

$$y = -z - x, z = -x - y, \& x = -y - z,$$

$$\begin{aligned} &[(y-z-x)/2]^3 + [(z-x-y)/2]^3 + [(x-y-z)/2]^3 \\ &= [(y+y)/2]^3 + [(z+z)/2]^3 + [(x+x)/2]^3 \\ &= y^3 + z^3 + x^3 = 3xyz \quad (\because x + y + z = 0) \end{aligned}$$

Solⁿ 112. $ax + by = 6$

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + 2abxy = 36 \quad \dots(i)$$

$$bx - ay = 2$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2abxy = 4 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) दोनों को जोड़ने पर

$$a^2 x^2 + b^2 x^2 + b^2 y^2 + a^2 y^2 = 40$$

$$x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2) = 40$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 40$$

$$(a^2 + b^2) = 10$$

$$(\because x^2 + y^2 = 4)$$

Solⁿ 113. $a = 3 + 2\sqrt{2}$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &= 6 \Rightarrow a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) \\ &= (6)^3 - 3(6) = 198 \end{aligned}$$

$$\frac{a^6 + a^4 + a^2 + 1}{a^3} = a^3 + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} = 198 + 6 = 204$$

Solⁿ 114. Type-3 देखें

Solⁿ 115. $a^3 b = abc = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 1^3 \times 2^2 \times 3^2 \times 5^1$

a, b, c पूर्णांक है, इसलिए a का मान 1 होना चाहिए

$$a^3 b = abc \Rightarrow c = a^2 = (1)^2 = 1$$

$$\text{अतः } b = 180$$

Solⁿ 116. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ व $\frac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$$

Solⁿ 117. $(a^2 + b^2)^3 = (a^3 + b^3)^2$
 $a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) = a^6 + b^6 + 2a^3b^3$
 $3a^2b^2(a^2 + b^2) = 2a^3b^3$
 $3(a^2 + b^2) = 2ab$

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$$

Solⁿ 118. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$

दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर

$$\frac{2}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{2}{z^2} = \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx}$$

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy}\right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{yz}\right) + \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{zx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y \dots (i)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Rightarrow y = z \dots (ii)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} \Rightarrow z = x \dots (iii)$$

समीकरण (i), (ii) और (iii) से

$$x = y = z$$

Solⁿ 119. $p - 2q = 4$

$$p - 2q - 4 = 0$$

(यदि $a + b + c = 0$ तो, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$)

$$p^3 + (-2q)^3 + (-4)^3 = 3.p(-2q).(-4)$$

$$p^3 - 8q^3 - 64 = 24pq$$

$$p^3 - 8q^3 - 24pq - 64 = 0$$

Solⁿ 120. $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$

माना $t = \sqrt[3]{2} \Rightarrow t^2 = \sqrt[3]{4}$ व $t^3 = 2$

$$\frac{1}{t^2 + t + 1} = at^2 + bt + c$$

$$\Rightarrow \frac{t-1}{(t-1)(t^2+t+1)} = at^2 + bt + c$$

$$\Rightarrow \frac{t-1}{(t^3-1)} = at^2 + bt + c \quad (\because t^3-1=2-1=1)$$

$$t-1 = at^2 + bt + c$$

गुणांकों की तुलना करने पर

$$a=0, b=1, c=-1$$

$$a+b+c = 0+1-1=0$$

Solⁿ 121. $a^3 - b^3 - c^3 = 0$ or $a^3 + (-b^3) + (-c^3) = 0$

तो

$$(a^3)^3 + (-b^3)^3 + (-c^3)^3 - 3.(a^3)(-b^3)(-c^3) = 0$$

$$a^9 - b^9 - c^9 - 3a^3b^3c^3 = 0$$

Solⁿ 122. $\frac{4x-3}{x} + \frac{4y-3}{y} + \frac{4z-3}{z} = 0$

$$4 - \frac{3}{x} + 4 - \frac{3}{y} + 4 - \frac{3}{z} = 0$$

$$\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} = 12 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$$

$$\text{अतः } \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 8$$

Solⁿ 123. $(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 0$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow \frac{x}{3}=1 \dots (i)$$

$$y-5=0 \Rightarrow y=5 \Rightarrow \frac{y}{5}=1 \dots (ii)$$

$$z-4=0 \Rightarrow z=4 \Rightarrow \frac{z}{4}=1 \dots (iii)$$

वर्ग करके तीनों समीकरणों को जोड़ने पर

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 3$$

Solⁿ 124. $x-2=\sqrt[3]{5}$

दोनों पक्षों का घन करने पर

$$(x-2)^3 = (\sqrt[3]{5})^3$$

$$x^3 - 8 - 6x(x-2) = 5$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 13 = 0$$

Solⁿ 125. उदाहरण देखें 74 (Type-1(G))

Solⁿ 126. $\sqrt{x} = \sqrt{3} - \sqrt{5}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$x = 3 + 5 - 2\sqrt{3}\sqrt{5}$$

$$x = 8 - 2\sqrt{15}$$

$$x - 8 = (-2\sqrt{15})$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$x^2 + 64 - 16x = 60$$

$$x^2 - 16x + 4 = 0$$

दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर

$$x^2 - 16x + 6 = 2$$

Solⁿ 127. माना $x = \sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[3]{4\ldots}}}}}}$

$$x = \sqrt{2\sqrt[3]{4x}}$$

(दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$$x^2 = 2\sqrt[3]{4x}$$

(दोनों पक्षों का घन करने पर)

$$x^6 = 2^3 \cdot 4x = 2^5 x \Rightarrow x^5 = 2^5$$

$$\text{अतः } x = 2$$

Solⁿ 128. $(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) = 0$

$$(a^2 - b^2)^3 + (b^2 - c^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 = 3(a^2 - b^2)$$

$$(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$$

$$= 3(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)$$

अतः विकल्प (a) सत्य है।

Solⁿ 129. $a-b=3, a^3-b^3=117$

हम इस प्रकार सोच सकते हैं $a=5, b=2$

यह मान दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं

$$\Rightarrow 5-3=2 \text{ और } (5)^3 - (2)^3 = 125 - 8 = 117$$

$$\text{अतः } |a+b|=7$$

या

$$a^3 - b^3 = 117$$

$$(a-b)(a^2 + b^2 + ab) = 117$$

$$a^2 + b^2 + ab = 39$$

$$(a-b)^2 + 3ab = 39 \Rightarrow (3)^2 + 3ab = 39$$

$$ab = 10 \Rightarrow a=5, b=2$$

$$|a+b|=5+2=7$$

Solⁿ 130. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{b+c}{bc} = \frac{a-a-b-c}{a(a+b+c)} = \frac{-b-c}{a(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{bc} = \frac{-1}{a(a+b+c)} \Rightarrow a(a+b+c) = -bc$$

$$a^2 + ab + ac + bc = 0 \Rightarrow a(a+b) + c(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)(c+a) = 0$$

$$\text{अतः } (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

Solⁿ 131. (संकेत): उदा-121 देखें

Solⁿ 132. (संकेत): उदा-123 देखें

Solⁿ 133. $(a+b-2c) + (b+c-2a) + (c+a-2b) = 0$

$$(a+b-2c)^3 + (b+c-2a)^3 + (c+a-2b)^3$$

$$= 3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$$

Solⁿ 134. $\frac{5x}{2x^3+5x+1} = \frac{1}{3}$

$$15x = 2x^3 + 5x + 1$$

$$2x^3 - 10x + 1 = 0$$

2x से भाग करने पर

$$\Rightarrow x - 5 + \frac{1}{2x} = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2x} = 5$$

Solⁿ 135. $x^3 + \frac{3}{x} = 4(a^3 + b^3)$ और $3x + \frac{1}{x^3} = 4(a^3 - b^3)$

दोनों समीकरण को जोड़ने पर

$$x^3 + \frac{3}{x} + 3x + \frac{1}{x^3} = 4(a^3 + b^3) + 4(a^3 - b^3)$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 8a^3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2a$$

दोनों समीकरण को घटाने पर

$$x^3 + \frac{3}{x} - 3x - \frac{1}{x^3} = 4(a^3 + b^3) - 4(a^3 - b^3)$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = 8b^3 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 2b$$

$$4(a^2 - b^2) = (2a)^2 - (2b)^2$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - x^2 - \frac{1}{x^2} + 2 = 4$$

द्वितीय विधि:

$4(a^2 - b^2)$ का मान प्रत्येक विकल्प में x पर निर्भर नहीं है, अतः हम x का कोई भी मान, मान सकते हैं।

$x = 1$ रखने पर

$$x^3 + \frac{3}{x} = 4(a^3 + b^3) \Rightarrow (a^3 + b^3) = 1 \quad \dots(i)$$

$$3x + \frac{1}{x^3} = 4(a^3 - b^3) \Rightarrow (a^3 - b^3) = 1 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से

$$a = 1 \text{ और } b = 0$$

$$\text{अतः } 4(a^2 - b^2) = 4$$

Solⁿ 136. $x + y + z = 0$

$$x + y = -z, y + z = -x \text{ \& } z + x = -y$$

$$\frac{(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 - 17xyz}{10(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{(-z)^3 + (-x)^3 + (-y)^3 - 17xyz}{10(-z)(-x)(-y)}$$

$$= \frac{-[(x)^3 + (y)^3 + (z)^3 + 17xyz]}{-10(xyz)} = \frac{3xyz + 17xyz}{10xyz}$$

$$= 2$$

द्वितीय विधि :

यहाँ हम $x = 1, y = 2$ व $z = -3$ रख सकते हैं $x + y + z = 0$

$$= \frac{(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 - 17xyz}{10(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{(1+2)^3 + (2-3)^3 + (-3+1)^3 - 17(1)(2)(-3)}{10(1+2)(2-3)(-3+1)}$$

$$= \frac{120}{60} = 2$$

Solⁿ 137. $x + y + z = 4, xy + yz + zx = -1, xyz = -1$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$(1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(-1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3, \text{ तब}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= 3(-1) + (1)(3+1) = -3 + 4 = 1$$

$$\text{Sol}^n \text{ 138. } a^2 + 4b^2 + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 5$$

$$\left(a^2 + \frac{1}{4a^2} - 1\right) + \left(4b^2 + \frac{1}{b^2} - 4\right) = 0$$

$$\left(a - \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(2b - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$$

(type - 3 का अध्ययन करने पर)

अतः

$$a - \frac{1}{2a} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2a} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}$$

$$2b - \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow 2b = \frac{1}{b} \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Sol}^n \text{ 139. } \frac{\left(x + \frac{1}{y}\right)^a \left(x - \frac{1}{y}\right)^b}{\left(y + \frac{1}{x}\right)^a \left(y - \frac{1}{x}\right)^b} = \frac{\left(\frac{xy+1}{y}\right)^a \left(\frac{xy-1}{y}\right)^b}{\left(\frac{xy+1}{x}\right)^a \left(\frac{xy-1}{x}\right)^b}$$

$$= \frac{(xy+1)^a (xy-1)^b x^a x^b}{y^a y^b (xy+1)^a (xy-1)^b} = \frac{x^{a+b}}{y^{a+b}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{a+b}$$

Solⁿ 140. $a^b = b^a \Rightarrow b = a^{b/a}$

तब, $\left(\frac{a}{a^{b/a}}\right)^{a/b} = (a^{1-b/a})^{a/b} = a^{\left(\frac{a}{b}-1\right)}$

Solⁿ 141. $\frac{a^{1/2} + a^{-1/2}}{1-a} + \frac{1-a^{-1/2}}{1+\sqrt{a}}$
 $= \frac{a^{1/2} + a^{-1/2}}{(1-a^{1/2})(1+a^{1/2})} + \frac{1-a^{-1/2}}{1+a^{1/2}}$
 $= \frac{(a^{1/2} + a^{-1/2}) + (1-a^{-1/2})(1-a^{1/2})}{(1-a^{1/2})(1+a^{1/2})}$
 $= \frac{a^{1/2} + a^{-1/2} + 1 - a^{1/2} - a^{-1/2} + 1}{(1-a^{1/2})(1+a^{1/2})}$
 $= \frac{2}{1-a}$

Solⁿ 142. $x = \frac{2pq}{1+q^2} \Rightarrow \frac{1+q^2}{2q} = \frac{p}{x}$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा

$$\frac{p+x}{p-x} = \frac{1+q^2+2q}{1+q^2-2q} = \frac{(1+q)^2}{(1-q)^2}$$

$$\sqrt{\frac{p+x}{p-x}} = \sqrt{\frac{(1+q)^2}{(1-q)^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{p+x}}{\sqrt{p-x}} = \frac{1+q}{1-q}$$

योगान्तरानुपात नियम पुनः लागू करने पर

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x}}{\sqrt{p+x} - \sqrt{p-x}} = \frac{1+q+1-q}{1+q-1+q} = \frac{2}{2q} = \frac{1}{q}$$

Solⁿ 143. $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$

$$x-y = 4\sqrt{2} \Rightarrow y = (3+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}) = 3-2\sqrt{2}$$

यहाँ, $x+y=6, xy=9-8=1$

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$= (6)^2 - 2 \times 1 = 34$$

Solⁿ 144. $a = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-3}$ व $b = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-3}$

यहाँ $ab = 1$ (type - 8 देखें)

$$(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = 1$$

Solⁿ 145. $a=x+y, b=x-y, c=x+2y$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (2y)^2 + (-3y)^2 + (y)^2 \}$$

$$= 7y^2$$

Solⁿ 146. उदा. 129 देखें

Solⁿ 147. $\sqrt{28-6\sqrt{3}} = \sqrt{3}a+b$

$$\Rightarrow \sqrt{(3\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}a+b$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3}-1 = \sqrt{3}a+b$$

गुणांकों की तुलना करने पर

$$a=3, b=-1$$

तब, $a-b=4$

Solⁿ 148. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0$

$$a+b-2\sqrt{ab} > 0$$

$$a+b > 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

Solⁿ 149. $a+b=1, b+c=2, c+a=3$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

$$= \frac{1}{2} (2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$= \frac{1}{2} [(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2]$$

$$= \frac{1}{2} [(1)^2 + (2)^2 + (3)^2] = 7$$

Solⁿ 150. $(a+b+2c+3d)(a-b-2c+3d)$

$$= (a-b+2c-3d)(a+b-2c-3d)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+2c+3d}{a+b-2c-3d} = \frac{a-b+2c-3d}{a-b-2c+3d}$$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा

$$\Rightarrow \frac{2(a+b)}{2(2c+3d)} = \frac{2(a-b)}{2(2c-3d)}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)}{(a-b)} = \frac{2c+3d}{2c-3d}$$

दोबारा योगान्तरानुपात नियम लगाने पर

$$\frac{2a}{2b} = \frac{4c}{6d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2c}{3d}$$

$$\Rightarrow 2bc = 3ad$$

Solⁿ 151. उत्तर s पर निर्भर नहीं है

अतः, $s = 0$ रखने पर

$$(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

Solⁿ 152. $a^{1/m} = b^{1/n} = c^{1/p} = k$ (माना)

$$a = k^m, b = k^n, c = k^p$$

$$abc = k^{m+n+p}$$

$$k^{m+n+p} = 1 = k^0$$

$$\text{अतः } m + n + p = 0$$

Solⁿ 153. $2s = 9$

$$s^2 + (s-1)^2 + (s-3)^2 + (s-5)^2$$

$$= \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-3\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-5\right)^2$$

$$= \frac{81}{4} + \frac{49}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = 35$$

द्वितीय विधि :

यहाँ हम $s = 0$ ($\because 1+3+5=9$) रख सकते हैं।

$$0 + (-1)^2 + (-3)^2 + (-5)^2 = 35$$

Solⁿ 154. $p + q = r$ व $pqr = 30$

$$\Rightarrow p + q - r = 0$$

तब,

$$p^3 + q^3 - r^3 = 3pq(-r) = -3pqr = -90$$

Solⁿ 155. $x + y = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 3 \dots (1)$

$$x - y = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 2 \dots (2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2(x^2 + y^2) = 5 \dots (3)$$

समीकरण (1) और (2) घटाने पर

$$4xy = 1 \dots (4)$$

समीकरण (3) और (4) को गुणा करने पर

$$8xy(x^2 + y^2) = 5$$

Solⁿ 156. $2a + 3b = 4$

दोनों पक्षों का घन करने पर

$$(2a + 3b)^3 = 4^3$$

$$8a^3 + 27b^3 + 3 \times 2a \times 3b(2a + 3b) = 64$$

$$8a^3 + 27b^3 + 18ab(4) = 64$$

$$8a^3 + 27b^3 + 72ab = 64$$

Solⁿ 157. $x + \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow 3 - x = \frac{2}{x}$

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^2(3-x)} = \frac{x\left(x + \frac{2}{x}\right) + x}{x^2(3-x)}$$

$$= \frac{3x + x}{x^2(3-x)} = \frac{4x}{x^2\left(\frac{2}{x}\right)} = 2$$

Solⁿ 158. $x = ay$ और $y = bx$

दोनों समीकरणों की गुणा करने पर

$$xy = abxy \Rightarrow ab = 1$$

तब,

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = 1$$

(type - 9 का अध्ययन करें)

$$\text{Sol}^n 159. a = \frac{4}{3} \Rightarrow 3a = 4 \Rightarrow 3a - 4 = 0$$

$$\text{तब, } 27a^3 - 108a^2 + 144a - 317$$

$$= (3a)^3 - 3 \times 3a \times 4(3a - 4) - 64 - 253$$

$$= (3a - 4)^3 - 253$$

$$= -253$$

$$\text{Sol}^n 160. a + b = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 25$$

$$a^2 + b^2 = 13 \quad \text{तब, } 2ab = 12$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 13 - 2ab = 13 - 12$$

$$(a - b)^2 = 1$$

$$a - b = +1 \quad (a > b \text{ या } a - b > 0)$$

$$\text{Sol}^n 161. x^2 + x - 6 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

समी. (ii) में से समी. (i) को घटाने पर

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 - x + 6 = 0$$

$$5x = -15 \Rightarrow x = -3$$

$$\text{Sol}^n 162. x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\frac{x^3 + \frac{1}{x}}{x^2 - x + 1} = \frac{x \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2}{\left(x + \frac{1}{x} \right) - 1}$$

$$= \frac{(3)^2 - 2}{3 - 1} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Sol}^n 163. ax + by = 3, bx - ay = 4$$

वर्ग करने के बाद दोनों पक्षों को जोड़ने पर

$$(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + 2axby + b^2x^2 + a^2y^2 - 2bxa y = 25$$

$$x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2) = 25$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 25$$

$$(a^2 + b^2) = 25 \quad (\because x^2 + y^2 = 1)$$

$$\text{Sol}^n 164. a + b + c = 15, a^2 + b^2 + c^2 = 83$$

$$\Rightarrow (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow 225 = 83 + 2(ab + bc + ca)$$

$$ab + bc + ca = 71$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= 15(83 - 71) = 180$$

$$\text{Sol}^n 165. \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a - b}$$

...(i)

...(ii)

$$\frac{b - a}{ab} = \frac{1}{a - b} \Rightarrow (b - a)(a - b) = ab$$

$$-(a^2 + b^2 - 2ab) = ab \Rightarrow a^2 + b^2 - ab = 0$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 0$$

$$\text{Sol}^n 166. 2x = a + \sqrt{\frac{4b^3 - a^3}{3a}} \quad \dots(1)$$

$$2y = a - \sqrt{\frac{4b^3 - a^3}{3a}} \quad \dots(2)$$

समी. (1) व समी. (2) जोड़ने पर

$$2(x + y) = 2a \Rightarrow x + y = a$$

समी. (1) व समी. (2) को गुणा करने पर

$$\Rightarrow 4xy = a^2 - \frac{4b^3 - a^3}{3a} = \frac{4a^3 - 4b^3}{3a}$$

$$\Rightarrow xy = \frac{a^3 - b^3}{3a}$$

$$\Rightarrow (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$\Rightarrow a^3 = x^3 + y^3 + 3 \left[\frac{(a^3 - b^3)}{3a} \right] (a)$$

$$\Rightarrow a^3 = x^3 + y^3 + a^3 - b^3$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = b^3$$

Solⁿ 167. $a-b=2$, $ab=15$

तब,

$$(a+b) = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab} = \sqrt{4+4 \times 15} = 8$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2)(a^3 - b^3)$$

$$= (a+b)(a-b)(a-b)(a^2 + b^2 + ab)$$

$$= (a+b)(a-b)^2 \{(a+b)^2 - ab\}$$

$$= 8(2)^2 \{(8)^2 - 15\} = 1568$$

Solⁿ 168. $4x-5z=16$ तथा $xz=12$

दोनों पक्षों का घन करने पर

$$(4x-5z)^3 = (16)^3$$

$$64x^3 - 125z^3 - 3(4x)(5z)(4x-5z) = 4096$$

$$64x^3 - 125z^3 = 60(12)(16) + 4096 = 15616$$

Solⁿ 169. $x+y+z=15$ और $xy+yz+zx=75$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx)$$

$$225 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(75)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 225 - 150 = 75$$

$$\text{यहाँ } x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

$$\text{इसका मतलब } x=y=z$$

$$\text{अतः } \frac{x+4y+z}{3z} = \frac{x+4x+x}{3x} = 2$$

Solⁿ 170. $a^2 + b^2 = 2$ व $c^2 + d^2 = 1$

$$\Rightarrow (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$$

$$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc + a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd$$

$$= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)$$

$$= (c^2 + d^2)(a^2 + b^2) = 2 \times 1 = 2$$

Solⁿ 171. $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a+b+c)^2$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\text{इसका मतलब } a=b=c \quad (\text{type-4 देखें})$$

Solⁿ 172. $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 3 - 2 = 1$

टाइप - 2(F) देखें जब $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$ तो $x^6 = -1$

अतः

$$x^{26} + \frac{1}{x^{26}} = x^2 \cdot x^{24} + \frac{1}{x^2 \cdot x^{24}} = x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$(\because x^{24} = (x^6)^4 = (-1)^4 = 1)$$

Solⁿ 173. $\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2}}}}} = 32^a = 2^{5a}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$2\sqrt{4\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2}}}} = 2^{10a}$$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$2^2 \cdot 4\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2}}} = 2^{20a} \Rightarrow 2^4 \sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2}}} = 2^{20a}$$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$2^8 \cdot 2\sqrt{4\sqrt{2}} = 2^{40a} \Rightarrow 2^9 \sqrt{4\sqrt{2}} = 2^{40a}$$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$2^{18} \cdot 4\sqrt{2} = 2^{80a} \Rightarrow 2^{20} \sqrt{2} = 2^{80a}$$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$2^{40} \cdot 2 = 2^{160a} \Rightarrow 2^{41} = 2^{160a}$$

घातों की तुलना करने पर

$$160a = 41 \text{ तब, } a = \frac{41}{160}$$

Solⁿ 174. $a^2 = 2 \Rightarrow a^2 - 1 = 1 \Rightarrow (a-1)(a+1) = 1$

$$\text{तब, } a-1 = \frac{1}{a+1}$$

$$a^2 = 2 \Rightarrow a^2 + 1 = 3 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 3 - 2a$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 = 3 - 2a \Rightarrow (a-1)(a-1) = 3 - 2a$$

समी. (i) से $(a-1)$ का मान, समी. (ii) में रखने पर

$$\Rightarrow (a-1) \cdot \frac{1}{(a+1)} = 3 - 2a$$

$$\Rightarrow (a+1) = \frac{a-1}{3-2a}$$

Solⁿ 175. $(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r$
 $= (a+b-c)s = k \text{ (माना)}$

$$\frac{k}{p} = a + b + c \quad \dots(i)$$

$$\frac{k}{q} = b + c - a, \quad \dots(ii)$$

$$\frac{k}{r} = c + a - b \quad \dots(iii)$$

$$\frac{k}{s} = a + b - c \quad \dots(iv)$$

समी. (ii), (iii), (iv) को जोड़ने तथा समी. (i) को घटाने पर

$$\Rightarrow k \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{1}{p} \right)$$

$$= k(b + c - a + c + a - b + a + b - c - (a + b + c))$$

$$\text{तब, } \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{1}{p} = 0$$

$$\text{Sol}^n 176. x(x-3) = -1$$

$$x-3 = \frac{-1}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

(दोनों पक्षों का घन करने पर)

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 3 \times 3 = 18$$

$$x^3 - 18 = -\frac{1}{x^3}$$

$$x^3(x^3 - 18) = -1$$

$$\text{Sol}^n 177. x = \frac{p+q+r}{3} \Rightarrow 3x = p+q+r$$

$$(x-p) + (x-q) + (x-r) = 0$$

$$\text{तब, } (x-p)^3 + (x-q)^3 + (x-r)^3 - 3(x-p)(x-q)(x-r) = 0$$

$$\text{Sol}^n 178. a^2 + b^2 = 2(a-2b) - 5$$

$$(a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 4b + 4) = 0$$

$$(a-1)^2 + (b+2)^2 = 0$$

$$a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$b+2=0 \Rightarrow b=-2$$

$$\text{तब, } a^3 + b^3 + 3ab = 1 - 8 - 3 \times 2 = -13$$

$$\text{Sol}^n 179. x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^3 = 1 \quad (\text{टाइप -2(D) देखें})$$

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y = 1 \quad (\text{टाइप-2(A) देखें})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x)^{3y} + (y)^{3x} &= (x^3)^y + (y^3)^x \\ &= (1)^y + (1)^{3x} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Sol}^n 180. \text{यदि } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow a = b = c$$

जब a, b, c धनात्मक संख्याएँ हैं (टाइप -5 देखें)

$$\frac{2a+7b+9c}{a+2b+3c} = \frac{2a+7a+9a}{a+2a+3a} = \frac{18a}{6a} = 3$$

$$\text{Sol}^n 181. \frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} = 1 \quad (\text{दोनों पक्षों का वर्ग करने पर})$$

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} + 2 \left(\frac{pq}{ab} + \frac{qr}{bc} + \frac{pr}{ac} \right) = 1$$

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} + 2 \left(\frac{cpq + aqr + bpr}{abc} \right) = 1$$

$$(\because abc = 1)$$

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} = 1 - 2(cpq + aqr + bpr) \dots(i)$$

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 1 \Rightarrow \frac{aqr + bpr + cpq}{pqr} = 1$$

$$aqr + bpr + cpq = pqr = -1 \quad (\because pqr = -1)$$

इस मान को समी. (i) में रखने पर

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} = 1 - 2(-1) = 3$$

$$\text{Sol}^n 182. x = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{4 \times 15}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{20} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा,

$$\frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \quad \dots(1)$$

$$x = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{4 \times 15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{12} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा

$$\frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \quad \dots(2)$$

समी. (1) व समी. (2) को जोड़ने पर

$$\begin{aligned} \frac{x+\sqrt{20}}{x-\sqrt{20}} + \frac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}} &= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = 2 \end{aligned}$$

Solⁿ प्र. 183 से प्र. 185 तक प्रश्न, 182 की तरह हल होंगे।

$$\text{Sol}^n 186. x = \frac{4ab}{a+b} = \frac{2a \times 2b}{a+b}$$

$$\therefore \frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा

$$\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b} = \frac{3b+a}{b-a} \quad \dots(1)$$

$$x = \frac{4ab}{a+b} = \frac{2a \times 2b}{a+b}$$

$$\therefore \frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा

$$\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b} = \frac{3a+b}{a-b} \quad \dots(2)$$

समी. (1) और समी. (2) को जोड़ने पर

$$\begin{aligned} \frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} &= \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b} \\ &= \frac{3b+a}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a} = \frac{2b-2a}{b-a} = 2 \end{aligned}$$

Solⁿ प्र. 187 से प्र. 189 तक 186 की तरह हल होंगे।

$$\text{Sol}^n 190. \quad (x+y)^2 - z^2 = 4$$

$$\Rightarrow (x+y+z)(x+y-z) = 4 \quad \dots(i)$$

$$(y+z)^2 - x^2 = 9 \quad \dots(ii)$$

$$\Rightarrow (x+y+z)(y+z-x) = 9 \quad \dots(iii)$$

$$(z+x)^2 - y^2 = 36 \quad \dots(iv)$$

$$\Rightarrow (x+y+z)(z+x-y) = 36 \quad \dots(v)$$

तीनों समीकरणों को जोड़ने पर

$$(x+y+z)(x+y-z+y+z-x+z+x-y) = 49$$

$$(x+y+z)^2 = 49 \Rightarrow (x+y+z) = \pm 7$$

$$\text{Sol}^n 191. \quad x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$2x = \sqrt{5}+1 \Rightarrow 2x-1 = \sqrt{5}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$4x^2+1-4x=5 \Rightarrow 4x^2-4x-4=0$$

$$\Rightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Rightarrow 5x^2-5x-1=4$$

$$\text{Sol}^n 192. \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\text{इसी प्रकार } \sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{3+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+3-3-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3+3-\sqrt{3}}{(3)^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Solⁿ 193. प्र. 192 की तरह

Solⁿ 194. (टाइप - 7) का उदा. 110 देखें

Solⁿ 195. $a + b + c = 0$

दोनों तरफ 'a' से गुणा करने पर

$$a^2 + ab + ac = 0$$

$$\text{तब } a^2 = -ab - ac$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2a^2 + bc} = \frac{a^2}{a^2 + a^2 + bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc}$$

$$= \frac{a^2}{a(a-b) - c(a-b)} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \text{ उसी तरह}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab}$$

$$= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{-a^2}{(a-b)(c-a)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} - \frac{c^2}{(c-a)(b-c)}$$

$$= \frac{-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{-a^2(b-c) - b^2c + b^2a - c^2a + c^2b}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{-a^2(b-c) - b^2c + c^2b + b^2a - c^2a}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{-a^2(b-c) - bc(b-c) + a(b^2 - c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{(b-c)(-a^2 - bc + a(b+c))}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{-a^2 - bc + ab + ac}{(a-b)(c-a)}$$

$$= \frac{-a(a-b) + c(a-b)}{(a-b)(c-a)}$$

$$= \frac{(a-b)(c-a)}{(a-b)(c-a)} = 1$$

द्वितीय विधि:

$a = 0, b = -1, c = 1$ रखने पर, इस प्रकार $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab}$$

$$= \frac{0}{0-1} + \frac{1}{2+0} + \frac{1}{2+0}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Solⁿ 196. $x + y + z = 13, x^2 + y^2 + z^2 = 91$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 13^2 = 169$$

$$91 + 2(r + r^2 + r^3) = 169$$

$$2(r + r^2 + r^3) = 169 - 91 = 78$$

$$(r + r^2 + r^3) = 39 = 3 + 9 + 27$$

तब $r = 3$

$$\therefore xy = r \dots (i) \text{ और } xz = r^2 \dots (ii)$$

समीकरण (ii) को समीकरण (i) द्वारा विभाजित करने पर

$$\frac{xz}{xy} = \frac{r^2}{r} = r \Rightarrow \frac{z}{y} = r = 3$$

Solⁿ 197. $xy + yz + zx = xyz$

$$\begin{aligned} &= \frac{x+y}{xyz - xy} + \frac{y+z}{xyz - yz} + \frac{z+x}{xyz - zx} \\ &= \frac{x+y}{yz + zx} + \frac{y+z}{xy + zx} + \frac{z+x}{xy + yz} \\ &= \frac{x+y}{z(y+x)} + \frac{y+z}{x(y+z)} + \frac{z+x}{y(z+x)} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz} \\ &= \frac{xyz}{xyz} = 1 \end{aligned}$$

Solⁿ 198. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow 4 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-1)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 2 = 6$$

अब,

$$\Rightarrow (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$$

$$= 2(6-1) = 10$$

Solⁿ 199. $\frac{b}{y} = 1 - \frac{z}{c} = \frac{c-z}{c}$

$$\frac{y}{b} = \frac{c}{c-z} \quad \dots (i)$$

$$\frac{c}{z} + \frac{x}{a} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} = 1 - \frac{c}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z-c}{z} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{z}{z-c} \quad \dots (ii)$$

समी. (i) व समी. (ii) को जोड़ने पर

$$\frac{a}{x} + \frac{y}{b} = \frac{z}{z-c} + \frac{c}{c-z}$$

$$= \frac{z}{z-c} - \frac{c}{z-c} = \frac{z-c}{z-c} = 1$$

Solⁿ 200. $x + \frac{2}{y} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{2}{y} = \frac{y-2}{y}$

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{y-2}$$

$$\frac{1}{2x} = \frac{y}{2(y-2)}$$

$$y + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow \frac{1}{z} = 2 - y$$

$$z = \frac{1}{2-y}$$

समी. (i) व समी. (ii) से

$$z + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2-y} + \frac{y}{2(y-2)}$$

$$= \frac{1}{2-y} - \frac{y}{2(2-y)}$$

$$= \frac{2-y}{2(2-y)} = \frac{1}{2}$$

द्वितीय विधि: हम $x = -1, y = 1, z = 1$ रख सकते हैं, क्योंकि यह मान समीकरणों को संतुष्ट करते हैं,

अब $z + \frac{1}{2x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

हल 201. $a^x = m \Rightarrow a = m^{1/x}$

$$a^y = n \Rightarrow a = n^{1/y}$$

समी. (i) और समी. (ii) की गुणा करने पर

$$a^2 = m^{1/x} \cdot n^{1/y}$$

$$a^2 = (m^{1/x} \cdot n^{1/y})^2$$

समी. (iii) व समी. (iv) से

$$m^{1/x} \cdot n^{1/y} = m^{1/2} \cdot n^{1/2}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = yz \Rightarrow xyz = 1$$

$$\text{Sol}^n 202. \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sqrt{3} \Rightarrow 2^{-k} = 3^{1/2} \quad \dots(i)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^m = \sqrt{2} \Rightarrow 3^{-m} = 2^{1/2} \quad \dots(ii)$$

समी. (i) व समी. (ii) की गुणा करने पर

$$2^{-k} \cdot 3^{-m} = 3^{1/2} \cdot 2^{1/2}$$

घातों की तुलना करने पर

$$m = k = -\frac{1}{2}, \text{ तब } \frac{mk}{2} = \frac{1}{8}$$

Solⁿ 203.

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{b-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$= (a-b) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \right)$$

$$= (a-b) \left(\frac{2\sqrt{b}}{a-b} \right)$$

$$= 2\sqrt{b} = 2\sqrt{36}$$

$$= 12$$

$$\text{Sol}^n 204. [\sqrt{3} - (x-5)][\sqrt{3} + (x-5)]$$

$$= (\sqrt{3})^2 - (x-5)^2$$

$$= 3 - (x-5)^2$$

$\therefore$ अधिकतम मान = 3

Solⁿ 205. टाइप-9 देखें

$$\text{यदि } xy = \left(\frac{\sqrt{93} + \sqrt{19}}{\sqrt{97} - \sqrt{23}} \right) \left(\frac{\sqrt{93} - \sqrt{19}}{\sqrt{97} + \sqrt{23}} \right)$$

$$xy = \frac{93-19}{97-23} = \frac{74}{74} = 1$$

$$\text{तब, } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1$$

$$\text{Sol}^n 206. x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow (x-1) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(x-1)^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2 + 3 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2x - 4 = 2\sqrt{6}$$

... (i)

पुनः वर्ग करने पर

$$(x^2 - 2x - 4)^2 = (2\sqrt{6})^2$$

$$x^4 + 4x^2 + 16 - 4x^3 + 16x - 8x^2 = 24$$

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0$$

दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर

$$2x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 32x - 16 = 0$$

$$2x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 26x + 6x - 28 + 12 = 0$$

$$2x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 26x - 28 = 3x^2 - 6x - 12$$

$$= 3(x^2 - 2x - 4) = 3(2\sqrt{6}) = 6\sqrt{6} \quad \text{समी. (i) से}$$

$$\text{Sol}^n 207. \frac{5}{3^{\frac{2}{3}} - 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{3^{\frac{2}{3}} - 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}} \times \frac{3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{5 \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \right)}{\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \right) \left((3^{\frac{1}{3}})^2 - (3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}) + (2^{\frac{1}{3}})^2 \right)}$$

$$(\because a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2))$$

$$= \frac{5 \left(3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right)}{\left(3^{\frac{1}{3}} \right)^3 + \left(2^{\frac{1}{3}} \right)^3} = \frac{5 \left(3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right)}{3+2} = 3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow a\sqrt[3]{3} + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$$

अब गुणांकों की तुलना करने पर

$$a=1, b=1, c=0$$

$$\Rightarrow a+b+c=1+1+0=2$$

Solⁿ 208. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} - \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{a+b} = 4,$

$$\frac{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (\sqrt{b}-\sqrt{a})(a-b)}{(a-b)(a+b)} = 4$$

$$\frac{a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}+a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{(a-b)(a+b)} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})}{a^2-b^2} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a^2-b^2} = 2 = \frac{a^x+b^x}{a^2-b^2}$$

$$x=3/2 \quad (\text{घातों की तुलना करने पर})$$

Solⁿ 209. $\frac{76}{4+\sqrt{7}+\sqrt{11}} = \frac{76(4+\sqrt{7}-\sqrt{11})}{(4+\sqrt{7}+\sqrt{11})(4+\sqrt{7}-\sqrt{11})}$

$$= \frac{76(4+\sqrt{7}-\sqrt{11})}{(4+\sqrt{7})^2 - (\sqrt{11})^2} = \frac{76(4+\sqrt{7}-\sqrt{11})}{8\sqrt{7}+12}$$

$$= \frac{19(4+\sqrt{7}-\sqrt{11})}{2\sqrt{7}+3}$$

(पुनः परिमेयकरण करने पर)

$$= \frac{19(4+\sqrt{7}-\sqrt{11})}{(2\sqrt{7})^2 - (3)^2} \times (2\sqrt{7}-3)$$

$$= \frac{19(2+5\sqrt{7}+3\sqrt{11}-2\sqrt{77})}{28-9}$$

$$= 2+5\sqrt{7}+3\sqrt{11}-2\sqrt{77}$$

$$= p+q\sqrt{7}+r\sqrt{11}+s\sqrt{77}$$

$$\therefore p=2, q=5, r=3, s=-2$$

$$\therefore p+q+r+s=8$$

Solⁿ 210. $x=4+\sqrt{11}+\sqrt{7}$

$$x-4=\sqrt{11}+\sqrt{7}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(x-4)^2 = (\sqrt{11}+\sqrt{7})^2$$

$$x^2+16-8x=11+7+2\sqrt{77}$$

$$x^2-8x-2=2\sqrt{77}$$

पुनः वर्ग करने पर

$$x^4-16x^3+60x^2+32x+4=308$$

$$\therefore x^4-16x^3+60x^2+32x=304$$

Solⁿ 211. $5^a+2^{b+1}=189 \Rightarrow 5^a+2 \cdot 2^b=189$

$$\Rightarrow 5^{a+1}+2^{b-2}=633 \Rightarrow 5 \cdot 5^a + \frac{2^b}{2^2}=633$$

माना $5^a = x,$ $2^b = y$

तब, $x+2y=189$

$$5x + \frac{y}{4} = 633$$

दोनों समीकरणों को हल करने के बाद

$$x=125, \quad y=32$$

$$5^a=125=5^3 \Rightarrow a=3$$

$$2^b=32=2^5 \Rightarrow b=5$$

अतः $a+b=3+5=8$

द्वितीय विधि: a व b पूर्णांक है, 2^{b+1} , 2 की घात होनी चाहिए।

$$5^a + 2^{b+1} = 189 \quad \dots (i)$$

यदि $a = 0$ या 1 या 2, तब 2^{b+1} , 2 की घात नहीं है।

लेकिन यदि $a = 3$, 2^{b+1} , 2 की घात है।

$$5^3 + 2^{b+1} = 189 \Rightarrow 2^{b+1} = 64 \quad \dots (ii)$$

घात से तुलना करने पर

$$b+1 = 6 \Rightarrow b = 5$$

$a = 3$ और $b = 5$ समीकरण (i) और (ii) दोनों को संतुष्ट करता है।

$$\text{अतः } a = 3, b = 5 \Rightarrow a + b = 8$$

Solⁿ 212. विकल्प $x = (a + b + c)^2$ से

$$\frac{(2a+b+c)(b+c)}{(b+c)} + \frac{(a+2b+c)(a+c)}{(c+a)} + \frac{(a+b+2c)(a+b)}{(a+b)}$$

$$= 4(a+b+c)$$

$$(2a+b+c) + (a+2b+c) + (a+b+2c) = 4(a+b+c)$$

$$4(a+b+c) = 4(a+b+c)$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

$$\text{अतः } x = (a + b + c)^2$$

द्वितीय विधि :

$$\text{माना } a = b = c = 1$$

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2} = 4 \times 3$$

$$3x - 3 = 4 \times 3 \times 2$$

$$x = 9$$

सभी विकल्पों में a, b और c का मान रखने पर

$$(i) (1+1+1)^2 = 9$$

$$(ii) (1+1+1) = 3$$

$$(iii) (1+1+1) \neq 3$$

$$(iv) 1+1+1-1-1-1 = 0$$

अतः विकल्प (a) सही है।

Solⁿ 213. यहाँ, उत्तर a, b, c पर निर्भर नहीं है, तो हम

a, b व c का कोई भी मान रख सकते हैं, अतः हम

$a = b = c = 0$ रख सकते हैं,

$$= \frac{1}{1+p^0+p^0} + \frac{1}{1+p^0+p^0} + \frac{1}{1+p^0+p^0}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{Sol}^n 214. P + \sqrt{P^2 + \sqrt{P^4 + \sqrt{P^8 + \sqrt{P^{16} + \dots \infty}}}}$$

$$= P + \sqrt{P^2 + \sqrt{P^4 + \sqrt{P^8 + P^8 \sqrt{1 + \dots \infty}}}}$$

$$= P + \sqrt{P^2 + \sqrt{P^4 + \sqrt{P^8 (1 + \sqrt{1 + \dots \infty})}}}$$

$$= P + \sqrt{P^2 + \sqrt{P^4 + P^4 \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots \infty}}}}$$

$$= P + \sqrt{P^2 + \sqrt{P^4 (1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots \infty}})}}$$

$$= P + \sqrt{P^2 + P^2 \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots \infty}}}}$$

$$= P + \sqrt{P^2 (1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots \infty}}})}$$

$$= P + P \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots \infty}}}}}$$

$$= P \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots \infty}}}}} \right)$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots \infty}}}}} = x \text{ (माना)}$$

$$1 + \sqrt{x} = x \Rightarrow \sqrt{x} = x - 1$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\Rightarrow x = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\text{तब, } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

लेकिन, $1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots \infty}}$ धनात्मक होगा

और $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ के बराबर होगा, इसलिए

Solⁿ 222. विधि-1:-

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \text{ (माना)}$$

$$\Rightarrow x = ak, y = bk \text{ और } z = ck$$

$$\begin{aligned} &= \frac{ax-by}{(a+b)(x-y)} + \frac{by-cz}{(b+c)(y-z)} + \frac{cz-ax}{(c+a)(z-x)} \\ &= \frac{a^2k-b^2k}{(a+b)(ak-bk)} + \frac{b^2k-c^2k}{(b+c)(bk-ck)} + \frac{c^2k-a^2k}{(c+a)(ck-ak)} \\ &= \frac{a^2-b^2}{(a+b)(a-b)} + \frac{b^2-c^2}{(b+c)(b-c)} + \frac{c^2-a^2}{(c+a)(c-a)} \\ &= \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2} + \frac{b^2-c^2}{b^2-c^2} + \frac{c^2-a^2}{c^2-a^2} = 1+1+1=3 \end{aligned}$$

विधि-2:-

$$\text{हम मान सकते हैं कि } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 1$$

$$x = a, y = b, z = c$$

$$\begin{aligned} &= \frac{ax-by}{(a+b)(x-y)} + \frac{by-cz}{(b+c)(y-z)} + \frac{cz-ax}{(c+a)(z-x)} \\ &= \frac{a^2-b^2}{(a+b)(a-b)} + \frac{b^2-c^2}{(b+c)(b-c)} + \frac{c^2-a^2}{(c+a)(c-a)} \\ &= \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2} + \frac{b^2-c^2}{b^2-c^2} + \frac{c^2-a^2}{c^2-a^2} = 1+1+1=3 \end{aligned}$$

विधि-3:-

$$x = a = 1, y = b = 2, z = c = 3$$

$$= \frac{1-4}{3(-1)} + \frac{4-9}{5(-1)} + \frac{9-1}{4(2)}$$

$$= \frac{-3}{-3} + \frac{-5}{-5} + \frac{8}{8} = 1+1+1=3$$

Solⁿ 223.

$$\begin{aligned} &= \frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)} \\ &= -\frac{a^3(b+c)}{(a-b)(c-a)} - \frac{b^3(c+a)}{(b-c)(a-b)} - \frac{c^3(a+b)}{(c-a)(b-c)} \\ &= \frac{-a^3(b+c)(b-c) - b^3(c+a)(c-a) - c^3(a+b)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-a^3(b+c)(b-c) - b^3(c^2-a^2) - c^3(a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-a^3(b+c)(b-c) - b^3c^2 + b^3a^2 - c^3a^2 + c^3b^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-a^3(b+c)(b-c) - b^3c^2 + c^3b^2 + b^3a^2 - c^3a^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-a^3(b+c)(b-c) - b^2c^2(b-c) + a^2(b^3-c^3)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-a^3(b+c)(b-c) - b^2c^2(b-c) + a^2(b-c)(b^2+c^2+bc)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(b-c)\{-a^3(b+c) - b^2c^2 + a^2(b^2+c^2+bc)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-a^3b - a^3c - b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + a^2bc}{(a-b)(c-a)} \\ &= \frac{-a^3b + a^2bc - b^2c^2 + a^2b^2 - a^3c + a^2c^2}{(a-b)(c-a)} \\ &= \frac{a^2b(c-a) - b^2(c^2-a^2) + a^2c(c-a)}{(a-b)(c-a)} \\ &= \frac{a^2b(c-a) - b^2(c+a)(c-a) + a^2c(c-a)}{(a-b)(c-a)} \\ &= \frac{(c-a)[a^2b - b^2(c+a) + a^2c]}{(a-b)(c-a)} \\ &= \frac{a^2b - b^2a - b^2c + a^2c}{(a-b)} \\ &= \frac{ab(a-b) + c(a-b)(a+b)}{(a-b)} \\ &= \frac{(a-b)(ab + c(a+b))}{(a-b)} \\ &= ab + bc + ca \end{aligned}$$

विधि-2

$a = 1, b = 2, c = 3$ रखने पर

$$= \frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{1(5)}{(-1)(-2)} + \frac{8(4)}{(-1)(1)} + \frac{27(3)}{2(1)} = \frac{5}{2} - 32 +$$

$$\frac{81}{2} = 11$$

सभी विकल्पों में $a = 1, b = 2, c = 3$ का मान रखने पर

(a) $abc = 6$

(b) $a + b + c = 6$

(c) $ab + bc + ca = 2 + 6 + 3 = 11$

(d) 3

अतः विकल्प (c) सही है।

Solⁿ 224. $a = 1, b = 2, c = 3$ रखने पर

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2 - c^2 - a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{1-4-9}{(-1)(-2)} + \frac{4-9-1}{(-1)(1)} + \frac{9-1-4}{(2)(1)}$$

$$= \frac{-12}{2} + \frac{-6}{-1} + \frac{4}{2} = -6 + 6 + 2 = 2$$

सभी विकल्पों में भी $a = 1, b = 2, c = 3$ का मान रखने पर

(a) $abc = 6$

(b) $a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$

(c) 2

(d) 0

अतः विकल्प (c) सही है।

Solⁿ 225. $x^2 + y^2 = z + 1$... (i)

$$y^2 + z^2 = x + 1$$
 ... (ii)

$$z^2 + x^2 = y + 1$$
 ... (iii)

समीकरण (i) को समीकरण (ii) में से घटाने पर

$$z^2 - x^2 = x - z$$

$$\Rightarrow (z+x)(z-x) + (z-x) = 0$$

$$\Rightarrow (z-x)(z+x+1) = 0$$

$$\text{यदि } z-x=0 \Rightarrow z=x$$

$$\text{और } z+x=-1$$

उसी प्रकार,

$$x = y = z$$

$$z+x=-1, x+y=-1 \text{ और } y+z=-1$$

लेकिन $x=y=z$ समीकरण (i) में

$$x^2 + x^2 = x + 1$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$2x^2 - 2x + x - 1 = 0$$

$$2x(x-1) + 1(x-1) = 0$$

$$(x-1)(2x+1) = 0$$

$$x = 1, \text{ या } \frac{-1}{2} = y = z$$

अतः x, y, z का मान तीनों समीकरण को संतुष्ट कर रहा है

$$\text{अतः } xyz = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\text{और } xyz = \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{8}$$

$$\text{Solⁿ 226. } 26 - 15\sqrt{3} = \frac{52 - 30\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{25 + 27 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} - 5)^2}{2}$$

अब,

$$38 + 5\sqrt{3} = \frac{76 + 2.5\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{75 + 1 + 2 \times 1 \times 5\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{(5\sqrt{3} + 1)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{26 - 15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2} - \sqrt{38 + 5\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{(3\sqrt{3} - 5)^2}{2}}}{5\sqrt{2} - \sqrt{\frac{(5\sqrt{3} + 1)^2}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3\sqrt{3}-5}{\sqrt{2}}}{5\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}-5}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - (5\sqrt{3}+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}-5}{10-5\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{3}-5}{9-5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}-5)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Solⁿ 227. माना $y = \frac{x+2}{2x^2+3x+6}$

$$y(2x^2+3x+6) = x+2$$

$$x^2(2y) + x(3y-1) + 6y-2 = 0$$

$$\therefore x \text{ वास्तविक है, अतः } b^2 - 4ac \geq 0$$

$$(3y-1)^2 - 4(2y)(6y-2) \geq 0$$

$$9y^2 + 1 - 6y - 8y(6y-2) \geq 0$$

$$9y^2 + 1 - 6y - 48y^2 + 16y \geq 0$$

$$-39y^2 + 10y + 1 \geq 0$$

$$39y^2 - 10y - 1 \leq 0$$

$$39y^2 - 13y + 3y - 1 \leq 0$$

$$13y(3y-1) + 1(3y-1) \leq 0$$

$$(3y-1)(13y+1) \leq 0$$

$$y \in \left(-\frac{1}{13}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{न्यूनतम मान} = -\frac{1}{13}$$

$$\text{अधिकतम मान} = \frac{1}{3}$$

Solⁿ 228. $a=b=c=1$ का मान रखने पर

$$\frac{(a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4}{a+b+c}$$

$$= \frac{(3)^4 - (2)^4 - (2)^4 - (2)^4 + 1 + 1 + 1}{1+1+1} = \frac{36}{3} = 12$$

$a=b=c=1$ का मान सभी विकल्पों में रखने पर

विकल्प:-

(a) $3abc = 3$

(b) $4abc = 4$

(c) $6abc = 6$

(d) $12abc = 12$

अतः विकल्प (d) सही है।

Solⁿ 229. $a=0, b=2, c=3$ का मान रखने पर

$$= \frac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)} + \frac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$$

$$= 0 + \frac{2 \cdot (3)^2}{(-2)(-1)} + \frac{3(-2)^2}{(-1)(3)}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{12}{3} = 9 - 4 = 5$$

$a=0, b=2, c=3$ का मान सभी विकल्पों में रखने

पर

विकल्प (a) $a+b+c = 5$

विकल्प (b) 3

विकल्प (c) $a^2+b^2+c^2 = 13$

विकल्प (d) $abc = 0$

अतः विकल्प (a) सही है।

Solⁿ 230. सभी विकल्प a, b व c पर निर्भर नहीं है।

$a=b=c=1$ का मान रखने पर

$$= \frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a} + \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + 0$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

Solⁿ 231. $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3} \Rightarrow x^6 = -1$

देखें टाईप 2 (F)

$$x^{67} + x^{53} + x^{43} + x^{29} + x^{24} + x^{12} + x^6 + 3$$

$$= x \cdot x^{66} + \frac{x^{54}}{x} + x \cdot x^{42} + \frac{x^{30}}{x} + (x^6)^4 + (x^6)^2 + x^6 + 3$$

$$x^{66} = (x^6)^{11} = -1$$

$$x^{54} = (x^6)^9 = -1$$

$$x^{42} = (x^6)^7 = -1$$

$$x^{30} = (x^6)^5 = -1$$

$$= x \cdot (-1)^{11} + \frac{1}{x} \cdot (-1)^9 + x \cdot (-1)^7 + \frac{1}{x} \cdot (-1)^5 + (-1)^4$$

$$+ (-1)^2 + (-1) + 3$$

$$= -x - \frac{1}{x} - x - \frac{1}{x} + 1 + 1 - 1 + 3$$

$$= -\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 4$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{3} + 4$$

$$= 2(2 + \sqrt{3})$$

Solⁿ 232. यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ [टाईप 2(C) देखे]

$$\Rightarrow x^3 = -1$$

$$\Rightarrow x^{52} + x^{46} + x^{32} + x^{26} + x^{21} + x^{15} + x^6 + x^3 + 4$$

$$\Rightarrow x \cdot (x^3)^{17} + x \cdot (x^3)^{15} + \frac{1}{x} \cdot (x^3)^{11} + \frac{1}{x} \cdot (x^3)^9 + (x^3)^7$$

$$+ (x^3)^5 + (x^3)^2 + x^3 + 4$$

$$\Rightarrow x \cdot (-1)^{17} + x \cdot (-1)^{15} + \frac{1}{x} \cdot (-1)^{11} + \frac{1}{x} \cdot (-1)^9 + (-1)^7 +$$

$$(-1)^5 + (-1)^2 + (-1) + 4$$

$$= -x - x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - 1 - 1 + 1 - 1 + 4$$

$$= -1 - 1 + 2 = 0$$

Solⁿ 233. विधि-1:-

$$ab - b + 1 = 0$$

c से गुणा करने पर

$$abc - bc + c = 0 \Rightarrow abc = bc - c \dots (i)$$

$$bc - c + 1 = 0 \Rightarrow bc - c = -1 \dots (ii)$$

समी. (1) व (2) से, $abc = -1$

समी. (2) में a से गुणा करने पर

$$abc - ac + a = 0 \Rightarrow a - ac = -abc$$

$$= -(-1)$$

$$= 1$$

विधि-2 :-

$$ab - b + 1 = 0 \Rightarrow b - ab = 1$$

$$bc - c + 1 = 0 \Rightarrow c - bc = 1$$

समरूपता द्वारा

$$a - ac = 1$$

Solⁿ 234. $a + b + c = 20$ (i)

और $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 30$ (ii)

समीकरण (i) और (ii) का गुणा करने पर

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 20 \times 30$$

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 = 600$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = 597$$

Solⁿ 235. $\frac{b-c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a-b}{c} = 1$

$$\frac{b-c}{a} + \frac{a-b}{c} = 1 - \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{bc - c^2 + a^2 - ab}{ac} = \frac{b - a - c}{b}$$

$$\frac{b(c-a) - (c+a)(c-a)}{ac} = \frac{b-a-c}{b}$$

$$\frac{(c-a)(b-c-a)}{ac} = \frac{(b-a-c)}{b}$$

$$\frac{c-a}{ac} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Solⁿ 236. $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \Rightarrow xw = yz$

$$= (xy + zw)^2 = x^2 y^2 + z^2 w^2 + 2xyzw$$

$$= x^2 y^2 + x^2 z^2 + x^2 w^2 + x^2 y^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \because xyzw = (xw)(yz) = y^2 z^2 \\ xyzw = (xw)(yz) = x^2 w^2 \end{array} \right\}$$

$$= x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 w^2 + x^2 w^2$$

$$= y^2 (x^2 + z^2) + w^2 (x^2 + z^2)$$

$$= (x^2 + z^2)(y^2 + w^2)$$

Solⁿ 237. $a = b = c = 1$ का मान रखने पर

$$\text{तब, } x = \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{b}{a+c} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}$$

$$\text{तब, } xy + yz + zx + 2xyz = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} = 1$$

अतः विकल्प (d) सत्य है।

$$\text{Sol}^n \text{ 238. } \sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+2}}}} = x$$

$$\sqrt{x+2x} = x$$

$$\sqrt{3x} = x$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$3x = x^2$$

$$x = 3$$

$$\text{Sol}^n \text{ 239. } \frac{1}{x^2 + 5x + 10} \text{ का मान अधिकतम होगा जब } x^2 +$$

$5x + 10$ न्यूनतम है, हम $x^2 + 5x + 10$ का न्यूनतम मान ज्ञात करेंगे।

$$\text{अवकलन} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5}{2}$$

अतः $x^2 + 5x + 10$ का न्यूनतम मान

$$= \left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{-5}{2}\right) + 10$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 10 = \frac{15}{4}$$

$$\text{अतः } \frac{1}{x^2 + 5x + 10} \text{ का अधिकतम मान} = \frac{1}{15/4} = \frac{4}{15}$$

$$\text{Sol}^n \text{ 240. } x + y = 1$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \text{ का मान न्यूनतम होगा जब}$$

$$x = y = \frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \text{ का न्यूनतम मान}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2$$

$$= (2.5)^2 + (2.5)^2 = 6.25 + 6.25 = 12.5$$

$$\text{Sol}^n \text{ 241. } p^a = q^b = r^c = k \text{ (माना)}$$

$$p = k^{1/a}, q = k^{1/b}, r = k^{1/c}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{q}{r} \Rightarrow pr = q^2$$

$$k^{1/a} \cdot k^{1/c} = k^{2/b} \Rightarrow k^{1/a+1/c} = k^{2/b}$$

घातों की तुलना करने पर

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) b = 2$$

$$\text{Sol}^n \text{ 242. } x^2(x+y+z) = 36 \quad \dots(i)$$

$$y^2(x+y+z) = 46 \quad \dots(ii)$$

$$z^2(x+y+z) = 63 \quad \dots(iii)$$

$$xy(x+y+z) = 111 \Rightarrow 2xy(x+y+z) = 222 \quad \dots(iv)$$

$$yz(x+y+z) = 99 \Rightarrow 2yz(x+y+z) = 198 \quad \dots(v)$$

$$zx(x+y+z) = 82 \Rightarrow 2zx(x+y+z) = 164 \quad \dots(vi)$$

सभी 6: समीकरणों को जोड़ने पर

$$\Rightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) = 729$$

$$\Rightarrow (x+y+z)(x+y+z)^2 = 729$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^3 = 729$$

$$\Rightarrow x+y+z = 9$$

समीकरण (i) में मान रखने पर

$$9x^2 = 36$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$

Solⁿ 243. विधि-1:

$$x = \frac{a-b}{a+b} \text{ और } \frac{1}{x} = \frac{a+b}{a-b}$$

योगान्तरनुपात नियम द्वारा

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{a+b+a-b}{a+b-a+b} = \frac{a}{b}$$

$$\text{उसी प्रकार से, } \frac{1+y}{1-y} = \frac{b}{c} \text{ और } \frac{1+z}{1-z} = \frac{c}{a}$$

$$\text{तब, } \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y} \cdot \frac{1+z}{1-z} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{a} = 1$$

विधि-2:

$a = -1, b = 2, c = -3$ का मान रखने पर

$$\text{अतः, } x = -3, y = -5 \text{ और } z = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y} \cdot \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-3}{1+3} \cdot \frac{1-5}{1+5} \cdot \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\left(-\frac{2}{4}\right) \left(\frac{-4}{6}\right) \left(\frac{3}{1}\right) = 1$$

Solⁿ 244. $x = 5$ और $y = z$

न्यूनतम मान

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)$$

$$= \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

$y = z$ रखने पर

$$= \frac{1}{2} [(x-z)^2 + (z-x)^2]$$

$$= \frac{1}{2} [2(x-z)^2]$$

$$= (x-z)^2$$

$z = 0$ रखने पर (अधिकतम मान के लिए)

$$= (x-z)^2 = (5-0)^2 = 25$$

Solⁿ 245. $x + 2y + z = -6 \Rightarrow x + y + (y+z) = -6$

$$\text{तब, } x^2 + 2y^2 + z^2 + 2yz$$

$$= x^2 + y^2 + (y+z)^2$$

(अधिकतम मान के लिए, $x = y = y+z = -2$)

$$= (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2$$

$$= 12$$

Solⁿ 246. $a^3 = bc$

...(i)

$$b^3 = ac$$

...(ii)

$$c^3 = ab$$

...(iii)

तीनों समीकरण को गुणा करने पर

$$a^3 b^3 c^3 = a^2 b^2 c^2$$

घात से तुलना करने पर

$$x = 2, y = 2, z = 2$$

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Solⁿ 247. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$

$$\Rightarrow x = ak, y = bk, z = ck$$

तीनों समीकरणों को जोड़ने पर

$$x + y + z = k(a + b + c)$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = k^2(a + b + c)^2$$

$$2xy + 2yz + 2zx = k^2(a + b + c)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$k = \frac{x}{a} \text{ रखने पर}$$

$$2(xy + yz + zx) = \frac{x^2}{a^2} (a + b + c)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$xy + yz + zx = \frac{x^2(a + b + c)^2 - a^2(x^2 + y^2 + z^2)}{2a^2}$$

Solⁿ 248. $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} = k$ (माना)

$x = ky$ और $z = kw$

$$\Rightarrow \frac{x^m + y^m + z^m + w^m}{x^{-m} + y^{-m} + z^{-m} + w^{-m}}$$

$$= \frac{k^m y^m + y^m + k^m w^m + w^m}{k^{-m} y^{-m} + y^{-m} + k^{-m} w^{-m} + w^{-m}}$$

$$= \frac{y^m (k^m + 1) + w^m (k^m + 1)}{y^{-m} (k^{-m} + 1) + w^{-m} (k^{-m} + 1)}$$

$$= \frac{(k^m + 1)(y^m + w^m)}{(k^{-m} + 1)(y^{-m} + w^{-m})}$$

$$= \frac{(k^m + 1)(y^m + w^m)}{\left(\frac{1}{k^m} + 1\right)\left(\frac{1}{y^m} + \frac{1}{w^m}\right)}$$

$$= \frac{(k^m + 1)(y^m + w^m)}{\frac{(k^m + 1)(y^m + w^m)}{k^m \cdot y^m \cdot w^m}}$$

$$= k^m y^m w^m = (kyw)^m = (k^2 y^2 w^2)^{m/2}$$

$$= (ky \cdot y \cdot w \cdot kw)^{m/2} = (xyzw)^{m/2}$$

Solⁿ 249. $\sqrt{13x^3 - 14x + 29} + \sqrt{13x^3 - 14x - 21} = 10 \dots (i)$

$$\sqrt{13x^3 - 14x + 29} - \sqrt{13x^3 - 14x - 21} = t \dots (ii)$$

समी. (i) व समी. (ii) को गुणा करने पर

$$\Rightarrow \left(\sqrt{13x^3 - 14x + 29}\right)^2 - \left(\sqrt{13x^3 - 14x - 21}\right)^2 = 10t$$

$$\Rightarrow 13x^3 - 14x + 29 - 13x^3 + 14x + 21 = 10t$$

$$\Rightarrow 50 = 10t$$

$$\Rightarrow t = 5$$

Solⁿ 250. विधि-1

$$3x^2 = by + cz \dots (i)$$

$$3y^2 = cz + ax \dots (ii)$$

$$3z^2 = ax + by \dots (iii)$$

ax, bx और cz क्रमशः तीनों समीकरण के दोनों पक्षों में जोड़ने

पर $ax + 3x^2 = ax + by + cz \Rightarrow x(a + 3x) = k$ (माना)

$by + 3y^2 = ax + by + cz \Rightarrow y(b + 3y) = k$ (माना)

$cz + 3z^2 = ax + by + cz \Rightarrow z(c + 3z) = k$ (माना)

$$\Rightarrow \frac{a}{a + 3x} + \frac{b}{b + 3y} + \frac{c}{c + 3z}$$

$$= \frac{ax}{ax + 3x^2} + \frac{by}{by + 3y^2} + \frac{cz}{cz + 3z^2}$$

$$= \frac{ax}{k} + \frac{by}{k} + \frac{cz}{k} = \frac{ax + by + cz}{k} = \frac{k}{k} = 1$$

विधि-2

समीकरण में $x = y = z = 2$ तथा $a = b = c = 3$ तीनों समीकरण में रखने पर

$$\Rightarrow \frac{a}{a + 3x} + \frac{b}{b + 3y} + \frac{c}{c + 3z} = \frac{3}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Solⁿ 251. $x = \left(a + \sqrt{a^2 + b^3}\right)^{1/3} + \left(a - \sqrt{a^2 + b^3}\right)^{1/3}$

हम प्रश्न को दोनों तरफ घन करने हल कर सकते हैं, लेकिन हम देखते हैं विकल्प b पर निर्भर नहीं है।

अतः हम $b = 0$ रख सकते हैं,

अब प्रश्न होगा।

$$x = \left(a + \sqrt{a^2}\right)^{1/3} + \left(a - \sqrt{a^2}\right)^{1/3} = (2a)^{1/3},$$

तब, $x^3 - 2a = ?$

$$x = (2a)^{1/3}$$

$$x^3 = 2a$$

$$x^3 - 2a = 0$$

Solⁿ 252. $a = \frac{xy}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \dots (i)$

$$b = \frac{xz}{x+z} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \dots (ii)$$

$$c = \frac{yz}{y+z} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \dots (iii)$$

तीनों समीकरणों को जोड़ने पर

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

लेकिन $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{c} \right) = \frac{2}{x} + \frac{2}{c}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{bc + ca - ab}{abc}$$

$$x = \frac{2abc}{bc + ca - ab}$$

Solⁿ 253. $\frac{x-a^2}{b^2+c^2} + \frac{x-b^2}{c^2+a^2} + \frac{x-c^2}{a^2+b^2} = 3$

$a = b = c = 1$ रखने पर

तब, $\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2} = 3$

अतः $x = 3$

चारों विकल्पों में $a = b = c = 1$ का मान रखने पर

(a) $a^2 + b^2 = 2$

(b) $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

(c) $a^2 - b^2 - c^2 = -1$

(d) $a^2 + b^2 - c^2 = 1$

अतः विकल्प (b) सही है।

Solⁿ 254. संकेत: (उदाहरण-131 देखें)

Solⁿ 255. $a + b + c + d = 4$

$$\Rightarrow (a+1) + (b+1) + (c+1) + (d+1) = 8$$

जब, $a+1 = b+1 = c+1 = d+1 = 2$

तब, $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ का अधिकतम मान $2^4 = 16$

Solⁿ 256. $x + y + z = 1$

$$\left(\frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \left(\frac{1}{z} - 1 \right) \text{ न्यूनतम होगा जब}$$

$$x = y = z = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \left(\frac{1}{z} - 1 \right) \text{ का न्यूनतम मान}$$

$$= (2)(2)(2) = 8$$

Solⁿ 257. $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

$$= 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right)$$

माना, $\frac{a}{b} = x, \frac{b}{c} = y, \frac{c}{a} = z$

$$= 3 + \left(x + \frac{1}{x} \right) + \left(y + \frac{1}{y} \right) + \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

अतः न्यूनतम मान $= 3 + 2 + 2 + 2 = 9$

($\therefore$ न्यूनतम मान $x + \frac{1}{x} = 2$ यदि x धनात्मक पूर्णांक है)

विधि:-2

हम कह सकते हैं कि

$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ का मान न्यूनतम होगा जब $a=b=c$

$$\text{न्यूनतम मान} = (3a) \left(\frac{3}{a} \right) = 9$$

Solⁿ 258. $\frac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)}{abc}$

$$= \frac{(a^2+a+1)}{a} \cdot \frac{(b^2+b+1)}{b} \cdot \frac{(c^2+c+1)}{c}$$

$$= \left(a + \frac{1}{a} + 1 \right) \cdot \left(b + \frac{1}{b} + 1 \right) \cdot \left(c + \frac{1}{c} + 1 \right)$$

न्यूनतम मान $= (2+1)(2+1)(2+1) = 27$

विधि: 2

$a=b=c=1$ का मान रखने पर
तब, न्यूनतम मान = 27

$$\text{Sol}^n 259. x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{9}{8}} - \sqrt{\frac{8}{9}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2} \cdot 3} \right) = \frac{1}{12\sqrt{2}}$$

$$\frac{18\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{18\sqrt{1+\frac{1}{288}}}{\frac{1}{12\sqrt{2}} + \sqrt{1+\frac{1}{288}}}$$

$$\frac{18\sqrt{\frac{289}{288}}}{\frac{1}{12\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{289}{288}}} = \frac{18 \times \frac{17}{12\sqrt{2}}}{\frac{1}{12\sqrt{2}} + \frac{17}{12\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{18 \times 17}{18} = 17$$

$$\text{Sol}^n 260. \sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\Rightarrow 10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}$$

$$\Rightarrow 10 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = a + b + c + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{c} + 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{b}$$

परिमेय तथा अपरिमेय भाग की तुलना करने पर

$$\sqrt{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a = 2$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{3} \Rightarrow b = 3$$

$$\sqrt{c} = \sqrt{5} \Rightarrow c = 5$$

$$\therefore a + b + c = 10$$

Solⁿ 261.

$$x + \frac{1}{x} = 2a \text{ व } y + \frac{1}{y} = 2c$$

दोनों समीकरणों की गुणा करने पर

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 4ac$$

$$xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = 4ac \quad \dots(i)$$

$$x - \frac{1}{x} = 2b \text{ \& } y - \frac{1}{y} = 2d$$

दोनों समीकरणों की गुणा करने पर

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(y - \frac{1}{y}\right) = 4bd$$

$$xy - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = 4bd \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$$2xy + \frac{2}{xy} = 4ac + 4bd$$

$$xy + \frac{1}{xy} = 2(ac + bd)$$

$$\text{Sol}^n 262. 3s = (a + b + c)$$

$$(s - a) + (s - b) + (s - c) = 0$$

तब,

$$(s - a)^3 + (s - b)^3 + (s - c)^3 - 3(s - a)(s - b)(s - c) = 0 \quad \dots(i)$$

अब समीकरण (i) में $(s - a)$, $(s - b)$, $(s - c)$ को क्रमशः a , b , व c से प्रतिस्थापित करने पर

तब, समीकरण (i) से

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

विधि-2

हम $s = 0$ रख सकते हैं।

इसका मतलब $a + b + c = 0$

$$\text{तब } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

a, b, c की जगह $-a, -b, -c$ रखने पर

$$(-a)^3 + (-b)^3 + (-c)^3 - 3(-a)(-b)(-c) = 0$$

$$\Rightarrow -a^3 - b^3 - c^3 + 3abc = 0$$

$$\Rightarrow -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 0$$

Solⁿ 263. $a=1, b=2, c=3$ रखने पर
 $\Rightarrow a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$
 $= 1(2-3)^3 + 2(3-1)^3 + 3(1-2)^3$
 $= -1 + 16 - 3 = 12$

यह मान $a=1, b=2, c=3$ सभी विकल्पों में रखने पर

विकल्प (a) $\Rightarrow 3abc = 18$

विकल्प (b) $\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 2$

विकल्प (c) $\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = 12$

विकल्प (d) $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c) = 360$

अतः विकल्प (c) सही है

Solⁿ 264. $a=0, b=1, c=2$ रखने पर
 $a^4(b^2-c^2) + b^4(c^2-a^2) + c^4(a^2-b^2)$
 $= 0 + 1(4) + 16(-1) = -12$

यह मान $a=0, b=1, c=2$ सभी विकल्पों में मान रखने पर

विकल्प (a) $\Rightarrow 3a^2b^2c^2 = 0$

विकल्प (b) $\Rightarrow (a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2) = 12$

विकल्प (c) $\Rightarrow -(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2) = -12$

विकल्प (d) $\Rightarrow (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) = 20$

अतः विकल्प (c) सही है।

Solⁿ 265. $a=1, b=2, c=3$ रखने पर
 $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$
 $= 1(-1)^2 + 2(2)^2 + 3(-1)^2 + 8(1)(2)(3)$
 $= 1 + 8 + 3 + 48 = 60$

यह मान $a=1, b=2, c=3$ सभी विकल्पों में रखने पर

विकल्प (a) $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 60$

विकल्प (b) $\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 2$

विकल्प (c) $\Rightarrow 0$

विकल्प (d) $\Rightarrow abc = 6$

अतः विकल्प (a) सही है।

Solⁿ 266. $a=1, b=-2, c=3$ रखने पर
 $(bc+ca+ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$
 $= (-6+3-2)^3 - (-8)(27) - (27)(1) - (1)(-8)$
 $= -125 + 216 - 27 + 8 = 72$

यह मान $a=1, b=-2, c=3$ सभी विकल्पों में रखने पर

विकल्प (a) $\Rightarrow 3abc(a+b)(b+c)(c+a) = 72$

विकल्प (b) $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = -4$

विकल्प (c) $\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = -30$

विकल्प (d) $\Rightarrow 24abc = -144$

अतः विकल्प (a) सही है।

विधि-2

$\therefore (x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x)$
 $\therefore (bc+ca+ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$
 $\Rightarrow b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 + 3(bc+ca)(ca+ab)(bc+ca)$
 $- b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$

$\Rightarrow 3(bc+ca)(ca+ab)(bc+ca)$

$\Rightarrow 3abc(a+b)(b+c)(c+a)$

Solⁿ 267. $a=1, b=-2, c=3$ रखने पर

$= (a+b+c)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 - (a+b)^4 + a^4 + b^4 + c^4$
 $= (1-2+3)^4 - (-2+3)^4 - (3+1)^4 - (1-2)^4 + 1^4 + (-2)^4 + 3^4$
 $= 16 - 1 - 256 - 1 + 1 + 16 + 81 = -144$

यह मान $a=1, b=-2, c=3$ सभी विकल्पों में रखने पर

विकल्प (a) $\Rightarrow 12abc(a+b+c) = -144$

विकल्प (b) $\Rightarrow abc(a+b+c) = -12$

विकल्प (c) $\Rightarrow 2$

विकल्प (d) $\Rightarrow abc = -6$

अतः विकल्प (a) सही है।

Solⁿ 268. $a=1, b=2, c=3$ रखने पर

$\frac{a^2-b^2-c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2-c^2-a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2-a^2-b^2}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{1-4-9}{(-1)(-2)} + \frac{4-9-1}{(-1)(+1)} + \frac{9-1-4}{(2)(1)}$
 $= \frac{-12}{2} + \frac{-6}{-1} + \frac{4}{2}$
 $= -6 + 6 + 2 = 2$

Solⁿ 269. $a+b+c=0$

$a=1, b=-1, c=0$ रखने पर

$\Rightarrow \frac{2(a^4+b^4+c^4)}{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} = \frac{2(1+1+0)}{(1+0+0)} = 4$

Solⁿ 270. $x + \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (5)^2 - 2 = 23$

$x + \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = (5)^3 - 3 \times 5 = 110$

समी. (i) और समी. (ii) को जोड़ने पर

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} = 23 + 110$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) = 133$$

$$8 + x^3 + \frac{1}{x^2} = 133$$

$$x^3 + \frac{1}{x^2} = 133 - 8 = 125$$

Solⁿ 271. $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$

$$b = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

यहाँ, $a+b=4$, $a-b=2\sqrt{3}$ और $ab=1$

$$7a^2 + 11ab - 7b^2 = 7(a^2 - b^2) + 11ab$$

$$= 7(a+b)(a-b) + 11ab$$

$$= 7(4)(2\sqrt{3}) + 11 = 11 + 56\sqrt{3}$$

Solⁿ 272. $2x = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

$$4x^2 = a + \frac{1}{a} + 2$$

$$4x^2 - 4 = a + \frac{1}{a} + 2 - 4$$

$$4(x^2 - 1) = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

$$\sqrt{(x^2 - 1)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{1}{2} \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{\frac{1}{2} \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{\frac{2}{\sqrt{a}}} = \frac{a-1}{2}$$

विधि-2 $a=1$ प्रश्न व सभी विकल्पों में रखने पर

$$2x = 1+1 \Rightarrow x=1$$

$$\text{तब, } \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$$\text{विकल्प (a) } \frac{a-1}{2} = 0 \text{ (} a=1 \text{ रखने पर)}$$

अतः विकल्प (a) सही है।

Solⁿ 273. $\frac{x^3+1}{x^2-1} = x + \sqrt{\frac{6}{x}}$

$$\Rightarrow \frac{x^3+1}{x^2-1} - x = \sqrt{\frac{6}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+1-x^3+x}{x^2-1} = \sqrt{\frac{6}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1+x}{(x-1)(x+1)} = \sqrt{\frac{6}{x}}$$

$$\frac{1}{x-1} = \sqrt{\frac{6}{x}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\frac{1}{x^2+1-2x} = \frac{6}{x}$$

$$6x^2 + 6 - 12x = x$$

$$6x^2 - 13x + 6 = 0$$

x द्वारा भाग देने पर

$$6x - 13 + \frac{6}{x} = 0$$

$$6\left(x + \frac{1}{x}\right) = 13$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$$

Solⁿ 274. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3}$

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{xy}} = \frac{10}{3}$$

$$\sqrt{xy} = 3 \Rightarrow xy = 9$$

विकल्प द्वारा हम जाँच कर सकते हैं

$$x = 9, y = 1$$

या,

$$x + y = 10$$

$$x - y = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$\text{अतः } x = 9, y = 1$$

Solⁿ 275. $x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा

$$\frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$$

...(i)

$$\text{यदि, } \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

योगान्तरानुपात नियम द्वारा

$$\frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$$

समी. (i) में से समी. (ii) को घटाने पर

$$\frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} - \frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-4 - \sqrt{6} + 6 + \sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Solⁿ 276. $(x+1)(x+2) + \frac{1}{x(x-1)} = 0$

$$(x^2+x)(x+2)(x-1)+1=0$$

$$(x^2+x)(x^2+x-2)+1=0$$

माना $t' = (x^2+x)$ तब,

$$(t)(t-2)+1=0 \Rightarrow t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0 \Rightarrow t=1$$

$$\text{अतः } x^2+x=1$$

Solⁿ 277. $x^2 + xy + y^2 = 84$

$$(x^2+x)(x+2)(x-1)+1=0$$

$$x - \sqrt{xy} + y = 6$$

$$\Rightarrow x + y = 6 + \sqrt{xy}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$x^2 + y^2 + 2xy = 36 + xy + 12\sqrt{xy}$$

$$x^2 + y^2 + xy = 36 + 12\sqrt{xy}$$

$$84 = 36 + 12\sqrt{xy}$$

$$12\sqrt{xy} = 84 - 36 = 48$$

$$\sqrt{xy} = 4 \Rightarrow xy = 16$$

$\sqrt{xy} = 4$ का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$x - 4 + y = 6$$

$$x + y = 10 \quad \dots(iii)$$

$$\text{अतः } (x-y) = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{100 - 64} = 6 \quad \dots(iv)$$

समीकरण (iii) और (iv) को हल करने पर

$$x = 8, \quad y = 2$$

$$x^3 + y^3 = 512 + 8 = 520$$

$$\text{Sol}^n 278. \quad x^2 - xy + y^2 = 19 \quad \dots(i)$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931 \quad \dots(ii)$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = 931$$

$$(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = 931$$

$$(x^2 + y^2 + xy)(x^2 - xy + y^2) = 931$$

$$\text{तब, } x^2 + y^2 + xy = \frac{931}{19} = 49 \quad \dots(iii)$$

समी. (ii) व समी. (iii) को जोड़ने पर

$$2(x^2 + y^2) = 19 + 49 = 68$$

$$x^2 + y^2 = 34 \quad \dots(iv)$$

समी. (iii) में से समी. (i) को घटाने पर

$$2xy = 49 - 19 = 30 \quad \dots(v)$$

समी. (iv) और समी. (v) को जोड़ने पर

$$(x^2 + y^2 + 2xy) = 30 + 34$$

$$(x+y)^2 = 64 \Rightarrow x+y = 8 \quad \dots(vi)$$

समी. (iv) में से समी. (v) को घटाने पर

$$x^2 + y^2 - 2xy = 34 - 30$$

$$(x-y)^2 = 4 \Rightarrow x-y = 2 \quad \dots(vii)$$

समी. (vi) और समी. (vii) को हल करने पर

$$x = 5, y = 3$$

$$\text{तब, } 2x^2 + 3y^2 = 2 \times 25 + 3 \times 9 = 77$$

$$\text{Sol}^n 279. \quad (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx)$$

$$a^2 = a^2 + 2(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx = 0$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$a^3 - 3xyz = a(a^2 - 0) = a^3$$

$$3xyz = 0 \Rightarrow xyz = 0$$

