41

सारणिक
(DETERMINANTS)

वर्ग आव्यूह Determinants कहलाता है। जो कुछ निश्चित मान देता है। इसे | | द्वारा निरूपित किया जाता है।

जैसे - $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_{2\times 2}$

यह एक 2nd Order का Determinants है, तथा इसका मान $= ad - bc$ के बराबर होता है।

जैसे - $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$ का मान क्या होगा ?

Speedy Solution :-

मान $= (2 \times 9 - 3 \times 4) = 18 - 12 = 6$

पुनः यदि $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ तीन संख्याएँ हो, तो Symbol

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}_{3\times 3}$$

एक 3rd Order का determinants है, तथा इसका मान

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

के बराबर होगा। जिसे Determinants along its first row कहा जाता है।

किसी भी Element के पहले '+' और '–' रखने के नियम

उन Rows और Columns की संख्याओं का योगफल ज्ञात करें जिसमें वह Elements आया हो यदि उनका योगफल सम संख्या (even number) हो, तो उस element के पहले '+' चिह्न और अगर योगफल विषम संख्या (odd number) हो, तो उस elements के पहले '–' चिह्न का प्रयोग होगा।

चूँकि ऊपर में a_1, पहले Row और पहले Column में आया है।

अर्थात् $(1+1) = 2 =$ even number है।

इसलिए a_1 के पहले '+' चिह्न का प्रयोग होगा।

पुनः a_2 पहले Row और दूसरा Column में आया है।

अर्थात् $(1+2) = 3 =$ odd number है।

इसलिए a_2 के पहले '–' चिह्न का प्रयोग होगा।

Properties of Determinants

1. यदि किसी Determinants के प्रत्येक कतार (Row) को उसके संगत स्तंभ (Column) में बदल दिया जाए तो Determinants का मान नहीं बदलता है।

अर्थात्, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

2. यदि किसी Determinants के दो संगत कतारें (Rows) अथवा दो संगत स्तंभो (Columns) को आपस में बदल दिया जाए, तो determinants का मान (Value) का चिह्न बदल जाता है अर्थात् मान (–1) गुणा हो जाता है।

अर्थात् $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

एवं $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

3. यदि किसी determinants की दो पंक्तियाँ या स्तंभ (Columns) एक जैसे हो, तो उसका मान शून्य (zero) होता है।

अर्थात् $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

4. यदि किसी determinants की किसी एक पंक्ति (Row) या स्तंभ (Column) के सभी अवयव शून्य हो, तो determinants का मान भी शून्य (0) होता है।

अर्थात् $\begin{vmatrix} 0 & a & a_1 \\ 0 & b & b_1 \\ 0 & c & c_1 \end{vmatrix} = 0$

या, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$

5. यदि किसी determinant की किसी एक पंक्ति या स्तंभ में किसी अचर राशि k से गुणा कर दिया जाए, तो determinants का मान k गुणा हो जाता है।

अर्थात् $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

6. यदि किसी determinant की किसी पंक्ति (अथवा स्तंभ) के अवयवों में दूसरी पंक्ति या पंक्तियों (अथवा स्तंभो) के संगत अवयवों के सम अपवर्त्य (Equimultiples) जोड़ें जाएँ या घटा दिये जाएँ तो determinant के मान में परिवर्तन नहीं होता है।

अर्थात् $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 + lb_1 + mc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + lb_2 + mc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + lb_3 + mc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तथा $\begin{vmatrix} a_1 + \alpha & b_1 & c_1 \\ a_2 + \beta & b_2 & c_2 \\ a_3 + \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & b_1 & c_1 \\ \beta & b_2 & c_2 \\ \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinats पर आधारित प्रश्न

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ का मान बतायें।

Speedy Solution :-

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-2) \times 4 = 15 + 8 = 23$$

2. $\begin{vmatrix} 23 & 12 & 11 \\ 36 & 10 & 26 \\ 63 & 26 & 37 \end{vmatrix}$ का मान बतायें।

Speedy Solution :-

$$\begin{vmatrix} 23 & 12 & 11 \\ 36 & 10 & 26 \\ 63 & 26 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & 12+11 & 11 \\ 36 & 10+26 & 26 \\ 63 & 26+37 & 37 \end{vmatrix} \quad [C_2 \to C_2 + C_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & 23 & 11 \\ 36 & 36 & 26 \\ 63 & 63 & 37 \end{vmatrix} = 0 \quad [C_1 = C_2]$$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ का मान क्या होगा ?

Speedy Solution :-

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

[क्योंकि R_2 के अभी अवयव शून्य है।]

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ का मान बतायें ?

Speedy Solution :-

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (6-1) - 2(4-3) + 3(2-9) = 5 - 2 - 21 = -18$$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ का मान बतायें ?

Speedy Solution :-

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad [C_1 - C_2 \text{ और } C_2 - C_3]$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

(C_1 एवं C_2 से उभयनिष्ठ गुणनखंड को बाहर निकालने पर)

$$= (a-b)(b-c).1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(b+c-a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

6. $\begin{vmatrix} b+c & a+b & a \\ c+a & b+c & b \\ a+b & c+a & c \end{vmatrix}$ का मान निकालें ?

Speedy Solution :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a \\ a+c+c & b+c & b \\ a+b+c & c+a & c \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_3]$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a \\ 1 & b+c & b \\ 1 & c+a & c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a \\ 0 & c-a & b-a \\ 0 & c-b & c-a \end{vmatrix}$$

$$[R_2 \to R_2 \to R_1; R_3 \to R_3 \to R_1]$$

$$= (a+b+c)\left[(c-a)^2 - (c-b)(b-a)\right]$$

$$= (a+b+c)\left[\left(c^2 + a^2 - 2ca - (cb - ca - b^2 + ba)\right)\right]$$

$$= (a+b+c)\left[a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab\right]$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

7. $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix}$ का मान निकालें ?

Speedy Solution :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a_1+a_2+a_3 & a_2 & a_3 \\ 1+a_1+a_2+a_3 & 1+a_2 & a_3 \\ 1+a_1+a_2+a_3 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix}$$

$[C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$

$$= (1+a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3\\ 1 & 1+a_2 & a_3\\ 1 & a_2 & 1+a_3\end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & a_2 & 1+a_3\end{vmatrix}\begin{bmatrix}R_1 \to R_1 \to R_2\\ R_2 \to R_2 \to R_3\end{bmatrix}$$

$$= (1+a_1+a_2+a_3)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1+a_2+a_3)(1-0) = 1+a_1+a_2+a_3$$

8. $\begin{vmatrix}b+c & a & a\\ b & c+a & b\\ c & c & a+b\end{vmatrix}$ का मान निकालें ?

Speedy Solution :-

$$\Delta = \begin{vmatrix}0 & -2c & -2b\\ b & c+a & b\\ c & c & a+b\end{vmatrix}\ [R_1 \to R_1 \to R_2 \to R_3]$$

$$= \frac{1}{c}\begin{vmatrix}0 & -2c & -2c\\ 0 & c(c+a-b) & b(c-a-b)\\ c & c & a+b\end{vmatrix}[R_2 \to cR_2 - bR_3]$$

$$= \frac{1}{c}c(-2bc)[c-a-b(c+a-b)] = (-2bc)(-2a) = 4abc$$

9. यदि $\begin{vmatrix}15-x & 1 & 10\\ 11-3x & 1 & 16\\ 7-x & 1 & 13\end{vmatrix} = 0$ तो x का मान निकालें ?

Speedy Solution :-

प्रश्नानुसार,

$$\begin{vmatrix}15-x & 1 & 10\\ 11-3x & 1 & 16\\ 7-x & 1 & 13\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}15-x & 1 & 10\\ -4-2x & 0 & 6\\ -8 & 1 & 3\end{vmatrix} = 0 \quad [R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_3 - R_1]$$

$$\Rightarrow (-1)(-12-6x+48) = 0 \quad \Rightarrow -36+6x = 0$$

$$\therefore x = 6$$

10. $\begin{vmatrix}11 & 12 & 11\\ 26 & 10 & 26\\ 37 & 26 & 37\end{vmatrix}$ का मान क्या होगा ?

Speedy Solution :-

$$\begin{vmatrix}11 & 12 & 11\\ 26 & 10 & 26\\ 37 & 26 & 37\end{vmatrix} = 0 \ [\because C_1 \text{ एवं } C_3 \text{ identical है।}]$$

11. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके शीर्ष $A(3-1)\,B(2,4)$ और $C(-1,3)$ है ?

Speedy Solution :-

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 2\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$

$$\therefore \frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix} = \left|\frac{1}{2}[3(4-3)+1(2+1)+1(6+4)]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}[3+3+10]\right| = \frac{16}{2} = 8$$

12. यदि x, y, z समान्तर श्रेणी में है तो सारणिक $\begin{vmatrix}a+2 & a+3 & a+2x\\ a+3 & a+4 & a+2y\\ a+4 & a+5 & a+2z\end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

जब x, y, z समान्तर श्रेणी में है, $x+z-2y=0$

संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_1 - 2R_2$ लगाने पर $\begin{vmatrix}0 & 0 & 2(x+z-2y)\\ a+3 & a+4 & a+2y\\ a+4 & a+5 & a+2z\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a+3 & a+4 & a+2y\\ a+4 & a+5 & a+2z\end{vmatrix} = 0 \quad [\because x+z-2y=0]$$

13. यदि α, β, γ समीकरण $x^3+ax^2+b=0$ के मूल है तो $\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix} = ?$

Speedy Solution :-

क्योंकि α, β, γ समीकरण के मूल है

अतः $\alpha+\beta+\gamma = -a \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 0$ और $\alpha\beta\gamma = -b$

अब $\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix} = -(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$= -(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = (-a)(a^2-0) = -a^3$$

14. यदि $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$ इस प्रकार है कि $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix} = \lambda$ तो λ का मान है ?

Speedy Solution :-

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0 \quad \therefore \begin{vmatrix}1+a & 1 & 1+\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix} = abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

PREVIOUS YEAR'S RRB'S QUESTIONS

1. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ a & c & c^2-ab \end{vmatrix}$ का मान क्या होगा -

(A) 4 abc (B) $2\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ a & c & c^2 \end{vmatrix}$

(C) 0 (D) abc

(RRB बंगलौर ESM, 2004)

Speedy Solution : (C)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ a & c & c^2-ab \end{vmatrix}$$

$$=1\{b(c^2-ab)-c(b^2-ca)\}-1\{a(c^2-ab)+c(a^2-bc)\}$$
$$+1\{a(b^2-ca)-b(a^2-bc)\}$$
$$=bc^2-ab^2-b^2c+c^2a-c^2a+a^2b+ca^2-bc^2+ab^2$$
$$-ca^2-a^2b+b^2c=0$$

2. यदि $\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}>0$, तो -

(A) abc>1 (B) abc>−8 (C) abc<−8 (D) abc>−2

(RRB गोरखपुर P. way, 2004)

Speedy Solution : (D)

प्रश्न से,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}>0$$

$=a(bc-1)+1(1-c)+1(1-b)>0$ $=abc-a+1-c+1-b>0$
$=abc>a+b+c-2$ $=abc>-2$

3. यदि a, b, c, A.P. में हो, तो $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$ का मान क्या होगा-

(A) 3 (B) −3 (C) 0 (D) कोई नहीं

(RRB इलाहाबाद P. way, 2005)

Speedy Solution : (C)

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 2-a & x+a \\ -1 & 3-b & x+b \\ -1 & 4-c & x+c \end{vmatrix}$$

$\because C_1 \to C_1-C_2$

$C_2 \to C_2-C_3$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & b-a-1 & a-b \\ 0 & c-b-1 & b-c \\ -1 & 4-c & x+c \end{vmatrix},$$

$R_1 \to R_1-R_2$

$R_2 \to R_2-R_3$

$$\Delta=-1\begin{vmatrix} (b-a-1) & (b-c) \\ -(a-b) & (c-b-1) \end{vmatrix}$$

अब a, b, c AP में है।

$\therefore b-a=c-b$

$\therefore \Delta=-1[0]=0$

4. यदि $\Delta=\begin{vmatrix} -2\alpha & \alpha+\beta & \alpha+\gamma \\ \alpha+\beta & -2\beta & \beta+\gamma \\ \alpha+\beta & \beta+\gamma & -2\gamma \end{vmatrix}$ तो Δ का मान होगा -

(A) $8\alpha\beta\gamma$ (B) $2(\alpha+\beta+\gamma)$

(C) $4(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ (D) इनमें से कोई नहीं

(RRB इलाहाबाद J.E-II, 2003)

Speedy Solution : (C)

दिया गया समीकरण में

$\beta=-\alpha$ रखने पर,

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2\alpha & 0 & \alpha+\gamma \\ 0 & -2\beta & \beta+\gamma \\ \alpha+\gamma & \gamma+\alpha & -2\gamma \end{vmatrix}$$

$$=-2\alpha\begin{vmatrix} 2\alpha & \gamma-\alpha \\ \gamma-\alpha & -2\gamma \end{vmatrix}+(\alpha+\gamma)\begin{vmatrix} 0 & 2\alpha \\ \alpha+\gamma & \gamma-\alpha \end{vmatrix}$$

$$=-2\alpha\{-4\alpha\gamma-(\gamma-\alpha)^2\}-(\alpha+\gamma).2\alpha(\alpha+\gamma)$$

$$=2\alpha\{(\gamma-\alpha)^2+4\alpha\gamma\}-2\alpha(\alpha+\gamma)^2$$

$$=2\alpha(\gamma-\alpha)^2-2\alpha(\alpha+\gamma)^2=0$$

अतः गुणनखण्ड प्रमेय से Δ का एक गुणनखण्ड $(\alpha+\beta)$ होगा। इसी प्रकार Δ के गुणनखण्ड क्रमशः $(\beta+\gamma)$ तथा $(\gamma+\alpha)$ भी होंगे, क्योंकि सारणिक Δ, एक समांगी त्रिघात बहुपद है और $(\alpha+\beta)$ $(\beta+\gamma)$ $(\gamma+\alpha)$ भी α, β, γ में एक समांगी त्रिघात बहुपद है।

अतः $\Delta=k(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

जहाँ, k = नियतांक

$$=\begin{vmatrix}2\alpha & \alpha+\beta & \alpha+\gamma\\ \alpha+\beta & -2\beta & \beta+\gamma\\ \alpha+\gamma & \beta+\gamma & -2\gamma\end{vmatrix}=k(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

इसमें $\alpha=0,\ \beta=1$ और $\gamma=2$ रखने पर

$$=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=k(1)(3)(2)$$

$\Rightarrow 24=6k \quad \therefore k=4$

अत: $\Delta=4(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

5. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{vmatrix}=?$

(A) $6x$ (B) x^2 (C) x (D) $2x$

(RRB महेन्द्रूघाट, 2001)

***Speedy Solution* : (B)**

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{vmatrix}=1.(x^2-0)=x^2$$

6. $\begin{vmatrix}x+2 & x & x+2\\ 0 & x+2 & x+5\\ 0 & 0 & x-2\end{vmatrix}=0$ के मूल होगे -

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 4

(RRB महेन्द्रूघाट, 2001)

***Speedy Solution* : (B)**

$$\begin{vmatrix}x+2 & x & x+2\\ 0 & x+2 & x+5\\ 0 & 0 & x-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x+2)\begin{vmatrix}x+2 & x+5\\ 0 & x-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x+2)\left[(x+2)(x-2)-0\right]=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x^2-4)=0$$

अर्थात् $x=2,2,-2$

चूँकि x में त्रिघात समी॰ है अत: इसके तीन मूल होगें

7. $\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1\\ 1 & 1+x & 1\\ 1 & 1 & 1+x\end{vmatrix}$ का मान है -

(A) $x^2(x+3)$ (B) $3x^3$ (C) 0 (D) x^3

(RRB कोलकाता S.M., 2001)

***Speedy Solution* : (A)**

$$\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1\\ 1 & 1+x & 1\\ 1 & 1 & 1+x\end{vmatrix}$$

$$=(1+x)\left[(1+x)\times(1+x)-1\times 1\right]-1\left[1\times(1+x)-1\times 1\right]+1\left[1\times 1-1\times(1+x)\right]$$

$$=(1+x)\left[1+x^2+2x-1\right]-1\left[1+x-1\right]+1\left[1-1-x\right]$$

$$=(1+x)(x^2+2x)-x-x=x^2+x^3+2x+2x^2-2x$$

$$=x^3+3x^2=x^2(x+3)$$

8. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2^2\\ 1 & 3 & 3^2\\ 1 & 4 & 4^2\end{vmatrix}$ का मान क्या होगा -

(A) 2 (B) −2 (C) 3 (D) −3

(RRB मालदा ASM, 2004)

***Speedy Solution* : (A)**

R_2-R_1 तथा R_3-R_2 करने पर

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2^2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 7\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 7\end{vmatrix}=7-5=2$$

9. गुणनखण्ड करे -

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}$$

(A) $(a-b)(b-c)(c-a)$

(B) $(b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c)$

(C) $(a+b)(b-a)(c+a)$

(D) $a^2+2a(a+b)+3abc$

(RRB अहमदाबाद ESM-II, 2005)

***Speedy Solution* : (B)**

c_2-c_1 तथा c_3-c_2

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-b\\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-n^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a & c-b\\ b^3-a^3 & c^3-b^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b-a & c-b\\ (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-b)(c^3+cb+b^2)\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-b)(b^2+ab+h^2-c^2-cb-b^2)$$

$$=(b-a)(c-a)b(a-c)+(a+c)(a-c)$$

$$=(b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c)$$

10. यदि $\lambda \in R$ और $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ तब $\lambda\Delta$ का मान क्या होगा -

(A) $\lambda\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} \lambda c & \lambda d \\ \lambda c & \lambda b \end{vmatrix}$

(RRB राँची TCM, 2003)

***Speedy Solution* : (C)**

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $\quad \therefore \lambda\Delta = \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ का मान बतायें ?

(A) $a+b+c$ (B) $2(a+b+c)$

(C) $(a+b+c)^3$ (D) $(a+b+c)^2$

(RRB अजमेर E.S.M., 2002)

***Speedy Solution* : (C)**

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} [R_1 \to R_1+R_2+R_3]$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

पहले पंक्ति (Row) से $(a-b+c)$ लेने पर,

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$[C_2 \to C_2 - C_1; C_3 \to C_3 - C_1]$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)[-(b+c+a)\times(c+a+b)]$$

$$=(a+b+c)(a+b+c)^2 = (a+b+c)^3$$

8. यदि $\begin{vmatrix} x & 7 \\ x & x \end{vmatrix} = -10$, तो x का मान क्या होगा ?

(A) 2, 5 (B) –2, 5 (C) –2, –5 (D) 2, –5

(RRB चंडीगढ़ Diesel Driver, 2003)

***Speedy Solution* : (C)**

$\begin{vmatrix} x & 7 \\ x & x \end{vmatrix} = -10$ $\quad \Rightarrow x^2 - 7x = -10$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$ $\quad \Rightarrow x^2 - 5x - 2x + 10 = 0$

$\Rightarrow x(x-5) - 2(x-5) = 0$ $\quad \Rightarrow (x-2)(x-5) = 0$

$\therefore x = 2, 5$

10. $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 26 & 10 & 26 \\ 37 & 26 & 37 \end{vmatrix}$ का मान निम्नलिखित में किसके बराबर है ?

(A) 572 (B) –245 (C) 56 (D) 0

(RRB सिकन्दराबाद T.A., 2004)

***Speedy Solution* : (C)**

$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 26 & 10 & 26 \\ 37 & 26 & 37 \end{vmatrix} = 0$ $\quad [\because C_1$ एवं C_3 identical है$]$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$ का मान निम्नलिखित में किसके बराबर है ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

(RRB मालदा E.S.M., 2004)

***Speedy Solution* : (C)**

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$ $\quad R_1 \to R_1 - R_2$ एवं $R_2 \to R_2 - R_3$

$= 1\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 7 - 5 = 2$

17. यदि $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 5 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, तो $2A - 3B$ है ?

(A) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 6 & -2 & 8 \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 12 & -2 & 10 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix}$

(RRB मुम्बई A.S.M., 2004)

***Speedy Solution* : (C)**

$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $\quad \therefore 2A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 12 & -2 & 10 \end{vmatrix}$

$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad \therefore 3B = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 12 & -3 & 9 \end{vmatrix}$

24. $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ एवं $B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ हो, तो AB का मान निम्नलिखित में से कौन है ?

(A) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

(RRB अजमेर T.A., 2003)

***Speedy Solution* : (C)**

$$AB = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\times1+1\times0 & 1\times-1+1\times1 \\ 0\times1+1\times0 & 0\times-1+1\times1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$