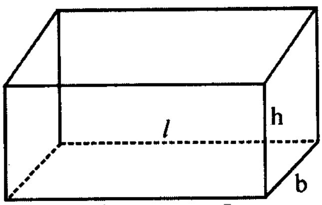
प्राथमिक क्षेत्रमिति – II

(Elementary Mensuration - II)

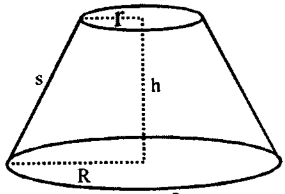
(आयतन एवं पृष्ठ क्षेत्रफल की माप)

कोई भी वस्तु, जो कुछ स्थान घेरती है, के तीन आयाम (dimension) होते हैं – लम्बाई, चौड़ाई एवं गहराई। ऐसे वस्तु को समान्य तौर पर 'ठोस' (Solid) भी कहा जाता है। नीचे कुछ बहुप्रचलित ठोसों को दर्शाया गया है।



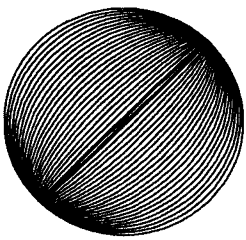
घनाभ

(CUBOID)



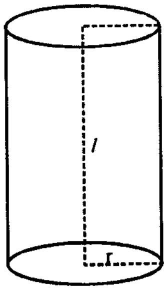
शंकु का छिन्नक

(FRUSTUM OF A CONE)



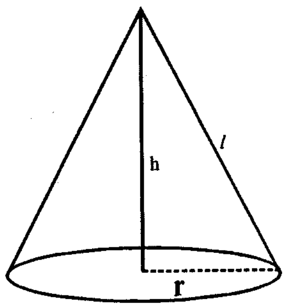
गोला

(SPHERE)



बेलन

(CYLINDER)



शंकु

(CONE)

महत्वपूर्ण सूत्रों की सूची

1. ***घनाभ* (Cuboid)**

मान लिया कि लम्बाई = l, चौड़ाई = b एवं ऊँचाई = h इकाई

i) घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$ घन इकाई = $\sqrt{A_1 \times A_2 \times A_3}$ घन इकाई।

जहाँ, A_1= आधार या ऊपर का क्षेत्रफल, A_2= एक ओर की सतह का क्षेत्रफल, A_3= दूसरी ओर की सतह का क्षेत्रफल।

ii) घनाभ का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = $2(lb + bh + lh)$ वर्ग इकाई

iii) घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ इकाई

2. **घन (Cube)**

मान लिया कि घन की प्रत्येक भुजा या किनारे की लम्बाई = a इकाई,

i) घन का आयतन = a^3 घन इकाई

ii) घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = $6a^2$ वर्ग इकाई

iii) घन का विकर्ण = $\sqrt{3}a$ इकाई

3. **बेलन (Cylinder)**

मान लिया कि बेलन के आधार की त्रिज्या = r इकाई एवं उसकी ऊँचाई (लम्बाई) = h इकाई हो तो,

i) बेलन का आयतन = $2\pi r^2 h$ घन इकाई

ii) बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi rh$ वर्ग इकाई

iii) बेलन के कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल = $(2\pi rh + 2\pi r^2)^2$ वर्ग इकाई

4. **गोला (Sphere)**

मान लिया कि गोले की त्रिज्या r इकाई है तो,

i) गोले का आयतन = $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ घन इकाई

ii) गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल = $\left(4\pi r^2\right)$ वर्ग इकाई

iii) गोलार्द्ध (hemisphere) का आयतन = $\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)$ घन इकाई

iv) गोलार्द्ध (hemisphere) के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\left(2\pi r^2\right)$ वर्ग इकाई

v) गोलार्द्ध (hemisphere) का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = $\left(3\pi r^2\right)$ वर्ग इकाई

5. **शंकु (Cone)**

मान लिया कि r आधार की त्रिज्या है, h उसकी ऊँचाई है तथा l शंकु की तिरछी ऊँचाई (slant height) है, तो,

i) तिरछी ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

ii) शंकु का आयतन = $\left[\frac{1}{3}\pi r^2 h\right]$ घन इकाई

iii) शंकु के वक्र सतह का क्षेत्रफल = (πrl) वर्ग इकाई

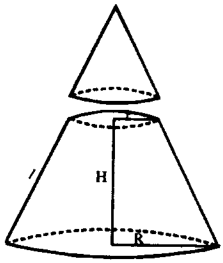
$= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ वर्ग इकाई

iv) शंकु के कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\left(\pi rl + \pi r^2\right) = \pi r(l + r)$

6. ***शंकु का छिन्नक* (Frustum of a Right Circular Cone)**

यदि एक शंकु को दो भागों में बाँटने के लिए (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) शंकु

के आधार के समानान्तर एक समातल (parallel plane) से काटा जाता है तो शंकु का निचला हिस्सा (lower part) छिन्नक (frustum) कहलाता है।



माना कि छिन्नक के आधार की त्रिज्या = R

ऊपर की त्रिज्या = r, ऊँचाई = h एवं तिरछी ऊँचाई (slant height) = l इकाई

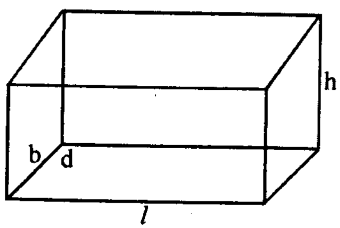
तिरछी ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ इकाई

वक्र सतह का क्षेत्रफल $= \pi(r + R)l$ वर्ग इकाई

आयतन $= \frac{\pi h}{3}(r^2 + R^2 + rR)$ घन इकाई

7. *समानान्तरषट्फलक* (Right Parallelopiped)

यह एक ऐसा घनाभ है जिसमें किनारे की सतह आयताकार होती है तथा ऊपर एवं नीचे की सतह चतुर्भुजाकार (parallelogram) अर्थात् न आयताकार न ही वर्गाकार।



सतह का क्षेत्रफल (किनारे की सतहों का) $= 2h(b + l)$ वर्ग इकाई

सतह का क्षेत्रफल (आधार एवं ऊपर की सतहों का) $= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$ वर्ग इकाई

कुल सतहों का क्षेत्रफल $= 2h(b + l) + 4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$ वर्ग इकाई

आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

प्रश्नों को हल करने की विधि

आम तौर से क्षेत्रमिति के प्रश्नों को हल करने के लिए उपर्युक्त सूत्र पर्याप्त हैं। पर परिस्थिति के अनुसार कुछ जटिल एवं घुमावदार प्रश्नों को हल करने के लिए हम कुछ संक्षिप्त विधियाँ भी इजाद करेंगे। कुछ उदाहरणों के सहारे इन दोनों ही अभिगमों (approaches) से रू-बरू होना बेहतर रहेगा।

घन एवं घनाभ से संबंधित प्रश्न

टाइप I : सूत्रों का सीधा इस्तेमाल

उदा. 1: पत्थर के उस स्लैब का आयतन निकालें जिसकी लम्बाई 4 मीटर, चौड़ाई 2 मीटर तथा मोटाई $\frac{1}{4}$ मीटर है।

हल: आयतन $= 4 \times 2 \times \frac{1}{4} = 2$ घन मीटर (उत्तर)

सतह का क्षेत्रफल $= 2(lb + lh + bh)$

$= 2\left(4 \times 2 + 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4}\right) = 19$ वर्ग मीटर उत्तर

उदा. 2: एक आयताकार हॉज की आंतरिक माप $37\frac{1}{3}$ मीटर × 12 मीटर × 8 मीटर है। इसमें पानी भरा हुआ है। यदि एक घन मीटर पानी का वजन 1000 किलोग्राम हो तो हॉज में कुल पानी का वजन मेट्रिक टन में व्यक्त करें।

हल: पानी का आयतन $= 37\frac{1}{3} \times 12 \times 8$ घन मीटर

$\therefore$ पानी का वजन $= \frac{112}{3} \times 12 \times 8 \times 1000$ किलोग्राम $= 3854000$ किलोग्राम

$= 3854$ मेट्रिक टन; उत्तर

उदा. 3(*a*): किसी ईंट की माप 20 सेंटीमीटर × 10 सेंटीमीटर × $7\frac{1}{2}$ सेंटीमीटर है। 25 मीटर × 2 मीटर × 3/4 मीटर माप वाले दीवार के लिए कितनी ईंटें चाहिए होंगी ?

हल: दीवार का आयतन $= 25 \times 2 \times \frac{3}{4}$ घन मीटर

एक ईंट का आयतन $= \frac{20}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{3}{2000}$ घन मीटर

$\therefore$ ईंट की अभीष्ट संख्या $= \left[25 \times 2 \times \frac{3}{4}\right] \div \frac{3}{2000} = 25000$ ईंट; उत्तर

***उदा.* 3(b):** एक घनाभ जिसका आधार एवं दो आसन्न (adjacent) पृष्ठों का क्षेत्रफल क्रमशः 180 वर्ग से. मी., 96 वर्ग से. मी. एवं 120 वर्ग से. मी. है तो उसका आयतन निकालें।

हल : ***सूत्र से,***

घनाभ का आयतन

$$= \sqrt{\text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{एक सतह का क्षेत्रफल} \times \text{दूसरे सतह का क्षेत्रफल}}$$

$$= \sqrt{180 \times 96 \times 120} = 1440 \text{ घन से. मी.}$$

टाइप II: कुछ संक्षिप्त विधियाँ

उदा. 4: लकड़ी के किसी बंद बक्से की लंबाई = 9 सेंटीमीटर, चौड़ाई = 7 सेंटीमीटर एवं ऊँचाई = 6 सेंटीमीटर है। यदि लकड़ी की मोटाई आधा सेंटीमीटर हो तो (i) बक्से की धारिता (capacity) एवं (ii) वजन बताएँ यदि एक घन सेंटीमीटर लकड़ी का वजन 0.9 ग्राम है।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

उपर्युक्त स्थितियों में,

धारिता (capacity) = (बाह्य लंबाई − 2 × मोटाई) × (बाह्य चौड़ाई − 2 × मोटाई) × (बाह्य ऊँचाई −2 × मोटाई) ***[याद रखें]***

∴ द्रव्य का आयतन = बाह्य आयतन − धारिता ***[याद रखें]***

∴ दिए गए प्रश्न में,

धारिता (capacity) $= (9-2\times0.5)\,(7-2\times0.5)\,(6-2\times0.5) = 8\times6\times5$

= 240 घन सेंटीमीटर

∴ लकड़ी का आयतन = बाह्य आयतन − धारिता $= 9\times7\times6-240$

= 138 घन सेंटीमीटर

लकड़ी का वजन = लकड़ी का आयतन × लकड़ी का घनत्व ***[याद रखें]***

$= 138\times0.9 = 124.2$ ग्राम

उदा. 5: किसी घन का पृष्ठ क्षेत्रफल $30\frac{3}{8}$ वर्ग मीटर है। इसका आयतन निकालें।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

$$\text{घन का आयतन} = \left(\sqrt{\frac{\text{पृष्ठ क्षेत्रफल}}{6}}\right)^3$$

दिए गए प्रश्न में,

$$\text{आयतन} = \left(\sqrt{\frac{\frac{243}{8}}{6}}\right)^3$$

$$= 11\frac{25}{64} \text{ घन मीटर}$$

कुछ विशेष स्थितियाँ

किसी दिए गए क्षेत्र में वर्षा एवं इससे मिलती-जुलती समस्याएँ

उदा. 6: किसी स्थान पर होने वाली वार्षिक वर्षा 43 सेंटीमीटर है। एक हेक्टेयर क्षेत्र में होने वाली वार्षिक वर्षा का वजन मेट्रिक टन में अभिव्यक्त करे यदि एक घन मीटर पानी का वजन 1 मेट्रिक टन हो।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

पानी का आयतन, (जल-स्तर की ऊँचाई) × जलधारक क्षेत्र *(याद रखें)*

दिए गए क्षेत्र में, वर्षा का स्तर = 43 सेंटीमीटर

$\therefore$ पानी का आयतन = $\frac{43}{100}$ मी. × 10000 वर्ग मीटर

= 4300 घन मीटर

($\because$ 1 हेक्टेयर = 10 हजार वर्ग मीटर)

$\therefore$ पानी का वजन = 4300 × 1 = 4300 मेट्रिक टन

उदा. 7: कोई आयताकार हॉज 50 मीटर लंबा तथा 29 मीटर गहरा है। यदि हॉज से 1000 घन मीटर पानी निकाल लिया जाए तो पानी का स्तर 2 मीटर नीचे चला जाता है। हॉज में कितना घन मीटर पानी आ सकता है?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

पिछले उदाहरण में दिए गए सूत्र, इस प्रश्न की दूसरी पंक्ति से,

आयतन = 1000 = [स्तर (= 2 मीटर) × आधार का क्षेत्रफल]

या जलधारक का क्षेत्रफल = $\frac{1000}{2}$ = 500

कुल आयतन = गहराई × जलधारक का क्षेत्रफल

= 29 × 500 = 14500 घन मीटर

किसी वर्गाकार छड़ (Square Bar) *से काटा हुआ एक पूर्ण घन* (Exact Cube)

उदा. 8: एक घन मीटर तांबा, जिसका वजन 9000 किलोग्राम है को एक 9 मीटर लंबा वर्गाकार छड़ की शक्ल में ढ़ाला जाता है। उस छड़ से एक पूर्ण घन काटकर निकाला जाता है। इस घन का वजन बताएँ।

हल: ***प्रचलित विधि* (General Method):**

यहाँ दिए हुए आयतन के ताँबे को एक निश्चित लंबाई के वर्गाकार छड़ (जो मूलतः वर्गाकार आधार वाला एक घनाभ है) की शक्ल में ढाल दिया गया है। इस वर्गाकार छड़ से एक सटीक घन को काटकर अलग कर लिया जाता है। स्पष्टतः सटीक घन का आयाम वही होना चाहिए जो वर्गाकार छड़ के वर्गाकार आधार का है।

अब, दिया हुआ आयतन = 1 घन मीटर

= वर्गाकार आधार का क्षेत्रफल × लम्बाई

$\Rightarrow$ वर्गाकार आधार का क्षेत्रफल × लम्बाई = 1

$\Rightarrow$ वर्गाकार आधार का क्षेत्रफल = $\frac{1}{\text{लंबाई}} = \frac{1}{9}$

$\therefore$ वर्गाकार आधार की भुजा = $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ कटे हुए घन का आयतन = (वर्गाकार आधार की भुजा)^3 = $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$\therefore$ घन का वजन = $\frac{1}{27} \times 9000 = 333.3$ किलोग्राम

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नलिखित सूत्रों का इस्तेमाल करें:

कटे हुए घन का आयतन = $\left(\sqrt{\frac{\text{मूल ठोस का आयतन}}{\text{ठोस की लंबाई}}}\right)^3$ ***(याद रखें)***

$\therefore$ आयतन = $\left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$\therefore$ वजन = $\frac{9000}{27}$ = 333.3 किलोग्राम

जब वस्तुएँ अपना आकार बदलती हों

उदा. 9: एक घन मीटर सोने को पीट-पीटकर इतना फैलाया जाता है ताकि वह 6 हेक्टेयर क्षेत्रफल को पूरी तरह ढक ले। सोने की मोटाई बताएँ।

हल: ऐसे प्रश्नों को हल करने में अन्तर्निहित संकल्पना (underlyining concept) यह है कि ***ठोस की आकृति में परिवर्तन आने से उसके कुल आयतन में कोई परिवर्तन नहीं आता।***

$\therefore$ पुराना आयतन = नया आयतन

$\Rightarrow$ 1 घन मीटर = 60000 × मोटाई

$\Rightarrow$ मोटाई = $\frac{1}{60,000}$ मीटर = 0.0017 सेंटीमीटर

यदि कई घनों को आपस में मिलाकर एक घन बनाया जाए

उदा. 10: धातु के तीन घन, जिनके किनारे क्रमश: 3, 4 एवं 5 मीटर हैं, को पिघलाकर एक घन बनाया जाता है। यदि इस प्रक्रिया के दौरान धातु की खपत बिलकुल ही नहीं हो तो नए घन की भुजा निकालें।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

जब कई घनों को मिलाकर एक घन बनाया जाए तो नए घन की भुजा के लिए निम्नलिखित सूत्र है :

भुजा = $\sqrt[3]{\text{प्रत्येक घन की भुजा के घन का योग}}$

यहाँ, भुजा = $\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3}$ = $\sqrt[3]{27+64+125}$

= $\sqrt[3]{216}$ = 6 सेंटीमीटर

नोट: क्या आप इस प्रश्न को पिछले उदाहरण में दी गई संकल्पना के आधार पर हल कर सकते हैं, जिसमें कहा गया है कि 'आकार में परिवर्तन की प्रक्रिया में आयतन अपरिवर्तित रहता है'।

एक घन को तोड़कर समान आयतन वाले एक से अधिक घन बनाना

उदा. 11: 3 सेंटीमीटर भुजा वाले किसी घन को पिघलाकर 1 सेंटीमीटर भुजा वाले छोटे-छोटे कई घन बनाए जाते हैं। ऐसा कितना घन बनाना संभव है ?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नलिखित नियम का प्रयोग करें,

संभावित संख्या = $\left[\dfrac{\text{भुजा की मूल लंबाई}}{\text{भुजा की नई लंबाई}}\right]^3$ ***(याद रखें)***

∴ दिए गए प्रश्न में, घन की संभावित संख्या = $\left[\dfrac{3}{1}\right]^3$ = 27

एक जेट से पानी निकलने की दर

उदा. 12: एक 20 मीटर चौड़ी जलधारा 2.5 कि. मी. प्रति घंटे की समान रफ्तार से बहती है यदि नाव का 1.2 मीटर हिस्सा पानी में डूबा हुआ है तो एक मिनट में नाव कितना लिटर पानी विस्थापित करेगा?

हल: इस प्रकार के प्रश्न को निम्नलिखित नियम की मदद से हल करते हैं :

आयतन = समय × गति × अनुप्रस्थ काट (cross-section) का क्षेत्रफल

अब, इस प्रश्न में,

समय = 1 मिनट, गति = 2.5 कि. मी. प्रति घंटा = $\dfrac{125}{3}$ मी./मिनट

अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = $20 \times 1.2 = 24$

∴ आयतन $= 1 \times \dfrac{125}{3} \times 24 = 1000$ घन मी. = 1000000 लिटर

महत्वपूर्ण तथ्य

1. किसी घनाभ के अंदर रखे जाने वाला सबसे लंबा छड़ उसके विकर्ण के लंबाई के बराबर होता है।
2. किसी *'a'* इकाई की भुजा वाले घन के अंदर रखे जाने वाला सबसे बड़े संभव गोले की त्रिज्या $\left(\frac{a}{2}\right)$ इकाई होती है।
3. सबसे छोटा संभव गोला, जिसमें *'a'* इकाई की भुजा वाला घन रखा जा सकता है, की त्रिज्या $\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ इकाई होती है।

बेलन पर आधारित समस्याएँ

टाईप I : सूत्रों का सीधा प्रयोग

उदा. 13: उस बेलन का आयतन निकालें जिसके आधार की त्रिज्या 3 मीटर है और ऊँचाई 14 मीटर के बराबर है। बेलन के वक्र सतह का क्षेत्रफल भी निकालें।

हल: आयतन $= 3 \times 3 \times \frac{22}{7} \times 14$ घन मीटर

$= 396$ घन मीटर (उत्तर)

वक्र सतह = परिधि × ऊँचाई

$= 2 \times 3 \times \frac{22}{7} \times 14$ वर्ग मीटर $= 264$ वर्ग मीटर

टाइप II: *कुछ द्रुत विधियाँ*

***थोड़ी मोटाई वाली खोखली नली* (Hollow tube with some thickness)**

उदा. 14: दोनों सिरे पर खुली हुई एक लोहे की खोखली बेलनाकार नली 2 सेंटीमीटर मोटी है। यदि इस नली का बाहरी व्यास 50 सेंटीमीटर हो तथा नली की लंबाई 140 सेंटीमीटर हो तो नली में प्रयुक्त लोहे का आयतन बताएँ।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

ऐसी स्थिति में निम्नलिखित नियम का प्रयोग करें :

धातु का आयतन $= \pi$ ऊँचाई $\times \left[(\text{बाहरी त्रिज्या})^2 - (\text{आंतरिक त्रिज्या})^2 \right]$ ***(याद रखें)***

अब, दिए गए प्रश्न में,

बाहरी त्रिज्या $= 50 \div 2 = 25$ सेंटीमीटर

आंतरिक त्रिज्या = बाह्य त्रिज्या − मोटाई

$= 25 - 2 = 23$ सेंटीमीटर

$\therefore$ आयतन $= \frac{22}{7} \times 140 \times (25^2 - 23^2) = 42240$ घन सेंटीमीटर

नोट: इसमें से संक्षिप्त विधियों का इस्तेमाल निम्नलिखित रूपों में हो सकता है।

आयतन $= \pi \times$ ऊँचाई $\times$ (2 $\times$ बाहरी त्रिज्या – मोटाई) $\times$ (मोटाई)

(जब बाहरी त्रिज्या दी गई हो)

आयतन $= \pi \times$ ऊँचाई $\times$ (2 $\times$ आंतरिक त्रिज्या + मोटाई) $\times$ (मोटाई)

(जब आंतरिक त्रिज्या दी गई हो)

उदाहरण के लिए, उपर्युक्त प्रश्न में, बाहरी त्रिज्या दी गई है, इसलिए हम पहले सूत्र का उपयोग करेंगे।

आयतन $= \frac{22}{7} \times 140 \times (25 \times 2 - 2) \times 2$

$= \frac{22}{7} \times 140 \times 48 \times 2 = 42240$ घन सेंटीमीटर

उदा. 15: सीसे की एक पाइप का वजन निकालें यदि पाइप की लंबाई 3.5 सेंटीमीटर, बाहरी व्यास 2.4 सेंटीमीटर, सीसे की मोटाई 2 मिलीमीटर तथा एक घन सेंटीमीटर सीसे का वजन 11. 4 ग्राम हो।

हल: स्वयं हल करें।

किसी वर्गाकार शीट को बेलन की शक्ल में ढालना

उदा. 16: एक आयताकार शीट, जिसकी लंबाई 22 मीटर एवं चौड़ाई 10 मीटर है, को लपेटकर एक बेलन की शक्ल में इस प्रकार ढाला जाता है कि शीट की छोटी भुजा बेलन की ऊँचाई में तब्दील हो जाए। इस प्रकार निर्मित बेलन का आयतन बताएँ।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

ऐसी स्थिति में निम्नलिखित नियम का प्रयोग करें:

आयतन $= \frac{\text{ऊँचाई} \times (\text{शीट की दूसरी भुजा})^2}{4\pi}$ ***(याद रखें)***

$\therefore$ दिए गए प्रश्न में,

आयतन $= \frac{10 \times (22)^2}{4 \times \frac{22}{7}} = 385$ घन मीटर

नोट: (यहाँ ऊँचाई = 10 मीटर है क्योंकि यही छोटी भुजा है। स्पष्टत: दूसरी भुजा = 22 मीटर)

शंकु पर आधारित प्रश्न

उदा. 17: 2 मीटर चौड़े कैनवास की लंबाई क्या होगी यदि उससे निर्मित शंक्वाकार टेंट का व्यास 8 मीटर एवं तिरछी ऊँचाई 5.6 मीटर हो? 3.20 रु. प्रति मीटर की दर से कैनवास की कीमत भी बताएँ।

हल: वक्र सतह का क्षेत्रफल = πrl

$$= \frac{22}{7} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 5.6 \text{ वर्गमीटर} = 22 \times 4 \times 0.8 \text{ वर्गमीटर}$$

= 70.4 वर्गमीटर

∴ कैनवास की लंबाई = 70.4 ÷ 2 मीटर

= 35.2 मीटर, उत्तर

कैनवास की लागत = (35.2 × 3.20) रु.

= 112.64 रु. उत्तर

उदा. 18: किसी समकोण वृत्ताकार शंकु (right circular cone) का व्यास 14 मीटर है तथा इसकी तिरछी ऊँचाई 12 मीटर है। इसका (i) वक्र सतह का क्षेत्रफल (ii) कुल सतह का क्षेत्रफल (iii) आयतन तथा (iv) 14 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से इसकी कुल सतह को रंगने में होने वाले खर्च की गणना करें।

हल: (i) वक्र सतह का क्षेत्रफल = πrl

$$= \frac{22}{7} \times \frac{14}{2} \times 12 \text{ वर्ग मीटर} = 264 \text{ वर्ग मीटर; उत्तर}$$

(ii) कुल सतह का क्षेत्रफल = $\pi r(r + l)$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{14}{2}\left[\frac{14}{2} + 12\right] \text{ वर्ग मीटर}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{14}{2} \times 19 \text{ वर्ग मीटर}$$

= 418 वर्ग मीटर (उत्तर)

(iii) आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

आइए, अब 'h' का मान ज्ञात करें :

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{144 - 49} \text{ मीटर} = 9.75 \text{ मीटर}$$

$$\text{आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 9.75 \text{ घन मीटर}$$

= 500.5 घन मीटर (उत्तर)

(v) अभीष्ट लागत = 418 रु. × $\frac{14}{100}$

= 58.52 रु. (उत्तर)

उदा. 19: किसी शंकु के छिन्नक (frustum) के आधार का व्यास 10 सेंटीमीटर, शीर्ष का व्यास 6 सेंटीमीटर एवं ऊँचाई 5 सेंटीमीटर है। इसके कुल सतह का क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करें।

हल: यहाँ $R = 5$ सेंटीमीटर, $r = 3$ सेंटीमीटर एवं $h = 5$ सेंटीमीटर

$\therefore s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ से. मी. = $\sqrt{5^2 + (5 - 3)^2}$ से. मी.

$= \sqrt{29}$ से. मी. = 5.385 से.मी.

$\therefore$ छिन्नक के कुल सतह का क्षेत्रफल $= \pi\left(R^2 + r^2 + Rl + rl\right)$

$= \frac{22}{7}\left(5^2 + 3^2 + 5 \times 5.385 + 3 \times 5.385\right)$

= 242.25 वर्ग सेंटीमीटर

आयतन $= \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$ घन सेंटीमीटर

$= \frac{22 \times 5}{7}\left(5^2 + 3^2 + 5 \times 3\right)$ घन सेंटीमीटर

= 256.67 घन सेंटीमीटर (उत्तर)

गोला (Sphere) *पर आधारित समस्याएँ*

टाइप I : सूत्रों का सीधा अनुप्रयोग

उदा. 20: 42 सेंटीमीटर व्यास वाले गोले का आयतन एवं पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें।

हल: त्रिज्या = 21 सेंटीमीटर

$\therefore$ आयतन $= \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \left(\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21\right)$ घन से. मी.

= 38808 घन सेंटीमीटर

पृष्ठ क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= \left(4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21\right)$ वर्ग सेंटीमीटर = 5544 वर्ग से. मी.

उदा. 21: 21 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले किसी गोलार्द्ध का आयतन, उसके वक्र सतह का क्षेत्रफल एवं कुल पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें।

हल: आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$ घन सेंटीमीटर = 19404 घन सेंटीमीटर

वक्र सतह का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 = \left(2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21\right)$ वर्ग सेंटीमीटर

= 2772 वर्ग सेंटीमीटर

कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$$= \left(3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21\right) \text{ वर्ग सेंटीमीटर}$$

$= 4158$ वर्ग सेंटीमीटर

टाइप* II : *कुछ संक्षिप्त (द्रुत विधियाँ) विधियाँ

जब गोले का आकार बदल रहा हो: इस प्रकार के प्रश्न, जिसमें किसी खास रूप (shape) का (गोला, बेलन, शंकु आदि) ठोस दूसरे रूप में बदल जाता हो, को हल करने के लिए आधारभूत सिद्धांत है: "आयतन अपरिवर्तित रहता है।" लेकिन हम यहाँ पर कुछ द्रुत विधियों की चर्चा करेंगे। निम्नलिखित उदाहरणों को देखें:

उदा. 22: 18 सेंटीमीटर व्यास वाले तांबे के किसी गोले से 4 मिलीमीटर व्यास वाला तार तैयार किया जाता है। तार की लंबाई ज्ञात करें।

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

जब किसी गोले को बेलन की शक्ल में ढाला जाता है। (ध्यान रखें कि तार मूलत: एक बेलन ही है।), तो तार की लंबाई, निम्नलिखित सूत्र के माध्यम से व्यक्त की जाती है

i) $\text{बेलन की लंबाई} = \dfrac{4 \times (\text{गोले की त्रिज्या})^3}{3 \times (\text{बेलन की त्रिज्या})^2}$ ***(याद रखें)***

$\therefore$ दिए गए प्रश्न में,

$$\text{लंबाई} = \frac{4 \times (90)^3}{3 \times (2)^2} = 243000 \text{ मिलीमीटर} = 24300 \text{ सेंटीमीटर}$$

नोट: जब किसी गोले को बेलन की शक्ल में बदला जाता है तो तीन प्रकार के प्रश्न उठ सकते हैं। पहला, जब गोला और बेलन की त्रिज्या दी गई हो और बेलन की लंबाई का पता लगाना हो। दूसरा, जब बेलन की त्रिज्या और लंबाई दी गई हो तथा गोले की त्रिज्या मालूम करनी हो, एवं तीसरा, जब बेलन की लंबाई और गोले की त्रिज्या दी गई हो तथा बेलन की त्रिज्या मालूम करनी हो। पहली स्थिति में ऊपर दिए गए सूत्र का बखूबी इस्तेमाल किया जा सकता है। दूसरी एवं तीसरी स्थितियों के लिए निम्नलिखित सूत्रों का इस्तेमाल किया जा सकता है:

(ii) $\text{गोले की त्रिज्या} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4} \times (\text{बेलन की लंबाई}) \times (\text{बेलन की त्रिज्या})^2}$ ***(याद रखें)***

(iii) $\text{बेलन की त्रिज्या} = \sqrt{\dfrac{4 \times (\text{गोले की त्रिज्या})^3}{3 \times (\text{बेलन की त्रिज्या})}}$

उदा. 23: 36 मीटर व्यास वाले तांबे के किसी गोले को खींचकर 7.29 किलोमीटर लंबा बेलनाकार तार बनाया जाता है। तार की त्रिज्या निकालें।

हलः स्वयं प्रयास करें।

उदा. 24: एक बेलन, जिसकी त्रिज्या 2 सेंटीमीटर एवं ऊँचाई 15 सेंटीमीटर है, को पिघलाकर एक गोला बनाया जाता है। गोले की त्रिज्या बताएँ।

हलः स्वयं प्रयास कीजिए। ***संकेत*** : चाहे गोले को बेलन में बदला जाए या बेलन को गोले में, बात बराबर है। उपर्युक्त सूत्र (iii) इस्तेमाल करें

उदा. 25: 28 सेंटीमीटर ऊँचाई और 6 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले सीसा के एक बेलन से 1.5 सेंटीमीटर व्यास वाली कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती हैं ?

हलः इस प्रश्न में, एक बेलन को एक गोले में नहीं बल्कि कई गोलों में बदल दिया जाता है। इसलिए हमलोग यहाँ निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$\text{गोलियों की संख्या} = \frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{1 गोली का आयतन}}$$ ***(याद रखें)***

$$= \frac{\pi \times 6 \times 6 \times 28}{\frac{4}{3} \times \pi \times 0.75 \times 0.75 \times 0.75} = 1792$$

उदा. 26: 16 सेंटीमीटर व्यास वाले किसी गोले से 1 सेंटीमीटर व्यास वाली कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती हैं ?

हलः
$$\text{गोलियों की संख्या} = \frac{\text{बड़े गोले का आयतन}}{\text{1 छोटे गोले का आयतन}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 8 \times 8 \times 8}{\frac{4}{3}\pi \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5} = 4096$$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

जब एक गोला, कई छोटे एवं एक प्रकार के गोलों में टूट जाता हो तो निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल किया जाता है :

$$\text{अभीष्ट संख्या} = \left[\frac{\text{बड़ी त्रिज्या}}{\text{छोटी त्रिज्या}}\right]^3$$ ***(याद रखें)***

$$\therefore \text{ संख्या} = \left[\frac{8}{0.5}\right]^3 = [16]^3 = 4096$$

कुछ मिली-जुली स्थितियाँ

अनुपात पर आधारित प्रश्न

निम्नलिखित परिणामों को याद रखें। यह बहुत ही सहायक होंगे।

I. ***दो गोले***

(i) (त्रिज्याओं का अनुपात)^2 = पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात

(ii) (त्रिज्याओं का अनुपात)^3 = आयतन का अनुपात

(iii) (पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात)^3 = (आयतन का अनुपात)^2

II. दो बेलन

A. जब आयतन समान हो

(i) त्रिज्या का अनुपात = $\sqrt{\text{ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात}}$

(ii) वक्र सतह के क्षेत्रफलों का अनुपात = त्रिज्या के व्युत्क्रम का अनुपात

(iii) वक्र सतह के क्षेत्रफलों का अनुपात = $\sqrt{\text{ऊँचाई का अनुपात}}$

B. जब त्रिज्या समान हो

(i) आयतन का अनुपात = ऊँचाई का अनुपात

(ii) वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात = ऊँचाई का अनुपात

(iii) आयतन का अनुपात = वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात

C. जब ऊँचाई समान हो

(i) आयतन का अनुपात = (त्रिज्या का अनुपात)^2

(ii) वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात = त्रिज्या का अनुपात

(iii) आयतन का अनुपात = (वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात)^2

D. जब वक्र सतह का क्षेत्रफल समान हो

(i) आयतन का अनुपात = त्रिज्या का अनुपात

(ii) आयतन का अनुपात = ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात

(iii) त्रिज्या का अनुपात = ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात

III. दो घन

(i) आयतन का अनुपात = (भुजाओं का अनुपात)^3

(ii) पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात = (भुजाओं का अनुपात)^2

(iii) (पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात)^3 = (आयतन का अनुपात)^2

(**नोट:** गोला एवं घन के सूत्रों की समानता पर ध्यान दें।)

IV. दो शंकु

(A) जब आयतन समान हो : बेलन का सूत्र नं.–(i)

(B) जब त्रिज्या समान हो : बेलन का सूत्र (i) उपयोग करें।

(C) जब ऊँचाई समान हो : बेलन का सूत्र (i) उपयोग करें।

(D) जब वक्र सतह का क्षेत्रफल समान हो :

बेलन से संबद्ध सूत्र (iii) परिवर्तित रूप में इस्तेमाल करें।

त्रिज्या का अनुपात = तिरछी ऊँचाई (**slant height**) के व्युत्क्रम का अनुपात

कुछ हल किए गए उदाहरण

उदा. 27: दो गोलों के वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात 1 : 4 है। उनके आयतन का अनुपात बताएँ।

हल: सूत्र I (iii) से,

(पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात)^3 = (आयतन का अनुपात)^2

$\therefore$ $(1:4)^3$ = (आयतन का अनुपात)^2

$\therefore$ 1 : 64 = (आयतन का अनुपात)^2

$\therefore$ आयतन का अनुपात = $\sqrt{1:64} = 1:8$

दूसरी विधि: भुजाओं का अनुपात = $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 1:2$

$\therefore$ आयतन का अनुपात = $\left[\frac{1}{2}\right]^3 = \frac{1}{8} = 1:8$

उदा. 28: दो गोलों की त्रिज्या 1 : 2 के अनुपात में हैं। उनके पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात बताएँ।

हल: सूत्र I (i) से,

(पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात) = $(1:2)^2$ = 1 : 4

उदा. 29: समान आयतन वाले दो वृत्ताकार बेलनों की ऊँचाई 1 : 2 के अनुपात में हैं। उनकी त्रिज्याओं का अनुपात बताएँ ।

हल: सूत्र II (A) (i) से,

त्रिज्या का अनुपात = $\sqrt{\text{ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात}}$

$= \sqrt{2:1} = \sqrt{2}:1$

उदा. 30: यदि दो शंकुओं की ऊँचाई का अनुपात 1 : 4 हो तथा उनके व्यास का अनुपात 4 : 5 हो तो उनके आयतन का अनुपात बताएँ।

हल: चूँकि ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए कोई सुपरिभाषित संक्षिप्त विधि नहीं है, इसलिए हमलोग इस प्रश्न को सामान्य विधि से हल करेंगे। हमलोग जानते हैं कि,

आयतन = $\frac{1}{3}\pi$ (त्रिज्या)^2 (ऊँचाई)

$$\therefore \frac{\text{पहले शंकु का आयतन}}{\text{दूसरे शंकु का आयतन}} = \frac{\frac{1}{3}\pi(\text{पहले शंकु की त्रिज्या})^2 \times \text{ऊँचाई}}{\frac{1}{3}\pi(\text{दूसरे शंकु की त्रिज्या})^2 \times \text{ऊँचाई}}$$

$$= \left(\frac{\text{पहले शंकु की त्रिज्या}}{\text{दूसरे शंकु की त्रिज्या}}\right)^2 \times \left(\frac{\text{पहले शंकु की ऊँचाई}}{\text{दूसरे शंकु की ऊँचाई}}\right)$$

$\therefore$ आयतन का अनुपात = (त्रिज्या का अनुपात)^2 × (ऊँचाई का अनुपात)

$$= (4:5)^2\ (1:4) = \frac{16}{24} \times \frac{1}{4} = 4:25$$

नोट: यदि आप उपर्युक्त विधि के विस्तार में नहीं जाना चाहते हैं, तो

आयतन $= \frac{\pi}{3}$ (त्रिज्या)^2 (ऊँचाई)

$\therefore$ आयतन का अनुपात = (त्रिज्या या व्यास का अनुपात)^2 (ऊँचाई का अनुपात)

$\because$ $\frac{\pi}{3}$ एक अचर मान है, इसलिए इसे हटा दिया जाता

स्मरण रखे:

V ***किसी शंकु और बेलन के लिए:***

(i) आयतन का अनुपात = (त्रिज्या का अनुपात)^2 (ऊँचाई का अनुपात)

(ii) ऊँचाई का अनुपात = (त्रिज्या के व्युत्क्रम का अनुपात)^2 (आयतन का अनुपात)

(iii) त्रिज्या का अनुपात = $\sqrt{\text{(आयतन का अनुपात) (ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात)}}$

VI ***बेलन के लिए :***

(i) वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात = (त्रिज्या का अनुपात) (ऊँचाई का अनुपात)

(ii) ऊँचाई का अनुपात

= (वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात) (त्रिज्या के व्युत्क्रम का अनुपात)

(iii) त्रिज्या का अनुपात

= (वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात) (ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात)

VII ***शंकु के लिए:***

VI के अन्तर्गत दिए गए सभी सूत्र लागू होते हैं, केवल 'ऊँचाई' की जगह 'तिरछी ऊँचाई' डाल दें।

उदा. 31: एक वर्ग किलोमीटर जमीन पर 2 सेंटीमीटर वर्षा हुई है। यह मानते हुए कि वर्षा के जल के 50 प्रतिशत जल को संग्रह करके 100 मीटर × 10 मीटर आधार वाले कुण्ड(pool) में रखा जा सकता था, तो कुण्ड(pool) के जल-स्तर में कितनी वृद्धि होती ?

हल: वर्षा के जल का आयतन = क्षेत्रफल × ऊँचाई

= (1 किलोमीटर)^2 × 2 सेंटीमीटर

= (1000 मीटर)^2 × 0.02 मीटर = 20000 घन मीटर

संग्रहीत जल की मात्रा = 20,000 घन मीटर का 50%

$= \frac{1}{2} \times 20,000 = 10,000$ घन मीटर

कुण्ड में पानी का बढ़ा हुआ स्तर $= \frac{\text{संग्रहीत आयतन}}{\text{कुण्ड के आधार का क्षेत्रफल}} = \frac{10,000}{10 \times 100} = 10$ मीटर

$\therefore$ जल-स्तर में 10 मीटर की वृद्धि होगी।

उदा. 32: यदि बेलन की त्रिज्या दूनी कर दी जाए और ऊँचाई आधी कर दी जाए तो नए आयतन एवं पिछले आयतन के बीच का अनुपात निकालें।

हल: मान लिया कि बेलन की आरंभिक त्रिज्या एवं ऊँचाई क्रमशः r सेंटीमीटर एवं h सेंटीमीटर है।

$\therefore\ v_1 = \pi r^2 h$

एवं $v_2 = \pi(2r)^2 \dfrac{h}{2} = 2\pi r^2 h$

$\therefore\ \dfrac{\text{नया आयतन}}{\text{पिछला आयतन}} = \dfrac{2\pi r^2 h}{\pi r^2 h} = \dfrac{2}{1} = 2:1$

उदा. 33: 11.2 मीटर व्यास का एक कुआँ 8 मीटर गहरा खोदा जाता है। खोद कर निकाली गई मिट्टी इस कुएँ के चारों ओर 7 मीटर की चौड़ाई में वृत्ताकार तटबन्ध (circular embankment) के रूप में बिखेर दी जाती है। तटबन्ध की ऊँचाई बताएँ।

हल: निकाली गई मिट्टी का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left[\frac{11.2}{2}\right]^2 \times 8 = \frac{22}{7} \times 5.6 \times 5.6 \times 8 = 788.48 \text{ घन मीटर}$$

तटबन्ध का क्षेत्रफल $= \pi(5.6+7)^2 - \pi(5.6)^2$

$$= \pi\left[(5.6+7)^2 - (5.6)^2\right]$$

$$= \pi[(5.6+7-5.6)(5.6+5.6+7)]$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 18.2 = 400.4 \text{ वर्ग मीटर}$$

$\therefore$ तटबंध की ऊँचाई $= \dfrac{\text{मिट्टी का आयतन}}{\text{तटबन्ध का क्षेत्रफल}} = \dfrac{788.48}{400.4} = 1.97$ मीटर

उदा. 34: एक समकोण त्रिभुज, जिसका आधार 6.3 मीटर है तथा ऊँचाई 10 सेंटीमीटर है, को उसकी ऊँचाई के चारों ओर घुमाया जाता है। इस प्रकार निर्मित शंकु का आयतन एवं पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: ***संकेत :*** इस प्रकार निर्मित शंकु की ऊँचाई = त्रिभुज की ऊँचाई, एवं

त्रिज्या = त्रिभुज का आधार

तिरछी ऊँचाई = त्रिभुज का कर्ण

अब इस सवाल को स्वयं हल करें।

प्रमेय: यदि किसी घनाभ की लंबाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमशः x%, y% एवं z% बढ़ा दी जाए, तो इसके आयतन में $\left[x+y+z+\dfrac{xy+xz+yz}{100}+\dfrac{xyz}{(100)^2}\right]\%$ की वृद्धि होती है।

प्रमाण: गणना में सुविधा की दृष्टि से यह मान लें कि घनाभ की प्रत्येक भुजा की माप 100 इकाई है।

$\therefore$ इसका आयतन = $(100)^3$ इकाई

घनाभ की बढ़ी हुई भुजाएँ = (100 + x), (100 + y) एवं (100 + z)

∴ इसका नया आयतन = (100 + x) (100 + y) (100 + z)

$$= 100^3 + 100^2(x + y + z) + 100(xy + yz + xz) + xyz$$

∴ आयतन में प्रतिशत परिवर्तन

$$= \frac{100^2(x+y+z)+100(xy+xz+yz)+xyz}{100^3} \times 100$$

$$= x + y + z + \frac{xy + xz + yz}{100} + \frac{xyz}{(100)^2}$$

नोट: यह प्रमेय सभी त्रिविमीय आकृतियों (three-dimensional figures) के लिए आधारभूत सूत्र माना जाता है। अब आप यह देखें कि किस प्रकार इस एक प्रमेय के आधार पर अनेक प्रमेय बनाए जा सकते हैं।

प्रमेय: (घन के लिए) यदि किसी घन की भुजा x% बढ़ा दी जाए तो उसके आयतन में

$$\left[3x + \frac{3x^2}{100} + \frac{x^3}{100^2}\right]\% \quad \text{या} \quad \left[\left[1 + \frac{x}{100}\right]^3 - 1\right] \times 100\,\%$$ की वृद्धि होगी।

प्रमाण: ***(घन के लिए) :*** किसी घन की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, सभी भुजाओं में समान प्रतिशत की वृद्धि होती है। उपर्युक्त आधारभूत प्रमेय में x = y = z रखने पर,

$$3x + \frac{3x^2}{100} + \frac{x^3}{100^2}$$

इसे निम्नलिखित रूप में भी रखा जा सकता है,

$$\left[\left[1 + \frac{x}{100}\right]^3 - 1\right] \times 100$$

प्रमेय: ***(गोला के लिए):*** यदि किसी गोले की त्रिज्या या व्यास में x% का परिवर्तन आता हो

तो इसके आयतन में $\left[3x + \frac{3x^2}{100} + \frac{x^3}{100^2}\right]\%$ का बदलाव आ जाता है।

प्रमाण: किसी भी त्रिविमीय ज्यामितीय आकृति के तीन मापांक होते हैं। गोले के संदर्भ में भी तीन मापांक हैं और ये तीनों ही आपस में बराबर हैं। क्योंकि r^3 में तीन r अन्तर्निहित हैं। इस प्रकार, यहाँ भी हम मूल सूत्र में तीनों मानों को बराबर रखते हैं तथा हमें अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय (बेलन के लिए):

I. यदि ऊँचाई में *x*% का बदलाव आता हो और त्रिज्या यथावत् बनी रहे तो आयतन में भी *x*% का परिवर्तन होता है।

प्रमाण: आयतन = $\pi r^2 h$

चूँकि यहाँ केवल ऊँचाई बदलता है और त्रिज्या की माप में कोई फर्क नहीं आता, इसलिए त्रिज्या में 0% का बदलाव मान लिया जाए और चूँकि r^2 में दो मापांक हैं इसलिए आधारभूत प्रमेय के दो अन्य मानों को '0' के बराबर मान लिया जाए।

इस प्रकार (y = z = 0 रखने पर),

$$x+0+0+\frac{0+0+0}{100}+\frac{0\times 0\times 0}{100^2}=x$$

II. यदि त्रिज्या में x% का परिवर्तन आता हो तथा ऊँचाई अपरिवर्तित रहता हो तो आयतन में:

$$\left[2x+\frac{x^2}{100}\right]\% \text{ या } \left[\left[1+\frac{x}{100}\right]^2-1\right]\times 100\%$$ का बदलाव आ जाता है।

प्रमाण: केवल दो मापांक (r^2) ही बदलते हैं, इसलिए तीन में से दो त्रिज्याओं को समान कर दें एवं तीसरी त्रिज्या का मान शून्य रख दें। ऐसा करने पर (y = x एव z = 0 रखने पर),

$$x+x+0+\frac{x^2+0+0}{100}+\frac{x\times x\times 0}{100^2}=2x+\frac{x^2}{100}$$

III. यदि त्रिज्या में x% का परिवर्तन हो एवं ऊँचाई में y% का परिवर्तन हो तो आयतन में,

$$\left[2x+y+\frac{x^2+2xy}{100}+\frac{x^2y}{100^2}\right]\%$$ का बदलाव आता है।

प्रमाण: यहाँ दो समान मापांकों (r^2) में x% का परिवर्तन आता है, जबकि तीसरी भुजा में y% का बदलाव आता है। इसलिए दो मान समान होंगे और तीसरा अलग होगा। (x एवं z की जगह x रखें एवं y को यथावत रहने दें)। इस प्रकार,

$$x+y+x+\frac{xy+x^2+xy}{100}+\frac{x^2y}{100^2}=2x+y+\frac{x^2+2xy}{100}+\frac{x^2y}{100^2}$$

IV. यदि ऊँचाई और त्रिज्या दोनों में x% का बदलाव आता हो तो आयतन में

$$\left[3x+\frac{3x}{100}+\frac{x^3}{100^2}\right]\%$$ का परिवर्तन आएगा।

प्रमाण: घन एवं गोला के समान ही, यहाँ भी तीनों मापांक (2 त्रिज्याएँ एवं एक ऊँचाई) बदल जाते हैं। इसलिए x,y एवं z की जगह x रखें।

नोट: (1) हमारा सुझाव है कि आप केवल आधारभूत प्रमेय को याद रखें तथा इस बात को अच्छी तरह समझ लें कि किसी भी त्रिविमीय आकृति की मापक भुजाओं में परिवर्तन आने से इसमें किस प्रकार का बदलाव आता है।

(2) कुछ स्थितियों में हमने वृद्धि या ह्रास की जगह 'परिवर्तन' शब्द का इस्तेमाल किया है। इसका मतलब यह है कि वृद्धि होने पर धनात्मक मान का इस्तेमाल करें और कमी आने

पर ऋणात्मक मान का प्रयोग करें। यदि उत्तर में धन या ऋण चिह्न आता हो तो क्रमश: आयतन में वृद्धि या ह्रास का सूचक माना जाता है। उपर्युक्त प्रमेय में उल्लिखित 'परिवर्तन' का मतलब यह नहीं होता कि यदि एक मान में वृद्धि होती है तो दूसरे में भी वृद्धि होगी।

(3) शंकु के लिए एक प्रमेय ज्ञात करें। सभी स्थितियों की कल्पना करके अलग-अलग सूत्र निकालें।

उदा. 35: किसी घन की प्रत्येक भुजा 50 प्रतिशत बढ़ा दी जाती है। आयतन में होने वाली प्रतिशत वृद्धि की गणना करें। सतह के क्षेत्रफल में होनेवाली प्रतिशत वृद्धि की भी गणना करें।

हल: प्रमेय के अनुसार,

$$\text{आयतन में प्रतिशत वृद्धि} = 3 \times 50 + \frac{3(50)^2}{100} + \frac{(50)^3}{100^2}$$

$$= 150 + 75 + 12.5 = 237.5\%$$

क्षेत्रफल के संदर्भ में, यह स्पष्ट है कि केवल दो मापक भुजाएँ ही बदलती हैं (क्योंकि क्षेत्रफल एक द्विविमीय संकल्पना है)। इसलिए हमलोग निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल करते हैं (पिछला अध्याय देखिए),

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि} = 2x + \frac{x^2}{100} = 2 \times 50 + \frac{50 \times 50}{100} = 125\%$$

उदा. 36: यदि किसी बेलन की त्रिज्या एवं ऊँचाई दोनों में 10% की वृद्धि होती हो तो आयतन में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: चूँकि तीनों मापक भुजाएँ (दो त्रिज्या + एक ऊँचाई) में समान प्रतिशत की वृद्धि होती है, इसलिए हमलोग निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करते हैं:

$$\text{आयतन में प्रतिशत वृद्धि} = 3 \times 10 + \frac{3(10)^2}{100} + \frac{(10)^3}{(100)^2} = 30 + 3 + 0.1 = 33.1\%$$

उदा. 37: किसी शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई में 20% की वृद्धि होती है तो आयतन में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: चूँकि तीनों मापक भुजाएँ (2 त्रिज्याएँ + 1 ऊँचाई) के मान में समान प्रतिशत की वृद्धि होती है, इसलिए पिछले उदाहरण में दिया गया सूत्र ही इस्तेमाल करेंगे,

$$\therefore \text{आयतन में \% वृद्धि} = 3 \times 20 + \frac{3(20)^2}{100} + \frac{(20)^3}{(100)^2}$$

$$= 60 + 12 + 0.8 = 72.8\%$$

उदा. 38: किसी गोले की त्रिज्या में 5% की वृद्धि होती है। इसके पृष्ठ क्षेत्रफल में होने वाली प्रतिशत वृद्धि का आकलन करें।

हल: यहाँ क्षेत्रफल में होनेवाली प्रतिशत वृद्धि के विषय में पूछा गया है, इसलिए यहाँ द्विविमीय (two dimensional) आकृति के संदर्भ में प्रयुक्त सूत्र का इस्तेमाल किया जाएगा (पिछले अध्याय में ऐसे सूत्रों की चर्चा की गई है) :

अभीष्ट प्रतिशत मान = $2 \times 5 + \frac{5 \times 5}{100} = 10 + 0.25 = 10.25$

उदा. 39: घन के प्रत्येक किनारे में 50 प्रतिशत की कमी की जाती है। पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन में होने वाली प्रतिशत कमी का आकलन करें।

हल: पृष्ठ क्षेत्रफल (द्विविमीय आकृति के लिए), हमलोग पिछले अध्याय में दिए गए सूत्र का इस्तेमाल करते हैं (ऐसे सूत्रों का उल्लेख पिछले अध्याय में है): $\left[2x + \frac{x^2}{100}\right]\%$

चूँकि यहाँ मान में कमी हो रही है, इसलिए x का ऋणात्मक मान रखें :

$\therefore$ पृष्ठ क्षेत्रफल में अभीष्ट प्रतिशत कमी = $2(-50) + \frac{(-50)^2}{100}$

$= -100 + 25 = -75\%$

$\therefore$ क्षेत्रफल में 75% की कमी आती है।

आयतन में प्रतिशत कमी = $3(-50) + \frac{3(-50)^2}{100} + \frac{(-50)^3}{(100)^2}$

$= -150 + 75 - 12.5 = -87.5\%$

$\therefore$ आयतन में 87.5% की कमी आती है।

उदा. 40: कोई बेलन, गोलार्द्ध और शंकु एक ही आधार पर स्थित हैं और उनकी ऊँचाई भी समान है। उनके आयतनों का, तथा वक्र सतह के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि इन तीनों का आधार x सेंटीमीटर है तथा ऊँचाई y सेंटीमीटर है।

$\therefore$ ***गोलार्द्ध के लिए :***

त्रिज्या = $\frac{x}{2}$ सेंटीमीटर एवं ऊँचाई $= y = \frac{x}{2}$ से. मी. ....(*)

शंकु के लिए:

त्रिज्या = $\frac{x}{2}$ सेंटीमीटर एवं ऊँचाई $= y = \frac{x}{2}$ से. मी. (चूँकि ऊँचाई सबके लिए बराबर है)

बेलन के लिए:

त्रिज्या = $\frac{x}{2}$ सेंटीमीटर, एवं ऊँचाई $= y = \frac{x}{2}$ सेंटीमीटर

$\therefore$ बेलन का आयतन : गोलार्द्ध का आयतन : शंकु का आयतन

$$= \pi\left[\frac{x}{2}\right]^2 \left[\frac{x}{2}\right] : \frac{2}{3}\pi\left[\frac{x}{2}\right]^3 : \frac{1}{3}\pi\left[\frac{x}{2}\right]^2 \left[\frac{x}{2}\right]$$

$$= 1:\frac{2}{3}:\frac{1}{3} = 3 : 2 : 1$$

अब, बेलन का क्षेत्रफल : गोलार्द्ध का क्षेत्रफल : शंकु का क्षेत्रफल

$$= 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right):2\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2:\pi\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= 2\pi\frac{x^2}{4}:2\pi\frac{x^2}{4}:\pi\frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \pi\frac{x^2}{2}:\pi\frac{x^2}{2}:\pi\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 1:1:\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}:\sqrt{2}:1$$

नोट: (*): गोलार्द्ध की ऊँचाई = गोलार्द्ध की त्रिज्या

उदा. 41: एक घन एवं उसके अंदर फिट हो जाने वाले गोले के आयतन का अनुपात निकालें।

हल: मान लिया कि घन की भुजा = a सेंटीमीटर।

$\therefore$ घन के अंदर पूरी तरह फिट कर जाने वाले गोले की त्रिज्या = $\frac{a}{2}$ सेंटीमीटर।

$\therefore$ उनके आयतन का अनुपात = $a^3:\frac{4}{3}\pi\left[\frac{a}{2}\right]^3 = 1:\frac{4\pi}{24} = 1 : \frac{\pi}{6} = 6 : \pi$

उदा. 42: किसी गोले के अंदर से सबसे बड़े आकार का (जिसके कोने अंदर से सतह को छू रहे हैं) घन काट लिया जाता है। घन और गोला के आयतन का अनुपात निकालें।

हल: मान लिया कि गोले की त्रिज्या = r सेंटीमीटर तथा घन की भुजा = x से. मी.

तो, घन का विकर्ण = गोले का व्यास

या, $\sqrt{3}x = 2r$ या, $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

आयतन का अनुपात = घन का अयतन : गोले का आयतन

$$= x^3:\frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3 : \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}:\frac{4}{3}\pi = 2: \sqrt{3}\pi$$

उदा. 43: दो घनों के आयतन का अनुपात 8:125 है। इनके किनारों एवं पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात बताएँ।

हल: सूत्र से, घन के संदर्भ में,

भुजाओं का अनुपात = $(\text{आयतन का अनुपात})^{1/3}$

तथा, पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात = $(\text{आयतन का अनुपात})^{2/3}$

भुजाओं का अनुपात = $(8:125)^{1/3} = \left(\frac{8}{125}\right)^{1/3} = \frac{2}{5} = 2:5$

तथा, पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात = $(8:125)^{2/3} = \left(\frac{8}{125}\right)^{2/3} = \frac{4}{25} = 4:25$

उदा. 44: 10 मीटर किनारा वाले दो घनों को जोड़कर एक घनाभ बनाया जाता है। इस प्रकार निर्मित नए घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें।

हल: नए घनाभ की चौड़ाई एवं ऊँचाई, घन जितनी ही रहेंगी, केवल इसकी लंबाई दूनी हो जाएगी। तब घनाभ के लिए,

लंबाई $(l) = 2 \times 10 = 20$ सेंटीमीटर

चौड़ाई $(b) = 10$ सेंटीमीटर

ऊँचाई $(h) = 10$ सेंटीमीटर

$\therefore$ घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(20 \times 10 + 10 \times 10 + 20 \times 10)$

$= 2 \times 500 = 1000$ वर्ग से. मी.

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

दो घनों के कुल मिलाकर $6 \times 2 = 12$ पृष्ठ हुए। जब इन दो घनों को एक साथ मिलाया जाता है तब दो पृष्ठ मिलकर एक हो जाते हैं। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि नए घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल दोनों घनों के कुल पृष्ठों के क्षेत्रफल तथा घन के दो पृष्ठों के क्षेत्रफल के अंतर के बराबर है। इस प्रकार निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:

नए घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल = $10a^2$

(जहाँ, a घन की भुजा है।)

$\therefore$ यहाँ, घनाभ का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = $10 \times (10)^2 = 1000$ वर्ग सेंटीमीटर

उदा. 45: प्रमाणित करें कि किसी गोले के वक्र सतह का क्षेत्रफल तथा उस बेलन का, जो गोले को परिगत (circumscribe) करता है, पृष्ठ क्षेत्रफल समान होता है।

हल: यदि आप रेखाचित्र बनाएँ तो पाएँगे कि यदि r गोले की त्रिज्या है, तो उल्लिखित बेलन की त्रिज्या r होगी और इसकी ऊँचाई 2r के बराबर होगी।

अब, गोले के वक्र सतह का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

तथा बेलन के वक्र सतह का क्षेत्रफल $= 2\pi(r)(2r) = 4\pi r^2$

इस प्रकार धारणा प्रमाणित हुई।

उदा. 46: 42 सेंटीमीटर त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार तार आयत की शक्ल में मोड़ा जाता है। इस आयत की भुजाएँ 6 : 5 के अनुपात में हैं। आयत की छोटी वाली भुजा ज्ञात करें।

हल: तार की लंबाई = वृत्त की परिधि = $2\pi \times 42 = \frac{2 \times 22 \times 42}{7}$ = 264 सेंटीमीटर

अब आयत की परिमिति = 264 सेंटीमीटर

चूँकि परिमिति में लंबाई और चौड़ाई का दुगुना शामिल रहता है, इसलिए भुजाओं को प्राप्त करने के लिए हम परिमिति में अनुपात के योगफल के दुगुने से भाग देते हैं।

∴ लंबाई = $\frac{264}{2(6+5)} \times 6 = 72$ सेंटीमीटर

एवं चौड़ाई = $\frac{264}{2(6+5)} \times 5 = 60$ सेंटीमीटर; उत्तर

उदा. 47: एक शंकु एक घन के अंदर इस प्रकार पूरी तरह से फिट हो जाता है कि शंकु का आधार घन के किसी एक सतह को स्पर्श करता है तथा उसका शीर्ष (vertex) घन के सम्मुख सतह को। यदि घन का आयतन 343 घन से. मी. हों तो शंकु का आयतन (लगभग में) ज्ञात करें।

1) 80 घन से. मी.
2) 90 घन से. मी.
3) 110 घन से. मी.
4) 105 घन से. मी.
5) 100 घन से. मी.

हल: घन का किनारा = $\sqrt[3]{343}$ = 7 से. मी.

शंकु की त्रिज्या = 3.5 से. मी. तथा ऊँचाई = 7 से. मी.

शंकु की आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

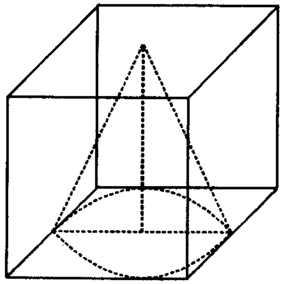
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 7$$

$$= \frac{1}{3} \times 22 \times 12.25 = 90$$ घन से. मी.

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

यदि एक शंकु एक घन के अंदर इस प्रकार फिट हो जाता है कि शंकु के आधार का किनारा घन के किसी एक सतह के किनारों को स्पर्श करता है तथा शंकु का शीर्ष (vertex) घन के दूसरे विपरीत (opposite) सतह को स्पर्श करता हो तो शंकु का आयतन

$\left(\frac{\pi}{12} \times \text{घन का आयतन}\right)$ के बराबर होता है।

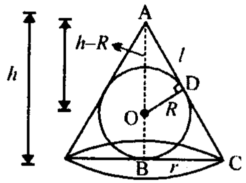


उपर्युक्त प्रश्न में,

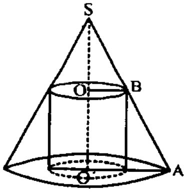
अभीष्ट उत्तर $= \frac{\pi}{12} \times 343 = \frac{22 \times 343}{7 \times 12} = \frac{49 \times 11}{6} \approx 90$ घन से.मी.

महत्वपूर्ण परिणाम (Important Results)

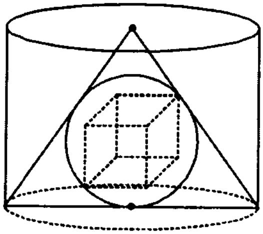
1. एक शंकु जिसकी त्रिज्या r एवं ऊँचाई (vertical height) h है, के अंदर रखे गए सबसे बड़े गोले की त्रिज्या = $\left(\frac{hr}{r+l}\right)$; जहाँ, $l = \sqrt{h^2 - r^2}$ है।



2. एक शंकु के आधार की त्रिज्या R है एवं उसकी ऊँचाई H है। एक सबसे बड़ा बेलन, जो कि शंकु के अंदर पूरी तरह अँट सकता हो, के वक्र सतह का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\pi RH$ होगा।

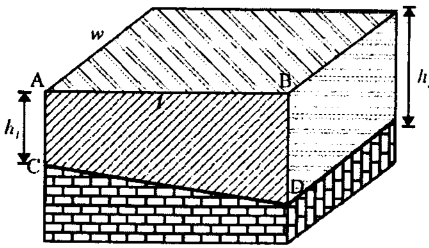


3. भुजा r का एक घन गोले के अंदर बिल्कुल फिट हो जाता है। वह गोला एक शंकु के अंदर पूरी तरह फिट हो जाता है। वह शंकु एक बेलन के अंदर पूरी तरह फिट हो जाता है। शंकु की ऊँचाई उसके आधार के व्यास के बराबर है। बेलन के वक्र सतह का क्षेत्रफल = $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}\right)^2 \pi r^2$ होगा।



4. किसी भी सम ठोस (Regular Solid) के लिए, सतहों की संख्या + शीर्षों की संख्या (vertices) = किनारों (edges) की संख्या + 2

स्विमिंग पूल (Swimming Pool)



मान लिया कि एक स्विमिंग पूल में स्थित पानी का आयतन निकालना है। पानी के स्तर की ऊँचाई h_1 एवं h_2 है, l स्विमिंग पूल की लंबाई है एवं w स्विमिंग पूल की चौड़ाई है। सर्वप्रथम दिए हुए चित्र में हमें यह पता लगाना होगा कि कौन-सा अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (cross sectional area) हर जगह एक समान है।

उपर्युक्त चित्र में Face-vertical cross-sectional area अर्थात् ABCD हर जगह एक समान है। ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज (trapezium) है।

$\therefore$ स्विमिंग पूल में पानी का आयतन

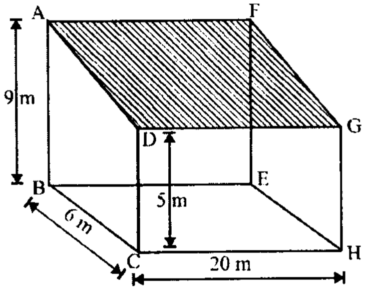
= अनुप्रस्थ काट ABCD का क्षेत्रफल × संगत ऊँचाई

= समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $\times w$

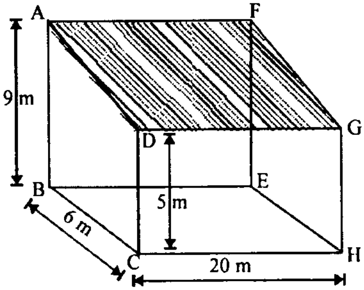
$$= \left[\frac{1}{2}(h_1 + h_2) \times l\right] \times w$$

नोट:यहाँ पर स्विमिंग पूल की चोड़ाई w को ऊँचाई माना गया है।

उदा. 48:नीचे दिए गए चित्र, जिसमें एक छप्पर वाला घर दिखाया गया है, के आधार पर उसका आयतन ज्ञात करें।



हल: इस स्थिति में हम Side-vertical Cross-section लेते हैं। (उदा.-49 का नोट देखें)



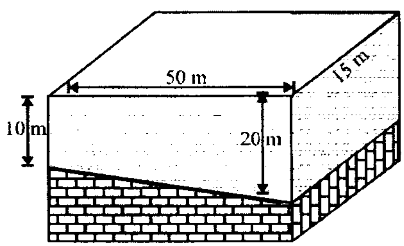
दिए हुए घर का आयतन $= \frac{1}{2} \times ABCD$ का क्षेत्रफल × घर की लंबाई (CH)

($\because$ Side-vertical Cross-section से हमें समलंब चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है जिसकी समानान्तर भुजाएँ AB एवं CD हैं तथा ऊँचाई BC है)

$$= \left[\frac{1}{2} \times (9+5) \times 6\right] \times 20 = 840 \text{ घन मीटर}$$

उदा. 49: किसी स्विमिंग पूल की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमश: 50 मीटर एवं 15 मीटर है। यदि स्विमिंग पूल के एक ओर की गहराई 10 मीटर है तथा दूसरी ओर की गहराई 20 मीटर है तो स्विमिंग पूल में पानी का आयतन ज्ञात करें।

हल:



यदि हम स्विमिंग पूल का face-vertical cross-section लेते हैं तो एक समलंब चतुर्भुज प्राप्त होता है जिसकी समानांतर भुजाएँ 10 मी. एवं 20 मी. हैं तथा ऊँचाई 50 मी. है (नोट देखें)

$\therefore$ स्विमिंग पूल में पानी का आयतन = स्विमिंग पूल के ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट (vertical cross-section) का क्षेत्रफल × स्विमिंग पूल की चौड़ाई $= \left[\frac{1}{2} \times (10+20) \times 50\right] \times 15$

$\because$ समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ऊँचाई × (समानांतर भुजाओं का योगफल)

= 11250 घन मीटर

नोट: हम लोगों के पास ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट लेने के लिए दो विकल्प हैं (i) फेस-ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट (ii) साइड-ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट। हम उस ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट को लेते हैं जिसमें प्रत्येक अनुप्रस्थ काट के लिए क्षेत्रफल एक समान रहता है। उदाहरण के लिए, यदि हम उपर्युक्त उदाहरण में साइड-ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट लेते हैं तो क्षेत्रफल प्रत्येक अनुप्रस्थ काट के लिए धीरे-धीरे बढ़ता जाएगा। उदा.-48 को भी ध्यान पूर्वक देखें।