অধ্যায় ১৫

পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান
(STATISTICS)

❖ *"Statistics may be rightly called the Science of averages and their estimates." - A . L. BOWLEY & A . L. BODDINGTON.* ❖

15.1 অৱতাৰণা (Introduction)

Karl Pearson (1857-1936)

আমি জানো যে পৰিসংখ্যা মানে নিৰ্দিষ্ট উদ্দেশ্যেৰে সংগৃহীত তথ্যৰ চৰ্চা। এই তথ্যৰ বিশ্লেষণ আৰু ব্যাখ্যাৰ জৰিয়তে আমি সিদ্ধান্ত গ্ৰহণ কৰিব পাৰোঁ। আগৰ শ্ৰেণীসমূহত আমি তথ্যক কিদৰে তালিকা আৰু লেখৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, সেই সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰি আহিছোঁ। এনেধৰণৰ প্ৰকাশৰদ্বাৰা তথ্যৰ লক্ষ্যণীয় দিশ অথবা বৈশিষ্ট্যসমূহ স্পষ্ট হৈ পৰে। কোনো তথ্যৰ বাবে প্ৰতিনিধিত্বকাৰী মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰাৰ কৌশল সম্পৰ্কেও আমি ইতিমধ্যে অধ্যয়ন কৰি আহিছোঁ। এই মানক কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ (Measure of Central Tendency) বোলা হয়। মনত পেলাওঁ যে কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ তিনিটা মাপ হ'ল মাধ্য (Mean) বা সমান্তৰ মাধ্য (Arithmetic Mean), মধ্যমা (Median) আৰু বহুলক (Mode)। *কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপে* তথ্যৰাজি ক'ত কেন্দ্ৰীভূত হৈ থাকে তাৰ থূলমূল ধাৰণা দিয়ে। কিন্তু তথ্যৰ পৰা উন্নততৰ ব্যাখ্যা পাবলৈ হ'লে কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপৰ চৌপাশে সেইবোৰ (তথ্যবোৰ) কিদৰে সিচঁৰতি বা থুপ্ খাই আছে তাৰো এক ধাৰণা থাকিব লাগিব।

এতিয়া, দুজন বেট্ছমেনে তেওঁলোকৰ শেহতীয়া দহখন খেলত লাভ কৰা ৰাণসমূহ বিবেচনা কৰা হ'ল তলত দিয়া ধৰণেঃ

বেট্ছমেন কঃ 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71.

বেট্ছমেন খঃ 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52.

স্পষ্টভাৱে, উপৰিউক্ত তথ্যৰ মাধ্য আৰু মধ্যমা হ'ল

	বেট্ছমেন - ক	বেট্ছমেন - খ
মাধ্য	53	53
মধ্যমা	53	53

স্মৰণ কৰোঁ যে কোনো তথ্যৰ মাধ্য ($\bar{x}$ ৰে চিহ্নিত কৰা হয়) নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি পৰ্য্যবেক্ষণ সমূহৰ সমষ্টিক মুঠ পৰ্য্যবেক্ষণৰ সংখ্যাৰে ভাগ কৰোঁ। অৰ্থাৎ

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

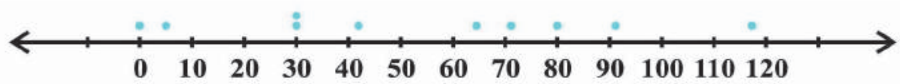
আকৌ, মধ্যমা নিৰ্ণয়ৰ বাবে প্ৰথমে তথ্যখিনিক উৰ্দ্ধক্ৰম নাইবা অধঃক্ৰমত সজোৱা হয় আৰু নিম্নোক্ত নিয়মটো প্ৰয়োগ কৰা হয়।

যদি মুঠ পৰ্য্যবেক্ষণৰ সংখ্যা অযুগ্ম হয়, তেন্তে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম পৰ্য্যবেক্ষণেই হ'ল তথ্যৰ মধ্যমা। যদি মুঠ পৰ্য্যবেক্ষণৰ সংখ্যা যুগ্ম হয়, তেন্তে $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্যই হ'ল তথ্যৰ মধ্যমা।

বেট্‌ছমেন 'ক' আৰু বেট্‌ছমেন 'খ' উভয়ে লাভ কৰা ৰাণৰ ক্ষেত্ৰত আমি মাধ্য আৰু মধ্যমা একেই অৰ্থাৎ 53 পাওঁ। তেনেহলে, দুয়োজন খেলুৱৈৰ কৃতিত্ব আমি একেই বুলি ক'ম নেকি? স্পষ্টভাৱে ক'ব পাৰি যে একে নহয়, কাৰণ বেট্‌ছমেন 'ক' ৰ ৰাণৰ পৰিৱৰ্তনশীলতা 0 (সৰ্বনিম্ন)ৰ পৰা 117 (সৰ্বোচ্চ) য'ত বেট্‌ছমেন 'খ' ই লাভ কৰা ৰাণৰ পৰিসৰ 46 (সৰ্বনিম্ন)ৰ পৰা 60 (সৰ্বোচ্চ)।

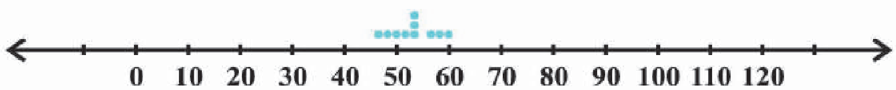
উপৰিউক্ত স্ক'ৰসমূহ এতিয়া এডাল সংখ্যাৰেখাত বিন্দু হিচাপে স্থাপন কৰি চোৱা যাওক। আমি তলৰ চিত্ৰখন পাম-

বেট্‌ছমেন 'ক' ৰ বাবে -



চিত্ৰ - **15.1**

বেট্‌ছমেন 'খ' ৰ বাবে -



চিত্ৰ **15.2**

আমি দেখিবলৈ পাওঁ যে বেট্‌ছমেন 'খ' ৰ অনুৰূপ বিন্দুবোৰ পৰস্পৰ ওচৰা ওচৰিকৈ আছে আৰু কেন্দ্ৰীয় প্ৰকৃতিৰ মাপৰ (মাধ্য আৰু মধ্যমা) চাৰিওফালে থূপ খাই আছে। আনহাতে, বেটছ্মেন 'ক' ৰ অনুৰূপ বিন্দুবোৰ সিচঁৰতি বা বহু আঁতৰলৈ বিস্তাৰিত হৈ আছে।

এইদৰে, কোনো প্ৰদত্ত তথ্য সম্পৰ্কে সম্পূৰ্ণ সম্ভেদ পাবলৈ কেৱল কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপেই পৰ্য্যাপ্ত নহয়। পৰিৱৰ্তনশীলতা আন এক কাৰক যাৰ সম্পৰ্কে পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানত অধ্যয়ন কৰাৰ প্ৰয়োজন আছে। কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপৰ দৰে পৰিৱৰ্তনশীলতা (Variability) ৰ বৰ্ণনা কৰিবলৈয়ো আমাক এটা সংখ্যাৰ আৱশ্যক। এই সংখ্যাটোকে পৰিৱৰ্তনশীলতা বা বিক্ষেপণৰ মাপ (measure of dispersion) বোলা হয়। এই অধ্যায়ত, আমি বিক্ষেপণৰ কেইটামান লাগতিয়াল মাপ আৰু অবৰ্গীকৃত (ungrouped) আৰু বৰ্গীকৃত (grouped) উভয় তথ্যৰ বাবে সেইবোৰ নিৰ্ণয় কৰাৰ পদ্ধতি সম্পৰ্কে শিকিম।

15.2 বিক্ষেপণৰ মাপ (Measures of Dispersion)

তথ্যৰ বিক্ষেপণ অথবা বিচ্ছুৰণ পৰ্য্যবেক্ষণ আৰু তাত ব্যৱহৃত কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপৰ প্ৰকাৰৰ ভিত্তিত জোখা হয়। বিক্ষেপণৰ মাপসমূহ নিম্নোক্ত ধৰণৰ-

(i) পৰিসৰ (Range), (ii) চতুৰ্থক বিচ্যুতি বা বিচলন (Quartile Deviation),

(iii) গড় বিচ্যুতি বা বিচলন (Mean Deviation),

(iv) মানক বা প্ৰামাণিক বিচ্যুতি বা বিচলন (Standard Deviation)

এই অধ্যায়ত চতুৰ্থক বিচ্যুতিৰ বাহিৰে আটাইকেইটা বিক্ষেপণৰ মাপৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

15.3 পৰিসৰ (Range)

মন কৰা যে দুজন বেট্‌ছমেন 'ক' আৰু 'খ' ই স্ক'ৰ কৰা ৰাণ সম্পৰ্কীয় উদাহৰণটোৰপৰা প্ৰতিটো শ্ৰেণীত সৰ্বনিম্ন আৰু সৰ্বোচ্চ ৰাণ স্ক'ৰৰ পটভূমিত আমি পৰিৱৰ্তনশীলতা সম্পৰ্কে কিছু ধাৰণা লাভ কৰিছিলোঁ। ইয়াক এটা সংখ্যাৰে প্ৰকাশ কৰিবলৈ আমি প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ বাবে সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মানৰ পাৰ্থক্য লওঁ। এই পাৰ্থক্যকে তথ্যৰ পৰিসৰ বোলা হয়।

বেট্‌ছমেন 'ক' ৰ ক্ষেত্ৰত, পৰিসৰ = 117 – 0 = 117 আৰু

বেট্‌ছমেন 'খ' ৰ ক্ষেত্ৰত, পৰিসৰ = 60 – 46 = 14

স্পষ্টভাৱে, 'ক' ৰ পৰিসৰ > 'খ' ৰ পৰিসৰ। সেইবাবে 'ক' ৰ স্ক'ৰসমূহ বিক্ষেপিত বা সিঁচৰতি হৈ আছে য'ত, 'খ' ৰ স্ক'ৰ সমূহ পাৰস্পৰিকভাৱে ওচৰা-উচৰিকৈ আছে। এইদৰে, এটা শ্ৰেণীৰ পৰিসৰ = সৰ্বোচ্চ মান – সৰ্বনিম্ন মান।

তথ্যৰ পৰিসৰে আমাক পৰিৱৰ্তনশীলতা বা সিঁচৰতিৰ এটা থূলমূল ধাৰণা দিয়ে কিন্তু কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপৰপৰা তথ্যৰ বিচ্যুতি সম্পৰ্কে ই একো সম্ভেদ নিদিয়ে। ইয়াৰ বাবে পৰিৱৰ্তনশীলতাৰ আন কিছুমান মাপৰ প্ৰয়োজন। স্পষ্টভাৱে এনে মাপ কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ পৰা (গাইগুটীয়া) মানসমূহৰ পাৰ্থক্য বা বিচ্যুতিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল হ'ব লাগিব।

কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰপৰা পৰ্য্যবেক্ষণৰ বিচ্যুতিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰা বিক্ষেপণৰ দুটা গুৰুত্বপূৰ্ণ মাপ হ'ল ঃ **গড় বিচ্যুতি** আৰু **প্ৰামাণিক বিচ্যুতি**। উভয়ৰে সম্পৰ্কে আমি বিতংভাৱে আলোচনা কৰোঁহক।

15.4 গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation)

স্মৰণ কৰা যে এটা নিৰ্দিষ্ট মান 'a' ৰ পৰা কোনো পৰ্য্যবেক্ষণ x ৰ বিচ্যুতি হ'ল x ৰ পৰা a ৰ পাৰ্থক্য অৰ্থাৎ $x - a$. এটা কেন্দ্ৰীয় মান a ৰ পৰা x ৰ মানসমূহৰ বিক্ষেপণ উলিয়াবলৈ আমি a সাপেক্ষে বিচ্যুতিবোৰ উলিয়াই লওঁ। বিক্ষেপণৰ এক সঠিক মাপ হ'ল এই বিচ্যুতিসমূহৰ গড়। গড় উলিয়াবলৈ আমি বিচ্যুতিসমূহৰ সমষ্টি পাব লাগিব। কিন্তু, আমি জানো যে কোনো কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ পৰ্য্যবেক্ষণসমূহৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান দুটাৰ মাজত থাকে। সেয়েহে, বিচ্যুতিবোৰৰ কিছুমান ঋণাত্মক আৰু কিছুমান ধনাত্মক হ'ব। এইদৰে, বিচ্যুতিবোৰৰ সমষ্টিটো শূন্য হ'ব পাৰে। তদুপৰি, মাধ্য $\bar{x}$ ৰ পৰা বিচ্যুতিসমূহৰ সমষ্টি শূন্য হয়। লগতে,

$$\text{বিচ্যুতিসমূহৰ গড়} = \frac{\text{বিচ্যুতিসমূহৰ সমষ্টি}}{\text{পৰ্য্যবেক্ষণৰ মুঠ সংখ্যা}} = \frac{0}{n} = 0$$

গতিকে, বিক্ষেপণৰ মাপ নিৰ্ণয়ৰ প্ৰশ্নটো যিমান দূৰ জড়িত, মাধ্য সাপেক্ষে বিচ্যুতিসমূহৰ গড় উলিয়ালে সেয়া আমাৰ কোনো ব্যৱহাৰত নালাগে।

মনত পেলাওঁ যে বিক্ষেপণৰ যথাৰ্থ মাপ এটা পাবলৈ হলে কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তি নাইবা এক নিৰ্দ্দিষ্ট মান 'a' ৰ পৰা প্ৰতিটো মান (পৰ্য্যবেক্ষণ)ৰ দূৰত্ব পাব লাগিব। এই ক্ষেত্ৰত, দুটা সংখ্যাৰ বিয়োগফলৰ পৰম মানে সংখ্যাৰেখাত সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্বক নিৰ্দেশ কৰে। গতিকে, এটা নিৰ্দ্দিষ্ট সংখ্যা 'a' ৰ পৰা বিক্ষেপণৰ মাপ উলিয়াবলৈ আমি কেন্দ্ৰীয় মানৰপৰা বিচ্যুতিৰ পৰম মানবোৰ লৈ তাৰ গড় উলিয়াব পাৰোঁ। এই গড় সংখ্যাটোক কোৱা হয় *গড় বিচ্যুতি*। এইদৰে, এটা কেন্দ্ৰীয় মান 'a' সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি হ'ল 'a' ৰ পৰা পৰ্য্যবেক্ষণসমূহৰ বিচ্যুতিৰ পৰম মানৰ গড়। 'a' ৰ পৰা গড় বিচ্যুতিক M.D.(a) ৰে সূচোৱা হয়। গতিকে

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\text{‘}a\text{’ৰ পৰা বিচ্যুতিৰ পৰম মানসমূহৰ সমষ্টি}}{\text{পৰ্য্যবেক্ষণৰ সংখ্যা}}$$

মন্তব্য যিকোনো ধৰণৰ কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপৰপৰা গড় বিচ্যুতি উলিয়াব পাৰি। যিহওক, মাধ্য আৰু মধ্যমাৰপৰা নিৰ্ণয় কৰা গড় বিচ্যুতি সাধাৰণতে পৰিসাংখ্যিক অধ্যয়নত ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

এতিয়া আমি বিভিন্ন ধৰণৰ তথ্যৰ ক্ষেত্ৰত মাধ্য আৰু মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি কিদৰে হিচাপ কৰা হয় সেই সম্পৰ্কে বুজি লওঁহক।

15.4.1 অবৰ্গীকৃত তথ্যৰ বাবে গড় বিচ্যুতি *(Mean Deviation for ungrouped data)*

ধৰা হ'ল n টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মানবোৰ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$.

এই মানবোৰৰ মাধ্য অথবা মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰিবলৈ নিম্নোক্ত পৰ্য্যায়ক্ৰমে আগ বাঢ়িব পাৰি।

পৰ্য্যায়-1: কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিটোৰ মাপ নিৰ্ণয় কৰোঁ, যাৰপৰা আমি গড় বিচ্যুতি উলিয়াব লাগে। ধৰা হ'ল, কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিটো ‘a’.

পৰ্য্যায়-2: a ৰ পৰা প্ৰত্যেক x_i ৰ বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰোঁ, অৰ্থাৎ $x_1 - a, x_2 - a, \ldots\ldots, x_n - a$.

পৰ্য্যায়-3: বিচ্যুতিসমূহৰ পৰম মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰোঁ অৰ্থাৎ ঋনাত্মক মান যিবোৰত থাকে সেইবোৰৰ পৰা (-)চিনবোৰ বাদ দিওঁ অৰ্থাৎ,

$$|x_1 - a|, \quad |x_2 - a|, \quad |x_3 - a|, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad |x_n - a|.$$

পৰ্য্যায়-4: বিচ্যুতিসমূহৰ পৰম মানৰ গড় নিৰ্ণয় কৰোঁ। ইয়েই হ'ব a ৰ পৰা গড় বিচ্যুতি অৰ্থাৎ,

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|}{n}$$

এইদৰে, $\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}|x_i - \bar{x}|$, য'ত $\bar{x}$ = মাধ্য

আৰু $\text{M.D.}(\text{M}) = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}|x_i - \text{M}|$, য'ত M = মধ্যমা

> **টোকা** এই অধ্যায়ত অন্যভাৱে উল্লেখ কৰা নাথাকিলে মধ্যমা সূচাবলৈ আমি M চিহ্নটো ব্যৱহাৰ কৰিম। এতিয়া নিম্নোক্ত উদাহৰণৰ জৰিয়তে উল্লিখিত পৰ্য্যায়সমূহৰ ব্যাখ্যা আগ বঢ়োৱা হ'ল।

উদাহৰণ 1 নিম্নোক্ত তথ্যৰ ক্ষেত্ৰত মাধ্যৰ পৰা গড় বিচ্যুতি উলিওৱাঁ।

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

সমাধান তলত দিয়া ধৰণে পৰ্য্যায়ক্ৰমে আগবাঢ়িলে আমি পাওঁ-

পৰ্য্যায়-1 প্ৰদত্ত তথ্যৰ মাধ্য $= \bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$

পৰ্য্যায়-2 $\bar{x}$ মাধ্যৰ পৰা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মান সমূহৰ বিচ্যুতি অৰ্থাৎ, $x - \bar{x}$ ৰ মানবোৰ হ'ল

$$6-9, 7-9, 10-9, 12-9, 13-9, 4-9, 8-9, 12-9.$$

বা $\quad -3, -2, 1, 3, 4, -5, -1, 3$

পৰ্য্যায়-3 বিচ্যুতিসমূহৰ পৰম মানবোৰ অৰ্থাৎ $|x_i - x|$ বোৰ হ'ল

3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3

পৰ্য্যায়-4 মাধ্যৰপৰা গড় বিচ্যুতিৰ নিৰ্ণেয় মানটো হ'ল-

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|}{8}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

> **টোকা** পৰ্য্যায়ানুক্ৰমে হিচাপবোৰ কৰোঁতে বাৰে বাৰে প্ৰতিটো পৰ্য্যায়ৰ উল্লেখ নকৰাকৈয়ে আমি কামটো সম্পন্ন কৰিব পাৰোঁ।

উদাহৰণ 2 তলত উল্লেখ কৰা তথ্যৰ বাবে মাধ্যৰ পৰা গড় বিচ্যুতি উলিওৱাঁ।

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5.

সমাধান প্ৰথমে আমি প্ৰদত্ত তথ্যৰ মাধ্য ($\bar{x}$) উলিয়াব লাগিব।

অৰ্থাৎ $$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{200}{20} = 10$$

মাধ্যৰপৰা বিচ্যুতিৰ অনুৰূপ পৰম মানবোৰ অৰ্থাৎ $|x_i - \bar{x}|$ বোৰ হ'ল

2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5

সেয়েহে $$\sum_{i-1}^{20}|x_i - \bar{x}| = 124$$

আৰু $$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$$

উদাহৰণ 3 তলত উল্লেখ কৰা তথ্যৰ বাবে মধ্যমাৰ পৰা গড় বিচ্যুতি উলিওৱাঁ।

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

সমাধান ইয়াত পৰ্য্যবেক্ষণৰ সংখ্যা হ'ল 11, যিটো এটা অযুগ্ম সংখ্যা, তথ্যখিনিক উৰ্দ্ধক্ৰমত সজালে আমি পাওঁ 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21

এতিয়া মধ্যমা = $\left(\frac{11+1}{2}\right)$ তম বা ষষ্ঠ পৰ্য্যবেক্ষণ = 9

মধ্যমাৰপৰা অনুৰূপ বিচ্যুতিৰ পৰম মানবোৰ অৰ্থাৎ $|x_i - \text{M}|$ বোৰ হ'ল

6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12

সেয়েহে, $$\sum_{i=1}^{11}|x_i - \text{M}| = 58$$

আৰু $$\text{M.D.}(\text{M}) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}|x_i - \text{M}| = \frac{1}{11} \times 58 = 5.27$$

15.4.2 *বৰ্গীকৃত তথ্যৰ বাবে গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation for grouped data)*

আমি জানো যে তথ্যৰ বৰ্গীকৰণ দুই ধৰণে কৰিব পাৰি-

(ক) বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন (Discrete frequency distribution)

(খ) অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন (Continuous frequency distribution)

দুয়োবিধ তথ্যৰ বাবে গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয়ৰ কৌশল সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা যাওঁক।

(ক) বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন ধৰা হ'ল, প্ৰদত্ত তথ্যত n টা পৃথক মান $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ যিবোৰৰ বাৰংবাৰতাসমূহ যথাক্ৰমে $f_1, f_2, ..., f_n$. এই তথ্যখিনিক নিম্নোক্ত ধৰণে সাৰণী আকাৰত সজাব পাৰি, যাক বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন বোলা হয়। যেনে -

$$x : x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$$
$$f : f_1 \quad f_2 \quad f_3 \ldots\ldots\ldots f_n$$

(i) মাধ্যৰপৰা গড় বিচ্যুতি (Mean deviation about mean)

প্ৰথমতে আমি নিম্নোক্ত সূত্ৰৰ সহায়ত প্ৰদত্ত তথ্যৰ মাধ্য উলিয়াব লাগে ঃ

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \ ,$$

য'ত $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ য়ে পৰ্য্যবেক্ষণ x_i আৰু অনুৰূপ বাৰংবাৰতা f_i ৰ পূৰণফল সমূহৰ সমষ্টি আৰু $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ য়ে বাৰংবাৰতাসমূহৰ সমষ্টি নিৰ্দেশ কৰে।

ইয়াৰ পিছত $\bar{x}$ ৰ পৰা পৰ্য্যবেক্ষণ x_i ৰ বিচ্যুতিসমূহ উলিয়াই সেইবোৰৰ পৰম মানবোৰ অৰ্থাৎ, $|x_i - \bar{x}|,\ i = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots\ldots n$ উলিয়াব লাগে।

এতিয়া, এই বিচ্যুতিসমূহৰ গড় উলিয়ালে সেয়াই হ'ব মাধ্যৰ পৰা নিৰ্ণেয় গড় বিচ্যুতি। অৰ্থাৎ

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|$$

(ii) মধ্যমাৰ পৰা গড় বিচ্যুতি (Mean deviation about median) মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি পাবলৈ হ'লে প্ৰথমে প্ৰদত্ত বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰপৰা মধ্যমাৰ মান উলিয়াই ল'ব লাগে। ইয়াৰ বাবে পৰ্য্যবেক্ষণ বোৰক উৰ্দ্ধক্ৰমত সজাই লোৱা হয়। ইয়াৰ পিছত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা নিৰ্ণয় কৰা হয়। তাৰ পিছত সেই পৰ্য্যবেক্ষণটো চিনাক্ত কৰা হয়, যাৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা ঠিক $\frac{N}{2}$ তকৈ ডাঙৰ বা সমান য'ত, N সমূহ বাৰংবাৰতাৰ সমষ্টি। এই পৰ্য্যবেক্ষণটো তথ্যৰ সোঁমাজত থাকে। সেয়েহে, ইয়েই নিৰ্ণেয় মধ্যমা। মধ্যমা পোৱাৰ পিছত মধ্যমাৰপৰা বিচ্যুতিৰ পৰম মানবোৰৰ গড় উলিওৱা হয়। এইদৰে,

$$\text{M.D.}(M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

উদাহৰণ 4 নিম্নোক্ত তথ্যৰ বাবে মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি উলিওৱাঁ।

x_i :	2	5	6	8	10	12
f_i :	2	8	10	7	8	5

সমাধান প্ৰদত্ত তথ্যৰ বাবে আমি 15.1 সাৰণীখন প্ৰস্তুত কৰোঁ য'ত হিচাপৰ অন্তত অন্যান্য স্তম্ভবোৰ যোগ দিয়া হৈছে।

x_1	f_i	$x_i f_i$	$\lvert x_1 - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_1 - x \rvert$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

$$N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40,\ \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300,\ \sum_{i=1}^{6} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 92$$

সেয়েহে $$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$$

আৰু $$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$$

উদাহৰণ 5 তলত উল্লেখ কৰা তথ্যৰ বাবে মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰা।

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

সমাধান প্ৰদত্ত পৰ্য্যবেক্ষণ বোৰ ইতিমধ্যে উৰ্দ্ধক্ৰমতে আছে। অনুৰূপ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাৰ বাবে অতিৰিক্ত শাৰী এটা যোগ দি আমি পাওঁ (সাৰণী 15.2)।

সাৰণী 15.2

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$c.f.$	3	7	12	14	18	23	27	30

এতিয়া, N = 30, যিটো যুগ্ম।

মধ্যমা হ'ল 15 তম আৰু 16 তম পৰ্য্যবেক্ষণৰ গড়। এই দুয়োটা পৰ্য্যবেক্ষণেই সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 18 ৰ ভিতৰত আছে যাৰ বাবে অনুৰূপ পৰ্য্যবেক্ষণটো হ'ল 13

সেয়েহে, মধ্যমা $M = \frac{\text{15 তম আৰু 16 তম পৰ্য্যবেক্ষণৰ সমষ্টি}}{2} = \frac{13+13}{2} = 13$

এতিয়া মধ্যমাৰপৰা বিচ্যুতিৰ পৰম মানবোৰ অৰ্থাৎ $|x_i - M|$ ৰ মানবোৰৰ সাৰণী 15.3 ত প্ৰদৰ্শন কৰা হ'ল।

সাৰণী 15.3

$\|x_i - M\|$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i\|x_i - M\|$	30	28	20	2	0	10	32	27

আমি পাওঁ, $\sum_{i=1}^{8} f_i = 30$ আৰু $\sum_{i=1}^{8} f_i|x_i - M| = 149$

সেয়েহে, $$M.D.(M) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{8} f_i|x_i - M|$$

$$= \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$$

(খ) অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন (Continuous frequency distribution) অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন হ'ল এক ধৰণৰ শৃঙ্খলা, য'ত তথ্যসমূহ কোনো ফাঁক নোহোৱাকৈ অনুৰূপ বাৰংবাৰতা সহ বেলেগ বেলেগ শ্ৰেণী অন্তৰালত ভগোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, 100 গৰাকী শিক্ষাৰ্থীয়ে লাভ কৰা মূল্যাংকসমূহ এক অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনত নিম্নোক্তভাৱে প্ৰদৰ্শন কৰা হৈছে।

প্ৰাপ্ত মূল্যাংক	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
শিক্ষাৰ্থীৰ সংখ্যা	12	18	27	20	17	6

(i) মাধ্যৰপৰা গড় বিচ্যুতি (Mean deviation about mean) অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ মাধ্য উলিয়াওঁতে আমি ধৰি লৈছোঁ যে প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা শ্ৰেণীটোৰ মধ্যবিন্দুত থাকে। ইয়াতো, আমি প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ মধ্যবিন্দু উলিয়াই লওঁ আৰু বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত কৰাৰ দৰে গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰিবলৈ পুনৰ অগ্ৰসৰ হওঁ।

তলৰ উদাহৰণটো লোৱা যাওক।

উদাহৰণ 6 তলত উল্লেখ কৰা তথ্যৰ বাবে মাধ্যৰ পৰা গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

প্ৰাপ্ত মূল্যাংক	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
শিক্ষাৰ্থীৰ সংখ্যা	2	3	8	14	8	3	2

সমাধান প্ৰদত্ত তথ্যৰ পৰা আমি তলৰ সাৰণীখন (সাৰণী 15.4) প্ৰস্তুত কৰোহঁক।

সাৰণী 15.4

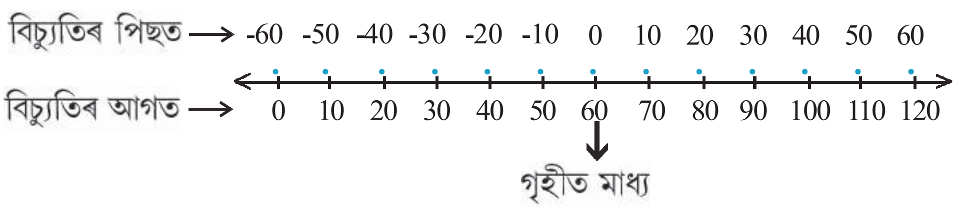
প্ৰাপ্ত নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা	মধ্যবিন্দু	$f_i x_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i \|x_i - \bar{x}\|$
10 - 20	2	15	30	30	60
20 - 30	3	25	75	20	60
30 - 40	8	35	280	10	80
40 - 50	14	45	630	0	0
50 - 60	8	55	440	10	80
60 - 70	3	65	195	20	60
70 - 80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

ইয়াত, $N = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40,\ \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800,\ \sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = 400$

সেয়েহে, $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$

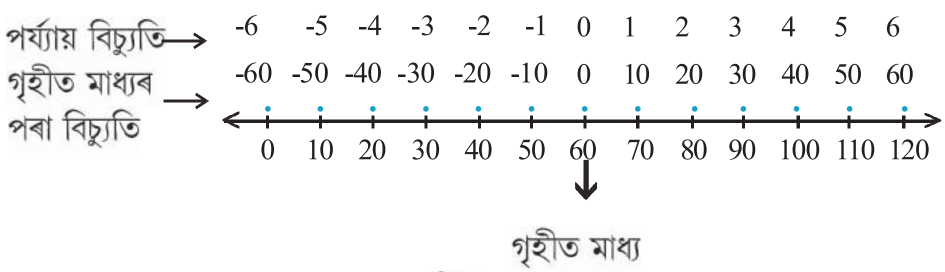
আৰু $\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 400 = 10$

মাধ্যৰপৰা গড় বিচ্যুতি উলিওৱাৰ চমু পদ্ধতি (Shortcut method for calculating mean deviation about mean) $\bar{x}$ নিৰ্ণয় কৰাৰ আমনিদায়ক গণনাবোৰ এৰাই চলিবৰ বাবে আমি তলৰ পৰ্য্যায় বিচ্যুতি (Step deviation) পদ্ধতিটো অনুসৰণ কৰিব পাৰোঁ। স্মৰণ কৰোঁ যে এই পদ্ধতিত আমি এটা গৃহীত মাধ্য (Assumed mean) লওঁ, যিটো তথ্যৰ মাজত নাইবা ইয়াৰ নিচেই ওচৰত থাকে। পৰ্য্যবেক্ষণসমূহৰ (নাইবা শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰৰ মধ্যবিন্দুবোৰ) গৃহীত মাধ্যৰপৰা বিচ্যুতি লোৱা হয়। এয়া চিত্ৰ 15.3 ত দেখুওৱাৰ দৰে সংখ্যাৰেখাত মূলবিন্দুটো শূন্যৰ পৰা গৃহীত মাধ্যলৈ স্থানান্তৰৰ বাহিৰে আন একো নহয়।



চিত্ৰ 15.3

যদি বিচ্যুতিসমূহৰ আটাইৰে এটা সাধাৰণ উৎপাদক থাকে তেন্তে পুনৰ সৰল কৰাৰ বাবে সাধাৰণ উৎপাদকটোৰে আমি বিচ্যুতিবোৰক হৰণ কৰোঁ। এইবোৰক পৰ্য্যায়-বিচ্যুতি বুলি জনা যায়। চিত্ৰ 15.4 ত দেখুওৱাৰ দৰে পৰ্য্যায়-বিচ্যুতি উলিওৱা মানে হ'ল সংখ্যা ৰেখাত মাপ কাঠিৰ পৰিবৰ্তন।



চিত্ৰ 15.4

বিচ্যুতি আৰু পৰ্য্যায়-বিচ্যুতিয়ে পৰ্য্যবেক্ষণ বোৰৰ আকাৰ হ্ৰাস কৰে যাতে গণনা কাৰ্য্য যেনে পূৰণ কাৰ্য্য আদি অধিক সৰল হয়। নতুন চলকটো আমি $d_i = \frac{x_i - a}{h}$ ৰে সূচাওঁ, য'ত a গৃহীত মাধ্য আৰু h সাধাৰণ উৎপাদক। তেতিয়া পৰ্য্যায়-বিচ্যুতি পদ্ধতিৰে উলিওৱা মাধ্য $\bar{x}$ হ'বঃ

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i . d_i}{N} \times h$$

উদাহৰণ 6 ৰ তথ্যখিনি লোৱা যাওক আৰু পৰ্য্যায় বিচ্যুতি পদ্ধতিৰে গড় বিচ্যুতি উলিওৱা হওঁক।

গৃহীত মাধ্য $a = 45$ আৰু $h = 10$ লৈ তলৰ সাৰণীখন (সাৰণী 15.5) খন প্ৰস্তুত কৰা হ'ল।

সাৰণী 15.5

প্ৰাপ্ত নম্বৰ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা	মধ্যবিন্দু	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
10 - 20	2	15	-3	-6	30	60
20 - 30	3	25	-2	-6	20	60
30 - 40	8	35	-1	-8	10	80
40 - 50	14	45	0	0	0	0
50 - 60	8	55	1	8	10	80
60 - 70	3	65	2	6	20	60
70 - 80	2	75	3	6	30	60
	40			0		400

গতিকে,
$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i d_i}{N} \times h$$

$$= 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

আৰু
$$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{7} f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert = \frac{400}{40} = 10$$

টোকা পৰ্য্যায় বিচ্যুতি পদ্ধতিটো $\bar{x}$ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ প্ৰয়োগ কৰা হয়। পদ্ধতিটোৰ বাকীখিনি একে ধৰণৰ।

(ii) মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি (Mean deviation about median) অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাৰ পদ্ধতিটো মাধ্যৰপৰা গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাৰ নিচিনা। কেৱল বিচ্যুতি লোৱাৰ ক্ষেত্ৰত

মাধ্যৰ ঠাইত মধ্যমা লোৱাটোৱেই একমাত্ৰ পাৰ্থক্য।

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে মধ্যমা উলিওৱাৰ পদ্ধতিটো আমি মনত পেলাওঁহক।

তথ্যখিনিক প্ৰথমতে উৰ্দ্ধক্ৰমত সজাই লোৱা হয়। তাৰ পিছত অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ সেই শ্ৰেণীটো (মধ্যমা শ্ৰেণী) চিহ্নিত কৰা হয় য'ত মধ্যমাটো অৱস্থিত আৰু তলৰ সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰি মধ্যমাটো উলিওৱা হয়ঃ

$$\text{মধ্যমা} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

য'ত মধ্যমা শ্ৰেণীটো হ'ল সেই শ্ৰেণীটো, যাৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা ঠিক $\frac{N}{2}$ তকৈ ডাঙৰ বা সমান, N বাৰংবাৰতা বোৰৰ সমষ্টি, $l,\ f,\ h$ ক্ৰমে মধ্যমা শ্ৰেণীৰ নিম্ন সীমা, বাৰংবাৰতা, দীঘ আৰু C হ'ল মধ্যমা শ্ৰেণীৰ আগৰ শ্ৰেণীটোৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা। মধ্যমা উলিওৱাৰ পিছত মধ্যমাৰপৰা প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ মধ্যবিন্দু x_i ৰ বিচ্যুতিৰ পৰম মান $|x_i - M|$ উলিওৱা হয়।

গতিকে $$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i|x_i - M|$$

তলৰ উদাহৰণটোৰ সহায়ত এই পদ্ধতিটো ব্যাখ্যা কৰি দেখুওৱা হ'ল।

উদাহৰণ 7

তলত উল্লেখ কৰা তথ্যৰ বাবে মধ্যমাৰ পৰা গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

শ্ৰেণী	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 -40	40 - 50	50 - 60
বাৰংবাৰতা	6	7	15	16	4	2

সমাধান প্ৰদত্ত তথ্যৰ সহায়ত নিম্নোক্ত সাৰণী খন (সাৰণী 15.6) প্ৰস্তুত কৰা হ'ল।

সাৰণী 15.6

শ্ৰেণী	বাৰংবাৰতা	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা	মধ্যবিন্দু x_i	$\lvert x_i - \text{মধ্যমা}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \text{মধ্যমা}\rvert$
0 - 10	6	6	5	23	138
10 - 20	7	13	15	13	91
20 - 30	15	28	25	3	45
30 - 40	16	44	35	7	112
40 - 50	4	48	45	17	68
50 - 60	2	50	55	27	54
	50				508

সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা $\frac{N}{2}$ অৰ্থাৎ 25 ৰ বিপৰীতে শ্ৰেণী অন্তৰালটো হ'ল 20-30. গতিকে মধ্যমা শ্ৰেণীটো হ'ল 20-30.

আমি জানো যে

$$\text{মধ্যমা} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

ইয়াত, $l = 20$, $C = 13$, $f = 15$, $h = 10$ আৰু $N=50$

গতিকে, $$\text{মধ্যমা} = 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$$

এইদৰে, মধ্যমাৰূপৰা গড় বিচ্যুতি হ'ব

$$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16$$

অনুশীলনী 15.1

অনুশীলনী 1 আৰু 2 ত উল্লেখ কৰা তথ্যৰ বাবে মাধ্যৰপৰা গড় বিচ্যুতি উলিওৱাঁ।

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13 ,17
2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

অনুশীলনী 3 আৰু 4 ত উল্লেখ কৰা তথ্যৰ বাবে মধ্যমাৰূপৰা গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17
4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

অনুশীলনী 5 আৰু 6 ত দিয়া তথ্যৰ বাবে মাধ্যৰপৰা গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

অনুশীলনী 7 আৰু 8 ত দিয়া তথ্যৰ বাবে মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি উলিওৱাঁ।

7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

অনুশীলনী 9 আৰু 10 ত দিয়া তথ্যৰ বাবে মাধ্যৰপৰা গড় বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

9.

প্ৰতিদিনৰ আয় ঃ	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
ব্যক্তিৰ সংখ্যা ঃ	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

উচ্চতাঃ (ছেমিত)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
ল'ৰাৰ সংখ্যাঃ	9	13	26	30	12	10

11. নিম্নোক্ত তথ্যৰ বাবে মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি উলিওৱাঃ

মূল্যাংক ঃ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ছোৱালীৰ সংখ্যা ঃ	6	8	14	16	4	2

12. নিম্নোক্ত 100 গৰাকী ব্যক্তিৰ বয়সৰ বিতৰণৰ বাবে মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি উলিওৱাঁঃ

বয়স ঃ	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
সংখ্যাঃ	5	6	12	14	26	12	16	9

[**ইংগিত ঃ** প্ৰদত্ত তথ্যক অবিছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনলৈ ৰূপান্তৰ কৰাৰ বাবে প্ৰতিটো শ্ৰেণী অন্তৰালৰ নিম্নসীমাৰ পৰা 0.5 বিয়োগ কৰাঁ আৰু উচ্চ সীমাৰ লগত 0.5 যোগ কৰাঁ।]

15.4.3 *গড় বিচ্যুতিৰ সীমাবদ্ধতা (Limitations of mean deviation)*

তথ্য শ্ৰেণী এটাৰ পৰিৱৰ্তনশীলতাৰ মাত্ৰা উচ্চ খাপৰ হ'লে মধ্যমাই কেন্দ্ৰীয় প্ৰৱণতাক প্ৰতিনিধিত্ব নকৰে। গতিকে, এনে শ্ৰেণীৰ বাবে গণনা কৰি উলিওৱা মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতিৰ ওপৰত সম্পূৰ্ণভাৱে নিৰ্ভৰ কৰিব নোৱাৰি।

মাধ্যৰ পৰা বিচ্যুতিৰ সমষ্টি (ঋণাত্মক চিন ব্যতিৰেকে) মধ্যমাৰ পৰা বিচ্যুতিৰ সমষ্টিতকৈ অধিক। সেইবাবে, মাধ্যৰ পৰা গড় বিচ্যুতি বৰ বিজ্ঞানসন্মত নহয়। এইদৰে, গড় বিচ্যুতিয়ে বহু ক্ষেত্ৰত সন্তোষজনক ফল নিদিব পাৰে। আকৌ, গড় বিচ্যুতি গণনা কৰা হয় বিচ্যুতিসমূহৰ পৰম মানৰ ভেটিত, সেয়েহে ইয়াক বীজগণিতীয়ভাৱে পুনঃব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰি। এই কথাই এইটোকে সূচায় যে বিক্ষেপণৰ বাবে আমাৰ অন্যান্য জোখো থাকিব লাগিব। প্ৰামাণিক বা মানক বিচ্যুতি (Standard deviation) হ'ল বিক্ষেপণৰ এনে এক জোখ।

15.5 প্ৰসৰণ আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি (Variance and Standard deviation)

স্মৰণ কৰোঁ যে মাধ্য অথবা মধ্যমাৰপৰা গড় বিচ্যুতি গণনা কৰোঁতে বিচ্যুতিসমূহৰ পৰম মান লোৱা হৈছিল। গড় বিচ্যুতিক অৰ্থপূৰ্ণ কৰাৰ বাবেই পৰম মানবোৰ লোৱা হৈছিল। অন্যথাই, বিচ্যুতিসমূহ নিজৰ ভিতৰতে কটাকটি গৈ নোহোৱা হ'ব পাৰে।

বিচ্যুতি সমূহৰ চিনৰ (ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক) বাবে সৃষ্টি হোৱা এই অসুবিধা বৰ্গীকৰণৰ দ্বাৰা এৰাই চলিব পাৰি। স্পষ্টভাৱে বিচ্যুতিৰ এই সকলো বৰ্গই অঋণাত্মক। ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ n টা পৰ্য্যবেক্ষণ আৰু $\bar{x}$ সিহঁতৰ মাধ্য। তেতিয়া

$$(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+(x_n-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

যদি উক্ত সমষ্টিটো শূন্য হয় তেন্তে প্ৰত্যেক $(x_1-\bar{x})$ৰ মান শূন্য হ'ব লাগিব। ইয়াৰ অৰ্থ হব প্ৰতিটো পৰ্য্যবেক্ষণ মাধ্য $\bar{x}$ ৰ সমান হ'ব অৰ্থাৎ তাত কোনো বিচ্যুতি নাথাকিব।

যদি $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ৰ মান ক্ষুদ্ৰ হয় তেন্তে $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ পৰ্য্যবেক্ষণবোৰ মাধ্য $\bar{x}$ ৰ ওচৰত থাকে আৰু সেইবাবে বিচ্যুতিৰ মাত্ৰা নিম্ন পৰ্য্যায়ৰ হয়। বিপৰীতক্ৰমে, সমষ্টিটোৰ মান বৃহৎ হ'লে মাধ্য $\bar{x}$ ৰ পৰা পৰ্য্যবেক্ষণসমূহৰ বিচ্যুতিৰ মাত্ৰা উচ্চ পৰ্য্যায়ৰ হয়।

গতিকে $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ সমষ্টিটো বিক্ষেপণ বা সিঁচৰতিৰ মাত্ৰা নিৰ্ণয়কাৰী যুক্তিযুক্ত সূচক বুলি গণ্য কৰিব পৰা যায় নেকি?

ছয়টা পৰ্যবেক্ষণ 5, 15, 25, 35, 45, 55 সম্বলিত A সংহতিটো বিবেচনা কৰা যাওক। পৰ্য্যবেক্ষণবোৰৰ মাধ্য

হ'ল $\bar{x}=30$. সংহতিটোৰ বাবে $\bar{x}$ ৰ পৰা বিচ্যুতিৰ বৰ্গসমূহৰ সমষ্টি হ'ল

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=(5-30)^2+(15-30)^2+(25-30)^2+(35-30)^2+(45-30)^2+(55-30)^2$$

$$=625+225+25+25+225+625=1750$$

31 টা পৰ্য্যবেক্ষণ 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 সম্বলিত অন্য এটা সংহতি B লোৱা হওক। এই পৰ্য্যবেক্ষণবোৰৰ মাধ্য হ'ল $\bar{y}=30$.

লক্ষ্য কৰোঁ যে দুয়োটা সংহতিৰ বাবে মাধ্য একেই অৰ্থাৎ 30

এতিয়া সংহতি B ৰ বাবে মাধ্য $\bar{y}$ ৰ পৰা পৰ্য্যবেক্ষণসমূহৰ বিচ্যুতিৰ বৰ্গৰ সমষ্টি হ'ল

$$\sum_{i=1}^{31}(y_i-\bar{y})^2=(15-30)^2+(16-30)^2+(17-30)^2+\ldots+(44-30)^2+(45-30)^2$$

$$=(-15)^2+(-14)^2+\ldots+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+14^2+15^2$$

$$=2[15^2+14^2+\ldots+1^2]$$

$$=2\times\frac{15\times(15+1)(30+1)}{6}=5\times16\times31=2480$$

[যিহেতু প্ৰথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গৰ সমষ্টি $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, য'ত $n=15$]

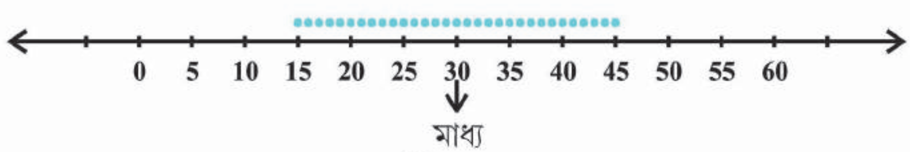
যদি $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ কেই সৰলভাৱে মাধ্যৰপৰা বিক্ষেপণ বা সিঁচৰতিৰ জোখ হিচাপে লোৱা হয়, তেন্তে আমি কব পাৰোঁ যে সংহতি A ৰ ছয়টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ ক্ষেত্ৰত মাধ্যৰপৰা বিচ্যুতি সংহতি B ৰ 31 টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্যৰপৰা বিচ্যুতিতকৈ কম, যদিও দেখা যায়যে সংহতি B ৰ পৰ্য্যবেক্ষণবোৰৰ মাধ্যৰপৰা সিঁচৰতিতকৈ (য'ত বিচ্যুতিৰ পৰিসৰ 15ৰ পৰা 15 লৈ) সংহতি A ৰ ছয়টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্যৰ পৰা সিঁচৰতি (য'ত বিচ্যুতিৰ পৰিসৰ 15ৰ পৰা 15লৈকে) অধিক।

তলৰ চিত্ৰৰপৰা এই কথাটো স্পষ্টভাৱে বুজা যায়।

সংহতি A ৰ বাবে আমি পাওঁ

চিত্ৰ 15.5

সংহতি B ৰ বাবে আমি পাওঁ



চিত্ৰ 15.6

এইদৰে, আমি ক'ব পাৰোঁ যে মাধ্যৰপৰা বিচ্যুতিৰ বৰ্গৰ সমষ্টি বিক্ষেপণৰ উপযুক্ত মাপ নহয়। এই অসুবিধা দূৰ কৰাৰ বাবে বিচ্যুতিৰ বৰ্গসমূহৰ গড় অৰ্থাৎ $\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ লোৱা হয়। সংহতি A ৰ ক্ষেত্ৰত, আমি পাওঁ

গড় $= \frac{1}{6} \times 1750 = 291.67$ আৰু সংহতি B ৰ ক্ষেত্ৰত এই মানটো হ'ল $\frac{1}{31} \times 2480 = 80.$

এইটোৱে সূচায় যে সংহতি A ৰ ক্ষেত্ৰত সিঁচৰতি বা বিক্ষেপণ সংহতি B ৰ সিঁচৰতি বা বিক্ষেপণতকৈ অধিক যিয়ে সংহতি দুটাৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যাক নিশ্চিত কৰে।

এইদৰে, আমি $\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2$ক এনে এটা পৰিমাণ হিচাপে বিবেচনা কৰিব পাৰোঁ যাক বিক্ষেপণৰ এক উপযুক্ত মাপ নিৰ্দ্ধাৰণৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।

এইদৰে, $\frac{1}{\text{N}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$ ৰাশিটোৱে আমাক বিক্ষেপণ বা সিঁচৰতিৰ উপযুক্ত মাপ নিৰ্দ্ধাৰণৰ পিনে লৈ যায়। এই সংখ্যাটোক অৰ্থাৎ, মাধ্যৰপৰা বিচ্যুতিৰ বৰ্গৰ গড়টোক প্ৰসৰণ (Variance) বোলা হয় আৰু ইয়াক σ^2 (চিগমাৰ বৰ্গ) ৰে নিৰ্দেশ কৰা হয়। সেইবাবে, n টা পৰ্য্যবেক্ষণ $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ ৰ প্ৰসৰণ মানে হ'ল

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

15.5.1 *প্ৰামাণিক বিচ্যুতি (Standard deviation)* প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰোঁতে আমি দেখিলোঁ যে গাইগুটীয়াভাৱে প্ৰতিটো পৰ্য্যৱেক্ষণ অথবা সিহঁতৰ গড়ৰ একক প্ৰসৰণৰ এককৰ পৰা পৃথক, কাৰণ প্ৰসৰণত $(x_i-\bar{x})$ ৰ বৰ্গফল সমূহৰ সমষ্টি জড়িত থাকে। এইবাবে পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্যৰ পৰা বিক্ষেপণৰ সঠিক জোখ পাবলৈ প্ৰসৰণৰ ধনাত্মক বৰ্গমূল লোৱা হয় আৰু ইয়াকে মানক বিচ্যুতি বা প্ৰামাণিক বিচ্যুতি বোলা হয়। সেয়েহে, প্ৰামাণিক বিচ্যুতিক σ ৰে নিৰ্দেশ কৰি এইদৰে প্ৰকাশ কৰা হয়ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad \ldots(1)$$

অবৰ্গীকৃত তথ্যৰ বাবে প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় আৰু ইয়াৰ সহায়ত প্ৰামাণিক বিচ্যুতি উলিওৱাৰ পদ্ধতি সম্পৰ্কে নিম্নোক্ত উদাহৰণৰ সহায়ত ব্যাখ্যা কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 8 নিম্নোক্ত তথ্যৰ বাবে প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

সমাধান প্ৰদত্ত তথ্যৰপৰা আমি তলৰ সাৰণীখন (সাৰণী 15.7) প্ৰস্তুত কৰিব পাৰোঁ। গৃহীত মাধ্য 14 ধৰি পৰ্য্যায় বিচ্যুতি পদ্ধতিৰে মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা হৈছে। পৰ্য্যবেক্ষণৰ সংখ্যা হ'ল $n = 10$

সাৰণী 15.7

x_i	$d_i = \frac{x_i - 14}{2}$	মাধ্যৰপৰা বিচ্যুতি $x_i - \bar{x}$	$x_i - \bar{x}$
6	– 4	– 9	81
8	– 3	– 7	49
10	– 2	– 5	25
12	– 1	– 3	9
14	0	– 1	1
16	1	1	1
18	2	3	9
20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

সেয়েহে, মাধ্য $\bar{x}$ = গৃহীত মাধ্য $+ \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \times h = 14 + \frac{5}{10} \times 2 = 15$

আৰু প্ৰসৰণ $(\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} \times 330 = 33$

এইদৰে, প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $(\sigma) = \sqrt{33} = 5.74$

15.5.2 *বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে প্ৰামাণিক বিচ্যুতি (Standard deviation of a discrete frequency distribution)*

ধৰা হ'ল, প্ৰদত্ত বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনটো

$$x: \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$$

$$f: \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, f_n$$

এই ক্ষেত্ৰত, প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}$ ... (2)

য'ত $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

নিম্নোক্ত উদাহৰণটো বিবেচনা কৰা যাওক ঃ

উদাহৰণ 9 নিম্নোক্ত তথ্যৰ বাবে প্ৰসৰণ আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি উলিওৱাঁ

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

সমাধান তথ্যখিনি সাৰণীৰ ৰূপত (সাৰণী 15.8) প্ৰদৰ্শন কৰি আমি পাওঁ-

সাৰণী-15.8

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	−10	100	300
8	5	40	−6	36	180
11	9	99	−3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$N = 30, \ \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 420, \ \sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2 = 1374$$

সেয়েহে, $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N} = \dfrac{1}{30} \times 420 = 14$

গতিকে, প্ৰসৰণ $(\sigma^2) = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$$

আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $(\sigma) = \sqrt{45.8} = 6.77$

15.5.3 ***অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে প্ৰামাণিক বিচ্যুতি (Standard deviation of a continuous frequency distribution)*** প্ৰদত্ত অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ প্ৰতিটো শ্ৰেণীক ইয়াৰ মধ্যবিন্দুৰে প্ৰকাশ কৰি ইয়াক আমি বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ৰূপত প্ৰদৰ্শন কৰিব পাৰোঁ। তেতিয়া বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত অৱলম্বন কৰা কৌশলেৰে প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

যদি কোনো বাৰংবাৰতা বিভাজনত n টা শ্ৰেণী (class) আছে আৰু প্ৰতিটো শ্ৰেণীক তাৰ মধ্যবিন্দু x_i ৰে সূচোৱা হয় যাৰ বাৰংবাৰতা হ'ল f_i তেন্তে প্ৰামাণিক বিচ্যুতি উলিওৱাৰ বাবে সূত্ৰটো হ'লঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i-1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

য'ত $\bar{x}$ হ'ল বিভাজনটোৰ মাধ্য আৰু $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয়ৰ অন্য সূত্ৰ (Another formula for standard deviation)

আমি জানো যে

প্ৰসৰণ $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\,x_i)$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 f_i - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x}\, f_i x_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right]$$

$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 N - 2\bar{x}.N\bar{x}\right]$ $\left[\text{ইয়াত } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \bar{x} \text{ নাইবা} = \sum_{i-1}^{n} f_i x_i = N\bar{x}\right]$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

বা, $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\left[N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2\right]$

এইদৰে প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}$ ..... (3)

উদাহৰণ 10 তলত দিয়া বিভাজনৰ বাবে মাধ্য, প্ৰসৰণ আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি উলিওৱাঁ।

শ্ৰেণী	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
বাৰংবাৰতা	3	7	12	15	8	3	2

সমাধান প্ৰদত্ত তথ্যৰপৰা তলত দিয়া সাৰণীখন (সাৰণী 15.9) প্ৰস্তুত কৰা হ'লঃ

সাৰণী 15.9

শ্ৰেণী	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
30-40	3	35	105	729	2187
40-50	7	45	315	289	2023
50-60	12	55	660	49	588
60-70	15	65	975	9	135
70-80	8	75	600	169	1352
80-90	3	85	255	529	1587
90-100	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10050

মাধ্য $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$

প্ৰসৰণ $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{50} \times 10050 = 201$$

আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.18$

উদাহৰণ 11

তলত দিয়া তথ্যৰ বাবে প্ৰামাণিক বিচ্যুতি উলিওৱাঁ।

x_i	3	8	13	18	23
f_i	7	10	15	10	6

সমাধান তলত দিয়া সাৰণীখন (সাৰণী 15.10) প্ৰস্তুত কৰা যাওক

সাৰণী 15.10

x_i	f_i	$x_i\ f_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
3	7	21	9	63
8	10	80	64	640
13	15	195	169	2535
18	10	180	324	3240
23	6	138	529	3174
	48	614		9652

এতিয়া সূত্ৰ (3) ৰপৰা আমি পাওঁ

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{48 \times 9652 - (614)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296 - 376996}$$

$$= \frac{1}{48} \times 293.77 = 6.12$$

সেয়েহে, প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $(\sigma) = 6.12$

15.5.4 *প্ৰসৰণ আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয়ৰ চমু পদ্ধতি (Short cut method to find variance and standard deviation)* কেতিয়াবা বিচ্ছিন্ন বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত x_i ৰ মানবোৰ নাইবা অবিচ্ছিন্ন বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত বিভিন্ন শ্ৰেণী অন্তৰালৰ মধ্যবিন্দু x_i ৰ মানবোৰ বৃহৎ আকাৰৰ হয় আৰু সেয়েহে মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ গণনা কৰি উলিওৱাটো যথেষ্ট আমনিদায়ক আৰু দীৰ্ঘ সময় সাপেক্ষ হয়। তেনে ক্ষেত্ৰত পৰ্য্যায়-বিচ্যুতি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি উক্ত প্ৰক্ৰিয়াৰ সৰলীকৰণ সম্ভৱ হয়।

ধৰা হ'ল, গৃহীত মাধ্য A আৰু জোখৰ আকাৰ $\frac{1}{h}$ গুণে হ্ৰাস কৰা হৈছে (য'ত h হ'ল শ্ৰেণী অন্তৰালৰ দৈৰ্ঘ্য)। ধৰা হ'ল, পৰ্য্যায় বিচ্যুতি বা নতুন মানবোৰ y_i ৰে সূচোৱা হৈছে

অৰ্থাৎ, $$y_i = \frac{x_i - \text{A}}{h} \text{ বা } x_i = \text{A} + hy_i \quad ...(1)$$

আমি জানো যে $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\text{N}} \quad ...(2)$$

(1) ৰ x_i পৰা ৰ মান (2) ত বহুৱাই আমি পাওঁ -

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(\text{A} + hy_i)}{\text{N}}$$

$$= \frac{1}{\text{N}}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\text{A} + \sum_{i=1}^{n} h f_i y_i\right) = \frac{1}{\text{N}}\left(\text{A}\sum_{i=1}^{n} f_i + h\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

$$= \text{A}.\frac{\text{N}}{\text{N}} + h.\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{\text{N}} \left(\text{কাৰণ } \sum_{i=1}^{n} f_i = \text{N}\right)$$

এইদৰে, $$\bar{x} = \text{A} + h\bar{y} \quad (3)$$

এতিয়া, চলক x ৰ প্ৰসৰণ, $$\sigma_x^{\,2} = \frac{1}{\text{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{\text{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i(\text{A} + hy_i - \text{A} - h\bar{y})^2 \quad \text{((1) আৰু (3) ৰ পৰা)}$$

$$= \frac{1}{\text{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i h^2(h_i - \bar{y})^2$$

$$= \frac{h^2}{\text{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i(y_i - \bar{y})^2 = h^2. \text{ (চলক } y_i \text{ ৰ প্ৰসৰণ)}$$

অৰ্থাৎ, $$\sigma_x^{\,2} = h^2\sigma_y^{\,2}$$

বা $$\sigma_x = h\sigma_y \quad ...(4)$$

বা $$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \quad \ldots (5)$$

(15.5.3 ৰ সূত্ৰ (3) প্ৰয়োগ কৰি)

উদাহৰণ 12 তলত দিয়া বিভাজনৰ বাবে মাধ্য, প্ৰসৰণ আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰা।

শ্ৰেণী	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
বাৰংবাৰতা	3	7	12	15	8	3	2

সমাধান

ধৰা হ'ল, গৃহীত মাধ্য A = 65

ইয়াত $h = 10$

প্ৰদত্ত তথ্যৰ পৰা আমি তলত দিয়া সাৰণীখন (সাৰণী 15.11) পাওঁ

সাৰণী 15.11

শ্ৰেণী	বাৰংবাৰতা f_i	মধ্যবিন্দু x_i	$y_i = \frac{x_i - 65}{10}$	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
30 - 40	3	35	– 3	9	– 9	27
40 - 50	7	45	– 2	4	– 14	28
50 - 60	12	55	– 1	1	– 12	12
60 - 70	15	65	0	0	0	0
70 - 80	8	75	1	1	8	8
80 - 90	3	85	2	4	6	12
90 - 100	2	95	3	9	6	18
	N = 50				– 15	105

সেয়েহে, $$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$$

প্ৰসৰণ $$(\sigma^2) = \frac{h^2}{N^2}\left[N\sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{(10)^2}{(50)^2}\,[50 \times 105 - (-15)^2]$$

$$= \frac{1}{25}\,[5250 - 225] = 201$$

আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.18$

অনুশীলনী 15.2

অনুশীলনী 1 ৰ পৰা 5লৈ প্ৰতিটোতে উল্লেখ কৰা তথ্যৰ বাবে মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ উলিওৱাঁ।

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12.
2. প্ৰথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যা।
3. 3 ৰ প্ৰথম 10 টা গুণিতক।
4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

6.চমু পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

অনুশীলনী 7 আৰু 8 ত দিয়া বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

7.

শ্ৰেণী	0 - 30	30 - 60	60 - 90	90 - 120	120 - 150	150 - 180	180 - 210
বাৰংবাৰতা	2	3	5	10	3	5	2

8.

শ্ৰেণী	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
বাৰংবাৰতা	5	8	15	16	6

9. চমু পদ্ধতিৰে তলত দিয়া তথ্যৰ বাবে মাধ্য, প্ৰসৰণ আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

ছেমিত উচ্চতা	70 - 75	75 - 80	80 - 85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
শিশুৰ সংখ্যা	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. তলত দিয়া তথ্যত কোনো এক নক্সাৰ বাবে অঁকা বৃত্তৰ ব্যাসবোৰ (মিমিত) দিয়া আছে।

ব্যাস	33 - 36	37 - 40	41 - 44	45 - 48	49 - 52
বৃত্তৰ সংখ্যা	15	17	21	22	25

বৃত্তবোৰৰ গড় ব্যাস আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

[ইংগিতঃ তথ্যখিনি অবিচ্ছিন্ন ৰূপত প্ৰকাশ কৰাৰ বাবে শ্ৰেণীসমূহ ক্ৰমে 32.5 - 36.5, 36.5 - 40.5, 40.5 - 44.5, 44.5 - 48.5, 48.5 - 52.5 লৈ সলনি কৰোঁ আৰু তাৰ পিছত পৰৱৰ্তী পৰ্যায়লৈ আগবাঢ়োঁ।]

15.6 বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বিশ্লেষণ (Analysis of Frequency Distributions)

আগৰ পৰিচ্ছেদ সমূহত আমি বিক্ষেপণৰ কেইটামান প্ৰকাৰ সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰি আহিছোঁ। গড় বিচ্যুতি আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতিৰ একক তথ্যসমূহৰ এককৰ সৈতে একেই থাকে।

গড় একে, কিন্তু বেলেগ বেলেগ এককত জোখ লোৱা দুই ধৰণৰ তথ্যৰ বিচৰণশীলতা তুলনা কৰিবলগীয়া হ'লে আমি কেৱল বিক্ষেপণৰ জোখেই নলওঁ বৰং আমাক এনে জোখৰ প্ৰয়োজন হয় যি এককৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয়। এককৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নোহোৱা বিচৰণশীলতাৰ জোখকে বিচৰণ গুণাংক (Coefficient of Variation) (C. V. ৰ দ্বাৰা সূচিত) বোলা হয়।

বিচৰণ গুণাংকৰ সংজ্ঞা আগ বঢ়োৱা হয় এনেদৰে-

$$\text{C. V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \ \bar{x} \neq 0$$

য'ত σ আৰু $\bar{x}$ ক্ৰমে তথ্যৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি আৰু মাধ্য।

দুবিধ তথ্যৰ বিচৰণশীলতা বা বিক্ষেপণ তুলনা কৰিবলৈ আমি প্ৰতিটোৰ ক্ষেত্ৰত বিচৰণ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰোঁ। যি তথ্যৰ C. V. অধিক তাক আনটোতকৈ অধিক বিচৰণশীল বুলি কোৱা হয়। আনহাতে, যি তথ্যৰ C. V. কম তাক আনটোতকৈ অধিক সামঞ্জস্যপূৰ্ণ (Consistent) বোলা হয়।

15.6.1 *একে মাধ্যবিশিষ্ট দুটা বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ তুলনা (Comparison of two frequency distributions with same mean)*

ধৰা হওক, প্ৰথম বিভাজনৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি ক্ৰমে $\bar{x}_1$ আৰু σ_1. সেইদৰে, ধৰা হওক দ্বিতীয় বিভাজনৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি ক্ৰমে $\bar{x}_2$ আৰু σ_2.

তেতিয়া C. V. (প্ৰথম বিভাজন) = $\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

আৰু C. V. (দ্বিতীয় বিভাজন) = $\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

দিয়া আছে যে, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$ (ধৰা)

গতিকে C. V. (প্ৰথম বিভাজন) = $\frac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100$ ...(1)

আৰু C. V. (দ্বিতীয় বিভাজন) = $\frac{\sigma_2}{\bar{x}} \times 100$ ...(2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা স্পষ্টভাৱে বুজা যায় যে বিচৰণ গুণাংক অৰ্থাৎ C. V. দুটাক কেৱল σ_1 আৰু σ_2 ৰ ভেটিত তুলনা কৰিব পাৰি।

এইদৰে, একে মাধ্যবিশিষ্ট দুবিধ তথ্যৰ বাবে যিবিধৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি (বা প্ৰসৰণ) অধিক তাক কোৱা হয় অধিক বিচৰণশীল বা সিঁচৰতিপূৰ্ণ। আনহাতে যিবিধ তথ্যৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি (বা প্ৰসৰণ) কম তাক কোৱা হয় আন বিধতকৈ অধিক সামঞ্জস্যপূৰ্ণ।

এতিয়া আমি তলত দিয়া উদাহৰণবোৰ বিবেচনা কৰোঁহক ঃ

উদাহৰণ 13 কোনো শিল্প প্ৰতিষ্ঠানৰ দুটি কাৰখানা (ক) আৰু (খ) ত কৰ্মৰত বনুৱাৰ সংখ্যা আৰু তেওঁলোকে পোৱা মজুৰিৰ হিচাপ এনেধৰণৰ ঃ

	(ক)	(খ)
বনুৱাৰ সংখ্যা	5000	6000
মাহিলি গড় মজুৰি	2500 টকা	2500 টকা
মজুৰিৰ বিভাজনৰ প্ৰসৰণ	81	100

(ক) বা (খ) ৰ ভিতৰত কোনটো কাৰখানাৰ ক্ষেত্ৰত ব্যক্তিগত মজুৰিৰ বিচৰনশীলতা অধিক?

সমাধান কাৰখানা (ক) ৰ ক্ষেত্ৰত মজুৰিৰ বিভাজনৰ প্ৰসৰণ হ'ল (σ_1^2) = 81। গতিকে, কাৰখানা (ক) ৰ বাবে মজুৰিৰ বিভাজনৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $\sigma_1 = 9$. আকৌ, কাৰখানা (খ) ৰ বাবে মজুৰিৰ বিভাজনৰ প্ৰসৰণ (σ_2^2) = 100। গতিকে, কাৰখানা (খ) ৰ বাবে মজুৰি বিভাজনৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $\sigma_2 = 10$

যিহেতু দুয়োটা কাৰখানাৰ ক্ষেত্ৰত মাহিলি মজুৰিৰ গড় একে অৰ্থাৎ 2500 টকা, সেয়েহে প্ৰামাণিক বিচ্যুতি অধিক হোৱা কাৰখানাৰ বিচৰণশীলতা অধিক। এইদৰে, কাৰখানা (খ) ৰ ক্ষেত্ৰত ব্যক্তিগত মজুৰিৰ বিচৰণশীলতা অধিক।

উদাহৰণ 14 দুটা বিভাজনৰ বিচৰণ গুণাংক 60 আৰু 70 আৰু সিহঁতৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি ক্ৰমে 21 আৰু 16। সিহঁতৰ সমান্তৰ মাধ্যবোৰ কিমান?

সমাধান দিয়া আছে যে বিচৰণ গুনাংক (C. V.) (প্ৰথম বিভাজন) = 60, $\sigma_1 = 21$

বিচৰণ গুনাংক (C. V.) (দ্বিতীয় বিভাজন) = 70, $\sigma_2 = 16$

ধৰা হ'ল, প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় বিভাজনৰ মাধ্যবোৰ ক্ৰমে $\bar{x}_1$ আৰু $\bar{x}_2$. তেতিয়া,

$$\text{বিচৰণ গুনাংক (C. V.) (প্ৰথম বিভাজন)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

গতিকে $$60 = \frac{21}{\bar{x}_1} \times 100$$

বা $$\bar{x}_1 = \frac{21}{60} \times 100 = 35$$

আৰু $$\text{বিচৰণ গুণাংক (C. V.) (দ্বিতীয় বিভাজন)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$$

অৰ্থাৎ $$70 = \frac{16}{\bar{x}_2} \times 100$$

বা $$\bar{x}_2 = \frac{16}{70} \times 100 = 22.85$$

উদাহৰণ 15 একাদশ শ্ৰেণীৰ এটা শাখাৰ শিক্ষাৰ্থীসকলৰ উচ্চতা আৰু ওজন সম্পৰ্কীয় মাপ এনে ধৰণৰ ঃ

	উচ্চতা	ওজন
মাধ্য	162.6 ছেমি	52.36 কিগ্ৰা
প্ৰসৰণ	127.69 বৰ্গ ছেমি	23.1361 বৰ্গ কিগ্ৰা

উচ্চতাতকৈ ওজনৰ বিচৰণশীলতা অধিক বুলি আমি ক'ব পাৰিমনে?

সমাধান বিচৰণশীলতাৰ তুলনা কৰিবলৈ হ'লে আমি সিহঁতৰ বিচৰণ গুণাংক উলিয়াব লাগিব।

দিয়া আছে যে, উচ্চতাৰ প্ৰসৰণ = 127.69 বৰ্গ ছেমি

সেইবাবে, উচ্চতাৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি = $\sqrt{127.69}$ ছেমি = 11.3 ছেমি

আকৌ, ওজনৰ প্ৰসৰণ = 23.1361 বৰ্গ কিগ্ৰা

সেইবাবে, ওজনৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি = $\sqrt{23.1361}$ কিগ্ৰা = 4.81 কিগ্ৰা

এতিয়া বিচৰণ গুণাংকবোৰ এনেধৰণৰ হ'বঃ

$$\text{উচ্চতাৰ বিচৰণ গুণাংক (C. V)} = \frac{\text{প্ৰামাণিক বিচ্যুতি}}{\text{মাধ্য}} \times 100$$

$$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$$

আৰু $$\text{ওজনৰ বিচৰণ গুণাংক (C.V)} = \frac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$$

স্পষ্টভাৱে, ওজনৰ বিচৰণ গুণাংক উচ্চতাৰ বিচৰণ গুণাংকতকৈ অধিক। সেইবাবে, আমি ক'ব পাৰোঁ যে ওজনে উচ্চতাতকৈ অধিক বিচৰণশীলতা দেখুৱায়।

অনুশীলনী 15.3

1. তলত দিয়া তথ্যৰ পৰা (ক) নাইবা (খ) কোনটো শাখা বেচি বিচৰণশীল উল্লেখ কৰাঁ।

মূল্যাংক	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
শাখা (ক)	9	17	32	33	40	10	9
শাখা (খ)	10	20	30	25	43	15	7

2. তলত দিয়া অংশ (Shares) X আৰু Y ৰ পৰা কোনটো অংশ মানৰ ক্ষেত্ৰত অধিক সুস্থিৰ (Stable) নিৰ্ণয় কৰাঁ।

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

3. একেটা উদ্যোগৰ অন্তৰ্গত দুখন পাম (ক) আৰু (খ) ৰ বনুৱা সকলক দিয়া মাহিলি মজুৰি বিশ্লেষণ কৰাত তলত দিয়া তথ্য পোৱা গ'ল

	পাম (ক)	পাম (খ)
মজুৰি প্ৰাপ্তৰ সংখ্যা	586	648
মাহিলি মজুৰিৰ গড়	5253টকা	5253টকা
মজুৰি বিভাজনৰ প্ৰসৰণ	100	121

(i) পাম (ক) বা (খ) ৰ ভিতৰত কোনে মাহিলি মজুৰিৰ নামত অধিক ধন পৰিশোধ কৰে?

(ii) জনমূৰি মজুৰিৰ ক্ষেত্ৰত (ক) নাইবা (খ), কোনখন পামৰ বিচৰণশীলতা অধিক?

4. এখন ফুটবল প্ৰতিযোগিতাত (ক) দলে খেল অনুযায়ী স্ক'ৰ কৰা 'গ'ল' তলত দিয়া ধৰণে দেখুওৱা হৈছে

স্ক'ৰ কৰা সংখ্যা	0	1	2	3	4
খেলৰ সংখ্যা	1	9	7	5	3

(খ) দলৰ ক্ষেত্ৰত খেল প্ৰতি স্ক'ৰ কৰা 'গ'ল' ৰ গড় 2 আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি 1.25। কোন দলৰ পাৰদৰ্শিতা অধিক সামঞ্জস্যপূৰ্ণ?

5. 50 বিধ বনজ সামগ্ৰীৰ দীঘ x (ছেমিত) আৰু ওজন y (গ্ৰামত) ৰ সমষ্টি আৰু বৰ্গৰ সমষ্টি এনে ধৰণৰ-

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212,\ \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8,\ \sum_{i=1}^{50} y_i = 261,\ \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

কোনটো অধিক বিচৰণশীল, দীঘ নে ওজন?

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 16 20 টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ প্ৰসৰণ হ'ল 5। যদি প্ৰতিটো পৰ্য্যবেক্ষণকে 2 ৰে গুণ কৰা হয় তেন্তে প্ৰাপ্ত ফলবোৰৰ নতুন প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল, পৰ্য্যবেক্ষণবোৰ ক্ৰমে $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_{20}$ আৰু $\bar{x}$ সিহঁতৰ মাধ্য। দিয়া আছে যে প্ৰসৰণ = 5 আৰু $n = 20$. আমি জানো যে

$$\text{প্ৰসৰণ } (\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2,\ \text{অৰ্থাৎ } 5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$$

বা, $$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 100 \qquad \ldots (1)$$

যদি প্ৰতিটো পৰ্য্যবেক্ষণকে 2 ৰে গুণ কৰা হয় আৰু প্ৰাপ্ত পৰ্য্যবেক্ষণবোৰ y_i হয়, তেতিয়া

$$y_i = 2x_i \quad \text{অৰ্থাৎ} \quad x_i = \frac{1}{2}y_i$$

সেইবাবে, $$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2 \cdot \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

অৰ্থাৎ $$\bar{y} = 2\bar{x} \quad \text{বা} \quad \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$$

x_i আৰু $\bar{x}$ ৰ মান (1) ত বহুৱাই, আমি পাওঁ

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\bar{y}\right)^2 = 100 \quad \text{বা} \quad \sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})^2 = 400$$

এইদৰে, নতুন পৰ্য্যবেক্ষণৰ প্ৰসৰণ = $\times 400 = 20 = 2^2 \times 5$

> **টোকা** পঢ়ুৱৈসকলে হয়তো লক্ষ্য কৰিছে যে যদি প্ৰতিটো পৰ্য্যবেক্ষণক কোনো ধ্ৰুৱক k ৰে গুণ কৰা হয়, তেন্তে পৰিবৰ্তিত (প্ৰাপ্ত) পৰ্য্যবেক্ষণৰ প্ৰসৰণৰ মান মূল প্ৰসৰণৰ k^2 গুণৰ সমান হয়।

উদাহৰণ 17 5 টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্য 4.4 আৰু সিহঁতৰ প্ৰসৰণ 8.24। যদি পৰ্য্যবেক্ষণবোৰৰ তিনিটাৰ মান 1, 2 আৰু 6, আন দুটা পৰ্য্যবেক্ষণ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল, আন দুটা পৰ্য্যবেক্ষণ ক্ৰমে x আৰু y

সেইবাবে পৰ্য্যবেক্ষণৰ শ্ৰেণীটো হ'ল 1, 2, 6, x, y

এতিয়া মাধ্য $= \bar{x} = 4.4 = \dfrac{1+2+6+x+y}{5}$

বা $22 = 9 + x + y$

অৰ্থাৎ $x + y = 13$ ... (1)

আকৌ প্ৰসৰণ $= 8.24 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$

অৰ্থাৎ, $8.24 = \dfrac{1}{5}\left[(3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 2 \times 4.4(x + y) + 2 \times (4.4)^2\right]$

বা $41.20 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8 \times 13 + 38.72$

সেইবাবে $x^2 + y^2 = 97$ ... (2)

কিন্তু (1) ৰ পৰা আমি পাওঁ

$x^2 + y^2 + 2xy = 169$ ... (3)

(2) আৰু (3) ৰ পৰা পাওঁ

$2xy = 72$ ... (4)

(2) ৰ পৰা (4) বিয়োগ কৰি পাওঁ

$x^2 + y^2 - 2xy = 97 - 72$

বা $(x - y)^2 = 25$

বা $x - y = \pm 5$ ... (5)

সেয়েহে (1) আৰু (5) ৰ পৰা পাওঁ

$x = 9, y = 4$ যেতিয়া $x - y = 5$

বা $x = 4, y = 9$ যেতিয়া $x - y = -5$

এইদৰে আন দুটা পৰ্য্যবেক্ষণ হ'ল 4 আৰু 9.

উদাহৰণ 18 যদি $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ পৰ্য্যবেক্ষণৰ প্ৰতিটোকে 'a' ৰে বৃদ্ধি কৰা হয় য'ত a ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা, তেন্তে দেখুওৱাঁ যে প্ৰসৰণৰ মান অপৰিৱৰ্তিত হৈ থাকে।

সমাধান ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ ৰ মাধ্য $\bar{x}$

তেতিয়া প্ৰসৰণ $= \sigma_1^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

যদি প্ৰতিটো পৰ্য্যবেক্ষণৰ লগত a যোগ কৰা হয়, তেতিয়া নতুন পৰ্য্যবেক্ষণবোৰ হ'ব

$y_i = x_i + a$ ... (1)

ধৰা হ'ল, নতুন পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্য $\bar{y}$ তেতিয়া

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}.na$$

$$= \bar{x} + a \qquad \ldots (2)$$

এইদৰে, নতুন পৰ্য্যবেক্ষণৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰসৰণ হ'ব

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \bar{x} - a)^2 \quad [(1) \text{ আৰু } (2) \text{ পৰা}]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma_1^2$$

গতিকে, নতুন পৰ্য্যবেক্ষণ আৰু মূল পৰ্য্যবেক্ষণৰ প্ৰসৰণ একেই পোৱা গ'ল।

টোকা এইটো মন কৰিব লগীয়া কথা যে প্ৰতিটো পৰ্য্যবেক্ষণৰ লগত কোনো ধনাত্মক সংখ্যা যোগ কৰিলে বা পৰ্য্যবেক্ষণৰপৰা বিয়োগ কৰিলে প্ৰসৰণৰ মানৰ ওপৰত কোনো প্ৰভাৱ নপৰে।

উদাহৰণ 19 ভুলক্ৰমে এজন ছাত্ৰই 100 টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ ভিতৰত এটা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মান 40 ৰ পৰিবৰ্তে 50 লিখাত মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি ক্ৰমে 40 আৰু 5.1 পালে। প্ৰকৃত মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতিৰ মান কি হ'ব?

সমাধান পৰ্য্যবেক্ষণৰ সংখ্যা দিয়া আছে $n = 100$

অশুদ্ধ মাধ্য $\bar{x} = 40$

অশুদ্ধ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি $(\sigma) = 5.1$

আমি জানো যে $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

অৰ্থাৎ, $40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i$ বা $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$

অৰ্থাৎ, পৰ্য্যবেক্ষণৰ অশুদ্ধ সমষ্টি = 4000

গতিকে, পৰ্য্যবেক্ষণৰ শুদ্ধ সমষ্টি = অশুদ্ধ সমষ্টি – 50 + 40

= 4000 – 50 + 40= 3990

অৰ্থাৎ, শুদ্ধ মাধ্য = $\frac{\text{শুদ্ধ সমষ্টি}}{100} = \frac{3990}{100} = 39.9$

আকৌ, প্ৰামাণিক বিচ্যুতি (σ) $= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}$$

অৰ্থাৎ, $5.1 = \sqrt{\frac{1}{100} \times \text{অশুদ্ধ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (40)^2}$

বা $26.01 = \frac{1}{100} \times \text{অশুদ্ধ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1600$

সেইবাবে, অশুদ্ধ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100\,(26.01 + 1600) = 162601$

এতিয়া, শুদ্ধ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 =$ অশুদ্ধ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (50)^2 + (40)^2$

$$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701$$

গতিকে শুদ্ধ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি

$$= \sqrt{\frac{\text{শুদ্ধ}\sum_{i-1}^{n} x_i^2}{n} - (\text{শুদ্ধ মাধ্য})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39.9)^2}$$

$$= \sqrt{1617.01 - 1592.01} = \sqrt{25} = 5$$

পঞ্চদশ অধ্যায়ৰ অনুশীলনী

1. আঠটা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ ক্ৰমে 9 আৰু 9.25। ইয়াৰে ছয়টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মান 6, 7, 10, 12, 12 আৰু 13 হ'লে বাকী দুটা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মান উলিওৱা।
2. সাতটা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ ক্ৰমে 8 আৰু 16। ইয়াৰে পাঁচটা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মান 2, 4, 10, 12 আৰু 14 হলে বাকী দুটা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মান উলিওৱাঁ।
3. ছয়টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি ক্ৰমে 8 আৰু 4। যদি পৰ্য্যবেক্ষণবোৰৰ প্ৰতিটোকে 3 ৰে গুণ কৰা হয় তেনেহ'লে নতুন মাধ্য আৰু নতুন প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।
4. n টা পৰ্য্যবেক্ষণ $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ ৰ মাধ্য $\bar{x}$ আৰু প্ৰসৰণ σ^2 দিয়া আছে। প্ৰমাণ কৰাঁ যে পৰ্য্যবেক্ষণ $ax_1, ax_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, ax_n$ ৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ ক্ৰমে $a\bar{x}$ আৰু $a^2\sigma^2$ য'ত $a \neq 0$।
5. 20 টা পৰ্যবেক্ষণৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি ক্ৰমে 10 আৰু 2. পুনঃপৰীক্ষণৰ পিছত দেখা গ'ল যে এটা পৰ্যবেক্ষণৰ মান ভুলক্ৰমে 8 লোৱা হৈছে। পৰৱৰ্তী প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে শুদ্ধ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁঃ

(i) যদি ভুল পৰ্য্যবেক্ষণৰ মানটো বাদ দিয়া হয়।

(ii) যদি ভুল পৰ্য্যবেক্ষণটোৰ ঠাইত 12 বহুওৱা হয়।

6. 50 গৰাকী শিক্ষাৰ্থীয়ে গণিত, পদাৰ্থবিদ্যা আৰু ৰসায়নবিদ্যাৰ পৰীক্ষাত লাভ কৰা মূল্যাংকৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি এনে ধৰণৰ ঃ

বিষয়	গণিত	পদাৰ্থবিদ্যা	ৰসায়ন বিদ্যা
মাধ্য	42	32	40.9
প্ৰামাণিক বিচ্যুতি	12	15	20

তিনিটা বিষয়ৰ ভিতৰৰ কোনটো বিষয়ৰ মূল্যাংকৰ বিচৰণশীলতা সৰ্বাধিক আৰু কোনটো বিষয়ৰ ক্ষেত্ৰত সৰ্বনিম্ন ?

7. 100 টা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি ক্ৰমে 20 আৰু 3 পোৱা গ'ল। পিছত দেখা গ'ল যে ইয়াৰে তিনিটা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মানবোৰ ভুলক্ৰমে 21, 21 আৰু 18 লোৱা হৈছিল। যদি ভুল পৰ্য্যবেক্ষণবোৰৰ মানবোৰ আওকাণ কৰা হয় তেন্তে বাকী থকা পৰ্য্যবেক্ষণৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সাৰাংশ

◆ **বিক্ষেপণৰ মাপ পৰিসৰ** চতুৰ্থক বিচ্যুতি, গড় বিচ্যুতি, প্ৰসৰণ, প্ৰামাণিক বিচ্যুতি আদি হ'ল বিক্ষেপণৰ মাপ। প্ৰৰিসৰ = সৰ্বোচ্চ মান – সৰ্বনিম্ন মান।

◆ **অবৰ্গীকৃত তথ্যৰ গড় বিচ্যুতি**

$$\mathrm{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}, \quad \mathrm{M.D.}(\mathrm{M}) = \frac{\sum |x_i - \mathrm{M}|}{n}$$

◆ **বৰ্গীকৃত তথ্যৰ গড় বিচ্যুতি**

$$\mathrm{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\mathrm{N}}, \quad \mathrm{M.D.}(\mathrm{M}) = \frac{\sum f_i |x_i - \mathrm{M}|}{\mathrm{N}} \quad \text{য'ত } \mathrm{N} = \sum f_i$$

◆ **অবৰ্গীকৃত তথ্যৰ প্ৰসৰণ আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি**

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ **বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ প্ৰসৰণ আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি**

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ **অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ প্ৰসৰণ আৰু প্ৰমাণিক বিচ্যুতি**

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \frac{1}{\mathrm{N}}\sqrt{\mathrm{N}\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

◆ **প্ৰসৰণ আৰু প্ৰামাণিক বিচ্যুতি নিৰ্ণয়ৰ চমু পদ্ধতি**

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N\sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right],\ \sigma = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2},$$

য'ত $y_i = \dfrac{x_i - A}{h}$

◆ **বিচৰণ গুণাংক (C.V.)** $= \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100,\ \overline{x} \neq 0.$

একে মাধ্যবিশিষ্ট পৰ্য্যবেক্ষণ শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত যিটোৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি কম তাক কম সিঁচৰতিপূৰ্ণ বা অধিক সামঞ্জস্যপূৰ্ণ হিচাপে গণ্য কৰা হয়।

ঐতিহাসিক টোকা

ৰাজনৈতিক ৰাষ্ট্ৰ বুজোৱা লেটিন শব্দ 'Status' ৰ পৰা 'Statistics' (অৰ্থাৎ পৰিসংখ্যা) শব্দটো আহিছে। ইয়াৰ পৰা এইটোৱে বুজা যায় যে পৰিসংখ্যাবিজ্ঞান মানৱ সভ্যতাৰ সমানেই পুৰণি। খ্ৰী.পূ. 3050 চনত সম্ভৱতঃ ইজিপ্তত প্ৰথম লোকপিয়ল কৰা হৈছিল। আমাৰ ভাৰতবৰ্ষতো প্ৰায় 2000 বছৰৰ আগতে নিৰ্দিষ্টভাৱে ক'বলৈ হ'লে চন্দ্ৰগুপ্ত মৌৰ্য (খ্ৰী.পূ. 324-300)ৰ ৰাজত্ব কালত প্ৰশাসনীয় তথ্য-পাতি সংগ্ৰহৰ সুনিপুণ ব্যৱস্থা আছিল। কৌটিল্যৰ অৰ্থশাস্ত্ৰত (খ্ৰী.পূ. প্ৰায় 300 চন) জন্ম-মৃত্যু সম্পৰ্কীয় তথ্য সংগ্ৰহৰ উল্লেখ পোৱা যায়। আবুল ফজল ৰচিত 'আইন ই আকবৰী'ত আকবৰৰ ৰাজত্বকালত প্ৰশাসনীয় জৰীপ কাৰ্য চলোৱাৰ বিষয়ে এক বিতং বিৱৰণ সন্নিৱিষ্ট আছে।

জন্ম-মৃত্যুৰ পৰিসংখ্যাৰ ওপৰত চলোৱা অধ্যয়নৰ বাবে লণ্ডনৰ কেপ্তেইন জন গ্ৰাণ্টক (1620-1674) জন্ম-মৃত্যু পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানৰ জনক আখ্যা দিয়া হয়। 1713 চনত প্ৰকাশিত জেকব বাৰ্ণুলি (1654-1705) ৰ 'Ars Conjectandi' নামৰ গ্ৰন্থত Law of large numbers অৰ ধাৰণা আগবঢ়োৱা হৈছিল।

সপ্তদশ শতিকাৰ মাজভাগত পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানৰ তত্ত্বগত বিকাশ আৰম্ভ হয় আৰু খেল-তত্ত্ব (Games theory) আৰু সম্ভাৱনা-তত্ত্ব (Probability) অৰ্থাৎ সম্ভাৱিতাৰ আৰম্ভণিৰ জৰিয়তে পিছতো এই বিকাশৰ ধাৰা চলি থাকে। ফ্ৰান্সিচ্ গেল্টন (Francis Galton, 1822-1921) নামৰ এজন ইংৰাজ বিজ্ঞানীয়ে 'জীৱমিতি' (Biometry) ৰ ক্ষেত্ৰত পৰিসাংখ্যিক পদ্ধতিৰ প্ৰথম প্ৰয়োগ ঘটায়। 'কাই বৰ্গ পৰীক্ষা' (chi square test) ৰ আৱিষ্কাৰ আৰু ইংলেণ্ডত (1911) পৰিসাংখ্যিক পৰীক্ষাগাৰ (Statistical Laboratory) ৰ নিৰ্মাণৰ জৰিয়তে কাৰ্ল পিয়েৰ্ছনে (Karl Pearson, 1857-1936) পৰিসাংখ্যিক অধ্যয়নৰ বিকাশৰ প্ৰভূত বৰঙণি আগবঢ়াইছিল। আধুনিক পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানৰ জনক হিচাপে জ্ঞাত ছাৰ ৰোণাল্ড এ. ফিচাৰে (Sir Ronald A. Fisher, 1980-1962) নানা ধৰণৰ ভিন্নমুখী শাখা যেনে বংশগতি তত্ত্ব (Genetics), জীৱমিতি (Biometry), শিক্ষা (Education), কৃষি (Agriculture) আদিত ইয়াৰ প্ৰয়োগ সম্ভৱ কৰি তোলে।

— ❖ —