C. S. (Main) Exam : 2011

Serial No.

C–DTN–L–NUB

MATHEMATICS

Paper—II

Time Allowed : Three Hours *Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

*Candidates should attempt Question Nos. 1 and 5 which are compulsory, and any **three** of the remaining questions selecting at least **one** question from each Section.*

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols and notations carry usual meaning, unless otherwise indicated.

All questions carry equal marks.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

SECTION—A

1. (a) Show that the set

$$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

of six transformations on the set of Complex numbers defined by

$$f_1(z) = z, \; f_2(z) = 1 - z$$

$$f_3(z) = \frac{z}{(z-1)}, \; f_4(z) = \frac{1}{z}$$

$$f_5(z) = \frac{1}{(1-z)} \text{ and } f_6(z) = \frac{(z-1)}{z}$$

is a non-abelian group of order 6 w.r.t. composition of mappings. 12

(b) Let $S = (0, 1]$ and f be defined by $f(x) = \frac{1}{x}$ where $0 < x \leq 1$ (in $\mathbb{R}$). Is f uniformly continuous on S ? Justify your answer. 12

(c) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$ and $u - v = \frac{e^y - \cos x + \sin x}{\cos hy - \cos x}$, find f(z) subject to the condition, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3-i}{2}$. 12

(Contd.)

खण्ड—क

1. (क) सिद्ध कीजिए कि सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय पर

$$f_1(z) = z,\ f_2(z) = 1 - z$$

$$f_3(z) = \frac{z}{(z-1)},\ f_4(z) = \frac{1}{z}$$

$$f_5(z) = \frac{1}{(1-z)} \text{ और } f_6(z) = \frac{(z-1)}{z}$$

से परिभाषित छः रूपांतरणों का समुच्चय

$$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

प्रतिचित्रण-संयोजन के सापेक्ष 6 कोटि का एक अन्-आबेली ग्रुप है। 12

(ख) माना कि $S = (0, 1]$ और f परिभाषित है $f(x) = \frac{1}{x}$ से जहां कि $0 < x \leq 1$ ($\mathbb{R}$ में)। क्या f S पर एकसमानत: संतत है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइये। 12

(ग) यदि $f(z) = u + iv$ $z = x + iy$ का एक विश्लेषिक फलन है और $u - v = \frac{e^y - \cos x + \sin x}{\cos hy - \cos x}$, प्रतिबंध $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3-i}{2}$ के अधीन f(z) ज्ञात कीजिए। 12

(Contd.)

(d) Solve by Simplex method, the following LP Problem :

Maximize, $Z = 5x_1 + 3x_2$

Constraints, $3x_1 + 5x_2 \le 15$

$5x_1 + 2x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$ 12

(e) (i) Prove that a group of Prime order is abelian. 6

(ii) How many generators are there of the cyclic group $(G , \cdot)$ of order 8 ? 6

2. (a) Give an example of a group G in which every proper subgroup is cyclic but the group itself is not cyclic. 15

(b) Let $f_n(x) = nx(1 - x)^n, x \in [0, 1]$

Examine the uniform convergence of $\{f_n(x)\}$ on $[0, 1]$. 15

(c) If the function f(z) is analytic and one valued in $| z - a | < R$, prove that for $0 < r < R$,

$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta)e^{-i\theta}\, d\theta$, where $P(\theta)$ is the real part of $f(a + re^{i\theta})$. 15

(d) Find the shortest distance from the origin (0, 0) to the hyperbola

$$x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$$ 15

(घ) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्राम समस्या :

Maximize, $Z = 5x_1 + 3x_2$

Constraints, $3x_1 + 5x_2 \le 15$

$5x_1 + 2x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

को एकधा विधि से हल कीजिए। 12

(ङ) (i) सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि का एक ग्रुप आबेली होता है। 6

(ii) 8 कोटि के चक्रीय समूह $(G, \cdot)$ के कितने जनक होते हैं ? 6

2. (क) एक समूह G का उदाहरण दीजिए जिसमें हरेक उचित उपसमूह चक्रीय होता है परन्तु समूह स्वयं चक्रीय नहीं है। 15

(ख) माना कि $f_n(x) = nx(1-x)^n, x \in [0, 1]$.

$[0, 1]$ पर $\{f_n(x)\}$ के एकसमान अभिसरण की जांच कीजिए। 15

(ग) यदि फलन $f(z)$ $|z-a| < R$ में विश्लेषिक और एक मान वाला है, तो सिद्ध कीजिए कि $0 < r < R$ के लिए

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} \, d\theta,$$

जहां कि $P(\theta)$ $f(a + re^{i\theta})$ का वास्तविक भाग है। 15

(घ) मूलबिन्दु (0, 0) से अतिपरवलय

$$x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$$

तक लघुतम दूरी ज्ञात कीजिए। 15

3. (a) Let F be the set of all real valued continuous functions defined on the closed interval [0, 1]. Prove that (F, +, ·) is a Commutative Ring with unity with respect to addition and multiplication of functions defined pointwise as below :

$$\left.\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \text{and} \quad (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}\right\} x \in [0, 1]$$

where f, g $\in$ F. 15

(b) Show that the series for which the sum of first n terms

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad 0 \le x \le 1$$

cannot be differentiated term-by-term at x = 0. What happens at $x \neq 0$? 15

(c) Evaluate by Contour integration,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$$ 15

(d) Find the Laurent series for the function

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}, \text{ with centre } z = 1.$$ 15

4. (a) Let a and b be elements of a group, with $a^2 = e$, $b^6 = e$ and $ab = b^4a$.

Find the order of ab, and express its inverse in each of the forms $a^m b^n$ and $b^m a^n$. 20

3. (क) माना कि F बंद अंतराल [0, 1] पर परिभाषित सभी वास्तविक मान संतत फलनों का समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि (F, +, ·) :

$$\left.\begin{aligned} &(f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \text{और}\quad &(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \end{aligned}\right\} x \in [0, 1]$$

जहां कि $f, g \in F$

की तरह बिन्दुश: परिभाषित फलनों के योग और गुणन के सापेक्ष एक के साथ एक क्रमविनिमेय वलय होता है। 15

(ख) सिद्ध कीजिए कि ऐसी श्रेणी का जिसके लिए प्रथम n पदों का योगफल

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ 0 \le x \le 1$$

$x = 0$ पर पदश: अवकलन नहीं किया जा सकता है। $x \neq 0$ पर क्या होता है ? 15

(ग) कन्टूर समाकलन से

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$$

का मान निकालिए। 15

(घ) केन्द्र $z = 1$ वाले फलन

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}$$

के लिए लौराँ श्रेणी ज्ञात कीजिए। 15

4. (क) माना कि a और b एक समूह के, $a^2 = e$, $b^6 = e$ और $ab = b^4a$ के साथ, अवयव हैं।

ab की कोटि ज्ञात कीजिए, और इसके प्रतिलोम को हरेक रूप $a^m b^n$ और $b^m a^n$ में व्यक्त कीजिए। 20

(b) Show that if $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$, then its derivative

$$S'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1 + nx^2)^2}, \text{ for all x.} \quad 20$$

(c) Write down the dual of the following LP problem and hence solve it by graphical method :

Minimize, $Z = 6x_1 + 4x_2$

Constraints, $2x_1 + x_2 \geq 1$

$3x_1 + 4x_2 \geq 1 \cdot 5$

$x_1, x_2 \geq 0$ 20

SECTION—B

5. (a) Solve the PDE

$$(D^2 - D'^2 + D + 3D' - 2)\, z = e^{(x-y)} - x^2 y$$

12

(b) Solve the PDE

$$(x + 2z)\frac{\partial z}{\partial x} + (4zx - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + y$$

12

(c) Calculate $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$ (upto 3 places of decimal) by dividing the range into 8 equal parts by Simpson's $\frac{1}{3}$rd Rule. 12

(ख) सिद्ध कीजिए कि यदि

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4 x^2},$$

तो इसका अवकलज

$$S'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (1 + nx^2)^2}, \text{ सभी x के लिए।}$$ 20

(ग) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या का द्वैती लिखिए और अत: ग्राफी विधि से इसका हल निकालिए :

Minimize, $Z = 6x_1 + 4x_2$

Constraints, $2x_1 + x_2 \geq 1$

$3x_1 + 4x_2 \geq 1{\cdot}5$

$x_1, x_2 \geq 0$ 20

खण्ड—ख

5. (क) आंशिक अवकल समीकरण (PDE)

$$(D^2 - D'^2 + D + 3D' - 2)\, z = e^{(x-y)} - x^2 y$$

को हल कीजिए। 12

(ख) आंशिक अवकल समीकरण (PDE)

$$(x + 2z)\frac{\partial z}{\partial x} + (4zx - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + y$$

को हल कीजिए। 12

(ग) परास को 8 समान भागों में विभाजित करके सिम्प्सन के तिहाई नियम से $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x}$ का दशमलव के 3 स्थानों तक परिकलन कीजिए। 12

(d) (i) Compute $(3205)_{10}$ to the base 8.

(ii) Let A be an arbitrary but fixed Boolean algebra with operations $\wedge$, $\vee$ and $'$ and the zero and the unit element denoted by 0 and 1 respectively. Let x, y, z, ... be elements of A.

If $x, y \in A$ be such that $x \wedge y = 0$ and $x \vee y = 1$ then prove that $y = x'$. 12

(e) Let a be the radius of the base of a right circular cone of height h and mass M. Find the moment of inertia of that right circular cone about a line through the vertex perpendicular to the axis.

12

6. (a) Find the surface satisfying $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2$ and touching $z = x^3 + y^3$ along its section by the plane $x + y + 1 = 0$. 20

(b) Solve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \le x \le a, \ 0 \le y \le b$$

satisfying the boundary conditions

$u(0, y) = 0, \ u(x, 0) = 0, \ u(x, b) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = T \sin^3 \frac{\pi y}{a}$. 20

(Contd.)

(घ) (i) $(3205)_{10}$ का आधार 8 से अभिकलन कीजिए।

(ii) माना कि A, प्राचलनों $\wedge$, $\vee$ और ' के साथ और शून्य तथा तत्समक अवयव क्रमशः द्योतित 0 और 1 से, एक स्वेच्छ परन्तु नियत बूलीय बीजावली है। माना कि x, y, z, ... A के अवयव हैं।

यदि $x, y \in A$ ऐसे हों कि $x \wedge y = 0$ और $x \vee y = 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $y = x'$ । 12

(ङ) माना कि a ऊंचाई h और द्रव्यमान M वाले एक लम्ब-वृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या है। अक्ष से लम्ब शीर्ष से होती हुई एक रेखा के इर्द-गिर्द उस लम्बवृत्तीय शंकु का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। 12

6. (क) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2$ का पालन करते हुए और तल $x + y + 1 = 0$ द्वारा इसके परिच्छेद के साथ-साथ $z = x^3 + y^3$ को स्पर्श करते हुए बहिस्तल को ज्ञात कीजिए। 20

(ख) परिसीमा प्रतिबंधों

$$u(0, y) = 0, \ u(x, 0) = 0, \ u(x, b) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = T \sin^3 \frac{\pi y}{a}$$

का पालन करते हुए

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \le x \le a, \ 0 \le y \le b$$

को हल कीजिए। 20

(c) Obtain temperature distribution y(x, t) in a uniform bar of unit length whose one end is kept at 10°C and the other end is insulated. Also it is given that $y(x, 0) = 1 - x, 0 < x < 1$. 20

7. (a) A solid of revolution is formed by rotating about the x-axis, the area between the x-axis, the line $x = 0$ and $x = 1$ and a curve through the points with the following co-ordinates :

x	·00	·25	·50	·75	1
y	1	·9896	·9589	·9089	·8415

Find the volume of the solid. 20

(b) Find the logic circuit that represents the following Boolean function. Find also an equivalent simpler circuit :

x	y	z	f(x, y, z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

20

(c) Draw a flow chart for Lagrange's interpolation formula. 20

(ग) मात्रक लंबाई की एक एकसमान शलाका में, जिसका एक सिरा 10°C पर रखा है और दूसरा सिरा ऊष्मारोधी है, तापमान वितरण y(x, t) ज्ञात कीजिए। यह भी दिया हुआ है कि

$$y(x, 0) = 1 - x, \quad 0 < x < 1.$$

20

7. (क) x-अक्ष; रेखा x = 0 और x = 1 और निम्नलिखित निर्देशांकों वाले बिन्दुओं से होते हुए वक्र के बीच क्षेत्र को x-अक्ष के प्रति घूर्णन करके एक परिक्रमण घनाकृति बनती है :

x	·00	·25	·50	·75	1
y	1	·9896	·9589	·9089	·8415

घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए। 20

(ख) तर्क परिपथ ज्ञात कीजिए जो कि निम्नलिखित बूलीय फलन को निरूपित करता है। एक तुल्य सरलतर परिपथ भी ज्ञात कीजिए :

x	y	z	f(x, y, z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

20

(ग) लग्रांजी अंतर्वेशन सूत्र के लिए एक प्रवाह-संचित्र खींचिए।

20

8. (a) The ends of a heavy rod of length 2a are rigidly attached to two light rings which can respectively slide on the thin smooth fixed horizontal and vertical wires O_x and O_y. The rod starts at an angle α to the horizon with an angular velocity $\sqrt{[3g(1-\sin\alpha)/2a]}$ and moves downwards. Show that it will strike the horizontal wire at the end of time

$$-2\sqrt{a/(3g)}\,\log\left[\tan\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)\cot\frac{\pi}{8}\right].$$ 30

(b) An infinite row of equidistant rectilinear vortices are at a distance a apart. The vortices are of the same numerical strength K but they are alternately of opposite signs. Find the Complex function that determines the velocity potential and the stream function. 30

8. (क) लम्बाई 2a की एक भारी छड़ के सिरे दो हलके छल्लों से दृढ़ता से जुड़े हैं जो कि क्रमशः पतले चिकने नियत क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर तारों O_x और O_y पर फिसल सकती है। छड़ कोणीय वेग $\sqrt{[3g(1-\sin\alpha)/2a]}$ से क्षितिज से कोण α पर आरंभ करती है और अधोमुखी चलती है। सिद्ध कीजिए कि यह समय

$$-2\sqrt{a/(3g)}\,\log\left[\tan\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)\cot\frac{\pi}{8}\right]$$

के अंत में क्षैतिज तार से टकराएगी। 30

(ख) दूरी a पर अलग-अलग समान्तराली रेखीय भ्रमिलों की एक अनंत पंक्ति है। भ्रमिल समान संख्यात्मक सामर्थ्य K के हैं परन्तु वे एकांतरतः विपरीत चिह्नों के हैं। सम्मिश्र फलन ज्ञात कीजिए जो वेग विभव और धारा फलन को निर्धारित करता है। 30

Serial No. | | **C–DTN–L–NUB**

गणित

प्रश्न-पत्र—II

समय : तीन घण्टे | *पूर्णांक : 300*

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं दिये जाएंगे।

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीकों और संकेतनों के प्रचलित अर्थ हैं, जब तक अन्यथा न कहा गया हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

***Note :** English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.*