गणितीय आगमन का सिद्धान्त

Ex 4.1

प्रश्न 1. यदि कथन P(n) : (a + 3) < 2^{n+3} है, तो P(4) लिखिए।

हल-

दिया गया कथन
P(n) : (n + 3) < 2^{n+3}
∴ P(4) : (4 + 3) < 2^{4+3}
P(4) : 7 < 2^7
अतः P(4) का मान 7 < 2^7 होगा।

प्रश्न 2. यदि कथन P(n) : $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ है तो P(4) की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल-

दिया गया कथन P(n) : $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
n = 4 रखने पर LHS का मान
P(4) = $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2$
= 1 + 9 + 25 + 49 = 84
RHS $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
$n = 4$ रखने पर

$$P(4) = \frac{4(2\times4-1)(2\times4+1)}{3}$$

$$= \frac{4\times7\times9}{3} = 4 \times 7 \times 3 = 84$$

अतः LHS = RHS
इसलिए P(4) की सत्यता की जाँच हो गई। अर्थात् दिया गया कथन सत्य है।

प्रश्न 3. 1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) +...... का n वाँ पद लिखिए।

हल-

श्रेणी में पहला पद = 1.
दूसरा पद = 1 + 3
पद = 1 + 3 + 5
इसलिए n वाँ पद
$T_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n – 1)$

प्रश्न 4. 1.4.7 + 2.5.8 + 3.6.9 +...... को n वाँ पद लिखिए।

हल-

हमें यहाँ पर तीन श्रेणियाँ प्राप्त हो रही हैं–
1, 2, 3, ... n वाँ पद $\therefore T_n = n$
4, 5, 6, ... n वाँ पद $\therefore T_n = n + 3$
7, 8, 9,........... n वाँ पद $\therefore T_n = (n + 6)$
अतः 1.4.7 + 2.5.8 + 3.6.9 +...... का n वाँ पद
$T_n = n(n + 3)(n + 6)$

सभी $n \in N$ के लिए गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए :

प्रश्न 5. $1 + 3 + ... + (2n – 1) = n^2$

हल-

मान लीजिए कि
$P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1) = n^2$
n = 1 के लिए।
L.H.S. = 1
R.H.S. = $1^2 = 1$
⇒ L.H.S. = R.H.S.
अतः P(1) सत्य है।

अब हम कल्पना करेंगे कि n = k के लिए सत्य है अर्थात् P(k) सत्य है।
$\Rightarrow 1 + 3 + 5 +..... + (2k – 1) = k^2$
अब हम सिद्ध करेंगे कि P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है।

$[1 + 3 + 5 + ...+ (2k – 1)] + [2k + 1) – 1] = k^2 + [2(k + 1) – 1]$
$= k^2 + 2k + 2 – 1$
$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

अतः P(k + 1) सत्य है जबकि P(k) सत्य है।
अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध होता है कि दिया गया कथन n प्रत्येक मान के लिए सत्य है।

प्रश्न 6. 1 + 4 + ... + (3n – 2) = $\frac{n(3n-1)}{2}$

हल-

माना दिया हुआ कथन P(n) है अर्थात्
P(n) : 1 + 4 + ... + (3n – 2) = $\frac{n(3n-1)}{2}$
n = 1 के लिए
LHS P(1) = 1

$$\text{RHS} = \frac{1(3\times 1-1)}{2} = \frac{1\times 2}{2} = 1$$

जो कि सत्य है ∵ 1 = 1 है।
किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना करते हैं कि P(k) सत्य है
अर्थात्

$$1 + 4 + 7 + \ldots\ldots + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2} \quad \ldots(1)$$

अब हम समी. (1) को P(k + 1) के लिए सिद्ध करेंगे।

$$1 + 4 + 7 + \ldots\ldots + (3k - 2) + (3k + 1) = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

$$\text{LHS} = 1 + 4 + 7 + \ldots\ldots + (3k - 2) + (3k + 1)$$

समी. (1) का प्रयोग करने पर

$$\frac{k(3k-1)}{2} + (3k + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(3k^2 - k + 6k + 2) = \frac{1}{2}(3k^2 + 5k + 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(3k^2 + 3k + 2k + 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[3k(k+1)+2(k+1)]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

इस प्रकार कथन P(k + 1) के लिए सत्य है जब कभी P(k) सत्य है अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से $n \in N$ के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 7. 1.3 + 3.5 + …….. + (2n – 1) (2n + 1) = $\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

हल-

माना कि P(n) : 1.3 + 3.5 + …….. + (2n – 1) (2n + 1) = $\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$
सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है। अतः n = 1 के लिए।

$$\text{R.H.S.} = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3} = \frac{1(4\times1^2+6\times1-1)}{3}$$

$$= \frac{4+6-1}{3} = 3 = 1.3 = T_1$$

L.H.S. = R.H.S.
अतः P(1) सत्य है।
माना कि P(k) सत्य होगा।
अतः $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots\ldots + (2k-1)(2k+1)$

$$= \frac{k(4k^2+6k-1)}{3} \quad \ldots\ldots(1)$$

सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य है। इसके लिए

$$1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots\ldots + (2k-1)(2k+1) + (2k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{(k+1)[4(k+1)^2+6(k+1)-1]}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(4k^2+8k+4+6k+6-1)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(4k^2+14k+9)}{3}$$

$\therefore$ L.H.S. = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + (2k – 1) (2k + 1) + (2k + 1) (2k + 3)

$$= \frac{k(4k^2+6k-1)}{3} + (2k+1)(2k+3)$$

[समीकरण (1) से मान रखा गया है।]

$$= \frac{k(4k^2+6k-1)+3(2k+1)(2k+3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3+6k^2-k+3(4k^2+8k+3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3+6k^2-k+12k^2+24k+9}{3}$$

$$= \frac{4k^3+18k^2+23k+9}{3}$$

$$= \frac{4k^2(k+1)+14k(k+1)+9(k+1)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(4k^2+14k+9)}{3} = \text{R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S.
अतः P(k + 1) सत्य है।

प्रश्न 8. 1.3 + 2.4 + …… + n(n + 2) = $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

हल-

माना कि

P(n) : 1.3 + 2.4 + …… + n(n + 2) = $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

सिद्ध करना है P(1) सत्य है।

∴ n = 1 के लिए

$$\text{RHS} = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

$$= \frac{1.(1+1).(2\times1+7)}{6}$$

$$= \frac{2\times9}{6} = 3 = T_1 = \text{L.H.S.}$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

अत: P(1) सत्य है।

माना P(k) सत्य है।

$$\therefore \quad 1.3 + 2.4 + \ldots\ldots + k(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$$

सिद्ध करना है P(k + 1) सत्य है। इसके लिए

$$1.3 + 2.4 + \ldots\ldots\; k(k+2) + (k+1)(k+3)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)((2k+9)}{6}$$

इसलिए

LHS = $1.3 + 2.4 + \ldots\ldots\; k(k+2) + (k+1)(k+3)$

समी. (1) से मान रखने पर

$$\frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(k+1)}{6}[k(2k+7) + 6(k+3)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(k+1)}{6}[2k^2 + 7k + 6k + 18]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(k+1)}{6}[2k^2 + 13k + 18] = \frac{(k+1)(2k+9)(k+2)}{6}$$

= RHS

अत: P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 9. 1.2.3 + 2.3.4 + …….. + n(n + 1) (n + 2) = $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

हल-

माना कि

P(n) : 1.2.3 + 2.3.4 + …….. + n(n + 1) (n + 2) = $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
सिद्ध करना है- P(1) सत्य है।

$\therefore$ $n = 1$ के लिए R.H.S. $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$$= \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$$

$$= 1.2.3 = T_1 = \text{L.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S.

अत: P(1) सत्य है।

माना P(k) सत्य है।

$$\therefore \quad 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots\ldots + k(k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad \ldots\ldots(1)$$

सिद्ध करना है—P(k + 1) सत्य है। इसके लिए

$$1.2.3 + 2.3.4 + \ldots\ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots\ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3)$$

[समीकरण (1) से मान रखा गया है।]

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)+4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} = \text{R.H.S.}$$

अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 10.

$$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots\ldots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$$

हल-

माना कि P(n) :

$$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots\ldots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$$

सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है। अतः n = 1 के लिए

$$\text{R.H.S.} = \frac{n}{3(2n+3)} = \frac{1}{3(2\times1+3)} = \frac{1}{3.5} = T_1$$

L.H.S. = R.H.S.

अतः P(1) सत्य है।

माना कि P(k) भी सत्य होगा।

$$\text{अतः} \quad \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k}{3(2k+3)} \quad \ldots\ldots(1)$$

सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य है। इसके लिए

$$\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{n}{3(2n+3)} = \frac{1}{3(2\times1+3)} = \frac{1}{3.5} = T_1$$

L.H.S. = R.H.S.

अतः P(1) सत्य है।

माना कि P(k) भी सत्य होगा।

$$\text{अतः} \quad \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k}{3(2k+3)} \quad \ldots\ldots(1)$$

सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य है। इसके लिए

$$\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$+\frac{1}{[2(k+1)+1][2(k+1)+3]}=\frac{k+1}{3[2(k+1)+3]}$$

$$\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}+$$

$$\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}=\frac{k+1}{3(2k+5)}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$+\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

[समीकरण (1) से मान रखने पर]

$$= \frac{k(2k+5)+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+3)(2k+5)} = \frac{2k^2+3k+2k+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k(2k+3)+1(2k+3)}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{(2k+3)(k+1)}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k+1}{3(2k+5)} = \frac{k+1}{3(2(k+1)+3)} = \text{R.H.S.}$$

अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 11.

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

हल-

माना कि
P(n) :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

सिद्ध करना है—P(1) सत्य है।
n = 1 के लिए

$$\text{RHS} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = (1)^2 = 1 = 1^3$$

$$= T_1 = \text{L.H.S.}$$

अर्थात् P(1) सत्य है।

माना कि $P(k)$ भी सत्य है।

$$1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \qquad \ldots..(1)$$

सिद्ध करना है—$P(k+1)$ सत्य है।

या $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\therefore \text{ L.H.S.} = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + k^3) + (k+1)^3$$

$$= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

[समीकरण (1) से मान रखने पर]

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2\,[k^2 + 4(k+1)]}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2\,(k^2 + 4k + 4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$= \text{R.H.S.}$$

अतः L.H.S. = R.H.S.

अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है । अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 12.

$$1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\ldots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots+n)}=\frac{2n}{(n+1)}$$

हल-

माना कि

$$P(n): 1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\ldots\ldots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots n)}=\frac{2n}{(n+1)}$$

सिद्ध करना है—P(1) सत्य है।

$\therefore \quad n = 1$ के लिए

$$\text{R.H.S.} = \frac{2n}{n+1} = \frac{2.1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 = T_1 = \text{L.H.S.}$$

अत: L.H.S. = R.H.S.

अत: P(1) सत्य है।

माना कि P(k) सत्य है।

$$\text{अत: } 1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\ldots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots k)}=\frac{2k}{k+1} \quad \ldots(1)$$

सिद्ध करना है—P(k + 1) सत्य है। इसके लिए

$$1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots k}$$

$$+\frac{1}{(1+2+3+.....+(k+1)} = \frac{2(k+1)}{k+1+1} = \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$\therefore \text{ L.H.S.} = \left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+.....+\frac{1}{1+2+3....k}\right) + \frac{1}{1+2+3.....k+1}$$

$$= \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{1+2+3+.....+(k+1)}$$

[समीकरण (1) से मान रखा गया है।]

$$= \frac{2k}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

$\because$ $1 + 2 + 3 + ... + (k + 1)$ का योग $= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

होगा।

अत:
$$\frac{2k(k+2)+2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2(k+1)}{(k+2)} = \text{R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S.

अत: $P(k + 1)$ सत्य है।

प्रश्न 13.

$$1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{n-1} = \frac{5^n-1}{4}$$

हल- माना कि P(n) :

$$1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$$

सिद्ध करना है कि P(1) भी सत्य है। ∴ n = 1 के लिए।

$$\text{RHS} = \frac{5^1 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1 = T_1$$

$\therefore$ LHS = RHS

अत: P(1) सत्य है।

माना कि P(k) सत्य होगा।

अत: $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{k-1} = \frac{5^k - 1}{4}$ ....(1)

सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य होगा।

$$1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{k-1} + 5^k = \frac{5^{k+1} - 1}{4}$$

$\therefore$ LHS $= 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{k-1} = + 5^k$

समीकरण (1) से मान रखने पर

$$= \frac{5^k - 1}{4} + 5^k = \frac{5^k - 1 + 4.5^k}{4}$$

$$= \frac{5^k + 4.5^k - 1}{4} = \frac{5^k(1+4) - 1}{4}$$

$$= \frac{5^{k+1} - 1}{4} = \text{RHS}$$

LHS = RHS

अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 14.

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right) ......\left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right) = (n+1)^2$$

हल-

माना कि

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right) \ldots\ldots \left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right) = (n+1)^2$$

सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है। अतः n = 1 के लिए

$$\text{R.H.S.} = (n+1)^2 = (1+1)^2 = 4 = \left(1+\frac{3}{1}\right) = T_1$$

L.H.S. = R.H.S.

अतः P(1) सत्य है।

माना कि P(*k*) भी सत्य है।

$$\text{अतः} \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right) \ldots\ldots \left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right) = (k+1)^2 \quad \ldots\ldots(1)$$

सिद्ध करना है कि P(*k* + 1) सत्य है।

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right) \ldots\ldots \left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right) \left[1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right] = (k+2)^2$$

$$\therefore \text{ L.H.S.} = \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right) \ldots\ldots \left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)\left[1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right]$$

$$= (k+1)^2 \left[1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right]$$

[समीकरण (1) से मान रखने पर]

$$= (k+1)^2 \left[\frac{(k+1)^2 + 2k + 3}{(k+1)^2}\right]$$

$$= (k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 2k + 1 + 2k + 3}{(k+1)^2}\right]$$

$$= (k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{(k+1)^2}\right]$$

$= k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2 =$ R.H.S.
L.H.S. = R.H.S.

अतः P(k+ 1) सत्य है।

प्रश्न 15.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

हल-

माना कि P(n) :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है। अतः n = 1 के लिए

$$\text{R.H.S.} = 1 - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = T_1 = \text{L.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S.

अतः P(1) सत्य है।

माना कि P(k) भी सत्य है।

अतः $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$

सिद्ध करना है कि P(*k* + 1) सत्य है। इसके लिए

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

[समीकरण (1) से मान रखा गया है।]

$$= 1 - \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{2-1}{2^{k+1}}\right] = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} = \text{R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S.

अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 16.

$$1.3 + 2.3^2 + \ldots\ldots + n.3^n = \frac{(2n-1)\,3^{n+1}+3}{4}$$

हल-

माना कि P(n) :

$$1.3 + 2.3^2 + \ldots\ldots + n.3^n = \frac{(2n-1)\,3^{n+1}+3}{4}$$

सिद्ध करना है-P(1) सत्य है। ∴ n = 1 के लिए

$$\text{R.H.S.} = \frac{(2n-1)\,3^{n+1}+3}{4}$$

$$= \frac{(2\times1-1)3^{1+1}+3}{4} = \frac{1\times3^2+3}{4} = \frac{9+3}{4}$$

$$= 3 = 1.3 = T_1$$

L.H.S. = R.H.S.

अत: P(1) सत्य है।

माना कि P(k) सत्य है। अत:

$$1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots\ldots + k.3^k$$

$$= \frac{(2k-1)\,.\,3^{k+1}+3}{4} \quad \ldots\ldots(1)$$

सिद्ध करना है—P(k + 1) सत्य है। इसके लिए

$$1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots\ldots + k.3^k + (k+1).3^{k+1}$$

$$= \frac{[2(k+1)-1]3^{k+1+1}+3}{4} = \frac{(2k+1)3^{k+2}+3}{4}$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} = 1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots\ldots + k.3^k + (k+1).3^{k+1}$$

$$= \frac{(2k-1).3^{k+1}+3}{4} + (k+1).3^{k+1}$$

[समीकरण (1) से मान रखा गया है]

$$= \frac{(2k-1).3^{k+1}+3+4.3^{k+1}(k+1)}{4}$$

$$= \frac{3^{k+1}[2k-1+4k+4]+3}{4}$$

$$= \frac{3^{k+1}.[6k+3]+3}{4}$$

$$= \frac{3^{k+1}.3(2k+1)+3}{4} = \frac{(2k+1)3^{k+2}+3}{4}$$

= R.H.S.

∴ L.H.S. = R.H.S.
अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 17. $2^n > n$

हल-

मान लीजिए कि P(n) : $2^n > n$
n = 1 के लिए $2^1 > 1$, अतः P(1) सत्य है।

हम कल्पना करते हैं कि किसी धन पूर्णांक k के लिए P(k) सत्य है।
अर्थात् P(k) : $2^k > k$ ....(1)

अब हम सिद्ध करेंगे कि P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है।
समीकरण के दोनों पक्षों में 2 का गुणा करने पर हमें प्राप्त होता
$2.2^k > 2k$

अर्थात् $2^{k+1} > 2k = k + k > k + 1$
इसलिए P(k + 1) सत्य है। जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए P(n) सत्य है।

प्रश्न 18. $(1 + x)^n \geq (1 + nx), x > 0$

हल- मान लीजिए कि दिया गया कथन P(n) है।

अर्थात् P(n) : $(1 + x)^n \geq (1 + nx), x > 0$ के लिए
जब n = 1, P(1) सत्य है क्योंकि $(1 + x) \geq (1 + x)$ जो $x > 0$ के लिए सत्य है।

हम कल्पना करते हैं कि P(k) : $(1 + x)^k \geq (1 + kx), x > 0$ सत्य है। .....(1)
अब हम सिद्ध करेंगे कि P(k + 1) सत्य है, $x > 0$ के लिए, जब कभी P(k) सत्य है।
सर्वसमिका $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x)$ पर विचार करने पर .....(2)

दिया है कि $x > 0$, इस प्रकार $(1 + x) > 0$.
∴ $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$ का प्रयोग कर हम देखते हैं।

$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx) (1 + x)$
अर्थात् $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx + kx^2)$. .....(3)

यहाँ k एक प्राकृत संख्या है और $x^2 \geq 0$ इस प्रकार $kx^2 \geq 0$. इसलिए ।
$(l + x + kx + kx^2) \geq (1 + x + kx)$,

इस प्रकार हमें प्राप्त होता है।
$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx)$

अर्थात् $(1 + x)^{k+1} \geq [1 + (1 + k)x]$
इस प्रकार, कथन (2) सिद्ध होता है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए P(n) सत्य है।

प्रश्न 19. $1 + 2 + ... + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

हल-

मान्त कि P(n) : $1 + 2 + 3 + ... + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$
सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है। ∴ n = 1 के लिए

$$1 < \frac{1}{8}(2 \times 1 + 1)^2$$

या $1 < \frac{9}{8}$ जो कि सत्य है।

L.H.S. = R.H.S.

अत: P(1) सत्य है।

माना कि P(k) सत्य होगा। अत:

$$1 + 2 + 3 + ... + k < \frac{1}{8}(2k + 1)^2 \quad .....(1)$$

सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य है। इसके लिए

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) < \frac{1}{8}[2(k + 1) + 1]^2$$

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) < \frac{1}{8}(2k + 3)^2$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों में k + 1 जोड़ने पर

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) < \frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1)$$

$$\therefore \quad \text{L.H.S.} < \frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1)$$

या $< \frac{1}{8}\ [(2k + 1)^2 + 8(k + 1)]$

$< \frac{1}{8}\ [4k^2 + 1 + 4k + 8k + 8]$

$< \frac{1}{8}\ [4k^2 + 12k + 9]$

$< \frac{1}{8}\ (2k + 3)^2$

L.H.S. = R.H.S.
अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 20. $x^{2n} – y^{2n}$, (x + y) से भाज्य है।

हल-

माना कि P(n) : $x^{2n} – y^{2n}$, (x + y) से भाज्य है।
सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है। अतः n = 1 के लिए

$x^{2n} – y^{2n} = x^{2.1} – y^{2.1} = x^2 – y^2$ जो कि (x + y) से भाज्य है।
L.H.S. = R.H.S.

अतः P(1) सत्य है।

माना कि P(k) भी सत्य होगा। अतः
$x^{2k} – y^{2k}$ भी x + y से भाज्य है।

सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य है। इसके लिए

$x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$

$x^{2k+2} - y^{2k+2}$

$\therefore \quad x^{2k+2} - y^{2k+2}$

$= x^{2k} . x^2 - y^{2k} . y^2$

$= x^2 . x^{2k} - y^2 . y^{2k}$

$= x^2y^{2k}$ जोड़ने व घटाने पर

$= x^2 . x^{2k} - x^2y^{2k} + x^2y^{2k} - y^2y^{2k}$

$= \underbrace{x^2(x^{2k} - y^{2k})}_{X} + \underbrace{y^{2k}(x^2 - y^2)}_{Y}$

X तथा Y दोनों ही x + y से भाज्य हैं अतः X + Y भी x + y से भाज्य होगा।
अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 21. $2^{3n} - 1$, 7 से भाज्य है।

हल-
माना कि P(n) : $2^{3n} - 1$, 7 से भाज्य है।

सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है । अतः n = 1 के लिए
$2^{3.1} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ जो कि 7 से भाज्य है।
LHS = RHS

अतः P(1) सत्य है।
माना कि P(K) सत्य है। अत: $2^{3k} - 1$ भी 7 से भाज्य है।

सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य है इसके लिए
$P(k + 1) = 2^{3(k+1)} - 1$
$= 2^{3k+3} - 1 = 2^3. 2^{3k} - 1$
$= 2^3(2^{3k} - 1) + 7$

किन्तु $(2^{3k} - 1)$ जो कि 7 से भाज्य है।
इसलिए $2^3(2^{3k} - 1) +7$ भी 7 से भाज्य होगा।

अतः P(k + 1) सत्य है।
इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 22. $10^n + 3.4^{n+2} + 5$, 9 से भाज्य है।

हल-

माना कि P(n) : $10^n + 3.4^{n+2} + 5$, 9 से भाज्य है।
सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है। अतः n = 1 के लिए

$P(1) = 10^1 + 3.4^{1+2} + 5$
$= 10 + 3 x 64 + 5$
$= 10 + 192 + 5 = 207$

जो कि 9 से भाज्य है।
LHS = RHS
अतः P(1) सत्य है।

माना कि P(k) भी सत्य होगा अतः
$10^k + 3.4^{k+2} + 5$, भी 9 से भाज्य है। ....(1)
सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य है। इसके लिए।

$10^{k+1} + 3.4^{(k+1)+2} + 5$
$= 10^k.10^1 + 3.4^{k+2} + 4^1 + 5$
$= 10.10^k = 12.4^{k+2} + 5$
$= 10.10^k + 30.4^{k+2} – 18.4^{k+2} + 50 – 45$
$= 10(10^k + 3.4^{k+2} + 5) – 9(2.4^{k+2} + 5)$

समीकरण (1) से $10^k + 3.4^{k+2} + 5$, 9 से भाज्य है और
संख्या $9(2.4^{k+2} + 5)$ भी 9 से भाज्य है।

अतः $10(10^k + 3.4^{k+2} + 5) – 9(2.4^{k+2} + 5)$, 9 से 9 भाज्य होगी ।
इसलिए P(k + 1) सत्य है जबकि P(k) सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।।

प्रश्न 23. $41^n – 14^n$ संख्या 27 का एक गुणज है।

हल- माना कि P(n) : $41^n – 14^n$, संख्या 27 का एक गुणज है।

सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है। अतः n = 1 के लिए
$41^n - 14^n = 41^1 - 14^1 = 27$ जो कि 27 को एक गुणज है।
अतः P(1) सत्य है।

माना कि P(k) भी सत्य होगा। अतः
$41^k - 14^k$, 27 का एक गुणज है।
सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य है। या

$41^{k+1} - 14^{k+1}$, 27 का एक गुणज है।

अर्थात् $(41)^{k+1} - (14)^{k+1}$

$$= 41(41)^k - 14(14)^k$$
$$= 41(41)^k - 41(14)^k + 41(14)^k - 14(14)^k$$
$$= 41[(41)^k - (14)^k] + 41(14)^k - 14(14)^k$$
$$= 41[(41)^k - (14)^k] + (14)^k [41 - 14]$$
$$= \underbrace{41[(41)^k - (14)^k]}_{x} + \underbrace{(14)^k \times 27}_{y}$$

यहाँ x तथा y दोनों ही 27 की गुणज हैं अत: x + y भी 27 की गुणज होगी।

अतः x + y, 27 की गुणज है।
अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 24. $(2n + 7) < (n + 3)^2$

हल- माना कि P(n) : $(2n + 7) < (n + 3)^2$

सिद्ध करना है कि P(1) सत्य है। अतः n = 1 के लिए।
$(2n + 7) < (n + 3)^2$
$(2 \times 1 + 7) < (1 + 3)^2$
9 < 16 जो कि सत्य है।

अतः P(1) सत्य है।
माना कि P(k) भी सत्य होगा। अतः

$2k + 7 < (k + 3)^2$

सिद्ध करना है कि P(k + 1) सत्य है। इसके लिए
$2(k + 1) + 7 < (k + 1 + 3)^2$
$2k + 9 < (k + 4)^2$

माना गया है कि $2k + 7 < (k + 3)^2$
दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर
$2k + 7 + 2 < (k + 3)^2 + 2$
$2k + 9 < k^2 + 9 + 6k + 2$
$2k + 9 < k^2 + 6k + 11$ ....(i)

अब $k^2 + 6k + 11 < k^2 + 8k + 16$
या $k^2 + 6k + 11 < (k + 4)^2$ ......(ii)

समीकरण (i) व (ii) से
$2k + 9 < (k + 4)^2$
अतः P(k + 1) सत्य है।

इस प्रकार P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत संख्याओं N के लिए कथन P(n) सत्य है।

प्रश्न 25.

$$1^2 + 2^2 + \dots\dots + n^2 > \frac{n^3}{3}$$

हल- मान लीजिए कि दिया गया कथन P(n) है,

अर्थात् $P(n) : 1^2 + 2^2 + \dots\dots + n^2 > \frac{n^3}{3}, n \in N$

यहाँ पर n = 1 के लिए, P(n) सत्य है क्योंकि P(1)

$: 1^2 > \frac{1^3}{3}$

अब हम कल्पना करते हैं कि P(k) सत्य है,

अर्थात् $P(k) : 1^2 + 2^2 + \dots\dots + k^2 > \frac{k^3}{3}$ .....(1)

अब हम सिद्ध करेंगे कि P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। हमें प्राप्त होता है

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2) + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2$$

[(1) के प्रयोग से]

$$= \frac{1}{3}k^3 + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{3}[k^3 + 3k^2 + 6k + 3]$$

$$= \frac{1}{3}[(k+1)^3 + 3k + 2] > \frac{1}{3}(k+1)^3$$

इस प्रकार P(k + 1) सत्य हुआ जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन द्वारा $n \in N$ के लिए P(n) सत्य है।