6

क्रमचय तथा संचय
(Permutation and Combination)

6.01 गुणन का आधारभूत सिद्धांत (Fundamental principle of multiplication)

माना कि कोई घटना A,m प्रकार से और घटना B,n प्रकार से घटित हो सकती है एवं माना कि घटना A और B आपस में संबंधित नहीं हैं। अर्थात् घटना B का n प्रकार घटित होना घटना A के परिणाम पर निर्भर नहीं है। तब दोनों घटनाएँ A और B संयुक्त रूप से $m \times n$ प्रकार से घटित हो सकती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: एक कक्षा में 10 लड़कें एवं 8 लड़कियाँ हैं। किसी समारोह के लिए अध्यापक, एक लड़का तथा एक लड़की का चयन करना चाहता है। तब लड़का तथा लड़की संयुक्त रूप से कुल $10 \times 8 = 80$ प्रकार से चुने जा सकते हैं।

उदाहरण 2: माना कि दो प्रश्न A और B क्रमशः 2 तथा 3 प्रकार से हल किए जा सकते हैं, तो A और B (संयुक्त रूप से) कुल $2 \times 3 = 6$ प्रकार से हल किए जा सकते हैं।

उदाहरण 3: तीन व्यक्ति अजमेर आकर ठहरते हैं व उनके ठहरने के लिए 6 होटल है। यदि इनमें से प्रत्येक भिन्न होटल में रूकें, तो वे अजमेर में कितने प्रकार से ठहर सकते हैं?

हलः पहला व्यक्ति 6 होटल में से किसी एक में ठहर सकता है और यह कार्य इस प्रकार से 6 प्रकार से हो सकता है। अब यदि वह किसी एक विशेष होटल में ठहर गया तो दूसरा व्यक्ति शेष 5 होटल में से किसी एक होटल को चुन सकता हैं इस प्रकार प्रथम व्यक्ति के एक चुनाव के साथ–साथ दूसरे के लिए 5 विधियाँ हैं। अतः प्रथम व्यक्ति 6 चुनाव विधियों के लिए दोनों व्यक्तियों की 6×5 विधियाँ होंगी। अतः जब दूसरा व्यक्ति भी इन होटल मे से एक अपने लिए चुन लेता है तो तीसरे व्यक्ति को शेष 4 होटल में से एक को चुनना होगा, जो कि वह यह कार्य 4 प्रकार से कर सकता है। अतः प्रथम व दूसरे व्यक्ति की प्रत्येक एक चुनाव विधि के साथ तीसरे व्यक्ति के लिए 4 चुनाव विधियाँ हैं। अतः तीनों व्यक्तियों के ठहरने के लिए चयन की कुल विधियाँ $6 \times 5 \times 4 = 120$ होंगी।

उदाहरण 4: माना कि जोधपुर तथा जयपुर के बीच 5 रेलगाड़ियाँ आती–जाती है। एक व्यक्ति जोधपुर से जयपुर किसी एक रेलगाड़ी से जाकर वापस जयपुर से जोधपुर किसी अन्य रेलगाड़ी से आना चाहता है। वह कितनें प्रकार से यह यात्रा कर सकता है?

हलः यात्रा के दो भाग हैः

(i) जोधपुर से जयपुर की यात्रा

(ii) जयपुर से जोधपुर की यात्रा

व्यक्ति यात्रा के प्रथम भाग को 5 प्रकार से सम्पादित कर सकता है तथा द्वितीय भाग 4 प्रकार से। अतः यात्रा करने की कुल विधियाँ $5 \times 4 = 20$ होंगी।

6.02 योग का आधारभूत सिद्धांत (Fundamental principle of addition)

माना कि कोई घटना A, m प्रकार से और घटना B, n प्रकार से घटित हो सकती है, जबकि दोनों घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सकती है। तब घटना A या B (दोनों में से कम से कम एक) $(m + n)$ प्रकार से घटित हो सकती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 5: एक कक्षा में 10 लड़कें एवं 8 लड़कियाँ हैं। किसी समारोह के लिए अध्यापक, एक लड़का या एक लड़की का चयन करना चाहता है। तब लड़का या लड़की को कुल $10 + 8 = 18$ प्रकार से चुना जा सकता हैं।

उदाहरण 6: माना कि दो प्रश्न A और B क्रमशः 2 तथा 3 प्रकार से हल किए जा सकते हैं, तो A या B (दोनों में से कम से कम एक) कुल $2 + 3 = 5$ प्रकार से हल किए जा सकते हैं।

6.03 क्रमगुणित (Factorial) :

प्रथम n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल को क्रमगुणित n कहते हैं एवं इसे $n!$ या $\underline{|n}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

अर्थात् $n! = 1.2.3.......(n-1).n$

इस प्रकार, $3! = 1.2.3 = 6,\ 4! = 1.2.3.4 = 24,\ 5! = 1.2.3.4.5 = 120$ इत्यादि।

$$n! = 1.2.3.....(n-1).n$$
$$= \{1.2.3.....(n-1)\}.n = \{(n-1)!\}.n$$

इस प्रकार, $n! = n.(n-1)!$

उदाहरणार्थः $8! = 8(7)!,\ 5! = 5(4)!$

टिप्पणीः **1.** $0! = 1$.

2. उचित भिन्न अथवा ऋणात्मक पूर्णांक का क्रमगुणित परिभाषित नहीं है। अर्थात् केवल पूर्ण संख्या का ही क्रमगुणित परिभाषित है।

6.04 क्रमचय (Permutation) :

दी हुई वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक साथ लेकर उन्हें जितने भिन्न–भिन्न क्रमों या विन्यासों (arrangements) में रखा जा सकता है, उनमें से प्रत्येक क्रम को **क्रमचय** कहते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 7: यदि A, B, C तीन वस्तुएँ हैं, तो इनमें से कोई भी दो के चयन से निम्नलिखित 6 क्रमचय बनेंगे:

AB, BC, CA, BA, CB, AC

यहाँ पर $AB \neq BA,\ AC \neq CA$ तथा $BC \neq CB$ है। अर्थात् यहाँ पर क्रम का महत्व है, क्रम बदलने से दूसरा क्रमचय बन जाता है।

उदाहरण 8: चार अक्षरों a, b, c, d मे से तीन भिन्न अक्षरों के निम्नलिखित 24 क्रमचय बनेंगे:

abc	*abd*	*bcd*	*acd*
acb	*adb*	*bdc*	*adc*
bca	*bda*	*cbd*	*cad*
bac	*bad*	*cdb*	*cda*
cab	*dab*	*dcb*	*dac*
cba	*dba*	*dbc*	*dca*

सर्वप्रथम चार अक्षरों में से तीन का चयन करके फिर उनको सभी संभावित प्रकार से व्यवस्थित करने से ये क्रमचय प्राप्त होते हैं।

6.05 क्रमचयोंकी संख्या (Number of Permutations) :

प्रमेय 1: n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं के चयन के क्रमचयों की संख्या है:

$$n(n-1)(n-2).....\{n-(r-1)\}$$

अर्थात् $^nP_r = n(n-1)(n-2).....(n-r+1)$.

प्रमाणः मानाकि हमारे पास कुल n विभिन्न वस्तुएँ हैं और हमें r स्थानों को भरना है। पहले स्थान के लिए n वस्तुओं में से किसी भी एक वस्तु को चुना जा सकता है। अतः पहले स्थान के लिए वस्तु को चुनने की विधियाँ n हैं। अब दूसरे स्थान के लिए शेष $(n-1)$ वस्तुओं में से ही चुनना होगा। अतः दूसरे स्थान के लिए वस्तु को चुनने की विधियाँ $(n-1)$ हैं। फलतः गुणन के आधारभूत सिद्धांत से पहले दो स्थान $n(n-1)$ विधियों से भरे जा सकते हैं। इन दो स्थानों के भरने के बाद तीसरे स्थान के लिए शेष $(n-2)$ वस्तुओं में से ही चुनना होगा। अतः तीसरे स्थान के लिए वस्तु को चुनने की विधियाँ $(n-2)$ हैं। इसलिए पहले तीन स्थान $n(n-1)(n-2)$ विधियों से भरे जा सकते हैं। इसी प्रकार से इस क्रिया को आगे बढ़ाते हुए r स्थानों को भरने की विधियाँ $n(n-1)(n-2).....\{n-(r-1)\}$ होंगी। इस संख्या को ^nP_r से व्यक्त करते हैं। अतः n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं के चयन के क्रमचयों की संख्या है:

$$^nP_r = n(n-1)(n-2).....(n-r+1).$$

टिप्पणीः कभी–कभी वस्तुओं के प्रयोग पर प्रतिबंध भी लगाए जाते हैं, जो कि आगे उदाहरणों से स्पष्ट होंगे।

उपप्रमेय 1: ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

प्रमाणः प्रमेय 1 से हम जानते हैं कि

$$ {}^nP_r = n(n-1)(n-2).....(n-r+1) $$

$$ = \frac{n(n-1)(n-2).....\{n-(r-1)\}(n-r)\{n-(r+1)\}.....3.2.1}{(n-r)\{n-(r+1)\}.....3.2.1} = \frac{n!}{(n-r)!}. $$

उपप्रमेय 2: ***n*** वस्तुओं में से सबको एक साथ लेने पर क्रमचयों की संख्या ***n!*** है।

प्रमाणः प्रमेय 1 से $\quad {}^nP_n = n(n-1)(n-2).....(n-n+1) = n(n-1)(n-2).....1 = n!$

उपप्रमेय 3: $0! = 1$

प्रमाणः उपप्रमेय 1 से हम जानते हैं कि $\quad {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

इसमें $r = n$ रखने पर, $\quad {}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!}$

या $\quad n! = \frac{n!}{0!} \quad \therefore \quad 0! = 1.$ $\qquad$ [$\because$ उपप्रमेय 2 से ${}^nP_n = n!$]

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 9: निम्नलिखित को सिद्ध कीजिएः

(i) ${}^nP_r = n.{}^{n-1}P_{r-1} = n(n-1).{}^{n-2}P_{r-2}$ $\qquad$ **(ii)** ${}^nP_0 = 1$

(iii) ${}^nP_n = {}^nP_{n-1}$ $\qquad$ **(iv)** ${}^nP_r = (n-r+1).{}^nP_{r-1}$

हलः (i) ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\qquad$ [उपप्रमेय 1 से]

$$ = \frac{n(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!} = n.{}^{n-1}P_{r-1} \qquad (1) $$

पुनः (1) से $\quad {}^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)!}{\{(n-2)-(r-2)\}!} = n(n-1).{}^{n-2}P_{r-2}$

(ii) ${}^nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ $\qquad$ **(iii)** ${}^nP_n = n!$ $\qquad$ [उपप्रमेय 2 से]

तथा $\quad {}^nP_{n-1} = \frac{n!}{\{n-(n-1)\}!} = \frac{n!}{1!} = n!$ $\quad$ अतः $\quad {}^nP_n = {}^nP_{n-1}$

(iv) दक्षिण पक्ष $= (n-r+1).{}^nP_{r-1}$

$$ = \frac{(n-r+1)\,n!}{\{n-(r-1)\}!} = \frac{(n-r+1)\,n!}{(n-r+1)!} = \frac{(n-r+1)\,n!}{(n-r+1)(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} $$

$$ = {}^nP_r = \text{वाम पक्ष} $$

उदाहरण 10: यदि $^{10}P_r = 5040$ हो, तो ***r*** का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $^{10}P_r = 5040$ (दिया हुआ है)

$$\Rightarrow \frac{10!}{(10-r)!} = 10 \times 504$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{(10-r)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{(10-r)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!}$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{(10-r)!} = \frac{10!}{6!}$$

$$\Rightarrow (10-r)! = 6! \Rightarrow 10 - r = 6 \Rightarrow r = 4$$

द्वितीय विधि: $^{10}P_r = 5040$ (दिया हुआ है)

$\Rightarrow 10.\,^{9}P_{r-1} = 5040 \quad \Rightarrow \quad ^{9}P_{r-1} = 504$ $\quad [\because \,^{n}P_r = n.\,^{n-1}P_{r-1}]$

$\Rightarrow 9.\,^{8}P_{r-2} = 504 \quad \Rightarrow \quad ^{8}P_{r-2} = 56$

$\Rightarrow 8.\,^{7}P_{r-3} = 56 \quad \Rightarrow \quad ^{7}P_{r-3} = 7$

$\Rightarrow 7.\,^{6}P_{r-4} = 7 \quad \Rightarrow \quad ^{6}P_{r-4} = 1 \Rightarrow r - 4 = 0 \Rightarrow r = 4$ $\quad [\because \,^{n}P_0 = 1]$

उदाहरण 11: n का मान ज्ञात कीजिए, यदि:

(i) $^{n}P_5 : {}^{n}P_3 = 2:1$ **(ii)** $2.\,^{5}P_3 = {}^{n}P_4$

हल: (i) $\frac{^{n}P_5}{^{n}P_3} = \frac{2}{1}$ (दिया हुआ है)

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-5)!} \times \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = 2$$

$$\Rightarrow (n-3)(n-4) = 2 \quad \Rightarrow \quad (n-3)(n-4) = (5-3)(5-4)$$

$\Rightarrow n = 5$ [दोनों ओर तुलना करने से]

(ii) $2.\,^{5}P_3 = {}^{n}P_4$ (दिया हुआ है)

$$\Rightarrow {}^{n}P_4 = 2.\,^{5}P_3$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = 2.\frac{5!}{2!}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 5!$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)(n-3) = 5.4.3.2.1$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)(n-3) = 5(5-1)(5-2)(5-3)$$

$\Rightarrow n = 5$ [दोनों ओर तुलना करने से]

उदाहरण 12: DELHI शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं, यदि

(i) सभी अक्षर लिए जाए **(ii) 3** अक्षर ही लिए जाए **(iii)** प्रत्येक शब्द D से प्रारंभ हो

(iv) प्रत्येक शब्द D से आरंभ तथा I पर समाप्त हो **(v)** दोनों स्वर साथ–साथ आए **(vi)** प्रत्येक शब्द दोनों स्वर से प्रारंभ हो

हलः DELHI में सभी 5 अक्षर भिन्न–भिन्न हैं।

(i) सभी 5 अक्षर लेकर क्रमचय (शब्द) बनाए जाए, तो शब्दों की कुल संख्या

$$= {}^5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

(ii) यदि 5 में से 3 अक्षर ही लिए जाए, तो शब्दों की संख्या

$$= {}^5P_3 = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

(iii) प्रत्येक शब्द के प्रारंभ में D आता है, तो फिर D स्थिर हो जाता है और इसलिए हमें केवल 4 अक्षरों को ही व्यवस्थित करना है। अतः शब्दों की संख्या होगीः

$${}^4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता है

1 4 3 2 1 = $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

↑D				

(स्थिर)

(iv) प्रत्येक शब्द D से प्रारंभ हो तथा I पर समाप्त हो, तो फिर D तथा I स्थिर हो जाते हैं और इसलिए हमें केवल 3 अक्षरों को ही व्यवस्थित करना है। अतः शब्दों की संख्या होगीः

$${}^3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता हैः

1 3 2 1 1 = $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

↑D				↑I

(स्थिर) (स्थिर)

(v) जब दोनों स्वर साथ–साथ रखने हैं, तो इनको एक अक्षर (EI) की तरह मान सकते हैं। अतः हमारे पास 4 अक्षर होंगे जिन्हें ${}^4P_4 = 4! = 24$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं लेकिन (EI) में भी दो अक्षर है जिनको साथ–साथ रखने में (EI) या (IE) ले सकते हैं। अर्थात् इसे भी $2! = 2$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। इस प्रकार कुल शब्दों की संख्या $= 2 \times 24 = 48$

(vi) प्रत्येक शब्द के प्रारंभ में दोनों स्वर आते हैं, तो फिर E तथा I (प्रथम दो स्थान पर) स्थिर हो जाते हैं और इसलिए हमें केवल 3 अक्षरों को ही व्यवस्थित करना है, जिन्हें ${}^3P_3 = 3! = 6$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। लेकिन स्वर E तथा I को भी प्रथम दो स्थान पर $2! = 2$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। इस प्रकार कुल शब्दों की संख्या $= 2 \times 6 = 12$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता हैः

E	I	3	2	1	$= 3 \times 2 \times 1 = 6$	कुल 12 शब्द
I	E	3	2	1	$= 3 \times 2 \times 1 = 6$	

उदाहरण 13: 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकों में से कोई चार अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है, यदि

(i) अंकों की पुनरावृत्ति नहीं है, **(ii)** अंकों की पुनरावृत्ति होती है।

हलः (i) 6 अंकों में से 4 अंकों को लेकर बनने वाली संख्याएँ होंगीः

$${}^6P_4 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता हैः

3	4	5	6

$= 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$

इकाई के स्थान पर 6 अंकों में से किसी एक को चुना जा सकता है। दहाई के स्थान पर शेष 5 अंकों में से किसी एक को चुना जा सकता है, क्योंकि यहाँ अंकों की पुनावृत्ति नहीं करनी है।

इसी प्रकार सैंकड़ा तथा हजार वाले अंक के स्थान पर क्रमशः शेष 4 तथा 3 अंकों में से किसी एक को चुना जा सकता है।

(ii) हमें 6 में से 4 अंकों की संख्या बनानी है, लेकिन अंकों की पुनरावृत्ति हो सकती है। अतः संख्या बनाने के लिए इकाई का अंक 6 अंकों में से किसी भी एक अंक को चुना जा सकता है। इस प्रकार से इकाई के अंको को 6 प्रकार से चुना जा सकता है। अब क्योंकि अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है अतः दहाई, सैंकड़ा व हजार वाले अंक के स्थान पर भी 6, 6, 6 प्रकार से अंक चुन सकते हैं।

अतः कुल संख्याएँ होंगी $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$.

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता है:

6	6	6	6	$= 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296.$

उदाहरण 14: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** अंकों से 6000 तथा 7000 के मध्य कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है, यदि किसी अंक को भी एक से अधिक बार प्रयोग नहीं करें तथा इसमें कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य होगी।

हल: 6000 से 7000 के मध्य प्रत्येक संख्या चार अंकों से बनती है और यह संख्या अंक 6 से आरंभ होनी चाहिए। अतः हमें शेष 7 अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 में से केवल 3 अंकों को ही चुनकर व्यवस्थित करना है, क्योंकि यहाँ अंकों की पुनरावृत्ति नहीं करनी है।

अतः अभीष्ट संख्याओं की गिनती $= {}^7P_3 = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानों से समझा जा सकता है

1	7	6	5	$= 1 \times 7 \times 6 \times 5 = 210$
↑6				
(स्थिर)				

अब, दूसरे भाग में हम देखते हैं कि केवल वे ही संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी जिनके अंत में अंक 5 होगा। अतः 4 अंकों वाली संख्याओं में अंक 6 आरंभ के स्थान पर तथा अंक 5 अंतिम स्थान पर निश्चित होंगे। इस प्रकार हमें शेष 6 अंकों में से केवल 2 अंकों को ही चुनकर व्यवस्थित करना है।

अतः अभीष्ट संख्याओं की गिनती $= {}^6P_2 = \frac{6!}{4!} = 6 \times 5 = 30$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता है

1	6	5	1	$= 1 \times 6 \times 5 \times 1 = 30$
↑6			↑5	
(स्थिर)			(स्थिर)	

6.06 उन वस्तुओं के क्रमचय जिनमें सभी भिन्न नहीं हों
(Permutations of those objects in which not all distinct)

प्रमेय 2: माना कि कुल n वस्तुएँ हैं, जिनमें p वस्तुएँ एक प्रकार की, q वस्तुएँ दूसरे प्रकार की, r वस्तुएँ तीसरे प्रकार की तथा शेष वस्तुएँ भिन्न–भिन्न प्रकार की हो, तो सभी को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों की संख्या होगी:

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

प्रमाण: माना कि हमारे पास कुल n वस्तुएँ हैं। उनमें से p एक प्रकार की, q दूसरे प्रकार की, r तीसरे प्रकार की व शेष भिन्न–भिन्न हैं। मानाकि अभीष्ट क्रमचयों की संख्या x है। यदि इन क्रमचयों में से एक क्रमचय लें और यदि p समान वस्तुओं को p असमान वस्तुओं से बदल दें, तो अब $p!$ नये क्रमचय बनेंगे।

इसी प्रकार क्रमशः q तथा r समान वस्तुओं को q तथा r असमान वस्तुओं से बदल दें, तो अब $q!$ तथा $r!$ नये क्रमचय बनेंगे।

इस प्रकार, यदि उपर्युक्त प्रतिस्थान एक साथ किए जाए, तो हमें प्रत्येक क्रमचय से $p! \times q! \times r!$ क्रमचय प्राप्त होंगे। इसलिए x क्रमचयों से कुल $x \times p! \times q! \times r!$ क्रमचय प्राप्त होंगें।

अब, क्योंकि वस्तुएँ भिन्न–भिन्न हो गई हैं और सभी को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों की संख्या $n!$ है अतः

$$x \times p! \times q! \times r! = n! \quad \therefore \quad x = \frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

टिप्पणी: माना कि कुल n वस्तुएँ हैं, जिनमें p वस्तुएँ एक प्रकार की, q वस्तुएँ दूसरे प्रकार की, r वस्तुएँ तीसरे प्रकार की तथा $p + q + r = n$ हो, तो सभी को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों की संख्या भी उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार ही होगी:

6.07 वृत्तीय क्रमचय (Circular permutations) :

अभी तक हमनें वस्तुओं के एक पंक्ति में क्रमचयों के बारे में अध्ययन किया हैं इस तरह के क्रमचयों को सामान्यतः रैखिक क्रमचय कहते हैं। यदि हम n विभिन्न वस्तुओं को एक वृत्त के चारों ओर व्यवस्थित करें तो ऐसे विन्यास को वृत्तीय (चक्रीय) क्रमचय कहते हैं। प्रत्येक रैखिक क्रमचय में एक आरंभ तथा एक अंत होता है, लेकिन वृत्तीय क्रमचय में ऐसा नहीं है। इस प्रकार, एक वृत्तीय

क्रमचय में किसी एक वस्तु को स्थिर मानकर शेष वस्तुओं को रैखिक क्रमचय की तरह व्यवस्थित करते हैं।

प्रमेय 3: n विभिन्न वस्तुओं के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $(n-1)!$ होती है।

प्रमाण: वृत्तीय क्रमचय में कोई सिरा नहीं होता हैं इसलिए वृत्तीय क्रमचय में हमें केवल वस्तुओं की सापेक्ष स्थिति पर ध्यान देना पड़ता हैं मानाकि हमें n वस्तुओं को एक वृत्त के आकार (जैसे गोल मेज इत्यादि) में व्यवस्थित करना है। n वस्तुओं में से सर्वप्रथम एक वस्तु लेकर उसे एक निश्चित स्थान पर रखते हैं। फिर शेष $(n-1)$ वस्तुओं को इस वस्तु के सापेक्ष $(n-1)!$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं।

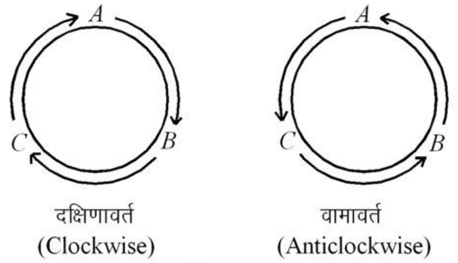
अतः n वस्तुओं को एक साथ लेने पर वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $(n-1)!$ होगी।

टिप्पणी: उपर्युक्त प्रमेय में दक्षिणावर्त क्रम *(clockwise order)* तथा वामावर्त क्रम *(anticlockwise order)* के विन्यास को भिन्न–भिन्न क्रमचय माना गया है।

6.08 दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रमचयों में अंतर
(Difference between clockwise and anticlockwise permutations)

A, B, C अक्षरों के निम्नलिखित 6 रैखिक क्रमचय बनते हैं:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA



चित्र 6.1

(i) ABC, BCA, CAB के अवयवों का एक ही क्रम (दक्षिणावर्त क्रम) है। अतः इन तीन रैखिक क्रमचयों को चक्रीय क्रमचयों में एक ही क्रमचय माना जाता है।

(ii) ACB, CBA, BAC के अवयवों का एक ही क्रम (वामावर्त क्रम) है। अतः इन तीन रैखिक क्रमचयों को चक्रीय क्रमचयों में एक ही क्रमचय माना जाता है।

अतः A, B, C अक्षरों के कुल चक्रीय क्रमचयों की संख्या 2 है। यदि दक्षिणावर्त एवं वामावर्त चक्रीय क्रमचयों में कोई अंतर नहीं माना जाए, तो A, B, C अक्षरों के कुल चक्रीय क्रमचयों की संख्या 1 है।

अतः यदि दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रमचयों को एक ही समझा जाए, तो n विभिन्न वस्तुओं में से सभी वस्तुएँ एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों की संख्या $\frac{(n-1)!}{2}$ होगी।

टिप्पणी : मणियों या फूलों के हार में दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रम में अंतर नहीं किया जा सकता है। अतः यहाँ दोनों क्रम में अंतर नहीं मानते हैं। इसलिए चक्रीय क्रमचयों की संख्या में दो का भाग देते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 15: MATHEMATICS शब्द के अक्षरों से बने विभिन्न शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ पर कुल अक्षर 11 है। इनमें से दो M, दो A व दो T के अक्षर है। अतः अभीष्ट संख्या होगी:

$$\frac{11!}{2!\,2!\,2!}$$

उदाहरण 16: 7 व्यक्ति एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं?

हल: सर्वप्रथम हम एक व्यक्ति का मेज के पास एक स्थान निश्चित करते हैं। फिर शेष 6 व्यक्तियों को 6! विधियों से बैठा सकते हैं। अतः अभीष्ट संख्या होगी

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

उदाहरण 17: 7 विविध मोती एक छल्ले में कितने प्रकार से पिरोए जा सकते हैं?

हल: यहाँ पर यदि मोती दक्षिणावर्त दिशा में पिराए जाते हैं, तो छल्ले को दूसरी ओर बदलने पर वे वामावर्त दिशा में हो जाते हैं। इस प्रकार दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं से एक ही क्रम प्राप्त होता है। अतः विन्यासों की कुल संख्या होगी

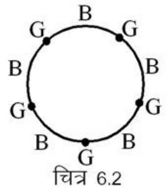
$$\frac{(7-1)!}{2}=\frac{6!}{2}=\frac{720}{2}=360$$

उदाहरण 18: 10 व्यक्ति गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि सदैव एक से पड़ौसी नहीं हो।

हल: 10 व्यक्तियों को गोल मेज के चारों ओर बैठाने की कुल विधियाँ 9! हैं, लेकिन यहाँ दक्षिणावर्त क्रम एवं वामावर्त क्रम अलग–अलग नहीं रखे जा सकते है (चूँकि किसी एक दक्षिणावर्त क्रम की व्यवस्था के संगत वामावर्त क्रम की व्यवस्था में पड़ौसी एक से ही रहेंगे) हैं। अतः अभीष्ट संख्या $9!/2$ होगी।

उदाहरण 19: 5 लड़के और 5 लड़कियों को कितने प्रकार से एक गोल मेज के चारों ओर बैठाया जा सकता है, जबकि कोई दो लड़कियां एक साथ न बैठें?

हल: सर्वप्रथम गोल मेज के चारों ओर लड़कों को बिठाते हैं। 5 लड़कों को मेज के चारों ओर बिठाने की विधियाँ 4! हैं। लड़कों के मध्य 5 खाली स्थानों पर लड़कियों को बिठाने की विधियाँ 5! हैं। अतः अभीष्ट संख्या 4! × 5! होगी।



चित्र 6.2

उदाहरण 20: BHARAT शब्द के अक्षरों से कुल कितने शब्द बनाए जा सकते है, जिनमें **B** और **H** साथ–साथ नहीं आते हों?

हल: BHARAT शब्द में कुल 6 अक्षर हैं। इनमें A के दो अक्षर हैं। अतः BHARAT शब्द के अक्षरों से बनाए जाने वाले शब्दों की कुल संख्या $=6!/2!=360$

B तथा H को साथ–साथ रखने पर, इनको एक अक्षर (BH) की तरह मान सकते हैं। अतः हमारे पास 5 अक्षर ही रहेंगे जिनमें A के दो अक्षर हैं। अक्षर (BH) में भी दो अक्षर हैं, जिनको (BH) या (HB) ले सकते हैं, अर्थात् इसे भी 2! विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। इस प्रकार B तथा H के साथ–साथ आने वाले शब्दों की संख्या होगी:

$$2!\times 5!/2!=120$$

इसलिए B तथा H के साथ–साथ नहीं आने वाले शब्दों की संख्या

$$=360-120=240$$

प्रश्नमाला 6.1

1. n का मान ज्ञात कीजिए, जबकि:
   (i) ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 5 : 12$ (ii) ${}^{n}P_6 = 10.{}^{n}P_5$
   (iii) ${}^{56}P_{n+6} : {}^{54}P_{n+3} = 30800$ (iv) ${}^{6+n}P_2 : {}^{6-n}P_2 = 56 : 12$
2. ALLAHABAD शब्द के अक्षरों से बने विभिन्न शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए।
3. TRIANGLE शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं? इनमें से कितने शब्द T से आरंभ एवं E पर समाप्त होते हैं?
4. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से 3000 तथा 4000 के मध्य ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है, जो 5 से विभाज्य हैं।
5. अंको 0, 1, 2, 3, 4, 5 से छः अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है?
6. अंको 1, 2, 3, 4, 5, 6 से 1000 से छोटी तीन अंकों को कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है, जबकि अंको की पुनरावृति नहीं हो?
7. एक समिति के 15 सदस्य एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि सचिव, अध्यक्ष के एक ओर तथा उपसचिव दूसरी ओर बैठता है?
8. एक रेलवे लाइन पर 15 स्टेशन हैं। इसके लिए एक श्रेणी के कितने विभिन्न प्रकार के टिकट छपवाने चाहिए कि किसी भी स्टेशन से एक व्यक्ति इस लाइन के किसी अन्य स्टेशन का टिकट खरीद सके?
9. एक माला बनाने में 10 विभिन्न मोती कितने प्रकार से पिरोए जा सकते हैं, जबकि उनमें से चार विशेष मोती कभी भी पृथक नहीं रहे?
10. अंको 0, 1, 2, . . ., 9 से ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जो 6000 या इससे बड़ी तथा 7000 से छोटी हो और 5 से विभाज्य हो। जबकि किसी भी अंक की कितनी भी बार पुनरावृत्ति हो सकती है?
11. शब्द SCHOOL के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं, जबकि दोनों O साथ–साथ नहीं आते हों।

6.09 संचय (Combinations) :

दी हुई वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक साथ लेकर भिन्न–भिन्न क्रमों या विन्यासों (arrangement) में रखने के बारे में खड 6.04 में अध्ययन किया जा चुका है। कई बार हम दी हुई वस्तुओं में से कुछ वस्तुओं के केवल चयन में इच्छुक होते हैं चयन की गई वस्तुओं के क्रम में हमारी कोई रूचि नहीं होती है। उदाहरण के लिए एक विद्यार्थी पुस्तकालय में एक बार में तीन पुस्तकों का चयन करना चाहता है, एक कम्पनी 10 व्यक्तियों में से 3 का चयन करना चाहती हैं।

परिभाषा : दी हुई वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक साथ लेकर, (क्रम का ध्यान रखे बिना) बनने वाले समूहों में से प्रत्येक समूह को संचय कहते हैं। n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चयन को ${}^nC_r$ या $C(n,r)$ से प्रदर्शित किया जाता है। स्पष्टतः ${}^nC_r$ परिभाषित होगा, यदि $0 \le r \le n$.

उदाहरणार्थ : मान लों हम तीन वस्तुओं A, B तथा C में से दो वस्तुओं का चयन करना चाहते हैं, तो निम्नलिखित तीन संचय बनेंगे:

A, B; B, C; C, A.

यहाँ हम इनको निम्नलिखित प्रकार से नहीं लिखेंगे:

A,B; B,A; B,C,; C,B; C,A; A,C.

क्योंकि यहाँ हमारा उद्देश्य मात्र चयन का है, न कि इनके क्रम का।

क्रमचय एवं संचय में अंतर:

संचय में जितनी वस्तुएँ लेनी होती है, दी हुई वस्तुओं में से उतनी वस्तुओं को लेकर समूह बनाए जाते हैं, जबकि क्रमचय में प्रत्येक समूह की वस्तुओं के संभव विन्यास भी बनाए जाते हैं। क्रमचय में क्रम का ध्यान रखना बहुत जरूरी है, लेकिन संचय में क्रम का ध्यान नहीं रखा जाता है केवल समूह लेते हैं। जैसे कि संचय में AB तथा BA को एक ही समूह माना जाता है, जबकि क्रमचय में ये भिन्न–भिन्न माने जाते हैं। इस प्रकार क्रमचयों की संख्या संचयों की संख्या से अधिक होती है।

साधारणतया संचय निकालने की विधि समूह बनाने में, टीमें बनाने में, समितियाँ बनाने में, अक्षरों से शब्द बनाने इत्यादि में काम लाई जाती है।

6.10 प्रमेय 4: n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं को लेकर बनाए जाने वाले संचयों की संख्या होती है:

$$\frac{n!}{(n-r)!\ r!} \text{ अर्थात् } {}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

प्रमाण: यहाँ पर प्रत्येक संचय में r विभिन्न वस्तुएँ हैं और प्रत्येक समूह की r वस्तुएँ परस्पर $r!$ विधियों से व्यवस्थित हो सकती है। अतः ${}^nC_r$ संचयों की समस्त व्यवस्थाएँ (क्रमचय) $r! \times {}^nC_r$ होगी। अर्थात् n वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं के क्रमचयों की संपूर्ण संख्या $r! \times {}^nC_r$ होगी। लेकिन यह संख्या ${}^nP_r$ के बराबर भी होती है। अतः

$$r! \times {}^nC_r = {}^nP_r$$

या $${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!} \qquad \left[\because {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\right]$$

टिप्पणी 1. $${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

या $${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)(n-r)(n-r-1).....3.2.1}{\{(n-r)(n-r-1).....3.2.1\}\{1.2.3......r\}}$$

या $${}^nC_r = \frac{n(n-1)......(n-r+1)}{1.2......r}$$

2. $${}^nC_n = \frac{n!}{(n-n)!\ n!} = \frac{n!}{0!\ n!} = 1 \qquad [\because 0! = 1]$$

तथा $${}^nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!\ 0!} = \frac{n!}{n!\ 0!} = 1 \qquad \therefore \quad {}^nC_n = {}^nC_0 = 1$$

6.11 ^nC_r के गुणधर्म (Properties of ^nC_r) :

गुणधर्म I : $^nC_r = {}^nC_{n-r} \quad (0 \le r \le n)$

प्रमाणः दक्षिण पक्ष $= {}^nC_{n-r} = \dfrac{n!}{\{n-(n-r)\}!\,(n-r)!} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = {}^nC_r =$ वाम पक्ष

गुणधर्म II : $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r \quad (0 \le r \le n)$

प्रमाणः वाम पक्ष $= {}^nC_r + {}^nC_{r-1}$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,\{n-(r-1)\}!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left\{\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right\}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!} = {}^{n+1}C_r = \text{दक्षिण पक्ष}$$

गुणधर्म III : $^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow x = y$ या $x + y = n$

प्रमाणः $^nC_x = {}^nC_y$

$\Rightarrow$ $^nC_x = {}^nC_y = {}^nC_{n-y}$ [$\because$ $^nC_y = {}^nC_{n-y}$ गुणधर्म **I** से]

$\Rightarrow$ $x = y$

या $x = n - y$

$\Rightarrow$ $x = y$

या $x + y = n$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 21: व्यंजक $^{47}C_4 + \sum_{j=1}^{5} {}^{52-j}C_3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $^{47}C_4 + \sum_{j=1}^{5} {}^{52-j}C_3 = {}^{47}C_4 + {}^{51}C_3 + {}^{50}C_3 + {}^{49}C_3 + {}^{48}C_3 + {}^{47}C_3$

$= \left({}^{47}C_4 + {}^{47}C_3\right) + {}^{48}C_3 + {}^{49}C_3 + {}^{50}C_3 + {}^{51}C_3$

$= \left({}^{48}C_4 + {}^{48}C_3\right) + {}^{49}C_3 + {}^{50}C_3 + {}^{51}C_3$ $\left[\because {}^{47}C_4 + {}^{47}C_3 = {}^{48}C_4\right]$

$= \left({}^{49}C_4 + {}^{49}C_3\right) + {}^{50}C_3 + {}^{51}C_3$ $\left[\because {}^{48}C_4 + {}^{48}C_3 = {}^{49}C_4\right]$

$= \left({}^{50}C_4 + {}^{50}C_3\right) + {}^{51}C_3$ $\left[\because {}^{49}C_4 + {}^{49}C_3 = {}^{50}C_4\right]$

$= {}^{51}C_4 + {}^{51}C_3$ $\left[\because {}^{50}C_4 + {}^{50}C_3 = {}^{51}C_4\right]$

$= {}^{52}C_4$ $\left[\because {}^{51}C_4 + {}^{51}C_3 = {}^{52}C_4\right]$

उदाहरण 22: यदि $^nC_{15} = {^nC_8}$ हो, तो $^nC_{21}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $^nC_{15} = {^nC_8} \Rightarrow n = 15 + 8 = 23$ $\left[\because {^nC_x} = {^nC_y} \Rightarrow x + y = n\right]$

$\therefore$ $^nC_{21} = {^{23}C_{21}}$

$$= \frac{23!}{21!\,(23-21)!} = \frac{23!}{21!\;2!}$$

$$= \frac{23 \times 22}{2} = 23 \times 11 = 253.$$

उदाहरण 23: यदि $^{10}C_x = {^{10}C_{x+4}}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $^{10}C_x = {^{10}C_{x+4}} \Rightarrow x + x + 4 = 10 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3.$

टिप्पणीः कभी–कभी संचय कुछ प्रतिबंधों के तहत बनाने पड़ते हैं। जैसेः

(i) n विभिन्न वस्तुओं में से r को एक साथ लेकर संचयों की संख्या ज्ञात करना, जबकि p विशेष वस्तुएँ सर्वदा ली जाए। इसमें r वस्तुओं का समूह बनाने के लिए शेष $(n-p)$ वस्तुओं में से केवल $(r-p)$ वस्तुएँ ही चुननी पड़ेंगी। अतः अभीष्ट संख्या $^{n-p}C_{r-p}$ होगी।

(ii) यदि p विशेष वस्तुएँ कभी भी नहीं ली जाए, तो p वस्तुओं को अलग रखकर शेष $(n-p)$ वस्तुओं में से ही r वस्तुएँ चुननी पड़ेंगी। अतः अभीष्ट संख्या $^{n-p}C_r$ होगी।

(iii) कुछ प्रश्नों में संचय तथा क्रमचय दोनों की आवश्यकता पड़ती है। ऐसी स्थिति में पहले उचित संचय बनाते हैं और फिर उन्हें व्यवस्थित करते हैं।

उदाहरण 24: n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः n भुजाओं वाले बहुभुज में n शीर्ष हैं, तो इन शीर्षों मे से दो–दो को मिलाने वाली रेखाओं की संख्या $= {^nC_2} = \frac{n(n-1)}{2}$ होगी। लेकिन इनमें बहुभुज की n भुजाएँ भी शामिल है।

अतः विकर्णों की संख्या $= \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ होगी।

उदाहरण 25: 5 व्यंजनों एवं 4 स्वरों से 3 व्यंजन तथा 2 स्वर लेकर कुल कितने शब्द बनेंगे?

हलः पहले हम 5 व्यंजनों से 3 व्यंजन एवं 4 स्वरों से 2 स्वरों का चयन करेंगे, जो कि $^5C_3 \times {^4C_2}$ प्रकार से संभव है। अब शब्द बनाने के लिए अक्षरों को भी व्यवस्थित करना होगा तथा प्रत्येक संचय के $2 + 3 = 5$ अक्षर $5!$ विधियों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं। अतः शब्दों की अभीष्ट संख्या $^5C_3 \times {^4C_2} \times 5!$ होगी।

उदाहरण 26: 8 पुरूषों और 5 महिलाओं में से 6 सदस्यों की समिति बनानी है। यह समिति कितने प्रकार से बनाई जा सकती है, जबकि प्रत्येक समिति में

(i) केवल 2 पुरूष हों **(ii)** केवल 2 महिलाएँ हों

(iii) कम से कम दो महिलाएँ हों **(iv)** कम से कम दो पुरूष हों?

हलः (i) 8 पुरूषों में से केवल 2 पुरूष $^8C_2$ प्रकार से चुने जा सकते हैं तथा शेष 4 को 5 महिलाओं में से लेना हैं जो कि $^5C_4$ प्रकार से चुने जा सकते हैं।

अतः अभीष्ट संख्या $= {^8C_2} \times {^5C_4} = 28 \times 5 = 140$

(ii) 5 महिलाओं में से केवल 2 महिलाओं को $^5C_2$ प्रकार से चुन सकते हैं तथा शेष 4 को 8 पुरूषों में से लेना है जो कि $^8C_4$ प्रकार से चुने जा सकते हैं।

अतः अभीष्ट संख्या $= {^5C_2} \times {^8C_4} = 10 \times 70 = 700$

(iii) कम से कम दो महिलाओं को लेने के लिए निम्नलिखित प्रकार से चुनाव कर सकते हैं:

2 महिलाएँ व 4 पुरूषः 3 महिलाएँ व 3 पुरूष, 4 महिलाएँ व 2 पुरूष
5 महिलाएँ व 1 पुरूष अतः इनका चयन क्रमशः

$^5C_2 \times {}^8C_4;\ {}^5C_3 \times {}^8C_3;\ {}^5C_4 \times {}^8C_2;\ {}^5C_5 \times {}^8C_1$ प्रकार से कर सकते हैं।

अतः अभीष्ट संख्या

$= {}^5C_2 \times {}^8C_4 + {}^5C_3 \times {}^8C_3 + {}^5C_4 \times {}^8C_2 + {}^5C_5 \times {}^8C_1$

$= 700 + 560 + 140 + 8 = 1408$

(iv) उपर्युक्त विधि से कम से कम 2 पुरूष लेकर 6 सदस्यों की समिति बनाने की कुल विधियाँ होंगीः

$^8C_2 \times {}^5C_4 + {}^8C_3 \times {}^5C_3 + {}^8C_4 \times {}^5C_2 + {}^8C_5 \times {}^5C_1 + {}^8C_6 = 1436$

प्रश्नमाला 6.2

1. n का मान ज्ञात कीजिए, जबकिः

   (i) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$ **(ii)** $^{20}C_{n-2} = {}^{20}C_{n+2}$ **(iii)** $^nC_{10} = {}^nC_{15}$

2. $^{50}C_{11} + {}^{50}C_{12} + {}^{51}C_{13} - {}^{52}C_{13}$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC, CA पर क्रमशः 3, 4 तथा 5 बिन्दु हैं। इन बिन्दुओं से रचित कुल त्रिभुजों की संख्या कितनी होगी?
4. एक संदूक में दो सफेद, तीन काली व चार लाल गेंदें हैं इस संदूक से तीन गेंदें कितनी विधियों से निकाली जा सकती हैं, जिनमें कम से कम एक काली गेंद अवश्य हो?
5. छः विभिन्न रंगों की झंडियों से एक या अधिक लेकर कितने प्रकार से संकेत दिए जा सकते हैं?

   [संकेत : $^6C_1 \times 1! + {}^6C_2 \times 2! + {}^6C_3 \times 3! + {}^6C_4 \times 4! + {}^6C_5 \times 5! + {}^6C_6 \times 6!$]
6. किसी बहुभुज में विकर्णों की संख्या 44 हैं, तो उसकी भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकों में से 4 अंक लेकर कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जबकि अंक 4 तथा 5 अवश्य विद्यमान हो?
8. छः '+' तथा चार '–' चिह्नों को एक सरल रेखा में कुल कितने प्रकार से रखा जा सकता है कि कोई भी दो '–' के चिह्न पास–पास नहीं आते हों?
9. 8 विद्यार्थियों और 5 प्राध्यापकों में से 5 विद्यार्थियों और 2 प्राध्यापकों की एक कॉलेज परिषद् बनानी है। इस प्रकार की कितनी विभिन्न परिषदें बन सकती हैं?
10. 14 खिलाड़ियों में से क्रिकेट के लिए 11 खिलाड़ियों की एक टोली बनानी है, जिसमें कम से कम 2 गेंदबाज विद्यमान हों, जबकि केवल 4 खिलाड़ी ही गेंद फेंक सकते हैं। यह टोली कितने प्रकार से बनाई जा सकती है?

विविध प्रश्नमाला–6

1. यदि $^nP_{n-2} = 60$ हो, तो n का मान होगाः

   (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 3
2. $^nP_r \div {}^nC_r$ बराबर हैः

   (A) $n!$ (B) $(n-r)!$ (C) $\frac{1}{r!}$ (D) $r!$
3. 5 व्यक्ति एक गोल मेज पर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं?

   (A) 120 (B) 24 (C) 60 (D) 12
4. BHILWARA के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

   (A) $\frac{8!}{2!}$ (B) $8!$ (C) $7!$ (D) $\frac{6!}{2!}$
5. $^{47}C_4 + \sum_{r=1}^{5} {}^{52-r}C_3$ बराबर हैः

   (A) $^{51}C_4$ (B) $^{52}C_4$ (C) $^{53}C_4$ (D) इनमें से कोई नहीं

6. ${}^{61}C_{57} - {}^{60}C_{56}$ का मान है:

(A) ${}^{61}C_{58}$ (B) ${}^{60}C_{57}$ (C) ${}^{60}C_{58}$ (D) ${}^{60}C_{56}$

7. यदि ${}^{15}C_{3r} = {}^{15}C_{r+3}$, तो r बराबर है:

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

8. एक वृत की परिधि पर 6 बिन्दु हैं, इनको मिलाने वाली सरल रेखाओं की संख्या होगी:

(A) 30 (B) 15 (C) 12 (D) 20

9. BHOPAL के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

(A) 124 (B) 240 (C) 360 (D) 720

10. एक वृत की परिधि पर 4 बिन्दु है, इनको मिलाकर कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

11. यदि ${}^{n}C_{9} = {}^{n}C_{7}$, तो ${}^{n}C_{16}$ ज्ञात कीजिए।

12. n का मान ज्ञात कीजिए।

(i) ${}^{2n}C_{2} : {}^{n}C_{2} = 12:1$ (ii) ${}^{2n}C_{3} : {}^{n}C_{3} = 11:1$

13. किसी वृत्त पर स्थित 11 बिन्दुओं से होकर जाने वाली जीवाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

14. 52 पत्तों की एक गड्ड़ी में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या ज्ञात कीजिये यदि प्रत्येक संचय में तथ्यतः एक इक्का है।

15. एक समतल में n बिन्दु हैं, जिनमें m बिन्दु समरेखीय हैं। इन बिन्दुओं को मिलाकर बनाए जाने वाले त्रिभुजों की संख्या कितनी होगी?

16. एक दशभुज में विकर्णों की संख्या ज्ञात कीजिए।

17. एक रेलगाड़ी में 5 सीटे खाली हैं, तो तीन यात्री इन सीटों पर कुल कितने प्रकार से बैठ सकते हैं?

18. 6 लड़कों तथा 4 लड़कियों में से 7 का एक समूह बनाना है। यदि समूह में लड़के बहुसंख्यक रहे, तो समूह कितने प्रकार से बनाया जा सकता है?

19. 8 व्यक्तियों के सम्मेलन में यदि प्रत्येक व्यक्ति एक दूसरे से एक ही बार हाथ मिलाता हो, तो हाथ मिलने की कुल संख्या कितनी होगी?

20. 6 पुरूष एवं 6 महिलाएँ एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि कोई भी दो महिलाएँ साथ–साथ नहीं बैठें?

21. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों के कितने विन्यास बनाए जा सकते हैं, जबकि सभी 'S' एक साथ रहें?

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. **गुणन का सिद्धांत :** यदि एक कार्य m विधियों से किया जा सके तथा इसको करने की प्रत्येक विधि के लिए यदि दूसरे कार्य करने की n विधियाँ हों, तो सम्पूर्ण कार्य $m \times n$ विधियों से होगा।
2. **योग का सिद्धांत :** यदि एक कार्य m तथा n विधियों से किया जा सके एवं दोनों विधियों से एक साथ कार्य करना संभव नहीं हो, तो संपूर्ण कार्य $m + n$ विधियों से होगा।
3. **क्रमचय :** दी हुई वस्तुओं में से कुछ या सभी को लेकर भिन्न विन्यासों, जिनमें क्रम को महत्व दिया हो, को क्रमचय कहते हैं।
4. $n! = n(n-1)(n-2).....3.2.1$; जहाँ $n \in N$ $0! = 1$; $(-n)!$ अपरिभाषित हैं।
5. n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं के चयन के क्रमचयों की संख्या $= {}^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$ होगी।

6. ${}^{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$; ${}^{n}P_{n}=n!$

7. यदि कुल n वस्तुएँ हैं, जिनमें से p एक प्रकार की, q दूसरे प्रकार की, r तीसरे प्रकार की तथा अन्य भिन्न–भिन्न हैं (या $p+q+r=n$), तो कुल क्रमचयों की संख्या होगी:

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

8. n विभिन्न वस्तुओं के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $(n-1)!$ होगी। यदि दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रमचयों को एक ही समझा जाए (जैसे मणियों या फूलों के हार में) तो क्रमचयों की संख्या $\frac{(n-1)!}{2}$ होगी।

9. **संचय :** दी हुई वस्तुओं में से कुछ या सभी को एक साथ लेकर, क्रम का ध्यान नहीं रखते हुए, बनने वाले विभिन्न समूहों को संचय कहते हैं।

10. n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं को लेकर बनाए जाने वाले संचयों की संख्या होती है:

$${}^{n}C_{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

11. ${}^{n}C_{n}={}^{n}C_{0}=1$; ${}^{n}C_{r}={}^{n}C_{n-r}$; ${}^{n}C_{r}+{}^{n}C_{r-1}={}^{n+1}C_{r}$;

${}^{n}C_{x}={}^{n}C_{y}\Rightarrow x=y$ या $x+y=n$

12. n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या $\frac{n(n-3)}{2}$ होगी।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 6.1

1. (i) 8 (ii) 15 (iii) 41 (iv) 2

2. $\frac{9!}{2!4!}$ 3. 40320, 720 4. 12

5. 600 6. ${}^{6}P_{3}=\frac{\underline{|6}}{\underline{|3}}=120$ 7. $12!\times 2!$

8. 210 10. 200 11. $\frac{6!}{2!}-5!=240$

प्रश्नमाला 6.2

1. (i) 6 (ii) 10 (iii) 25
2. 0 3. 205 4. 64 5. 1956
6. 11 7. 144 8. 35 9. 560 10. 360

विविध प्रश्नमाला 6

(1) C (2) D (3) B (4) A (5) B (6) B
(7) C (8) B (9) D (10) A
11. 1 12. (i) 5 ; (ii) 6 13. 55 14. 778320
15. ${}^{n}C_{3}-{}^{m}C_{3}$ 16. 35 17. 60 18. 100
19. ${}^{8}C_{2}=28$ 20. $5!\times 6!=86400$ 21. 151200