8

अनुक्रम, श्रेढ़ी तथा श्रेणी
(Sequence, Progression and Series)

8.01 अनुक्रम (Sequence) :

संख्याओं के निम्नलिखित समूहों पर विचार कीजिए:

(i) 2, 5, 8, 11, . . . (ii) 3, 6, 12, 24, . . .

(iii) 1, 4, 5, 9, 14, . . . (iv) 5, 6, 2, 9, 3, . . .

स्पष्ट है कि समूह (i) में प्रत्येक संख्या अपनी पूर्व संख्या से 3 अधिक है, समूह (ii) में प्रत्येक संख्या अपनी पूर्व संख्या से 2 गुणा है, समूह (iii) में प्रथम दो संख्याओं के बाद प्रत्येक संख्या अपनी पूर्ववर्त्ती दो संख्याओं का योग है, जबकि समूह (iv) की संख्याओं में कोई क्रम या नियम नहीं है जिससे कि इस समूह में आगे की संख्याएँ ज्ञात की जा सके।

उपर्युक्त समूहों में से प्रथम तीन समूह अनुक्रम के उदाहरण है।

परिभाषा : यदि राशियाँ किसी क्रम में निश्चित, तर्क पूर्ण नियमानुसार हो, तो उसे अनुक्रम कहते हैं। अनुक्रम की प्रत्येक संख्या उसका पद कहलाती है।

समुच्चय के रूप में अनुक्रम : प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N से किसी अन्य समुच्चय S में परिभाषित फलन को अनुक्रम कहते हैं, अर्थात् किसी समुच्चय N में अनुक्रम एक नियम है जो प्रत्येक प्राकृत संख्या को S के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध करता है।

यदि $N_n = \{1, 2, 3..., n\}$ प्राकृत संख्याओं का परिमित समुच्चय है तथा फलन $f : N_n \to S$, N_n से अन्य समुच्चय S में परिभाषित हो, तो प्राकृत संख्याओं $1,2,3,...,n$ के प्रतिबिंबों का समुच्चय $\{f(1), f(2), f(3),..., f(n)\}$ एक परिमित अनुक्रम कहलाता है। इसी प्रकार यदि फलन $f : N \to S$ हो, तो समुच्चय $\{f(1), f(2), f(3),...\}$ अपरिमित अनुक्रम कहलाता है। इसे $\{f(n)\}$ या $< f(n) >$ से व्यक्त करते हैं। $f(1), f(2), f(3),..., f(n),...$ अनुक्रम के क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय, . . ., n वां पद कहलाते हैं। अनुक्रम का n वां पद व्यापक पद कहलाता है। व्यापक पद को a_n, t_n अथवा T_n से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण : अनुक्रम 1, 3, 5, 7, 9, 11 एक परिमित अनुक्रम है, जहाँ $T_n = 2n - 1,\ \ n \in N_6$ हैं।

उदाहरण : अनुक्रम 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . अभाज्य संख्याओं का अपरिमित अनुक्रम है, जहाँ n वें पद को किसी विशिष्ट सूत्र के रूप में नहीं लिख सकते हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि एक अनुक्रम को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:

(i) अनुक्रम के कुछ प्रारंभिक पदों को लिखा जाता है जिससे बाद में आने वाले पदों को लिखने का तर्क पूर्ण नियम स्पष्ट हो जाए। जैसे 1, 8, 27, . . . अनुक्रम का व्यापक पद $T_n = n^3$ है।

(ii) अनुक्रम के कुछ प्रारंभिक पदों को लिख कर उनकी विशिष्टता व्यक्त की जा सकती है। जैसे 2, 3, 5, 7, 11, . . . अनुक्रम के पदों का अभाज्य होना उनकी विशिष्टता है।

(iii) अनुक्रम के प्रथम दो पद लिख कर अन्य पदों को उनके पूर्ववर्ती पदों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जैस अनुक्रम 1, 4, 5, 9, 14, . . . को व्यक्त करने के लिए $a_1 = 1, a_2 = 4$ तथा $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\ (n = 1, 2, ...)$ लिखा जा सकता है।

8.02 श्रेणी (Series) :

यदि $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ एक अनुक्रम हो तो व्यंजक $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n \pm ...$ को श्रेणी कहते हैं। अतः प्रत्येक अनुक्रम के संगत एक श्रेणी होती है, जिसमें पदों के मध्य धन या ऋण का चिह्न होता है। प्रत्येक श्रेणी का एक संगत अनुक्रम भी होता है।

8.03 श्रेढ़ी (Progression) :

एक अनुक्रम श्रेढ़ी कहलाती है यदि उसके पदों का संख्यात्मक मान किसी विशिष्ट नियम के अंतर्गत बढ़ता या घटता है।

अर्थात् यदि किसी अनुक्रम का n वां पद एक स्पष्ट सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है तो वह अनुक्रम श्रेढ़ी कहलाता है।

टिप्पणीः अनुक्रम एवं श्रेढ़ी में अन्तरः अनुक्रम में आगे के पद निश्चित, तर्क पूर्ण नियमानुसार लिखे जा सकते है इसमें n वां पद लिखना सदैव संभव नहीं होता है परन्तु श्रेढ़ी में n वां पद सदैव लिखा जाता है।

उदाहरणार्थः 2, 3, 5, 7, 11, 13 अभाज्य संख्याओं का अपरिमित अनुक्रम है परन्तु इसका n वां पद किसी गणितीय सूत्र से व्यक्त नहीं किया जा सकता अतः यह श्रेढ़ी नहीं है।

8.04 समांतर श्रेढ़ी (Arithmetical Progression) :

समांतर श्रेढ़ी वह श्रेढ़ी है जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्व पद में कोई नियत राशि जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में समांतर श्रेढ़ी एक ऐसा अनुक्रम है जिसके प्रत्येक पद का उसके पूर्ववर्ती पद से अंतर सदैव स्थिर रहता है। इस स्थिर अंतर को सार्वअंतर कहते हैं। समांतर श्रेढ़ी को संक्षेप में स.श्रे. (A.P.) से निरूपित करते हैं।

उदाहरण : 2, 5, 8, 11,..... एक स.श्रे. है जिसका प्रथम पद 2 तथा सार्वअंतर $5-2=8-5=11-8=3$ है।

8.05 समांतर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General term of arithmetical progression)

एक स.श्रे. का n वां पद ज्ञात करना जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d हैः

मानाकि $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ एक स.श्रे. है, तब

परिभाषा से $T_2 - T_1 = d$

$$T_3 - T_2 = d$$

$$T_4 - T_3 = d$$

....

....

$$T_n - T_{n-1} = d$$

इन सभी $(n-1)$ समीकरणों को जोड़ने पर

$$T_n - T_1 = (n-1)d$$

$\Rightarrow \quad T_n = T_1 + (n-1)d \quad$ परन्तु $\quad T_1 = a$

अतः व्यापक पद $T_n = a + (n-1)d$

इसलिए यदि समान्तर श्रेढ़ी (A.P) का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d हो तो समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप $a,\ a+d,\ a+2d, ..., a+(n-1)d$ या $a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d, ...$ जो परिमित तथा अपरिमित के संगत होता है।

परिमित स.श्रे. का n वां पद अंतिम पद ℓ कहलाता है तथा $\ell = a+(n-1)d$.

किसी अनुक्रम का n वां पद दिया हुआ हो, तो अनुक्रम स.श्रे. है या नहीं, जाँचने के लिये निम्नलिखित क्रियाविधि का उपयोग करेंगे:

(i) n वें पद को T_n लिखिए।

(ii) T_n में n के स्थान पर $n+1$ लिखकर T_{n+1} ज्ञात कीजिए।

(iii) $T_{n+1} - T_n$ ज्ञात कीजिए। यदि यह अंतर n से स्वतंत्र है, तो दिया हुआ अनुक्रम समांतर श्रेढ़ी है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: दिखाइए कि अनुक्रम $\{T_n\}$, जिसका n वां पद $T_n = 2n+7$ है, एक स.श्रे. है।

हल: यहाँ $T_n = 2n+7$ है।

n के स्थान पर $n+1$ रखने पर,

$$T_{n+1} = 2(n+1)+7 = 2n+2+7 = 2n+9$$

$$\therefore \quad T_{n+1} - T_n = (2n+9)-(2n+7) = 2$$

यह अंतर n से स्वतंत्र है। अतः अनुक्रम $\{T_n\}$ एक स.श्रे. है।

उदाहरण 2: दिखाइए कि अनुक्रम $\{T_n\}$ एक स.श्रे. नहीं है, जहाँ $T_n = n^2 - 2n$.

हल: यहाँ $T_n = n^2 - 2n$ है।

n के स्थान पर $n+1$ रखने पर,

$$T_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 = n^2 - 1$$

$$\therefore \quad T_{n+1} - T_n = (n^2 - 2n) - (n^2 - 1) = -2n+1$$

यह अंतर n पर निर्भर है। अतः अनुक्रम स.श्रे. नहीं है।

टिप्पणी:

1. एक अनुक्रम समांतर श्रेढ़ी नहीं होगा, यदि उसका n वां पद, n में रैखिक नहीं है।
2. यदि n पदों वाली स.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d हो, तो श्रेढ़ी का अंतिम से p वां पद, प्रारंभ से $(n-p+1)$ वां पद होगा तथा इसको सूत्र $a+(n-p)d$ द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 3: दिखाइए कि अनुक्रम 2, 7, 12, 17, ... एक स. श्रे. है इसका व्यापक पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान है जो कि 5 है। अतः दिया हुआ अनुक्रम एक स. श्रे. है। यहाँ प्रथम पद $a = 2$ तथा सार्व अन्तर $d = 5$ अतः स. श्रे. का व्यापक पद

$$T_n = 2+(n-1)5 = 2+5n-5 = 5n-3.$$

उदाहरण 4: किसी स. श्रे. का 5वाँ पद 18 तथा 9 वाँ पद 10 हो, तो 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $T_5 = 18 \quad \Rightarrow \quad a+4d = 18$ (1)

$T_9 = 10 \quad \Rightarrow \quad a+8d = 10$ (2)

(1) तथा (2) को हल करने पर

$$a = 26 \qquad d = -2$$

अतः $T_{20} = a+19d = 26 + 19(-2) = 26 - 38 = -12$

उदाहरण 5: क्या 105 स. श्रे. 1 + 4 + 7 + 11 + ... का एक पद है?

हल: यहाँ a = 1 तथा d = 3 है माना कि 105 सं श्रे. का nवाँ पद है, तब $T_n = 105$

या $a + (n-1)d = 105$

$$1 + (n-1)3 = 105 \quad \Rightarrow \quad n = 35\frac{2}{3}$$

चूँकि n का मान एक प्राकृत संख्या नहीं है, अतः 105 दी गई सं श्रं. का पद नहीं है।

उदाहरण 6: एक स. श्रे. का सार्व अन्तर 4 है तथा अन्तिम पद 201 है तो अन्त से 25वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $d = 4$ तथा $\ell = 201$

$\because$ अन्त से nवाँ पद = $\ell - (n-1)d$ होता है

अतः अन्तः से 25वाँ पद = 201 – (25–1) 4 = 201 – 96 = 105.

प्रश्नमाला 8.1

1. निम्न अनुक्रमों में से कौनसे अनुक्रम स. श्रे. में है?
   (i) 2, 6, 11, 17, ... (ii) 1, 1.4, 1.8, 2.2, ... (iii) –7, –5, –3, –1, ... (iv) 1, 8, 27, 64, ...
2. उन अनुक्रमों के प्रथम पद, सार्व अन्तर तथा 5वें पद ज्ञात कीजिए। जिनके nवें पद निम्नलिखित है:
   (i) 3n + 7 (ii) a + (n – 1)d (iii) 5 – 3n
3. दर्शाइए कि निम्नलिखित nवें पदों वाले अनुक्रम सं. श्रे. नहीं है।
   (i) $\frac{n}{n+1}$ (ii) n^2+1
4. समान्तर श्रेढ़ी 2 + 5 + 8 + 11 + ... का कौनसा पद 65 है?
5. समान्तर श्रेढ़ी 4 + 9 + 14 + 19 + ... + 124 के अन्त से 13 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
6. यदि समान्तर श्रेढ़ी 2 + 5 + 8 + 11 + ... का अन्तिम पद 95 हो, तो श्रेढ़ी के पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का 9वाँ शून्य है तो सिद्ध कीजिए। कि 29 वाँ पद, 19वें पद का दुगुना होता है।
8. 3 से विभाज्य दो अंकों वाली प्राकृत संख्याएँ कितनी है?
9. यदि किसी स. श्रे. का p वाँ पद q तथा q वाँ पद p हों, $(p+q)$ वाँ पद ज्ञात कीजिए।
10. यदि किसी स. श्रे. का pवाँ पद $1/q$ तथा qवाँ पद $1/p$ हो, तो सिद्ध कीजिए। pq वाँ पद इकाई है।

8.06 समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल (Sum of first n terms of an A.P.)

समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल S_n से व्यक्त किया जाता है। माना कि दी हुई समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, सार्वअंतर d तथा n वां पद ℓ है। श्रेढ़ी के पद क्रमशः $a, a+d, a+2d \dots \ell-2d, \ell-d, \ell$ होंगे। अतः

$$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+\dots+(\ell-2d)+(\ell-d)+\ell\dots \qquad (1)$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर,

$$S_n = \ell+(\ell-d)+(\ell-2d)+\dots+(a+2d)+(a+d)+a\dots \qquad (2)$$

(1) और (2) के संगत पदों का योग करने पर,

$$2S_n = (a+\ell)+(a+\ell)+\dots(a+\ell)+(a+\ell) \qquad (n \text{ पद})$$

$$= n(a+\ell)$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(a+\ell)$$

या $$S_n = \frac{n}{2}[a+a+(n-1)d] \qquad [\because \ell = T_n = a+(n-1)d]$$

या $$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

टिप्पणी:

1. स.श्रे. के n पदों के योगफल सूत्र में चार राशियाँ हैं, इनमें से कोई तीन ज्ञात हो, तो शेष चौथी राशि की गणना की जा सकती है।
2. स.श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल S_n हो तो उसका n वां पद सूत्र $T_n = S_n - S_{n-1}$ से ज्ञात किया जा सकता है।
3. यदि स.श्रे. के पदों का योगफल दिया हुआ हो, तो पदों का चयन निम्नलिखित प्रकार से करना चाहिए।

विषम पद
- 3 पद : $a-d, a, a+d$
- 5 पद : $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$

सम पद
- 4 पद : $a-3d, a-d, a+d, a+3d$
- 6 पद : $a-5d, a-3d, a-d, a+d, a+3d, a+5d$

इत्यादि।

8.07 समांतर माध्य (Arithmetic mean) :

यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ स.श्रे. में हैं, तो प्रथम तथा अंतिम राशियों के मध्य शेष सभी राशियाँ समांतर माध्य कहलाती हैं, अर्थात् यदि $a, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, b$ एक स. श्रे. हो, तो $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$; a तथा b के बीच n समांतर माध्य कहलाते हैं। समांतर माध्य को संक्षेप में स.मा. (A.M.) से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरणार्थ : 3, 6, 9 स. श्रे. में हैं। अतः 3 तथा 9 के बीच स. मा. 6 है।

दो राशियों के मध्य एक स.मा. ज्ञात करनाः

माना कि दी हुई राशियाँ a तथा b हैं तथा उनके बीच एक समांतर माध्य A हैं तब a, A, b स.श्रे. में होंगे।

$\therefore \quad A - a = b - A \qquad$ या $\qquad 2A = a + b$

या $\quad A = \dfrac{a+b}{2}$, जो कि a तथा b का स.मा. कहलाता है।

दो राशियों के मध्य n स.मा. ज्ञात करनाः

माना कि दी हुई दो राशियाँ a तथा b हैं तथा उनके बीच n समांतर माध्य क्रमशः $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ हैं। तब $a, A_1, A_2 A_3 \ldots A_n, b$ स. श्रे. में होंगे।

इस श्रेढ़ी का प्रथम पद a अंतिम पद b तथा पदों की संख्या $(n+2)$ है। माना कि इस स.श्रे. का सार्वअंतर d है, तब

अंतिम पद $\; b = a + (n+2-1)d$

या $\quad b = a + (n+1)d \quad \Rightarrow \quad d = (b-a)/(n+1)$

अब, $\quad A_1 = a + d = a + (b-a)/(n+1)$

$$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right), \ldots, A_n = a + nd = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right),$$

जो कि a तथा b के मध्य अभीष्ट समांतर माध्य है।

8.08 समांतर श्रेढ़ी के गुणधर्म (Properties of A.P.) :

1. यदि किसी स.श्रे. के प्रत्येक पद में एक निश्चित संख्या जोड़ी या घटाई जाए तो प्राप्त श्रेढ़ी भी उसी सार्वअंतर वाली स.श्रे. होगी।
2. यदि किसी स.श्रे. के प्रत्येक पद को एक निश्चित अशून्य संख्या से गुणा या भाग दिया जाए तो प्राप्त श्रेढ़ी भी स.श्रे. होगी।
3. किसी परिमित स.श्रे. में प्रारंभ तथा अंत से समान दूरी वाले पदों का योग अचर होता है तथा यह पहले तथा अंतिम पदों के योग के बराबर होता है।
4. किसी स.श्रे. का प्रत्येक पद (प्रथम व अन्तिम पद को छोड़कर) उससे समान दूरी पर स्थित दो पदों के योग का आधा होता है।
5. यदि किसी स.श्रे. में पदों की संख्या विषम हो, तो इस श्रेढ़ी का योगफल, मध्य पद तथा पदों की संख्या के गुणनफल के बराबर होता है।
6. यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ तथा $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$; n पदों वाली दो समांतर श्रेढ़ियों हों, तो $(x_1 \pm y_1), (x_2 \pm y_2), (x_3 \pm y_3), \ldots, (x_n \pm y_n)$, भी स.श्रे. होगी।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 7: स. श्रे. 7 + 12 + 17 + 22 + ... के 20 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 7, d = 5$ तथा $n = 20$ है।

अतः $\quad S_n = \dfrac{20}{2}[2 \times 7 + (20-1)5]$

$= 10\,[14 + 95]$

$= 10 \times 109 = 1090.$

उदाहरण 8: यदि किसी सं. श्रे. का n वाँ पद $2n + 7$ है, तो प्रथम 12 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $T_n = 2n + 7$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर $T_1 = 9,\ T_2 = 11,\ T_3 = 13$

$\therefore\quad a = 9,\ d = 11 - 9 = 2$

अतः $S_{12} = \frac{12}{2}\left[2\times 9+(12-1)\times 2\right]$

$= 6\,[18 + 22]$

$= 6 \times 40 = 240.$

उदाहरण 9: यदि किसी स.श्रे. का $\boldsymbol{p}$ वां पद $\frac{1}{q}$ तथा $\boldsymbol{q}$वां पद $\frac{1}{p}$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी के $\boldsymbol{pq}$ पदों का योगफल $\frac{1}{2}(pq+1)$ होगा।

हल : यहाँ दिया हुआ है:

$$T_p = \frac{1}{q} \Rightarrow a+(p-1)d = \frac{1}{q} \qquad (1)$$

$$T_q = \frac{1}{p} \Rightarrow a+(q-1)d = \frac{1}{p} \qquad (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

$$a = \frac{1}{pq},\ d = \frac{1}{pq}$$

अतः pq पदों का योगफल

$$S_{pq} = \frac{pq}{2}\left[2\times\frac{1}{pq}+(pq-1)\frac{1}{pq}\right]$$

$$= \frac{pq}{2}\left[\frac{2+pq-1}{pq}\right] = \frac{1}{2}(pq+1)$$

उदाहरण 10: श्रेणी **1 – 7 + 3 – 10 + 5 – 13+**… के 30 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी हुई श्रेणी, दो समांतर श्रेणीयों का संयुक्त रूप है।

अतः श्रेणी को दो भागों में लिखने पर,

$$S = (1+3+5+\ldots 15\text{ पद}) - (7+10+13+\ldots 15\text{ पद})$$

$$= \frac{15}{2}\left[2\times 1+(15-1)\times 2\right] - \frac{15}{2}\left[7\times 2+(15-1)\times 3\right]$$

$$= \frac{15}{2}[2+28] - \frac{15}{2}[14+42] = \frac{15}{2}\times 30 - \frac{15}{2}\times 56 = -195$$

उदाहरण 11: यदि x^2, y^2, z^2 स. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए:

(i) $\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}$ स. श्रे. में हैं। **(ii)** $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$ स. श्रे. में हैं।

हलः (i) $\dfrac{1}{y+z}, \dfrac{1}{z+x}, \dfrac{1}{x+y}$ स. श्रे. में होंगे, यदि

$$\frac{1}{z+x}-\frac{1}{y+z}=\frac{1}{x+y}-\frac{1}{z+x}$$

या $\dfrac{y-x}{y+z}=\dfrac{z-y}{x+y}$

या $y^2-x^2=z^2-y^2$

या $2y^2=x^2+z^2$

या x^2, y^2, z^2 स. श्रे. में हैं, जो कि दिया हुआ है।

अतः x^2, y^2, z^2 स. श्रे. में हैं, तो $\dfrac{1}{y+z}, \dfrac{1}{z+x}, \dfrac{1}{x+y}$ भी स. श्रे. में होंगे।

(ii) $\dfrac{x}{y+z}, \dfrac{y}{z+x}, \dfrac{z}{x+y}$ स. श्रे. में होंगे, यदि

$\dfrac{x}{y+z}+1, \dfrac{y}{z+x}+1, \dfrac{z}{x+y}+1$ स. श्रे. में हैं। [प्रत्येक पद में 1 जोड़ने पर]

या $\dfrac{x+y+z}{y+z}, \dfrac{x+y+z}{z+x}, \dfrac{x+y+z}{x+y}$ स. श्रे. में हैं।

या $\dfrac{1}{y+z}, \dfrac{1}{z+x}, \dfrac{1}{x+y}$ स. श्रे. में हैं। [प्रत्येक पद में $x+y+z$ से भाग देने पर]

या $2y^2=x^2+z^2$, [भाग (i) से]

जो कि दिया हुआ है। अतः x^2, y^2, z^2 स. श्रे. में हैं तो $\dfrac{x}{y+z}, \dfrac{y}{z+x}, \dfrac{z}{x+y}$ भी स.श्रे. में होंगे।

उदाहरण 12: यदि एक स. श्रे. में m पदों का योगफल n तथा n पदों का योगफल m है, तो सिद्ध कीजिए कि $(\boldsymbol{m+n})$ पदों का योगफल $-(\boldsymbol{m+n})$ होगा।

हल : माना कि दी गई स. श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d है। तब

$$S_m=n \Rightarrow \frac{m}{2}\{2a+(m-1)d\}=n \Rightarrow 2am+m(m-1)d=2n \quad (1)$$

$$S_n=m \Rightarrow \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=m \Rightarrow 2an+n(n-1)d=2m \quad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$$2a(m-n)+\{m(m-1)-n(n-1)\}d=2n-2m$$

या $2a(m-n)+\{(m^2-n^2)-(m-n)\}d=-2(m-n)$

या $2a+(m+n-1)d=-2$ [दोनों ओर $(m-n)$ से भाग देने पर] (3)

अब, $S_{m+n}=\dfrac{m+n}{2}\{2a+(m+n-1)d\}$

$=\dfrac{m+n}{2}(-2)=-(m+n)$ [(3) के प्रयोग से]

उदाहरण 13: दो स. श्रे. के n पदों के योगफल का अनुपात $(3n + 13) : (5n + 3)$ है श्रेढ़ियों के 17वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि श्रेढ़ियों के प्रथम पद तथा सार्वअन्तर क्रमशः a, A तथा d, D है। तो प्रतिबन्ध के अनुसार,

$$\frac{\text{प्रथम स. श्रे. के } n \text{ पदों का योगफल}}{\text{द्वितीय स. श्रे. के } n \text{ पदों का योगफल}} = \frac{3n+13}{5n+3}$$

या $$\frac{\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}{\frac{n}{2}[2A+(n-1)D]} = \frac{3n+13}{5n+3}$$

या $$\frac{2a+(n-1)d}{2A+(n-1)D} = \frac{3n+13}{5n+3}$$

या $$\frac{a+\left(\frac{n-1}{2}\right)d}{A+\left(\frac{n-1}{2}\right)D} = \frac{3n+13}{5n+3} \qquad (1)$$

पुनः $$\frac{\text{प्रथम स. श्रे. का 17वाँ पद}}{\text{द्वितीय स. श्रे. का 17वाँ पद}} = \frac{a+16d}{A+16D} \qquad (2)$$

(1) में $\frac{n-1}{2} = 16$ या $n = 33$ रखने पर

$$\frac{a+16d}{A+16D} = \frac{3\times33+13}{5\times33+3} = \frac{99+13}{165+3}$$

या $$\frac{a+16d}{A+16D} = \frac{112}{168} = \frac{2}{3}$$

अतः वांछित अनुपात = 2 : 3 है।

उदाहरण 14: संख्याओं 18 तथा 30 के बीच 3 समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि 18 तथा 30 के बीच तीन समान्तर माध्य A_1, A_2, A_3 है। अतः $18, A_1, A_2, A_3$ 30 सं श्रे. में है।

यहाँ $d = \frac{30-18}{3+1} = \frac{12}{4} = 3$ $\left[\because d = \frac{b-a}{n+1}\right]$

$A_1 = a + d = 18 + 3 = 21$

$A_2 = a + 2d = 18 + 6 = 24$

$A_3 = a + 3d = 18 + 9 = 27$

अतः अभीष्ट समान्तर माध्य 21, 24 तथा 27 है।

उदाहरण 15: n के किस मान के लिए व्यंजक $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a तथा b का समांतर माध्य है।

हल: चूँकि a तथा b का समांतर माध्य $\frac{a+b}{2}$ है। अतः

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\frac{a+b}{2}$$

या $\quad 2\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)=\left(a^n+b^n\right)\left(a+b\right)$

या $\quad 2a^{n+1}+2b^{n+1}=a^{n+1}+a^nb+b^na+b^{n+1}$

या $\quad a^{n+1}+b^{n+1}=a^nb+b^na$

या $\quad a^n\left(a-b\right)=b^n\left(a-b\right)$

या $\quad a^n=b^n \qquad \left[\because a\neq b\right]$

यह तभी संभव है जब n=0 $\qquad \left[\because a^0=b^0=1\right]$

प्रश्नमाला 8.2

1. निम्नलिखित श्रेढ़ियों का योगफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 7 + 11 + 15 + 19 + ... 20 पदों तक।
   (ii) $\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+\ldots$ 10 पदों तक।
   (iii) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\ldots$ 6 पदों तक।
2. 1 से 101 तक के विषम पूर्णांकों का योगफल ज्ञात कीजिये जो 3 से विभाज्य है।
3. उस स.श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसका r वां पद $2r+3$ है।
4. किसी स.श्रे. के n पदों का योगफल n^2+2n है। प्रथम पद तथा सार्वअंतर ज्ञात कीजिए।
5. यदि स.श्रे. 1, 6, 11, . . . के n पदों का योगफल 148 है, तो पदों की संख्या तथा अंतिम पद ज्ञात कीजिए।
6. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के p पदों का योगफल तथा q पदों का योगफल समान है, तो $(p+q)$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
7. यदि किसी स.श्रे. के n, $2n$, $3n$ पदों का योगफल क्रमशः S_1, S_2 तथा S_3 हों, तो सिद्ध कीजिए कि $S_3=3\left(S_2-S_1\right)$ होगा।
8. यदि n पदों वाली m समांतर श्रेढ़ियों के योगफल $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m$ हैं। इनके प्रथम पद क्रमशः 1, 2, 3,....., m तथा सार्वअंतर क्रमशः 1, 3, 5,......., $(2m-1)$ है, तो सिद्ध कीजिए:
$$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_m=\frac{mn}{2}\left(mn+1\right)$$
9. यदि किस स.श्रे. के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिए:
$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$$
10. स.श्रे. में वे तीन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 12 है तथा उनके घनों का योगफल 408 है।
11. यदि 1 तथा 51 के मध्य n स.मा. इस प्रकार प्रविष्ट किये गये हों कि चौथे तथा सातवें समांतर माध्य का अनुपात 3 : 5 है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि x, y, z स.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए:

(i) $y+z,\ z+x,\ x+y$ स.श्रे. में हैं। **(ii)** $\frac{1}{yz}, \frac{1}{zx}, \frac{1}{xy}$ स.श्रे. में हैं।

(iii) $(x-y)(y-z)=\frac{(z-x)^2}{4}$ **(iv)** $(x-z)^2=4(y^2-xz)$

(v) $xy+yz+zx=\frac{x^2+z^2+4xz}{2}$

13. यदि $x^2(y+z), y^2(z+x), z^2(x+y)$ स.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि या तो x, y, z स.श्रे. में हैं या $xy+yz+zx=0$ होगा।

14. समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$ का योगफल ज्ञात कीजिये, दिया हुआ है

$$a_1+a_7+a_{10}+a_{21}+a_{24}+a_{30}=540$$

15. एक बहुभुज के अन्तः कोण समान्तर श्रेढ़ी में हैं सबसे छोटा अन्तः कोण 52° तथा क्रमिक अन्तः कोणों का अन्तर 8° हो, तो बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

8.09 गुणोत्तर श्रेढ़ी (Geometrical Progression) :

यदि किसी अशून्य संख्याओं की श्रेढ़ी का प्रत्येक पद उससे पूर्व पद को, किसी निश्चित राशि से गुणा करने पर प्राप्त होता है, तो श्रेढ़ी गुणोत्तर श्रेढ़ी कहलाती है। अर्थात् श्रेढ़ी के प्रत्येक पद का उससे पूर्व पद से अनुपात एक निश्चित राशि होती है, तो श्रेढ़ी गुणोत्तर श्रेढ़ी कहलाती है। इस निश्चित राशि को सार्वअनुपात (common ratio) कहते हैं। गुणोत्तर श्रेढ़ी को संक्षेप में गु.श्रे. (G.P.) से व्यक्त करते हैं।

निम्नलिखित अनुक्रमों पर विचार कीजिए:

(i) 2, 4, 8, 16, . . . (ii) 1, –3, 9, –27, . . . (iii) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ (iv) $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

उपर्युक्त सभी अनुक्रमों में प्रत्येक पद उसके पूर्व पद को एक निश्चित राशि (i) में 2 (ii) में –3 (iii) में $\frac{1}{2}$ तथा (iv) में r से गुणा करने पर प्राप्त होता है। अतः उपर्युक्त सभी अनुक्रम गु.श्रे. हैं।

टिप्पणी :

1. गुणोत्तर श्रेढ़ी में प्रथम पद तथा सार्वअनुपात सदैव अशून्य होते हैं।
2. यदि गु.श्रे. के पद एकांतर धन तथा ऋण चिह्न के हों, तो श्रेढ़ी का सार्वअनुपात ऋणात्मक होता है।

8.10 गुणोत्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General term of G.P.) :

एक गु.श्रे. का n वां पद ज्ञात करना जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है:

मानाकि $T_1, T_2, \ldots, T_n$ एक गु.श्रे. है, तब

$$T_1 = \text{प्रथम पद} = a = ar^{1-1},$$

परिभाषा स $\quad \frac{T_2}{T_1}=r \quad \Rightarrow \quad T_2=T_1r=ar=ar^{2-1},$

$$\frac{T_3}{T_2}=r \quad \Rightarrow \quad T_3=T_2r=ar.r=ar^2=ar^{3-1},$$

इसी प्रकार $T_4=ar^{4-1}, \ldots\ldots, T_n=ar^{n-1}$

अतः यदि किसी गु.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r हो, तो उसका n वां पद $T_n=ar^{n-1}$ होता है।

परिमित गु.श्रे. में n वां पद अंतिम पद ℓ कहलाता है तथा $\ell=ar^{n-1}$

यदि किसी गु.श्रे. में पदों की संख्या n हो, तो श्रेढ़ी के अंत से p वां पद प्रारंभ से $(n-p+1)$ वां पद होता है। अब यदि इस गु.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअंतर r हो, तो अंत से p वां पद $=ar^{n-p}$ होता।

यदि अंतिम पद ℓ हो, तो अंतिम पद से प्रारंभिक पद की ओर एक गु.श्रे. होगी जिसका सार्वअनुपात $\frac{1}{r}$ होगा तथा अंत से n वां पद $= \ell\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ होगा।

टिप्पणी :

1. यदि गु.श्रे. के पदों का गुणनफल नहीं दिया गया हो, तो श्रेढ़ी के क्रमागत पद $a, ar, ar^2, \ldots$ के रूप में माने जाते हैं।
2. यदि गु.श्रे. के पदों का गुणनफल दिया गया हो, तो श्रेढ़ी के पदों का चयन निम्नलिखित प्रकार से करना चाहिएः

विषम पद 3 पद : $\frac{a}{r}, a, ar$

5 पद : $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

सम पद 4 पद : $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$

6 पद $\frac{a}{r^5}, \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3, ar^5$ इत्यादि।

8.11 गुणोत्तर माध्य (Geometric mean) :

यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ गु.श्रे. में हैं, तो प्रथम तथा अंतिम राशि के बीच शेष सभी राशियाँ गुणोत्तर माध्य कहलाती हैं। गुणोत्तर माध्य को संक्षेप में गु.मा. (G.M.) द्वारा व्यक्त करते हैं। अर्थात् यदि $a, G_1, G_2, \ldots, G_n, b$ एक गु.श्रे. है तो $G_1, G_2, \ldots, G_n$ को a तथा b के मध्य गुणोत्तर माध्य कहते हैं।

दो राशियों के बीच एक गु.मा. ज्ञात करनाः

माना कि a तथा b दो दी हुई राशियाँ है तथा G इनके बीच एक गु.मा. है। तब a, G, b गु.श्रे. में होंगे एवं परिभाषा से

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \qquad \text{या} \qquad G^2 = ab$$

या $G = \pm\sqrt{ab}$, जो कि a तथा b का गु.मा. कहलाता है।

उदाहरण 1: यदि 2, 6, 18 गु.श्रे. में हैं, तो राशि 6, 2 तथा 18 के मध्य एक गु.मा. है।

उदाहरण 2: 3 तथा 27 के मध्य गु.मा. $G = \sqrt{3 \times 27} = 9$ होगा।

उदाहरण 3: –8 तथा –2 के मध्य गु.मा. $G = \pm\sqrt{(-8)\times(-2)} = -4$ होगा।

दो राशियों के मध्य n गु.मा. ज्ञात करनाः

माना कि a तथा b दो दी हुई राशियाँ हैं तथा $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ इनके बीच n गु.मा. हैं, तो $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ एक गु.श्रे. होगी।

माना कि इस गु.श्रे. का सार्वअनुपात r है। इस श्रेढ़ी में कुल $(n + 2)$ पद है अतः b श्रेढ़ी का $(n + 2)$ वां पद है।

$$\therefore \quad b = ar^{n+2-1} \qquad \text{या} \qquad r^{n+1} = b/a \qquad \text{या} \qquad r = (b/a)^{\frac{1}{n+1}}$$

अतः अभीष्ट गु.मा. निम्नलिखित होंगेः

$$G_1 = ar = a(b/a)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_2 = ar^2 = a(b/a)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$G_n = ar^n = a(b/a)^{\frac{n}{n+1}}$$

टिप्पणी : यदि दो संख्याएँ a तथा b विपरीत चिह्न की हो, तो उनके मध्य कोई गु.मा. नहीं होगा।

8.12 दो राशियों के मध्य स.मा. तथा गु.मा. के महत्त्वपूर्ण गुणधर्म (Important properties & A.M. and GM between two quantities)

गुणधर्म 1. यदि दो धनात्मक राशियों a तथा b के मध्य स.मा. तथा गु.मा. क्रमशः A एवं G हैं, तब $A > G$.

प्रमाणः यहाँ $A = \dfrac{a+b}{2}$ तथा $G = \sqrt{ab}$

अब $$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} > 0 \qquad \therefore \qquad A > G$$

गुणधर्म 2. यदि दो धनात्मक राशियों a तथा b के मध्य स.मा. तथा गु.मा. क्रमशः A एवं G हैं, तब a, b मूलों वाला द्विघात समीकरण $x^2 - 2Ax + G^2 = 0$ है।

प्रमाणः यहाँ $A = \dfrac{a+b}{2}$ तथा $G = \sqrt{ab}$ (1)

एक द्विघात समीकरण जिसके मूल a तथा b हैं, होता हैः

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

या $$x^2 - 2Ax + G^2 = 0$$ [(1) के प्रयोग से]

गुणधर्म 3. यदि दो धनात्मक राशियों के मध्य स.मा. तथा गु.मा. क्रमशः A एवं G हैं, तब ये राशियाँ $A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$ हैं।

हलः द्विघात समीकरण जिसके मूल दी गई राशियाँ हैं, होता हैः

$$x^2 - 2Ax + G^2 = 0$$ [गुणधर्म 2 से]

या $$x = \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 - 4G^2}}{2}$$ [श्रीधराचार्य सूत्र से]

या $$x = A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 16: गु.श्रे. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots\ldots$ का 10 वां पद तथा व्यापक पद ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ प्रथम पद $\dfrac{1}{2}$ तथा सार्वअनुपात $\dfrac{1}{2}$ है। अतः

$$T_{10} = ar^{10-1} = ar^9 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

तथा व्यापक पद $$T_n = ar^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

उदाहरण 17: किसी गु.श्रे. का दूसरा पद 10 तथा पांचवां पद 80 है। श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

हलः गु.श्रे. का दूसरा पद $T_2 = ar = 10$

गु.श्रे. का पांचवां पद $T_5 = ar^4 = 80$ (1)

(2) में (1) का भाग देने पर, (2)

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{80}{10}$$

या $r^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad r = 2$

r का यह मान (1) में रखने पर,

$2a = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 5$

अतः अभीष्ट गु.श्रे. 5, 10, 20, 40, . . . है।

उदाहरण 18: गु.श्रे. में तीन संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका गुणनफल 1000 तथा योगफल 35 है।

हल: माना कि अभीष्ट संख्याएँ $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं। तब दिया हुआ है:

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 1000 \text{ से } a^3 = 1000$$

या $\quad a = 10 \qquad (1)$

तथा $\quad \frac{a}{r} + a + ar = 35$ से $\frac{10}{r} + 10 + 10r = 35 \qquad$ [(1) के प्रयोग से]

सरल करने पर, $\quad 2r^2 - 5r + 2 = 0$

या $\quad (r-2)(2r-1) = 0$

या $\quad r = 2, r = 1/2$

अतः अभीष्ट संख्याएँ 5, 10, 20 हैं।

उदाहरण 19: यदि किसी गु.श्रे. का p वां, q वां तथा r वां पद क्रमशः x, y, z हैं, तो सिद्ध कीजिए:

$$x^{q-r}\, y^{r-p}\, z^{p-q} = 1$$

हल: माना कि गु.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात R है। तब दिया हुआ है:

$$T_p = a\,R^{p-1} = x,$$

$$T_q = a\,R^{q-1} = y,$$

$$T_r = a\,R^{r-1} = z$$

$$\therefore \quad x^{q-r}\, y^{r-p}\, z^{p-q} = \left(aR^{p-1}\right)^{q-r} \left(aR^{q-1}\right)^{r-p} \left(aR^{r-1}\right)^{p-q}$$

$$= a^{(q-r)+(r-p)+(p-q)} R^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$$

$$= a^0 R^0 = 1$$

उदाहरण 20: यदि दो राशियों a तथा b के बीच स.मा., गु.मा. का n गुणा है, तो सिद्ध कीजिए:

$$a/b = \left(2n^2 - 1\right) + 2n\sqrt{n^2 - 1}$$

हल: a तथा b के मध्य स.मा. $= \frac{a+b}{2}$ तथा a तथा b के मध्य गु.मा. $= \sqrt{ab}$

दिया हुआ है:

$$\frac{a+b}{2} = n\sqrt{ab} \quad \text{या} \quad a + b = 2n\sqrt{ab} \qquad (1)$$

अब, $\quad a - b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \quad$ या $\quad a - b = \sqrt{4n^2ab - 4ab}$

या $\quad a - b = 2\sqrt{ab}\sqrt{n^2 - 1} \qquad (2)$

(1) में (2) का भाग देने पर, $\quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$

या $\quad \frac{a}{b} = \frac{n + \sqrt{n^2 - 1}}{n - \sqrt{n^2 - 1}} \qquad$ [योगांतरानुपात से]

$$= \frac{\left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right)^2}{n^2 - \left(n^2 - 1\right)} \qquad \text{[परिमेयकरण करने पर]}$$

$$= \left(2n^2 - 1\right) + 2n\sqrt{n^2 - 1}$$

प्रश्नमाला 8.3

1. (i) श्रेढ़ी $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$ का 7वाँ पद ज्ञात कीजिए।

   (ii) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots$ का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

2. (i) श्रेढ़ी $64 + 32 + 16 + 8 + \ldots$ का कौनसा पद $1/64$ है?

   (ii) श्रेढ़ी $6 + 3 + 3/2 + 3/4 + \ldots$ का कौनसा $3/256$ है?

3. गुणोत्तर श्रेढ़ी $5 + 10 + 20 + 40 + \ldots$ का सार्व अनुपात तथा n वाँ पद ज्ञात कीजिए।
4. गुणोत्तर श्रेढ़ी 2, 6, 18, 54, ..., 118098 का अन्त से 5 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
5. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 32 तथा 7वाँ पद 8192 है तो श्रेढ़ी का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।
6. गुणोत्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिये जिसका तीसरा पद 1 तथा सातवाँ पद 16 है।
7. (i) 3 तथा 48 के मध्य 3 गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

   (ii) 2 व 256 के मध्य 6 गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

8. x के किस मान के लिए संख्याएँ $x, x + 3, x + 9$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है?
9. ऐसे चार पद ज्ञात कीजिए। जो गुणोत्तर श्रेढ़ी में हो, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 4 अधिक है तथा दूसरा पद चौथे पद से 36 अधिक है।
10. किसी गु.श्रे. का चौथा पद p, सातवां पद q, तथा दसवां पद r है, तो सिद्ध कीजिएः $q^2 = pr$.
11. यदि गु.श्रे. में $(p + q)$ वां पद x तथा $(p - q)$ वां पद y है, तो p वां पद ज्ञात कीजिए।
12. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेढ़ी में तथा $a^x = b^y = z^z$ है तो सिद्ध कीजिए। कि $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$.
13. यदि a तथा b के बीच n गु.मा. प्रविष्ट किये जाए तो सिद्ध कीजिए कि सभी गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल $\left(\sqrt{ab}\right)^n$ होगा।
14. x, y, z गु.श्रे. में हैं। x, y का स.मा. A_1 तथा y, z का स.मा. A_2 है, तो सिद्ध कीजिएः

    (i) $\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} = \frac{2}{y}$ **(ii)** $\frac{x}{A_1} + \frac{z}{A_2} = 2$

8.13 गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल
(Sum of first n terms of a G.P.)

माना कि किसी गु.श्रे. का प्रथम पद a, सार्वअनुपात r तथा प्रथम n पदों का योगफल S_n है। तब

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

दोनों पक्षों को r से गुणा करने पर

$$r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n \qquad (2)$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$$S_n - r S_n = a - ar^n$$

या $$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

फलतः $$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{a - lr}{1-r}$$

या $$a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right) = \frac{lr - a}{r-1},\ \text{जहाँ } \ell = ar^{n-1} \qquad [r \neq 1]$$

टिप्पणीः कुछ लेखक S_n के लिए निम्नलिखित दो भिन्न सूत्रों का प्रयोग करते हैं:

$$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right), r<1$$

तथा
$$S_n = a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right), r>1$$

वास्तव में ये दोनों सूत्र पूर्णतया एकसमान है। ध्यान में रखने योग्य बात यह है कि उपर्युक्त सूत्र $r=1$ के लिए लागू नहीं होता है। $r=1$ के लिए $S_n = na$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 21: गुणोत्तर श्रेढ़ी $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$ का प्रथम 10 पदों तक का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ $a=\sqrt{3}, r=\sqrt{3}$ तथा $n=10$

$\therefore$ 10 पदों का योगफल $= S_{10} = \dfrac{\sqrt{3}\left[(\sqrt{3})^{10}-1\right]}{\sqrt{3}-1}$

$\Rightarrow$ $$S_{10} = \frac{\sqrt{3}[243-1]}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(242)}{2}\times(\sqrt{3}+1)$$

$\Rightarrow$ $$S_{10} = 121(3+\sqrt{3})$$

उदाहरण 22: गु.श्रे. **3, 6, 12, ...** के कितने पदों का योगफल 189 होगा?

हलः यहाँ $a = 3$, $r = 2$ तथा $S_n = 189$ हैं। अतः

सूत्र $$S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

से, $$189 = \frac{3\left(2^n-1\right)}{2-1}$$

या $$2^n - 1 = 189/3 = 63$$

या $$2^n = 64 = 2^6 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

उदाहरण 23: किसी गु.श्रे. का प्रथम पद 7, अंतिम पद 567 तथा पदों का योगफल 847 हैं, श्रेढ़ी का सार्वअनुपात ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ $a = 7$, $T_n = 567$ तथा $S_n = 847$ हैं।

$\therefore$ $T_n = ar^{n-1} = 567$ [दिया हुआ है]

या $r^{n-1} = \dfrac{567}{7} = 81$

या $r^n = 81r$ [दोनों ओर r से गुणा करने पर] (1)

अब, $S_n = \dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$ से $847 = \dfrac{7\left(81r-1\right)}{r-1}$ [(1) के प्रयोग से]

या $121\left(r-1\right) = 81r-1$

या $40r = 120 \quad \Rightarrow \quad r = 3$

उदाहरण 24: श्रेणी 5 + 55 + 555 + 5555 + . . . के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल,

$$S_n = 5+55+555+5555+\ldots .n \text{ पद}$$

$$= 5[1+11+111+1111+\ldots .n \text{ पद}]$$

$$= \frac{5}{9}[9+99+999+9999+\ldots .n \text{ पद}]$$

$$= \frac{5}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots .n \text{ पद}]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\left(10+10^2+10^3+\ldots .n \text{ पद}\right)-\left(1+1+1+\ldots .n \text{ पद}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10\left(10^n-1\right)}{10-1}-n\right] = \frac{50}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{5n}{9}$$

उदाहरण 25: किसी गु.श्रे. के $n, 2n$ तथा $3n$ पदों का योगफल क्रमशः S_1, S_2, S_3 है, तो सिद्ध कीजिए: $S_1^2+S_2^2=S_1\left(S_2+S_3\right)$

हल: माना कि गु.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है। तब

$$S_1=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}, S_2=\frac{a\left(r^{2n}-1\right)}{r-1}, S_3=\frac{a\left(r^{3n}-1\right)}{r-1}$$

अब $$S_1^2+S_2^2=\frac{a^2\left(r^n-1\right)^2}{(r-1)^2}+\frac{a^2\left(r^{2n}-1\right)^2}{(r-1)^2}=\frac{a^2}{(r-1)^2}\left\{\left(r^n-1\right)^2+\left(r^{2n}-1\right)^2\right\}$$

$$=\frac{a^2}{(r-1)^2}\left\{\left(r^n-1\right)^2+\left(r^n-1\right)^2\left(r^n+1\right)^2\right\}=\frac{a^2}{(r-1)^2}\left(r^n-1\right)^2\left\{1+\left(r^n+1\right)^2\right\}$$

या $$S_1^2+S_2^2=\frac{a^2}{(r-1)^2}\left(r^n-1\right)^2\left(r^{2n}+2r^n+2\right)$$

तथा $$S_1\left(S_2+S_3\right)=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}\left[\frac{a\left(r^{2n}-1\right)}{r-1}+\frac{a\left(r^{3n}-1\right)}{r-1}\right]=\frac{a^2\left(r^n-1\right)}{(r-1)^2}\left[\left(r^{2n}-1\right)+\left(r^{3n}-1\right)\right]$$

$$=\frac{a^2\left(r^n-1\right)}{(r-1)^2}\left[\left(r^n-1\right)\left(r^n+1\right)+\left(r^n-1\right)\left(r^{2n}+r^n+1\right)\right]=\frac{a^2\left(r^n-1\right)^2}{(r-1)^2}\left[r^n+1+r^{2n}+r^n+1\right]$$

$$=\frac{a^2\left(r^n-1\right)^2}{(r-1)^2}\left(r^{2n}+2r^n+2\right) \qquad \ldots(2)$$

फलतः $S_1^2+S_2^2=S_1\left(S_2+S_3\right)$

उदाहरण 26: श्रेणी 0.2 + 0.22 + 0.222 + ... के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल,

$$S_n = 0.2 + 0.22 + 0.222 + ...n \text{ पद}$$

$$= 2(0.1 + 0.11 + 0.111 + ...n \text{ पद})$$

$$= \frac{2}{9}(0.9 + 0.99 + 0.999 + ...n \text{ पद})$$

$$= \frac{2}{9}\left[(1-0.1) + (1-0.01) + (1-0.001) + ...n \text{ पद}\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[(1+1+.....n \text{ पद}) - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...n \text{ पद}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[n - \frac{1}{10}\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[n - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right] = \frac{2}{81}\left[9n - 1 + \frac{1}{10^n}\right]$$

उदाहरण 27: सिद्ध कीजिए कि श्रेणी 11 + 103 + 1005 + . . . का n पदों का योगफल $\frac{10}{9}(10^n - 1) + n^2$ है।

हल: माना कि दी गई श्रेणी के n पदों का योगफल S_n है। तब

$$S_n = 11 + 103 + 1005 + ...n \text{ पद}$$

$$= (10+1) + (10^2+3) + (10^3+5) + ... + \{10^n + (2n-1)\}$$

$$= (10 + 10^2 + ... + 10^n) + \{1 + 3 + ... + (2n-1)\}$$

$$= \frac{10(10^n - 1)}{10-1} + \frac{n}{2}\{1 + 2n - 1\} = \frac{10}{9}(10^n - 1) + n^2$$ [गु.श्रे. तथा स.श्रे. के योगफल सूत्र से]

8.14 अनंत गु.श्रे. का योगफल (Sum of an infinite G.P.) :

माना कि एक अनंत गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है, जहाँ $-1 < r < 1$ अर्थात् $|r| < 1$ है। तब अनुच्छेद 9.12 से इस गु.श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल S_n दिया जाता है:

$$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right)$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$ [$\because |r| < 1$ तथा $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ यदि $|r| < 1$]

फलतः अनंत गु.श्रे. का योगफल $S_\infty = \frac{a}{1-r}$, यदि $|r| < 1$.

टिप्पणीः

1. यदि $|r| \geq 1$, तब अनंत गु.श्रे. का योगफल अनंत की ओर प्रवृत होता है। अतः अनंत गु.श्रे. के योगफल का उपर्युक्त सूत्र r का संख्यात्मक मान 1 से कम अर्थात् $|r| < 1$ होने पर ही सार्थक है।
2. उपर्युक्त सूत्र के प्रयोग से किसी परिमेय संख्या को, आवर्ती दशमलव विस्तार रूप से भिन्नात्मक रूप में व्यक्त किया जा सकता है। किसी परिमेय संख्या को दशमलव रूप में व्यक्त करने पर यदि दशमलव के बाद कोई एक अंक या अंकों का समूह अनंत बार आता है, तो इसे आवर्ती दशमलव विस्तार कहते हैं। जैसे 2·454545........, 0·3565656........ इनको क्रमशः $2\cdot\overline{45}$ तथा $0\cdot 3\overline{56}$ के रूप में लिखते हैं। आवर्ती दशमलव में पुनरावृति वाले अंक समूह पर एक रेखा (bar) या बिन्दु (dot) लगाकर लिखा जाता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 28: निम्नलिखित अनंत गु.श्रे. का योगफल ज्ञात कीजिए:

(i) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ (ii) $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\ldots$

हलः (i) यहाँ $a=1$ तथा $r=\frac{1}{3}$ $\therefore$ $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

(ii) यहाँ $a=\frac{2}{3}$ तथा $r=-\frac{2}{3}$ $\therefore$ $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{2/3}{1-(-2/3)} = \frac{2/3}{1+(2/3)} = \frac{2}{5}$

उदाहरण 29: एक अनंत गु.श्रे. के प्रथम दो पदों का योगफल 20 है तथा प्रत्येक पद अपने बाद आने वाले सभी पदों के योगफल का तीन गुणा हैं। श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि अनंत गु.श्रे. $a, ar, ar^2, \ldots$ है। तब

प्रथम दो पदों का योगफल $= a + ar = 20$,

या $a(1+r)=20$ (1)

तथा प्रत्येक पद अपने आगे के पदों के योग का तीन गुणा है। अतः

$$a = 3\left(\frac{ar}{1-r}\right) \quad \text{या} \quad 1-r=3r \quad \Rightarrow \quad r=\tfrac{1}{4}$$

r का यह मान (1) में रखने पर,

$$a = \frac{20}{1+\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad a=16$$

अतः अभीष्ट गु.श्रे. $16, 4, 1, \frac{1}{4}$ है।

उदाहरण 30: परिमेय संख्या (भिन्नात्मक रूप) ज्ञात कीजिए, जिसका दशमलव विस्तार रूप $0\cdot 3\overline{75}$ है।

हलः $0\cdot 3\overline{75} = \cdot 375\ 75\ 75\ \ldots$

$$= \cdot 3 + \cdot 075 + \cdot 00075 + \ldots$$

$$= \frac{3}{10} + \left(\frac{75}{1000} + \frac{75}{100000} + \frac{75}{10000000} + \ldots\right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{75}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{75}{10^3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}\right) \quad \left[\text{सूत्र } S_\infty = \frac{a}{1-r} \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{75}{1000} \times \frac{100}{99} = \frac{3}{10} + \frac{75}{990} = \frac{372}{990} = \frac{62}{165}$$

प्रश्नमाला 8.4

1. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी का योगफल ज्ञात कीजिए।

(i) $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$ 7 पदों तक। (ii) $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \ldots$ 8 पदों तक।

(iii) $a^8 - a^7 b + a^6 b^2 - a^5 b^3 + \ldots 10$ पदों तक।

2. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी का योगफल ज्ञात कीजिए।

(i) $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots + 486.$ (ii) $64 + 32 + 16 + \ldots + \frac{1}{4}$

3. गु.श्रे. 4, 12, 36, ... के कितने पदों का योगफल 484 है?

4. किसी गु.श्रे. के प्रथम 5 पदों का योगफल 124 तथा सार्वअनुपात 2 हैं। श्रेढ़ी का प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

5. किसी गु.श्रे. का सार्वअनुपात 2, अंतिम पद 160 तथा योगफल 310 है। श्रेढ़ी का प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

6. निम्नलिखित श्रेढ़ियों के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिएः

(i) $7 + 77 + 777 + \ldots$ (ii) $\cdot 5 + \cdot 55 + \cdot 555 + \ldots$ (iii) $\cdot 9 + \cdot 99 + \cdot 999 + \ldots$

7. निम्नलिखित आवर्ती दशमलव विस्तार वाली परिमेय संख्याओं का भिन्नात्मक रूप ज्ञात कीजिएः

(i) $2\cdot 3\overline{5}$ (ii) $\cdot 6\overline{25}$ (iii) $2\cdot\overline{752}$

8. किसी अनंत गु.श्रे. का प्रथम पद 64 है तथा प्रत्येक पद उसके बाद आने वाले पदों के योगफल का तीन गुणा है। श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

9. यदि $y = x + x^2 + x^3 + \ldots\infty$, जहाँ $|x| < 1$ हो, तब सिद्ध कीजिए $x = \frac{y}{1+y}$.

10. यदि $x = 1 + a + a^2 + \ldots\infty$, जहाँ $|a| < 1$ तथा

$y = 1 + b + b^2 + \ldots\infty$, जहाँ $|b| < 1$ हो, तब

सिद्ध कीजिएः $1 + ab + a^2b^2 + \ldots\infty = \frac{xy}{x+y-1}$

11. श्रेढ़ी का योग ज्ञात कीजिये।

$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}\right)+\ldots\infty$ तक

8.15 समांतरीय गुणोत्तर श्रेणी (Arithmetico Geometric Series) :

किसी समांतर श्रेढ़ी तथा गुणोत्तर श्रेढ़ी के संगत पदों के गुणनफल से प्राप्त पदों की श्रेणी को समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी कहते हैं।

उदाहरण : $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$ एक समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी है, जिसमें 1, 3, 5, 7,... स.श्रे. है, तथा $1, x, x^2, \ldots$ गु.श्रे. है। इस स.श्रे. का n वां पद $(2n-1)$ है तथा गु.श्रे. का n वां पद x^{n-1} है। अतः समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी का n वां पद $(2n-1)x^{n-1}$ होगा।

समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक रूप $a, (a+d)r, (a+2d)r^2, \ldots$ होता है तथा इसका व्यापक पद $T_n = \{a+(n-1)d\}r^{n-1}$ होता है।

समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करनाः

माना कि किसी स.गु.श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल S_n है। तब

$$S_n = a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + (a+3d)r^3 + \ldots + [a+(n-1)d]r^{n-1} \quad (1)$$

दोनों पक्षों को r से गुणा करने पर,

$$rS_n = ar + (a+d)r^2 + (a+2d)r^3 + \ldots + [a+(n-2)d]r^{n-1} + [a+(n-1)d]r^n \quad (2)$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$$(1-r)S_n = a+\left[dr+dr^2+dr^3+.....+dr^{n-1}\right]-\left[a+(n-1)d\right]r^n$$

$$= a+\frac{dr\left(1-r^{n-1}\right)}{1-r}-\left[a+(n-1)d\right]r^n$$

या $$S_n = \frac{a}{1-r}+\frac{dr\left(1-r^{n-1}\right)}{(1-r)^2}-\frac{\left[a+(n-1)d\right]r^n}{1-r} \qquad (3)$$

यदि r का संख्यात्मक मान इकाई से कम हो अर्थात् $|r|<1$ तथा श्रेणी में पदों की संख्या अनंत हो, तो $r^n, nr^n \to 0$

अतः $S_n \to \dfrac{a}{1-r}+\dfrac{dr}{(1-r)^2}$, जब $n \to \infty$

फलतः जब $|r|<1$ हो, तब अनंत स.गु.श्रे. का योगफल $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}+\dfrac{dr}{(1-r)^2}$ (4)

टिप्पणी : उपर्युक्त परिणाम (3) तथा (4) को सूत्र की भांति प्रयोग न करके इसमें दी गई विधि से योगफल ज्ञात करना चाहिए।

8.16 अंतर विधि से श्रेणी का योगफल (Sum of series by difference method)

यदि किसी श्रेणी में क्रमागत पद युग्मों का अंतर गु.श्रे. में हो, तो ऐसी श्रेणी का योगफल ज्ञात करने के लिये दी हुई श्रेणी के पदों के नीचे उसी श्रेणी के पदों को एक–एक पद आगे बढ़ाकर लिखा जाता है, फिर घटाने पर प्राप्त श्रेणी के पद गु.श्रे. में होंगे। इससे श्रेणी का n वां पद प्राप्त किया जाता है तथा $n = 1, 2, 3, \ldots$ रखकर प्रत्येक पद को प्राप्त कर उनका योग करने से श्रेणी का योगफल ज्ञात किया जाता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 31: श्रेणी $\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{4^2}+\dfrac{11}{4^3}+\ldots$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी हुई श्रेणी समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी है जिसकी संगत स.श्रे.

3, 7, 11, . . . तथा गु.श्रे. $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4^2}, \dfrac{1}{4^3}, \ldots$ है।

सं.श्रे. का n वां पद $= \left[3+(n-1)4\right] = 4n-1$ तथा

गु.श्रे. का n वां पद $= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{4^n}$ है।

अतः दी गई स.गु.श्रे. का n वां पद $\dfrac{4n-1}{4^n}$ होगा।

$$\therefore \quad S_n = \frac{3}{4}+\frac{7}{4^2}+\frac{11}{4^3}+\ldots+\frac{4n-5}{4^{n-1}}+\frac{4n-1}{4^n} \qquad (1)$$

दोनों पक्षों को $\dfrac{1}{4}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{3}{4^2}+\frac{7}{4^3}+\frac{11}{4^4}+\ldots+\frac{4n-5}{4^n}+\frac{4n-1}{4^{n+1}} \qquad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = \frac{3}{4} + \left\{\frac{4}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \ldots + \frac{4}{4^n}\right\} - \frac{4n-1}{4^{n+1}}$$

या $$S_n\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} + \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right\} - \frac{4n-1}{4^{n+1}}$$

या $$S_n\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{4n-1}{4^{n+1}}$$

या $$S_n = 1 + \frac{4}{9}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) - \frac{4n-1}{3.4^n}$$

उदाहरण 32: श्रेणी $1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{4^2} + \frac{15}{4^3} + \ldots$ के अनंत पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: मानाकि $S_\infty = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{4^2} + \frac{15}{4^3} + \ldots$ (1)

दोनों पक्षों को $\frac{1}{4}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{1}{4}S_\infty = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{7}{4^3} + \frac{15}{4^4} + \ldots \quad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर

$$S_\infty - \frac{1}{4}S_\infty = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{4^2} + \frac{8}{4^3} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

या $$S_\infty\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$ [सूत्र $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ के प्रयोग से]

$\therefore$ $$S_\infty = 2.\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

उदाहरण 33: श्रेणी $1 + 5 + 13 + 29 + 61 + \ldots$ का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई श्रेणी के क्रमागत पद युग्मों का अंतर 4, 8, 16, . . . गु.श्रे. में हैं अतः इसके n पदों का योगफल अंतर विधि से ज्ञात करेंगे।

माना कि श्रेणी का n वां पद T_n तथा n पदों का योग S_n है। तब

$$S_n = 1 + 5 + 13 + 29 + 61 + \ldots + T_n \quad (1)$$

एक स्थान आगे बढ़ाकर लिखने पर

$$S_n = 1 + 5 + 13 + 29 + \ldots + T_{n-1} + T_n \quad \ldots(2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$$0 = 1 + \{4 + 8 + 16 + \ldots + (n-1) \text{ पद}\} - T_n$$

या $$T_n = 1 + \{4 + 8 + 16 + \ldots + (n-1) \text{ पद}\} = 1 + \frac{4\left(2^{n-1} - 1\right)}{2-1} = 2^{n+1} - 3$$

अब $n = 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर,

$$T_1 = 2^2 - 3,\ T_2 = 2^3 - 3,\ T_3 = 2^4 - 3, \ldots,$$

$$\therefore \quad S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \left(2^2 - 3\right) + \left(2^3 - 3\right) + \left(2^4 - 3\right) + \ldots + \left(2^{n+1} - 3\right)$$

$$= \left(2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n+1}\right) - 3\left(1 + 1 + \ldots n \text{ पद}\right) = \frac{2^2\left(2^n - 1\right)}{2 - 1} - 3n$$

फलतः $S_n = 2^{n+2} - 3n - 4$

प्रश्नमाला 8.5

1. निम्नलिखित श्रेणियों का n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिएः

(i) $1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots$ **(ii)** $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$ **(iii)** $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \ldots$

2. निम्नलिखित श्रेणियों का अनंत पदों तक योगफल ज्ञात कीजिएः

(i) $\frac{3}{7} + \frac{5}{21} + \frac{7}{63} + \frac{9}{189} + \ldots$ **(ii)** $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \ldots$ **(iii)** $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots,\ |x| < 1$

3. निम्नलिखित श्रेणियों का n वां पद तथा n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिएः

(i) $2 + 5 + 14 + 41 + 122 + \ldots$ **(ii)** $3.2 + 5.2^2 + 7.2^3 + \ldots$ **(iii)** $1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + \ldots$

4. श्रेणी $2 + 5x + 8x^2 + 11x^3 + \ldots$ का n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए तथा इससे अनंत श्रेणी के योगफल का भी निगमन कीजिए, यदि $|x| < 1$.

8.17 प्रथम n प्राकृत संख्या, उनके वर्गों तथा घनों से बनी श्रेणीयों का योगफल (Sum to n terms of series of natural numbers, their squares and cubes)

(i) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल (Sum of first n natural numbers) :

माना कि S_n (या $\sum n$) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योगफल को निरूपित करता है तो

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

यहाँ $a = 1$ तथा $d = 1$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\} = \frac{n}{2}\left\{2.1 + (n-1)1\right\} = \frac{n(n+1)}{2}$$

अतः $\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल (Sum of squares of first n natural numbers)

माना कि $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \sum n^2$

सर्वसमिका $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ में $x = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n.$

रखने पर

$$2^3 - 1^3 = 3.1^2 + 3.1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3.2^2 + 3.2 + 1$$
$$4^3 - 3^3 = 3.3^2 + 3.3 + 1$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

तथा $(n+1)^3 - n^3 = 3.n^2 + 3.n + 1$

स्तम्भानुसार जोड़ने पर,

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3.(1^2+2^2+3^2+...+n^2) + 3(1+2+...+n) + (1+1+...+1, n \text{ पद})$$

या $(n+1)^3 - 1^3 = 3S_n + 3\sum n + n$ या $n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$

या $$3S_n = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n^2+3n}{2} - n = \frac{2n^3+3n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$\therefore$ $$S_n = \sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योगफल
(Sum of cubes of first n natural numbers)

माना कि $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ...n^3 = \sum n^3$

सर्वसमिका $(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ में $x = 1, 2, 3, ..., (n-1), n$ रखने पर,

$$2^4 - 1^4 = 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4.3^3 + 6.3^2 + 4.3 + 1$$
....

$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,$$

तथा $(n+1)^4 - n^4 = 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1$

स्तम्भानुसार जोड़ने पर,

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3+2^3+3^3+...+n^3) + 6(1^2+2^2+3^2+...+n^2)$$
$$+4(1+2+3+...+n) + (1+1+...+1, n \text{ पद})$$

या $$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4S_n + 6.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

या $$4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n$$

सरल करने पर, $4S_n = n^2(n^2 + 2n + 1)$

या $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ या $\sum n^3 = S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

8.18 अंतर विधि से श्रेणी का योगफल (Sum of series by difference method)

यदि किसी श्रेणी में क्रमागत पद युग्मों का अंतर स.श्रे. में हो, तो ऐसी श्रेणी का योगफल ज्ञात करने के लिए दी गई श्रेणी के पदों के नीचे उसी श्रेणी के पदों को एक–एक पद आगे बढ़ाकर लिखा जाता है, फिर घटाने पर प्राप्त श्रेढ़ी के पद सं. श्रेढ़ी में होंगे। इससे श्रेढ़ी का n वां पद ज्ञात किया जाता है और फिर $\sum n, \sum n^2$ तथा $\sum n^3$ सूत्रों का प्रयोग कर श्रेणी का योगफल ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण : निम्नलिखित श्रेणी का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

$1 + 6 + 13 + 22 + \ldots$

हलः दी गई श्रेणी के क्रमागत पद युग्मों का अंतर 5, 7, 9, ... स.श्रे. में है। अतः इसका n वां पद तथा n पदों का योगफल अंतर विधि से ज्ञात करेंगे।

माना कि श्रेणी का n वां पद T_n तथा n पदों का योगफल S_n है। तब

$$S_n = 1 + 6 + 13 + 22 + \ldots + T_n \qquad (1)$$

एक स्थान आगे बढ़ाकर लिखने पर,

$$S_n = 1 + 6 + 13 + \ldots + T_{n-1} + T_n \qquad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$$0 = 1 + \{5 + 7 + 9 + \ldots + (n-1) \text{ पद}\} - T_n$$

या $$T_n = 1 + \{5 + 7 + 9 + \ldots + (n-1) \text{ पद}\} = 1 + \frac{(n-1)}{2}\{2\cdot 5 + (n-2)2\} = 1 + (n-1)(n+3)$$

सरल करने पर,

$$T_n = n^2 + 2n - 2$$

$$\therefore \quad S_n = \sum T_n = \Sigma(n^2 + 2n - 2) = \Sigma n^2 + 2\Sigma n - 2\Sigma 1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2.\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 6n - 12n}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 - 5n}{6}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 34 : उस श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका n वां पद $n(n+1)(3n-1)$ है।

हलः यहाँ $$T_n = n(n+1)(3n-1) = 3n^3 + 2n^2 - n$$

$$\therefore \quad S_n = \Sigma T_n$$

या $$S_n = \Sigma(3n^3 + 2n^2 - n) = 3\Sigma n^3 + 2\Sigma n^2 - \Sigma n$$

$$= 3.\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[9n(n+1) + 4(2n+1) - 6\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[9n^2 + 17n - 2\right] = \frac{n(n+1)(n+2)(9n-1)}{12}$$

उदाहरण 35: निम्नलिखित श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

$1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \ldots$

हलः यह श्रेणी अनुक्रमों 1, 3, 5, . . . ; 3, 5, 7, . . . तथा 5, 7, 9, . . . के संगत पदों के गुणनफल से बनी है सभी स.श्रे. हैं अतः श्रेणी का n वां पद अनुक्रमों के n वें पदों का गुणनफल

$$\therefore \quad T_n = (2n-1)(2n+1)(2n+3) = 8n^3 + 12n^2 - 2n - 3$$

$\therefore \quad S_n = \sum T_n$

या $\quad S_n = \sum\left(8n^3 + 12n^2 - 2n - 3\right)$

$$= 8\sum n^3 + 12\sum n^2 - 2\sum n - 3\sum 1$$

$$= 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} - 3n$$

$$= n(n+1)\left[2n(n+1) + 2(2n+1) - 1\right] - 3n = n(n+1)\left(2n^2 + 6n + 1\right) - 3n$$

प्रश्नमाला 8.6

1. उस श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका n वां पद है:

   (i) $3n^2 + 2n + 5$ **(ii)** $4n^3 + 7n + 1$ **(iii)** $n(n+1)(n+2)$

2. निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $3^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 + \ldots$ **(ii)** $2^3 + 5^3 + 8^3 + 11^3 + \ldots$ **(iii)** $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots$

3. निम्नलिखित श्रेणियों का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots$ **(ii)** $1.2.4 + 2.3.7 + 3.4.10 + \ldots$

4. निम्नलिखित श्रेणियों का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $3 + 8 + 15 + 24 + \ldots$ **(ii)** $1 + 6 + 13 + 22 + \ldots$

5. निम्नलिखित श्रेणियों का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots$ **(ii)** $1^2 + \left(1^2 + 2^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) + \ldots$

8.19 हरात्मक श्रेढ़ी (Harmonic Progression) :

यदि किसी श्रेढ़ी के पदों के व्युत्क्रम (reciprocal) उसी क्रम में लिखने पर समांतर श्रेढ़ी में हों, तो उसे हरात्मक श्रेढ़ी कहते हैं। निम्नलिखित श्रेढ़ियों पर विचार कीजिए:

(i) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ **(ii)** $\frac{1}{20}, \frac{1}{17}, \frac{1}{14}, \frac{1}{11} \ldots$

उपर्युक्त श्रेढ़ियां हरात्मक श्रेढ़ियां हैं, क्योंकि इनके व्युत्क्रम अर्थात् 3,5,7,9, . . .; 20,17,14,11, . . . समांतर श्रेढ़ी में हैं।

व्यापक पद (General term): हरात्मक श्रेढ़ी का मानक रूप है:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \ldots, \frac{1}{a+(n-1)d}, \ldots$$

इसके संगत समांतर श्रेढ़ी होगी:

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d, \ldots$$

स.श्रे. का n वां पद $a+(n-1)d$ होता हैं अतः हरात्मक श्रेढ़ी का व्यापक (n वां) पद होगा:

$$T_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$$

टिप्पणी

1. हरात्मक श्रेढ़ी के प्रश्न हल करने के लिए इसके पदों का क्रमिक रूप से व्युत्क्रम लेकर इसके संगत स.श्रे. बनाते हैं, इसके बाद स.श्रे. के संबंधित सूत्रों का प्रयोग करके उसका हल निकालते हैं।
2. हरात्मक श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात करने के लिए कोई व्यापक सूत्र नहीं हैं।

8.20 हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) :

यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ ह.श्रे. में हैं, तो प्रथम तथा अंतिम राशि के मध्य शेष सभी राशियाँ, उनके मध्य हरात्मक माध्य कहलाती हैं।

उदाहरण: यदि $a, H_1, H_2, H_3, \ldots\ldots, H_n, b$ ह.श्रे. में हैं, तो $H_1, H_2, H_3, \ldots\ldots, H_n$; a तथा b के मध्य n हरात्मक माध्य कहलाते हैं। हरात्मक माध्य को संक्षेप में ह.मा. (H.M.) से व्यक्त किया जाता है।

दी हुई दो राशियों के मध्य एक हरात्मक माध्य ज्ञात करना:

माना कि दी हुई दो राशियाँ a तथा b हैं। उनके मध्य एक ह.मा. H है। अतः a, H, b ह.श्रे. में हैं। अर्थात्

$\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ स.श्रे. में हैं। $\therefore$ $\frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H}$

या $\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ या $\frac{2}{H} = \frac{a+b}{ab}$ या $H = \frac{2ab}{a+b}$

दी हुई दो राशियों के मध्य n हरात्मक माध्य ज्ञात करना:

माना कि दी हुई दो राशियाँ a तथा b हैं। उनके मध्य n हरात्मक माध्य क्रमशः $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ हैं।

अतः $a, H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, b$ हे. श्रे. में हैं। अर्थात्

$\frac{1}{a}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, \frac{1}{H_3}, \ldots, \frac{1}{H_n}, \frac{1}{b}$ स.श्रे. में हैं।

इस स.श्रे. का अंतिम पद $1/b, (n+2)$ वां पद हैं। अतः

$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + (n+2-1)d$ या $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + (n+1)d$

सरल करने पर, $d = \frac{a-b}{ab(n+1)}$

$\therefore$ $\frac{1}{a}$ तथा $\frac{1}{b}$ के मध्य n स.मा. निम्नलिखित होंगे:

$\frac{1}{a} + d, \frac{1}{a} + 2d, \frac{1}{a} + 3d, \ldots, \frac{1}{a} + nd$

या $\frac{1+ad}{a}, \frac{1+2ad}{a}, \frac{1+3ad}{a}, \ldots, \frac{1+nad}{a}$

अतः a तथा b के मध्य n ह. मा. निम्नलिखित होंगे:

$\frac{a}{1+ad}, \frac{a}{1+2ad}, \frac{a}{1+3ad}, \ldots, \frac{a}{1+nad}$, जहाँ $d = \frac{a-b}{ab(n+1)}$.

टिप्पणी: उपर्युक्त से स्पष्ट है कि हरात्मक माध्य ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम संगत स.श्रे. के समांतर माध्य ज्ञात करेंगे। इस प्रकार प्राप्त समांतर माध्यों के व्युत्क्रम अभीष्ट हरात्मक माध्य होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 36: निम्नलिखित हरात्मक श्रेढ़ियों के सम्मुख दिया गया पद ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{15}, \frac{1}{19}, \ldots 10$ वां पद (ii) $\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \ldots 15$ वां पद

हल: (i) दी गई ह.श्रे. के संगत स.श्रे. निम्नलिखित है:

7, 11, 15, 19, ...

इस स.श्रे. के लिए $a = 7, d = 11 - 7 = 4$

$\therefore \quad T_{10} = a + 9d = 7 + 9 \times 4 = 43$

अतः संगत हरात्मक श्रेणी का 10 वां पद $= 1/43$

(ii) दी गई ह.श्रे. के संगत स.श्रे. निम्नलिखित हैः

$$5, \frac{9}{2}, 4, \frac{7}{2}, \ldots\ldots$$

इस स.श्रे. के लिये $a = 5, d = 9/2 - 5 = -1/2$

$\therefore \quad T_{15} = a + 14d = 5 + 14 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

अतः संगत हरात्मक श्रेढ़ी का 15 वां पद $= -1/2$

उदाहरण 37: वह हरात्मक श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए जिसका चौथा पद $1/2$ तथा 10 वां पद $1/4$ है।

हलः संगत स.श्रे. का चौथा पद 2 तथा 10 वां पद 4 होगा।

$\therefore \quad T_4 = 2 \Rightarrow a + 3d = 2$ (1)

तथा $\quad T_{10} = 4 \Rightarrow a + 9d = 4$ (2)

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

$a = 1$ तथा $d = 1/3$

अतः स.श्रे. $1, \left(1+\frac{1}{3}\right), \left(1+\frac{2}{3}\right), \ldots$ है।

फलतः संगत ह.श्रे. $1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$ होगी।

उदाहरण 38: श्रेणी $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots$ का कौनसा पद $\frac{\sqrt{5}}{13}$ है।

हलः माना कि $\frac{\sqrt{5}}{13}$ दी हुई श्रेणी का n वां पद है।

दी हुई श्रेणी के पदों को व्युत्क्रम रूप में लिखने पर प्राप्त श्रेणी $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{1} + \ldots$ एक स.श्रे. है क्योंकि

सार्वअंतर $= \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, एक नियत राशि है।

अतः दी हुई श्रेणी के पद ह.श्रे. में है तथा इसके संगत स.श्रे.का n वां पद $\frac{13}{\sqrt{5}}$ होगा।

$\therefore \quad \frac{3}{\sqrt{5}} + (n-1)\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$ या $\quad \frac{n-1}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}$

या $\quad n - 1 = 10 \quad \Rightarrow \quad n = 11$

अतः $\frac{\sqrt{5}}{13}$ दी हुई श्रेणी का 11 वां पद है।

उदाहरण 39: $1/2$ तथा 3 के मध्य 4 ह.मा. ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि $1/2$ तथा 3 के मध्य ह.मा. H_1, H_2, H_3, H_4 हैं।

अतः $1/2, H_1, H_2, H_3, H_4, 3$ ह.श्रे. में हैं।

संगत स.श्रे. का प्रथम पद 2 तथा छठा पद $1/3$ होगा

$\therefore \quad a + 5d = 1/3$ $\qquad [\because T_6 = a + 5d]$

या $\quad 5d = 1/3 - 2 \Rightarrow d = -1/3$ $\qquad [\because a = 2]$

अतः 2 तथा $1/3$ के मध्य चार स.मा. निम्नलिखित होंगेः

$$2 + d, 2 + 2d, 2 + 3d, 2 + 4d$$

या $\quad 2 - \frac{1}{3}, 2 - \frac{2}{3}, 2 - \frac{3}{3}, 2 - \frac{4}{3}$ $\quad$ या $\quad \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}$

अतः अभीष्ट ह.मा. $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}$ होंगे।

उदाहरण 40: यदि दो संख्याओं के मध्य स.मा. 4 तथा ह.मा. 3 हैं, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि संख्याएँ a तथा b हैं। तब

स.मा. $= \frac{a+b}{2} = 4$ $\qquad$ (दिया हुआ है)

या $\quad a + b = 8$ $\qquad$ (1)

तथा ह.मा. $= \frac{2ab}{a+b} = 3$ $\qquad$ (दिया हुआ है)

या $\quad 2ab = 3(a+b)$

या $\quad 2ab = 3 \times 8 = 24$ $\qquad$ [(1) के प्रयोग से] (2)

अब, $\quad a - b = \pm\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$

या $\quad a - b = \pm\sqrt{64 - 48}$ $\qquad$ [(1) तथा (2) से]

या $\quad a - b = \pm 4$

धनात्मक चिह्न लेने पर,

$a - b = 4$ $\qquad$ (3)

समीकरण (1) व (3) को हल करने पर

$$a = 6, b = 2$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर,

$a - b = -4$ $\qquad$ (4)

समीकरण (1) व (4) को हल करने पर,

$$a = 2, b = 6$$

अतः अभीष्ट संख्याएँ 6, 2 या 2, 6 होंगी।

उदाहरण 41: यदि ***a, b, c*** ह. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ ह.श्रे. में हैं।

हलः $\quad \frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ ह.श्रे. में होंगे यदि $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ स.श्रे. में हैं।

अर्थात् $\quad \frac{c+a}{b} - \frac{b+c}{a} = \frac{a+b}{c} - \frac{c+a}{b}$

या $\quad \frac{ac + a^2 - b^2 - bc}{ab} = \frac{ab + b^2 - c^2 - ac}{bc}$

या $\quad \frac{(a-b)(a+b+c)}{a} = \frac{(b-c)(a+b+c)}{c}$ [गुणनखण्ड करने से]

सरल करने पर $\quad 2ac = b(a+c)$

या $\quad b = \frac{2ac}{a+c}$

या $\quad a, b, c$ ह.श्रे. में हैं, जो कि दिया हुआ है।

फलतः $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ ह.श्रे. में हैं।

उदाहरण 42: यदि एक मोटर कार 200 किमी. दूरी 40 किमी. प्रति घं. की गति से तथा अगले 200 किमी. दूरी 50 किमी. प्रति घं. की गति से जाती है, तो उसकी औसत गति ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हलः यहाँ $a = 40$ किमी. प्रति घं. तथा $b = 50$ किमी. प्रति घं.

$\therefore$ माध्य $H = \frac{2ab}{a+b}$

$= \frac{2.40.50}{40+50} = \frac{4000}{90} = 44.4$ किमी प्रति घं.

सत्यापनः पहले 200 किमी. दूरी तय करने का समय $= \frac{200}{40} = 5$ घं.

अगले 200 किमी. दूरी तय करने का समय $= \frac{200}{50} = 4$ घं.

अतः मोटर कार कुल दूरी 400 किमी. 9 घं. में तय करती है।

$\therefore$ औसत गति $= \frac{400}{9} = 44.4$ किमी. प्रति घं.

टिप्पणीः यहाँ औसत गति के लिए स.मा. $= \frac{40+50}{2} = 45$ किमी. प्रति घं. लेना गलत होगा, क्योंकि कुल समय 9 घंटे में कार $45 \times 9 = 405$ किमी. दूरी तय करेगी, जो कि गलत हैं। अतः यदि अलग–अलग अंतराल में गति दी हुई हो, तो औसत गति के लिए हरात्मक माध्य लिया जाता है।

उदाहरण 43: यदि किसी ह.श्रे. का $\boldsymbol{p}$ वां पद $\boldsymbol{q}$ और $\boldsymbol{q}$ वां पद $\boldsymbol{p}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसका $\boldsymbol{r}$ वां पद $\boldsymbol{\frac{pq}{r}}$ होगा।

हलः चूँकि ह.श्रे. का p वां पद q तथा q वां पद p है।

$\therefore$ संगत स.श्रे. का p वां पद $1/q$ तथा q वां पद $1/p$ होगा।

माना कि संगत स.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है। तब

$a+(p-1)d = 1/q \quad (1)$ तथा $a+(q-1)d = 1/p \quad (2)$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$(p-q)d = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ या $(p-q)d = \frac{p-q}{pq}$ या $d = 1/pq$

d का यह मान (1) में रखने पर,

$a = \frac{1}{q} - \frac{(p-1)}{pq}$ या $a = 1/pq$

$\therefore$ स.श्रे. का r वां पद $= a + (r-1)d = \frac{1}{pq} + (r-1)\frac{1}{pq} = \frac{r}{pq}$

फलतः ह.श्रे. का r वां पद pq/r होगा।

प्रश्नमाला 8.7

1. निम्नलिखित हरात्मक श्रेढ़ियों के सम्मुख दिया गया पद ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \ldots 6$ वां पद **(ii)** $\frac{1}{9}, \frac{1}{19}, \frac{1}{29}, \frac{1}{39}, \ldots 18$ वां पद **(iii)** $\frac{1}{14}, \frac{2}{29}, \frac{1}{15}, \frac{2}{31}, \ldots 10$ वां पद

2. निम्नलिखित ह.श्रे. के n वें पद ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \ldots$ **(ii)** $\frac{2}{a+b}, \frac{1}{a}, \frac{2}{3a-b}, \ldots$

3. वह ह. श्रे. ज्ञात कीजिए जिसका दूसरा पद $\frac{2}{5}$ तथा सातवां पद $\frac{4}{25}$ है।
4. यदि एक ह.श्रे. का 7 वां पद $17/2$ एवं 11 वां पद $13/2$ हो, तो उसका 20 वां पद ज्ञात कीजिए।
5. ज्ञात कीजिए:

(i) 1 तथा $1/16$ के मध्य 4 ह.मा. **(ii)** $1/19$ तथा $1/7$ के मध्य 5 ह.मा. **(iii)** $-2/5$ तथा $4/25$ के मध्य एक ह.मा.

6. यदि ह. श्रे. का p वां, q वां तथा r वां पद क्रमशः a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिए:

$$bc(q-r)+ca(r-p)+ab(p-q)=0$$

7. यदि a, b, c ह.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $a, a-c, a-b$ ह.श्रे. में होंगे।
8. यदि a, b, c ह. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए: $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$
9. समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों का ह.मा. ज्ञात कीजिए।
10. यदि किसी ह. श्रे. का p वां पद q तथा q वां पद p हो, तो सिद्ध कीजिए कि उसका $(p+q)$ वां पद $pq/p+q$ होगा।
11. यदि समीकरण $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ के मूल समान हों, तो सिद्ध कीजिए कि a, b, c ह. श्रे. में होंगे।
12. यदि एक छात्र अपने घर से विद्यालय 8 किमी. प्रति घं. की गति से जाता है तथा 6 किमी. प्रति घं. की गति से लौटता है, तो उसकी औसत गति ज्ञात कीजिए जबकि घर से विद्यालय की दूरी 6 किमी. है। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

8.21 समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य में संबंध (Relation between A.M., G.M. and H.M.)

माना कि A, G तथा H दो राशियों a तथा b के मध्य क्रमशः स.मा., गु.मा., तथा ह.मा. हैं। तब

$$A=\frac{a+b}{2}, G=\sqrt{ab} \text{ एवं } H=\frac{2ab}{a+b}$$

अतः $AH=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$

$\therefore \quad G^2=AH$

अर्थात् A तथा H के मध्य G एक गु.मा. है।

पुनः $A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}>0$

$\therefore \quad A>G$ (1)

तथा $G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)=\frac{\sqrt{ab}}{(a+b)}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0$

$\therefore \quad G>H$

अतः $A>G>H$ [(1) तथा (2) से]

8.22 तीन राशियाँ *a, b, c* स.श्रे., गु.श्रे. तथा ह.श्रे. में होंगी, यदि क्रमशः

(i) $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$ **(ii)** $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$ **(iii)** $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$

(i) $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a} \Rightarrow a-b=b-c \quad \Rightarrow \quad b=\frac{a+c}{2}$

$\therefore$ a, b, c स.श्रे. में हैं।

(ii) $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b} \Rightarrow ab-b^2=ab-ac \quad \Rightarrow \quad b^2=ac$

$\therefore$ a, b, c गु.श्रे. में हैं।

(iii) $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c} \Rightarrow ac-bc=ab-ac \quad \Rightarrow \quad b=\frac{2ac}{a+c}$

$\therefore$ a, b, c ह.श्रे. में हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 44: यदि दो संख्याओं का स.मा. उनके गु.मा. से 2 अधिक है तथा उनका अनुपात 4 : 1 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि संख्याएँ a तथा b हैं। तब दिया हुआ हैः

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}+2 \qquad (1)$$

तथा $\frac{a}{b}=\frac{4}{1}$ या $a=4b$ (2)

समीकरण (2) से a का मान (1) में रखने पर,

$\frac{4b+b}{2}=\sqrt{4b^2}+2$ या $5b=4b+4$ या $b=4$

$\therefore$ $a=4b=4\times 4=16$

अतः अभीष्ट संख्याएँ 16, 4 होंगी।

उदाहरण 45: यदि दो राशियों a तथा b का ह.मा. $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि दो राशियों a तथा b का ह.मा. $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ है। तब

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\frac{2ab}{a+b}$$

या $a\,a^{n+1}+a\,b^{n+1}+b\,a^{n+1}+b\,b^{n+1}=2a^{n+1}b+2b^{n+1}a$

या $a\,a^{n+1}+b\,b^{n+1}=a^{n+1}b+b^{n+1}a$

या $a^{n+1}(a-b)=b^{n+1}(a-b)$

या $a^{n+1}=b^{n+1}$ $[\because a\neq b]$

या $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}=1$

यह तभी संभव है जब $n+1=0$ अर्थात् $n=-1$.

उदाहरण 46: तीन राशियाँ ***a, b, c*** ह.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $a(b+c), b(c+a), c(a+b)$ स.श्रे. में होंगे।

हल: $a(b+c), b(c+a), c(a+b)$ स.श्रे. में होंगे, यदि

या $$b(c+a) - a(b+c) = c(a+b) - b(c+a)$$

या $$bc + ba - ab - ac = ca + cb - bc - ba$$

या $$bc + ab = 2ac$$

या $$b = \frac{2ac}{a+c}$$, जो कि सही है क्योंकि a, b, c ह.श्रे. में हैं।

फलतः $a(b+c), b(c+a), c(a+b)$ स.श्रे. में हैं।

प्रश्नमाला 8.8

1. दो संख्याओं का स.मा. 50 तथा ह.मा. 18 हैं। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
2. यदि दो संख्याओं के ह.मा. और गु.मा. में अनुपात 12 : 13 हो, तो सिद्ध कीजिए कि संख्याओं में अनुपात 4 : 9 है।
3. दो संख्याओं के स.मा. तथा गु.मा. का अंतर 2 है, गु.मा. तथा ह.मा. का अंतर 1.2 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. तीन राशियाँ a, b, c गु.श्रे. में हैं तथा $a^x = b^y = c^z$ है, तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z ह.श्रे. में होंगे।
5. तीन राशियाँ a, b, c ह. श्रे. में हैं। सिद्ध कीजिए कि $2a - b$, b, $2c - b$ गु. श्रे. में होंगे।
6. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं, x, y, z ह.श्रे. में हैं तथा ax, by, cz गु.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए:

   $$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$
7. दो धनात्मक राशियों a तथा b के मध्य दो स.मा. A_1, A_2; दो गु.मा. G_1, G_2; तथा दो ह.मा. H_1, H_2; हो तो सिद्ध कीजिए:

   (i) $A_1H_2 = A_2H_1 = G_1G_2 = ab$

   (ii) $G_1G_2 : H_1H_2 = (A_1 + A_2) : (H_1 + H_2)$
8. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं b, c, d गु. श्रे. में हैं तथा c, d, e ह. श्रे. में है, तो सिद्ध कीजिए कि a, c, e गु. श्रे. में होंगे।
9. यदि तीन राशियाँ a, b, c स.श्रे. तथा ह.श्रे. दोनों में हो, तो सिद्ध कीजिए कि वे गु.श्रे. में भी होंगी।

विविध प्रश्नमाला–8

1. श्रेढ़ी $-4, -1, +2, +5, \ldots$ का 10 वां पद है

   (A) 23 (B) –23 (C) 32 (D) –32
2. एक स.श्रे. का 9 वां पद 35 तथा 19 वां पद 75 हो, तो इसका 20 वां पद होगा:

   (A) 78 (B) 79 (C) 80 (D) 81
3. श्रेढ़ी 1, 3, 5, . . . के n पदों का योगफल है:

   (A) $(n-1)^2$ (B) $(n+1)^2$ (C) $(2n-1)^2$ (D) n^2
4. यदि किसी स.श्रे. का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 तथा पदों का योगफल 400 हो, तो पदों की संख्या है:

   (A) 8 (B) 10 (C) 16 (D) 20
5. यदि किसी स.श्रे. का तीसरा पद 18 तथा सातवाँ पद 30 है, तो उसके प्रथम 17 पदों का योगफल होगा:

   (A) 600 (B) 612 (C) 624 (D) 636
6. यदि $(x+1), 3x, (4x+2)$ स.श्रे. में हो, तो इस श्रेढ़ी का पांचवां पद होगा:

   (A) 14 (B) 19 (C) 24 (D) 28
7. a, b, c स. श्रे. में हैं। a तथा b का स.मा. x, b तथा c का स.मा. y हों, तो x तथा y का स.मा. होगा:

   (A) a (B) b (C) c (D) $a + c$

8. किसी स.श्रे. के n पदों का योगफल $3n^2 + 5n$ है। इसका 27 वां पद है:

(A) 160 (B) 162 (C) 164 (D) 166

9. 20 तथा 30 के मध्य 50 समांतर माध्यों का योगफल है:

(A) 1255 (B) 1205 (C) 1250 (D) 1225

10. गु.श्रे. $\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \ldots$ का सार्वअनुपात है:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 3

11. श्रेढ़ी 96, 48, 24, 12, . . ., $\frac{3}{16}$ में पदों की संख्या है:

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15

12. $9^{1/3} \times 9^{1/9} \times 9^{1/27} \times \ldots \infty$ का मान है:

(A) 1 (B) 3 (C) 9 (D) 27

13. श्रेढ़ी $\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots$ के अनंत पदों का योगफल है:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

14. श्रेणी $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \cdots$ के अनंत पदों का योगफल है:

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{7}{16}$

15. यदि गु.श्रे. का तीसरा पद 2 है, तो उसके प्रथम पांच पदों का गुणनफल है:

(A) 4 (B) 16 (C) 32 (D) 64

16. n के किस मान के लिए व्यंजक $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$, a तथा b के बीच गु.मा. होगा

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) $-\frac{1}{2}$

17. यदि a और b के मध्य G_1 तथा G_2 दो गु.मा. हो, तो G_1G_2 का मान है:

(A) $\sqrt{ab}$ (B) ab (C) $(ab)^2$ (D) $(ab)^3$

18. –9 और –4 के मध्य गु.मा. है:

(A) –36 (B) 6 (C) –6 (D) 36

19. श्रेढ़ी $\frac{1}{2}, \frac{5}{13}, \frac{5}{16}, \ldots$ है:

(A) स.श्रे. (B) गु.श्रे. (C) ह. श्रे. (D) अन्य श्रेणी

20. श्रेढ़ी $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \ldots$ का छठा पद है:

(A) $\frac{1}{13}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) इनमें से कोई नहीं

21. यदि a, b, c, d ह. श्रे. में हैं तो सत्य कथन है:

(A) $ab > cd$ (B) $ac > bd$ (C) $ad > bc$ (D) इनमें से कोई नहीं

22. दो संख्याओं का ह.मा. 4, स.मा. A तथा गु.मा. G है। यदि $2A + G^2 = 27$ है तो संख्याएँ हैं:

(A) 6, 4 (B) 8, 2 (C) 8, 6 (D) 6, 3

23. दो संख्याओं के ह.मा. तथा गु.मा. का अनुपात 12 : 13 है, तो संख्याओं का अनुपात होगा:

(A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 3 : 5 (D) 4 : 9

24. यदि दो संख्याओं a तथा b के बीच स.मा., गु.मा. एवं ह.मा. क्रमशः A, G एवं H हों, तो A, G, H होंगे:

(A) ह.श्रे. में (B) गु.श्रे. में (C) स.श्रे. में (D) इनमें से कोई नहीं

25. यदि संख्याएँ a तथा b के बीच ह.मा. H हो, तो $\frac{H}{a} + \frac{H}{b}$ का मान है:

(A) 2 (B) $\frac{a+b}{ab}$ (C) $\frac{ab}{a+b}$ (D) इनमें से कोई नहीं

26. यदि a, b, c ह.श्रे. में हों, तो सत्य कथन है:

(A) $ac = b^2$ (B) $\sqrt{ac} < b$ (C) $a + c = 2b$ (D) $\sqrt{ac} > b$

27. यदि किसी श्रेणी का n वां पद $\frac{n^2}{3^n}$ हो, तो अनुक्रम के प्रथम 3 पद लिखिए।

28. श्रेढ़ी 72, 70, 68, 66, . . . का कौन सा पद 40 है?

29. यदि एक स.श्रे. में m तथा n पदों के योगफल का अनुपात $m^2 : n^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि m वें तथा n वें पदों का अनुपात $(2m-1):(2n-1)$ होगा।

30. यदि किसी समकोण त्रिभुज की भुजाएँ स.श्रे. में हैं, तो उसकी भुजाओं की लंबाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

[संकेत: $(a+d)^2 = (a-d)^2 + a^2 \Rightarrow \frac{a}{d} = 4$]

31. $-\frac{2}{7}, a, -\frac{7}{2}$ गु.श्रे. में हो तो, a का मान लिखिए:

32. श्रेणी $1 - 1 + 1 - 1 + . . .$ का n पदों तक योगफल लिखिए:

33. $2^{1/2}.4^{1/8}.16^{1/32}...\infty$ का मान लिखिए:

34. n के किस मान के लिए व्यंजक $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$, दो राशियों a तथा b का ह.मा. होगा?

35. यदि a तथा b के स.मा. और ह.मा. क्रमशः A एवं H हों, तो सिद्ध कीजिए:

$$\frac{a - A}{a - H} \times \frac{b - A}{b - H} = \frac{A}{H}$$

36. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं और b, c, d ह. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $ad = bc$ होगा।

[संकेत: $b = \frac{a+c}{2}$ तथा $c = \frac{2bd}{b+d}$ $\therefore bc = \frac{a+c}{2} . \frac{2bd}{b+d}$ या $c(b+d) = (a+c)d$ या $bc = ad$

37. यदि $a + b + ... + \ell$ गुणोत्तर श्रेढ़ी है तो सिद्ध कीजिए इसका योग $= \frac{b\ell - a^2}{b - a}$

38. अनुक्रम 3, 33, 333, ... के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिये।

39. अनुक्रम 1, 2, 4, 8, 16, 32 तथा अनुक्रम 32, 8, 2, 1 / 2, 1 / 8, 1 / 32 के संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम का योगफल ज्ञात कीजिये।

40. यदि G_1 तथा G_2, a और b के बीच दो गुणोत्तर माध्य है तो सिद्ध कीजिए।
$G_1 G_2 = a\, b$.

41. यदि दो संख्याओं a तथा b के बीच के समांतर माध्य (A.M) तथा गुणोत्तर माध्य (G.M) में अनुपात $m : n$ है तो सिद्ध कीजिए कि $a : b = m + \sqrt{m^2 - n^2} : m - \sqrt{m^2 - n^2}$ है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. अनुक्रम से हमारा तात्पर्य है, ''किसी तर्क पूर्ण नियम के अनुसार एक परिभाषित (निश्चित) क्रम में संख्याओं की व्यवस्था''। पुनः हम एक अनुक्रम को फलन के रूप में परिभाषित कर सकते है, जिसका प्रांत प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो या उसका उपसमुच्चय $N_k = \{1, 2, 3 \ldots, k\}$ के प्रकार का होगा। अनुक्रम की संख्या उसका पद कहलाती है। पदों की संख्या परिमित या अपरिमित होने पर अनुक्रम क्रमशः ''परिमित अनुक्रम'' या ''अपरिमित अनुक्रम'' कहलाते है।
2. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ एक अनुक्रम है तो योगरूप $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ श्रेणी कहलाता है। जिस श्रेणी के पदों की संख्या परिमित (सीमित) होती है उसे परिमित श्रेणी कहते है।
3. श्रेढ़ीः एक अनुक्रम श्रेढ़ी कहलाती है यदि उसके पदों का संख्यात्मक मान किसी विशिष्ट नियम के अन्तर्गत बढ़ता या घटता है। अर्थात् यदि किसी अनुक्रम का n वां पद एक स्पष्ट सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है तो वह अनुक्रम श्रेढ़ी कहलाता है।
4. किसी अनुक्रम के पद एक समान नियतांक से लगातार बढ़ते या घटते है, समांतर श्रेढ़ी होती है। नियतांक को श्रेढ़ी का सार्व अन्तर कहते है सामान्यतः हम समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, सार्व अंतर d तथा अन्तिम पद ℓ से प्रदर्शित करते हैं समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद भी n वाँ पद $T_n = a + (n-1)d$ है।
   समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल S_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है।
   $$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \text{ या } S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$
5. किन्हीं दो संख्याओं a तथा b का समांतर माध्य $A = \frac{a+b}{2}$ होता है।
6. किसी अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते है, यदि किसी पद का अपने पिछले पद से अनुपात अचर रहता है। इस अचर अनुपात को सार्व अनुपात कहते है साधारणतः हम गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद को a, सार्वअनुपात को r से निरूपित करते है। गुणोत्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद या nवाँ पद $T_n = ar^{n-1}$ होता है।
7. गुणोत्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ या $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ यदि $r \neq 1$ होता है।
8. किसी दो धनात्मक संख्याएँ a तथा b का गुणोत्तर माध्य $G = \sqrt{ab}$ है।
9. यदि किसी अनुक्रम के पदों का व्युत्क्रम संमातर श्रेढ़ी होतो अनुक्रम को हरात्मक श्रेढ़ी कहते है।
10. हरात्मक श्रेढ़ी का व्यापक पद या nवाँ पद $T_n = \frac{1}{a + (n-1)d}$ जहाँ a, d संगत समांतर श्रेढ़ी के प्रथम पद तथा सार्वअन्तर है।
11. दो राशियाँ a तथा b का हरात्मक माध्य $H = \frac{2ab}{a+b}$
12. दो राशियों a तथा b के मध्य स. मा., गु. मा. तथा ह.मा. क्रमशः A, G, H है, तथा
    (i) $G^2 = AH$ (B) $A \geq G \geq H$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 8.1

1. (i), (ii), (iii) स. क्षे. है। (iv) स. श्रे. नहीं है।

2. (i) a = 10: d = 3 $T_5 = 22$ (ii) a = a : d = d $T_5 = a + 4d$
(iii) a = 2 : d = 3 $T_5 = -10$

4. 22 5. 64 6. 32 8. 30

प्रश्नमाला 8.2

1. (i) 900 (ii) $\frac{100}{3}$ (iii) $\frac{3(7+5\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1}$ 2. 33, 1683 3. n (n + 4)

4. 3,2 5. 8, 36 6. शून्य 10. 1,4,7 11. 24 14. 2700 15. 3

प्रश्नमाला 8.3

1. (i) 729 (ii) $\frac{\sqrt{2}}{512}$ 2. (i) n = 13 (ii) n = 0 3. 5.2^{n-1} 4. 1458 5. r = 4 6. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2.$

7. (i) 6,12, 24 (ii) 4, 8, 16, 32, 64, 128 8. $x = 3$, 9. $\frac{1}{20}, \frac{-9}{20}, \frac{81}{20}, \frac{-729}{20}$ 11. $\sqrt{xy}$

प्रश्नमाला 8.4

1. (i) 2186 (ii) $-\frac{6305}{2880}$ (iii) $\frac{a^{10}-b^{10}}{a(a+b)}$ 2. (i) 728 (ii) $\frac{511}{4}$

3. 5 पद 4. 4 5. 10

6. (i) $\frac{70}{81}(10^n-1)-\frac{7n}{9}$ (ii) $\frac{5}{81}\left(9n-1+\frac{1}{10^n}\right)$ (iii) $n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

7. (i) $\frac{106}{45}$ (ii) $\frac{619}{990}$ (iii) $\frac{2750}{999}$ 8. 64, 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$,... 11. $\frac{7}{3}$

प्रश्नमाला 8.5

1. (i) $4-\frac{2+n}{2^{n-1}}$ **(ii)** $\frac{1-(2n-1)x^n}{1-x}+\frac{2x\left(1-x^{n-1}\right)}{(1-x)^2}$ **(iii)** $\frac{5}{36}+(-1)^{n-1}\frac{5+6n}{6^2\,5^n}$

2. (i) $\frac{6}{7}$ **(ii)** $\frac{3}{16}$ **(iii)** $\frac{1}{(1+x)^2}$

3. (i) $\frac{3^n+1}{2}, \frac{3^{n+1}+2n-3}{4}$ **(ii)** $(2n+1)2^n, (2n-1)2^{n+1}+2$

(iii) $(3n-2)x^{n-1}, \left[\frac{1}{1-x}+\frac{3x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}-\frac{(3n-2)x^n}{1-x}\right]$

4. $\frac{2+x}{(1-x)^2}-\frac{3x^n}{(1-x)^2}-\frac{(3n-1)x^n}{1-x}, \frac{2+x}{(1+x)^2}$

प्रश्नमाला 8.6

1. (i) $\frac{n(n+1)(2n+3)}{2}+5n$ **(ii)** $\frac{n(n+1)(2n^2+2n+7)}{2}+n$ **(iii)** $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

2. (i) $\frac{4}{3}n(n+1)(4n-1)+n$ **(ii)** $\frac{9}{4}n^2(n+1)(3n-1)-n$ **(iii)** $\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$

3. (i) $(2n-1)(2n+1), \ \frac{n}{3}(4n^2+6n-1)$ **(ii)** $n(n+1)(3n+1), \ \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(9n+7)$

4. (i) $n(n+2), \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ **(ii)** $n^2+2n-2, \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}-2n$

5. (i) $\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ **(ii)** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \frac{n}{12}(n+1)^2(n+2)$

प्रश्नमाला 8.7

1. (i) $\frac{1}{17}$ **(ii)** $\frac{1}{179}$ **(iii)** $\frac{2}{37}$

2. (i) $\frac{2}{11-n}$ **(ii)** $\frac{2}{na+(2-n)b}$

3. $\frac{4}{7}, \frac{4}{10}, \frac{4}{13} \ldots\ldots$

4. $\frac{17}{4}$

5. (i) $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}$ **(ii)** $\frac{1}{17}, \frac{1}{15}, \frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{9}$ **(iii)** $\frac{8}{15}$

9. $-\frac{2c}{b}$

12. $6\frac{6}{7}$ किमी. प्रति घं.

प्रश्नमाला 8.8

1. 90, 10

3. 1, 9

विविध उत्तरमाला–8

1. (A)	**2.** (B)	**3.** (D)	**4.** (C)	**5.** (B)	**6.** (C)	**7.** (B)
8. (C)	**9.** (C)	**10.** (A)	**11.** (B)	**12.** (B)	**13.** (C)	**14.** (B)
15. (C)	**16.** (D)	**17.** (B)	**18.** (C)	**19.** (C)	**20.** (B)	**21.** (C)
22. (D)	**23.** (D)	**24.** (B)	**25.** (A)	**26.** (D)	**27.** $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}$	**28.** 17 वां

30. 3 : 4 : 5 **31.** ± 1 **32.** $\frac{1-(-1)^n}{2}$ **33.** 2 **34.** $n = -1$ **39.** $\frac{30}{81}\left[10^n - 1\right] - \frac{n}{3}$