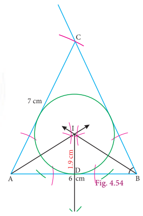
4



வடிவியல்

"கவிதையைப் போலவே, வடிவியலிலும் அகத்தூண்டல் அவசியமாகிறது"

– அலெக்ஸாண்டர் புஸ்கின்

தேல்ஸ்
(கி.மு(பொ.ஆ.மு) 624 – 546)

தேல்ஸ் (Thales) கிரேக்க நகரமாகிய மிலிடஸில் பிறந்தார். அவர் வடிவியலில் குறிப்பாக முக்கோணங்களின் அறிமுறை மற்றும் செய்முறை புரிதலுக்காக (Theoretical and practical understanding) நன்கு அறியப்பட்டவர் இவர் பிரமிடுகளின் உயரத்தைக் காணவும், கடற்கரைக்கும் கப்பலுக்கும் இடைப்பட்ட தூரத்தைக் கணக்கிடவும் வடிவியலைப் பயன்படுத்தினார். கிரேக்க நாட்டின் ஏழு ஞானிகள் அல்லது ஏழு துறவிகளில் ஒருவராக விளங்கினார். மேற்கத்திய பண்பாட்டின் முதல் தத்துவ மேதையாக மற்றவர்களால் அவர் மதிக்கப்பட்டார்

CSEIHZ

கற்றல் விளைவுகள்

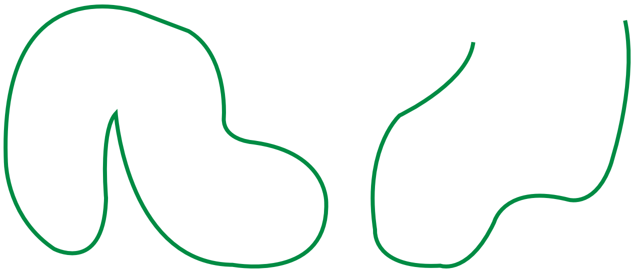
- நேரிய கோணச் சோடிகள் மற்றும் குத்தெதிர்க் கோணங்களின் மீதான தேற்றங்களைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- முக்கோணங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் பண்பைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- நாற்கரத்தின் பண்புகளைப் புரிந்துகொண்டு கணக்குகளைத் தீர்க்க அவற்றைப் பயன்படுத்துதல்.
- வட்டத்தின் நாண்கள் மற்றும் வட்ட விற்கள் தாங்கும் கோணங்கள் மீதான தேற்றங்களைப் புரிந்துகொள்ளுதல், விளக்குதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் மீதான தேற்றங்களைப் புரிந்துகொள்ளுதல், விளக்குதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல்.
- முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள், செங்கோடுகள், சுற்றுவட்டம் மற்றும் உள்வட்டம் வரைந்து அவற்றின் மையங்களைக் குறித்தல்.

4-Geometry_TM.indd 149 26-12-2019 12:36:53

4.1 அறிமுகம்

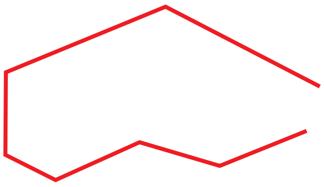
வடிவியலில் நாம் வடிவங்களைப்பற்றி படிக்கின்றோம் ஆனால் அவற்றில் படிக்க என்ன இருக்கிறது என நீங்கள் கேட்கலாம். நாம் வடிவங்களை வரைகின்றோம், ஒப்பிடுகின்றோம் மேலும் அளக்கின்றோம். வடிவங்களில் நாம் அளப்பது எதை?

கீழ்க்காணும் வேறுபட்ட சில வடிவங்களை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள்.



படம். 4.1

இரண்டு வளைவரைகள் வடிவத்தை உருவாக்குகின்றது. ஒன்று ஒரு பகுதியைச் சூழ்ந்து அடைபட்ட வளைவரை, மற்றொன்று திறந்த வளைவரை. நாம் ஒரு கயிற்றைக் (அல்லது கம்பியைக்) கொண்டு திறந்த வளைவரையின் நீளத்தை அளக்கலாம். வளைவரையில் அடைபட்ட பகுதியின் எல்லையினை அளக்கலாம். இவற்றை விட நேர்க்கோடுகளை அளவுகோலினால் அளப்பது மிகவும் எளிதல்லவா? கீழ்க்காணும் இரண்டு வடிவங்களைக் கவனிக்க.

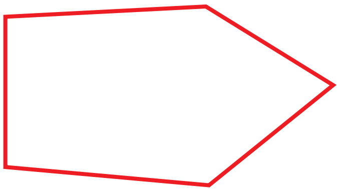


படம். 4.2

நாம் இப்பொழுது நேர்க்கோடுகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட அடைபட்ட வடிவங்களை மட்டும் கவனத்தில் கொள்வோம். இவற்றில் இருந்து பல சுவையான கருத்துகளைப் பெறப்போகிறோம். படம் 4.2 திறந்த வளைவான வடிவத்தைக் குறிக்கிறது.

நாம் இங்கு வடிவங்களை வரைதல், ஒப்பீடு செய்தல் மற்றும் அளத்தல் என்பனவற்றுடன், மேலும் பல கருத்துக்களை அறியப் போகிறோம். அதற்காக நாம் அவற்றை விளக்கவேண்டும். நாம் இந்த வடிவங்களை எவ்வாறு விளக்குவது? (படம் 4.3ஐப் பார்க்க.)

அவை நேர்க்கோடுகளால் உருவாக்கப்பட்ட மூடிய வடிவம்.

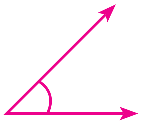


படம். 4.3

4.2 கோணங்களின் வகைகள் (Types of Angles)

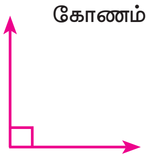
மீள்பார்வை

நாம் அன்றாட வாழ்வில் கோணங்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். குழாய் செப்பனிடுபவர் குழாய்களைச் சீராகப் பொருத்துவதற்குக் கோணத்தைப் பயன்படுத்துகிறார். மரவேலை செய்பவர்கள் தங்கள் கருவிகளைத் தேவைக்கேற்றவாறு அமைத்து மரங்களைச் சரியான கோணத்தில் அறுக்கிறார்கள். வான்வழிப் போக்குவரத்துக் கட்டுப்பாட்டு அலுவலர்களும் (ATC- Air Traffic Controllers) விமானங்களை இயக்கக் கோணங்களைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். சுண்டாட்ட (carrom) விளையாட்டு வீரர்கள் கோணங்களை நன்கு அறிந்திருந்தால் தங்கள் இலக்கைத் திட்டமிட முடியும். கோணமானது ஒரே கோட்டிலமையாத பொதுவான தொடக்கப் புள்ளியைக் கொண்ட இரு கதிர்களால் உருவாகின்றது.



குறுங்கோணம்
90° ஐ விடவும் குறைவான கோணம்

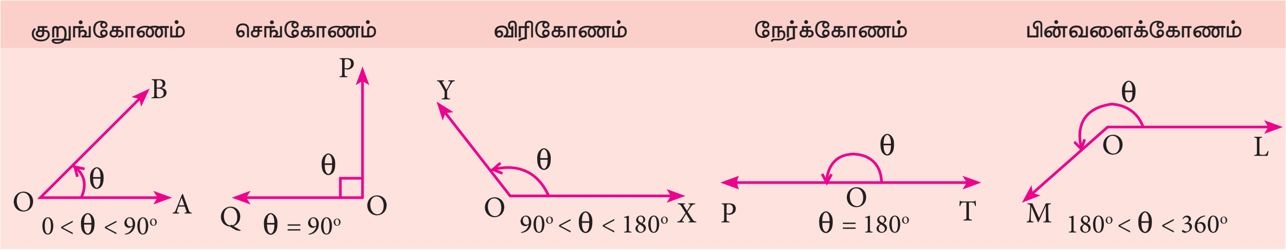
படம். 4.4



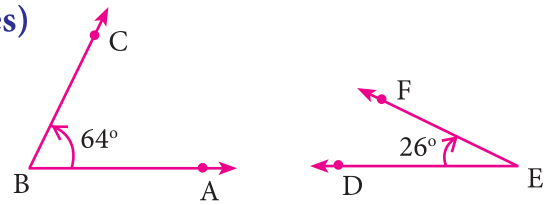
செங்கோணம்
சரியாக 90° அளவுள்ள கோணம்

படம். 4.5

4-Geometry_TM.indd 150 26-12-2019 12:36:53



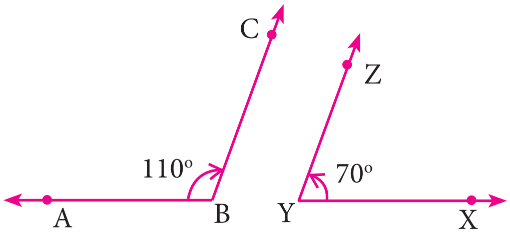
நிரப்புக் கோணங்கள் (Complementary Angles)



படம். 4.6

இரு கோண அளவுகளின் கூடுதல் 90° எனில், அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும். . எடுத்துக்காட்டாக, $\angle ABC=64°$ மற்றும் $\angle DEF=26°$ எனில், கோணங்கள் $\angle ABC$ மற்றும் $\angle DEF$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும். ஏனென்றால் $\angle ABC + \angle DEF = 90°$

மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் (Supplementary Angles)



படம். 4.7

இரு கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனில் அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\angle ABC=110°$ மற்றும் $\angle XYZ=70°$ எனில், இங்கு, $\angle ABC + \angle XYZ = 180°$.

ஆகவே $\angle ABC$ மற்றும் $\angle XYZ$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

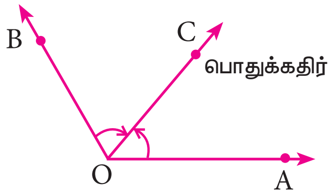
அடுத்துள்ள கோணங்கள் (Adjacent Angles)

இரு கோணங்கள்

i) பொதுவான முனைப் புள்ளியைப் பெற்றும்

ii) பொதுவான கதிர் ஒன்றினைப் பெற்றும்

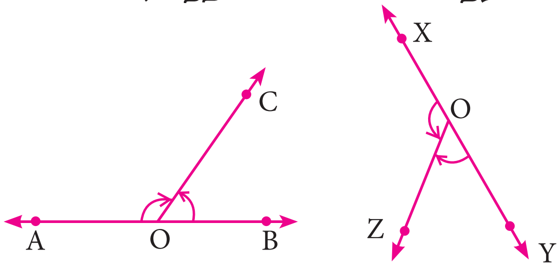
iii) அப்பொதுவான கதிரானது இரு பொதுவற்ற கதிர்களுக்கு இடையிலும் அமையுமாயின் அவை அடுத்துள்ள கோணங்களாகும்.



படம். 4.8

நேரிய கோணச் சோடிகள் (Linear Pair of Angles)

ஒரு கதிர் கோட்டின் மீது நிற்கும்போது உண்டாகும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனில், அந்தக் கோணங்கள் நேரிய கோணங்கள் எனப்படும்.



படம். 4.9

$\angle AOC + \angle BOC=180°$

$\therefore \angle AOC$ மற்றும் $\angle BOC$ நேரிய கோணங்கள்

$\angle XOZ + \angle YOZ = 180°$

$\angle XOZ$ மற்றும் $\angle YOZ$ நேரிய கோணங்கள்

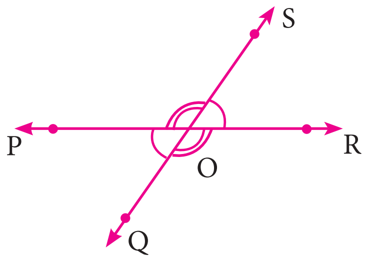
4-Geometry_TM.indd 151 26-12-2019 12:36:54

குத்தெதிர்க் கோணங்கள் (Vertically Opposite Angles)

இரு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால் உண்டாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம்.

படத்தில், $\angle POQ = \angle SOR$

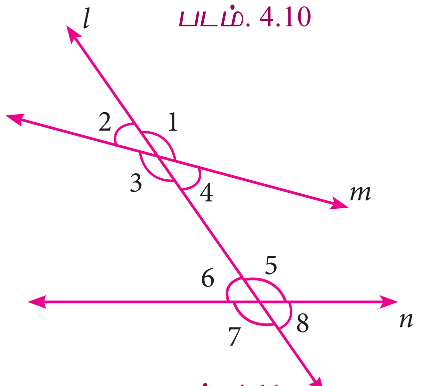
$\angle POS = \angle QOR$



படம். 4.10

4.2.1 குறுக்குவெட்டி (Transversal)

ஒரு கோடு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகளை வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுமேயானால் அது அக்கோடுகளின் குறுக்குவெட்டி எனப்படும்.



படம். 4.11

வகை (i) ஒரு குறுக்குவெட்டி இரு கோடுகளை வெட்டுவதால் எட்டுக் கோணங்கள் கிடைக்கின்றன. படத்தில் m மற்றும் n என்ற கோடுகளை l என்ற குறுக்குவெட்டி வெட்டுவதால்,

(i) ஒத்த கோணங்கள் : $\angle 1$ மற்றும் $\angle 5$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 6$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 7$, $\angle 4$ மற்றும் $\angle 8$

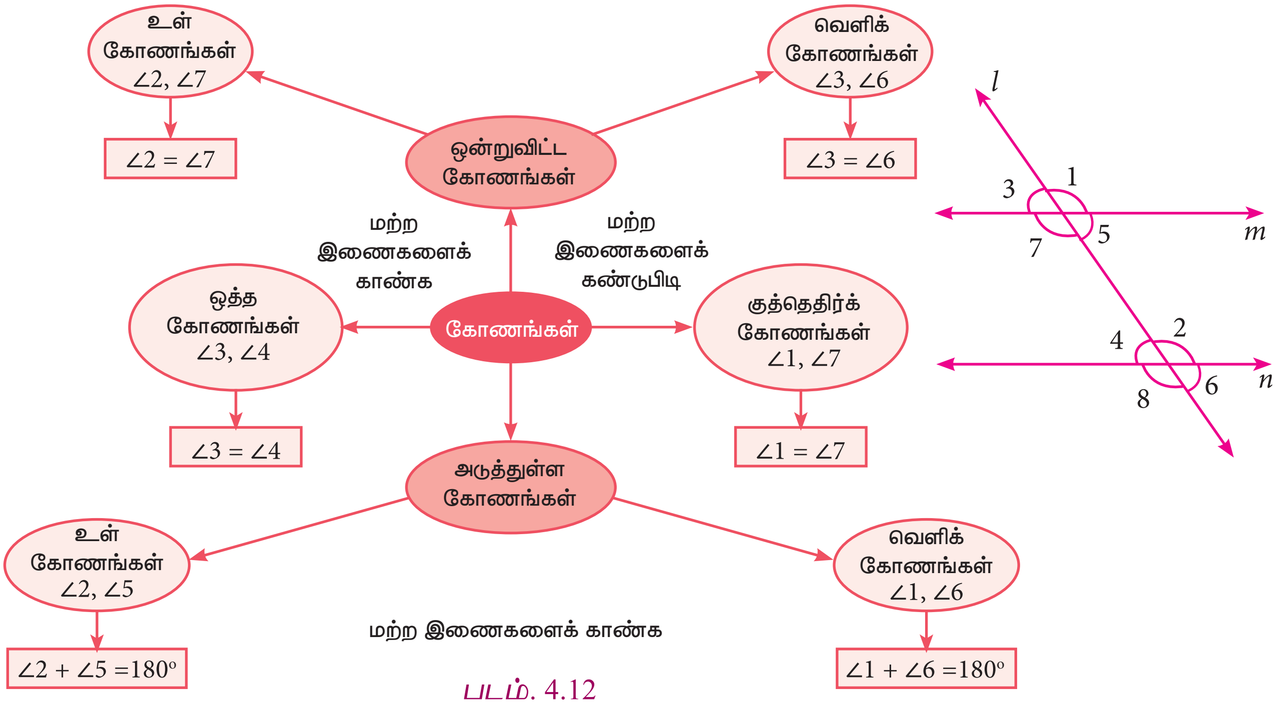
(ii) ஒன்றுவிட்ட உள் கோணங்கள்: $\angle 4$ மற்றும் $\angle 6$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 5$

(iii) ஒன்றுவிட்ட வெளிக் கோணங்கள் : $\angle 1$ மற்றும் $\angle 7$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 8$

(iv) $\angle 4$ மற்றும் $\angle 5$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 6$ என்பன குறுக்குவெட்டியின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த உள் கோணங்கள்.

(v) $\angle 1$ மற்றும் $\angle 8$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 7$ என்பன குறுக்கு வெட்டியின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த வெளிக் கோணங்கள்.

வகை (ii) ஒரு குறுக்குவெட்டியானது இரு இணைக் கோடுகளை வெட்டுவதால் வெவ்வேறு விதமான கோணச் சோடிகளைக் குறுக்குவெட்டி ஏற்படுத்துகிறது.



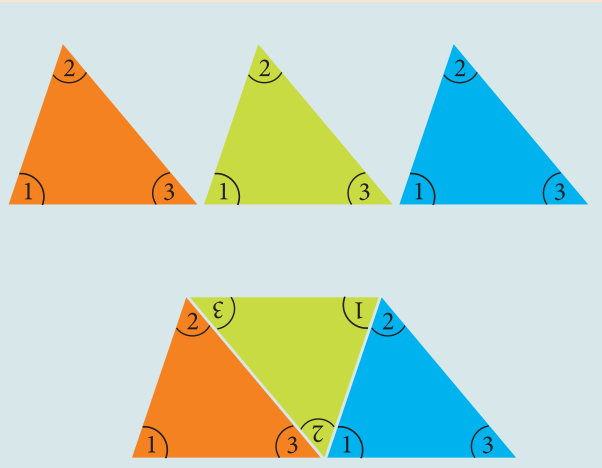
படம். 4.12

4-Geometry_TM.indd 152 26-12-2019 12:36:54

4.2.2 முக்கோணங்கள் (Triangles)

செயல்பாடு 1

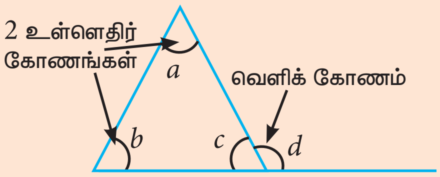
மூன்று வெவ்வேறு வண்ணக் காகிதங்களை எடுத்து அவற்றை ஒன்றின் மீது ஒன்றாக வைக்கவும். மேல் காகிதத்தில் ஒரு முக்கோணம் வரைந்து, ஒரே அளவுள்ள வெவ்வேறு வண்ணங்கள்கொண்ட மூன்றுமுக்கோணங்கள் கிடைக்குமாறு வெட்டி எடுக்கவும். கொடுக்கப் பட்டுள்ளவாறு முனைகளையும், கோணங் களையும் குறிக்கவும். உள்கோணங்கள் $\angle 1, \angle 2$ மற்றும் $\angle 3$ ஐ ஒரே நேர்க்கோட்டில் அடுத்தடுத்து வருமாறு முக்கோணங்களை இடைவெளி இல்லாமல் வைக்கவும் மூன்று கோணங்கள் $\angle 1$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 3$ இன் மொத்த அளவைப் பற்றி என்ன கூறுவாய்?



படம். 4.13

இதே படத்தைப் பயன்படுத்தி **முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணப்** பண்பை விளக்க இயலுமா?

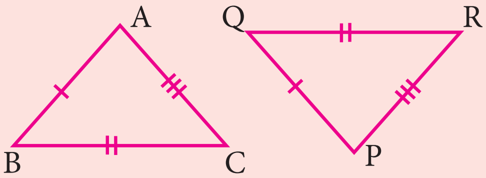
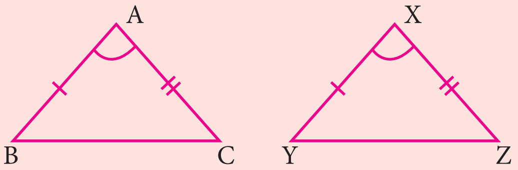
முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் நீட்டப்பட்டால் உண்டாகும் வெளிக்கோணமானது இரண்டு உள்ளெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம். அதாவது $d=a+b$ (படம். 4.14 ஐப் பார்க்க)



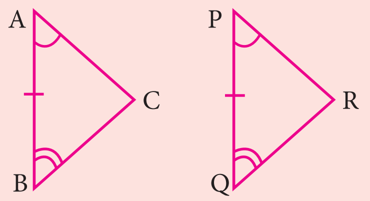
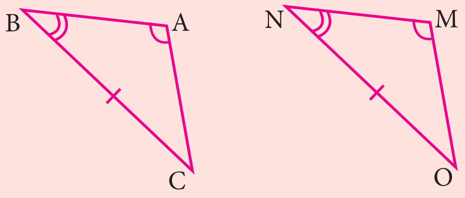
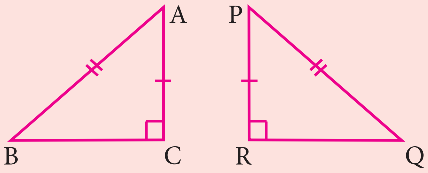
படம். 4.14

4.2.3 சர்வசம முக்கோணங்கள் (Congruent Triangles)

ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களும், கோணங்களும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களுக்கும், ஒத்த கோணங்களுக்கும் சமமானால் அவ்விரு முக்கோணங்கள் சர்வசம முக்கோணங்கள் எனப்படும்.

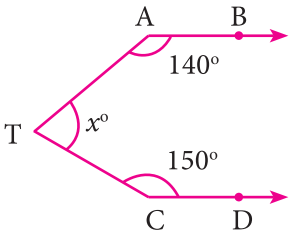
விதி	படங்கள்	காரணம்
ப–ப–ப		$AB = PQ$ $BC = QR$ $AC = PR$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
ப–கோ–ப		$AB = XY$ $\angle BAC = \angle YXZ$ $AC = XZ$ $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

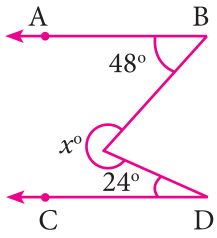
4-Geometry_TM.indd 153 26-12-2019 12:36:54

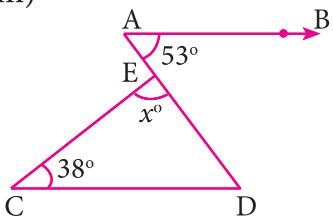
கோ–ப–கோ		$\angle A = \angle P$ $AB = PQ$ $\angle B = \angle Q$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
கோ–கோ–ப		$\angle A = \angle M$ $\angle B = \angle N$ $BC = NO$ $\Delta ABC \cong \Delta MNO$
செ–க–ப		$\angle ACB = \angle PRQ = 90°$ (செ) AB = PQ கர்ணம் (க) $AC = PR$ (ப) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

பயிற்சி 4.1

1. படத்தில், AB ஆனது CD –க்கு இணை எனில், x இன் மதிப்பு காண்க.

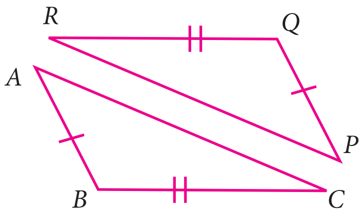
(i)


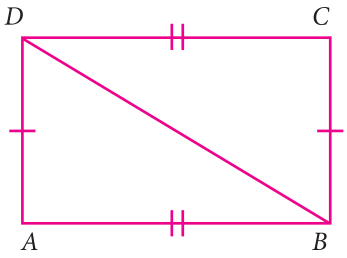
(ii)


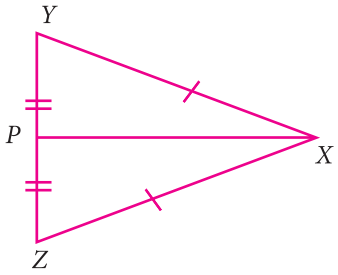
(iii)


2. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் விகிதம் 1: 2 : 3 எனில் முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவையும் காண்க.

3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணச் சோடிகளைக் கருத்தில் கொள்க. மேலும் அவற்றில் ஒவ்வொரு சோடியும் சர்வசம முக்கோணங்களா எனக் காண்க. அவை சர்வசம முக்கோணங்கள் எனில் எப்படி? இல்லையெனில் அவை சர்வசமமாக என்ன செய்ய வேண்டும்?

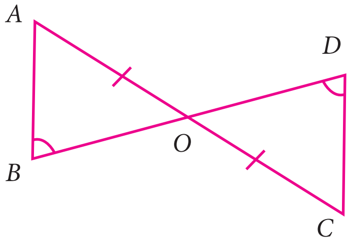
(i)


(ii)


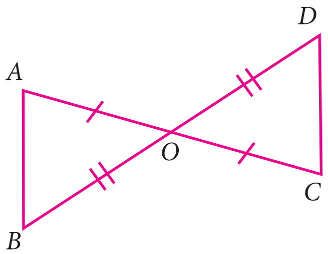
(iii)


4-Geometry_TM.indd 154 26-12-2019 12:36:55

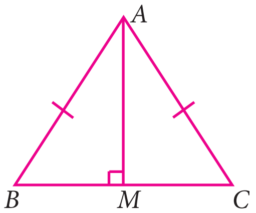
(iv)



(v)

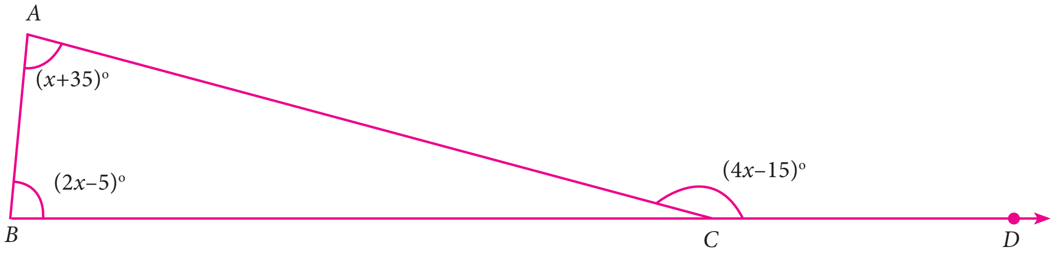


(vi)



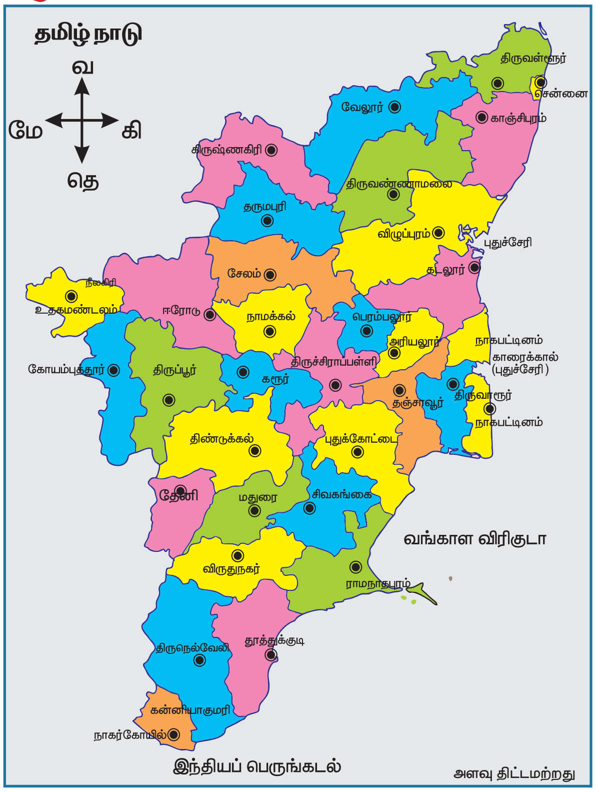
4. ΔABC மற்றும் ΔDEF இல் $AB=DF$ மற்றும் $\angle ACB=70°$, $\angle ABC=60°$, $\angle DEF=70°$ மற்றும் $\angle EDF=60°$ எனில், முக்கோணங்கள் சர்வசமம் என நிறுவுக.

5. கொடுக்கப்பட்ட ΔABC இல் அனைத்துக் கோண அளவுகளையும் காண்க.



4.3 நாற்கரங்கள் (Quadrilaterals)

செயல்பாடு 2



படம். 4.15

தமிழ்நாடு போக்குவரத்துக் கழகப் பேருந்துகள் கீழ்க்காணும் நான்கு வழித்தடங்களை எடுத்துக்கொள்கின்றன. முதலாவது ஒருவழிப் பயணமாகும். மற்றவை சுற்றுப் பாதைப் பயணமாகும். வரைபடத்தில் இடங்களைக் கண்டறிந்து அவற்றைப் புள்ளிகளால் குறித்து, கோடுகளால் இணைத்து, வழித்தடத்தை வரைக. நான்கு வெவ்வேறு வழித்தடத்திலும் இணைக்கப் பட்டுள்ள இடங்கள் பின்வருமாறு:

(i) நாகர்கோவில், திருநெல்வேலி, விருதுநகர், மதுரை.

(ii) சிவகங்கை, புதுக்கோட்டை, தஞ்சாவூர், திண்டுக்கல், சிவகங்கை.

(iii) ஈரோடு, கோயம்புத்தூர், தருமபுரி, கரூர், ஈரோடு.

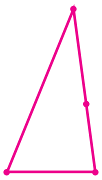
(iv) சென்னை, கடலூர், கிருஷ்ணகிரி, வேலூர், சென்னை.

இந்த இடங்களை இணைத்தால், நாம் கீழ்க்கண்ட வடிவங்களைப் பெறுகின்றோம்.

(i)

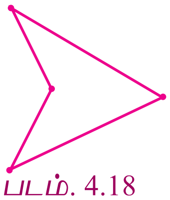
படம். 4.16

(ii)



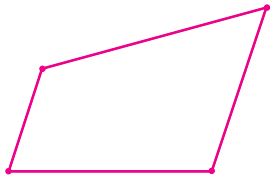
படம். 4.17

(iii)



படம். 4.18

(iv)

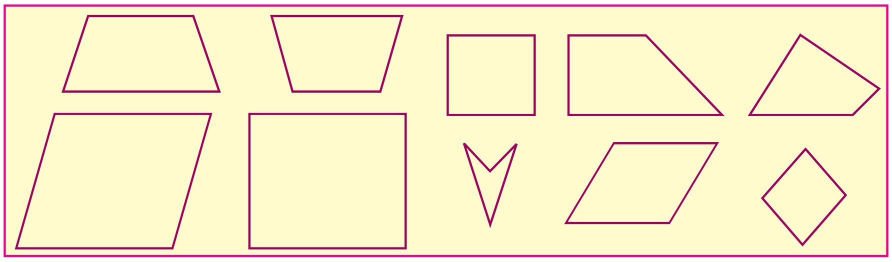


படம். 4.19

4-Geometry_TM.indd 155 26-12-2019 12:36:55

நகரங்களின் பெயர்களைப் புள்ளிகளில் குறித்து வரைபடத்தில் உள்ளவாறே எவ்விதச் சுழற்சியும் இன்றி வடிவங்களை வரைக.

நாம் உற்றுநோக்கினால், முதலாவது படத்தில் (4.16) நான்கு புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன என்பது புலப்படும். மற்ற மூன்றும் நாம் முன்பே கண்டுள்ளவாறு நேர்க்கோடுகளால் அடைபட்ட மூடிய வடிவங்கள் ஆகும். இந்த மூடிய வடிவங்களை அழைக்கச் சில பெயர்கள் நமக்குத் தேவைப்படுகின்றன. அவற்றை நாம் பலகோணம் என அழைப்போம்.



படம். 4.20

குறிப்பு

குழிவுப் பலகோணம் (*Concave Polygon*): பலகோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு கோணத்தின் அளவு 180° யை விட அதிகமாக இருந்தால் அது குழிவுப் பலகோணமாகும்

குவிவுப் பலகோணம் (*Convex Polygon*): பலகோணத்தின் அனைத்து உட்கோணங்களும் 180° யை விடக் குறைவாக இருக்கும் (மூலை விட்டங்கள் பலகோணத்திற்கு உள்ளேயே அமையும்).

பலகோணம் எவ்வாறு தோற்றமளிக்கும்? அவற்றின் பக்கங்களின் இரு முனைகளிலும் புள்ளிகள் இருக்கும். நாம் இந்தப் புள்ளிகளைப் பலகோணத்தின் முனைகள் என அழைப்போம். இந்த முனைகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டுகளே பக்கங்கள். *Poly* என்றால் பல என்பதைக் குறிக்கும். *Polygon* என்பது பல பக்கங்களைக் கொண்ட வடிவம் என்று பொருள்படும்.

ஒரு பலகோணத்திற்கு எத்தனை பக்கங்கள் இருக்கும்? ஒன்றா? ஆனால் இது ஒரு சாதாரணக் கோட்டுத்துண்டு. இரண்டா? ஆனால் இரண்டு பக்கங்களைக் கொண்டு மூடிய வடிவத்தை எவ்வாறு பெற இயலும்? மூன்றா? ஆம். இதை முன்பே அறிந்துள்ளோம். அதுதான் முக்கோணம். இப்பொழுது நான்கு பக்கங்கள்? சதுரம் மற்றும் செவ்வகம் நான்கு பக்கங்களைக் கொண்ட பலகோணத்தின் எடுத்துக்காட்டுகள். ஆனால் அவை மட்டுமன்று, இங்கு (படம் 4.20) உள்ளவை நான்கு பக்கங்கள் கொண்ட பலகோணங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும். இவற்றை நாம் நாற்கரங்கள் என அழைப்போம்.

4.3.1 சில சிறப்பு நாற்கரங்களின் பெயர்கள் (Special Names for Some Quadrilaterals)

1. ஓர் இணைகரம் என்பது எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாக மற்றும் சமமாக உள்ள நாற்கரமாகும்.

2. ஒரு சாய்சதுரம் என்பது எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாகவும் மற்றும் எல்லாப் பக்கங்களும் சமமாகவும் உள்ள நாற்கரமாகும்.

3. ஒரு சரிவகம் என்பது ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையாக உள்ள நாற்கரமாகும்.

ஒரு சில இணைகரங்கள், சாய்சதுரங்கள் மற்றும் சரிவகங்களை வரைக.

4-Geometry_TM.indd 156 26-12-2019 12:36:55

படம். 4.21

நாற்கரங்களின் பண்புகளை அறிந்துகொள்வதின் பெரிய பயன் என்னவென்றால் நாம் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள உறவுகளை உடனடியாகத் தெரிந்துகொள்ளலாம்.

- ஒவ்வோர் இணைகரமும் சரிவகமாகும். ஆனால் ஒவ்வொரு சரிவகமும் இணைகரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
- ஒவ்வொரு சாய்சதுரமும் இணைகரமாகும். ஆனால் ஒவ்வோர் இணைகரமும் சாய்சதுரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
- ஒவ்வொரு செவ்வகமும் இணைகரமாகும். ஆனால் ஒவ்வோர் இணைகரமும் செவ்வகமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
- ஒவ்வொரு சதுரமும் சாய்சதுரமாகும். மேலும், ஒவ்வொரு சதுரத்தையும் இணைகரம் என நிறுவலாம்.

மாற்று வழியில் அமையாது என்பதால் கணிதவியலாளர்கள் மறுதலை உண்மையல்ல எனப் பொதுவாகக் கூறுவர். இப்பொழுது மாற்றுவழியில் அமைவது எப்போது? என்ற அழகிய வினா உடனடியாக எழுகின்றது. அதாவது இணைகரமானது எப்பொழுது செவ்வகமாகும்? எந்தவொரு இணைகரத்திலும் எல்லாக் கோணங்களும் சமமாகும்போது, அது ஒரு செவ்வகமாகும். (நாம் ஏன் இதைக் காணவேண்டும்?) இப்பொழுது நாம் மேலும் பல சுவாரசியமான பண்புகளை உணர்ந்திருப்போம். அதாவது, சாய்சதுரம் என்பது எல்லாப் பக்கங்களும் சமமாக உள்ள இணைகரமே என்பதை நாம் கண்டோம்.

குறிப்பு

உங்களுக்கு *bi-cycles* (இரு சக்கர வாகனம்) மற்றும் *tri-cycles* (முச்சக்கர வாகனம்) தெரியுமா? எந்தவொரு சொல்லின் முன்பும் நாம் *bi* அல்லது *tri* இணைக்கும் பொழுது அது 2 (*bi*) அல்லது 3 (*tri*)ஐக் குறிக்கும். இதேபோல் *quadri* என்பது நான்கையும், *quadri cycles* நான்கு சக்கர மிதிவண்டிகளையும் குறிக்கும். மேலும் (*Lateral*) 'கரம்' என்பது பக்கங்களைக் குறிக்கும். எனவே, நாற்கரம் (*quadrilateral*) என்பது 4– பக்கங்களைக் கொண்ட வடிவம். உங்களுக்கு முக்கரங்கள் தெரியுமல்லவா? அவை முக்கோணங்கள்தானே! நான்கிற்குப் பிறகு? நமக்கு 5 – *Penta*, 6 – *hexa*, 7– *hepta*, 8 – *octa*, 9 – *nano*, 10 – *deca* என ஒரு மரபு காணப்படுகிறது. *Trigons* என்பது முக்கோணங்கள் என அழைக்கப்படும். *quadrigons* என்பது நாற்கரங்கள் என அழைக்கப்படும். ஆனால் இதன் தொடர்சியாக நாம் ஐங்கோணம், அறுங்கோணம், எழுங்கோணம், எண்கோணம், நவகோணம், தசகோணம் என்பனவற்றைப் பெற்றுள்ளோம். இதற்கும் மேலாக 11– கோணம், 12– கோணம் முதலியனவும் உள்ளன. ஒருவேளை உங்களால் 23 – கோணம் கூட வரைய இயலும்.

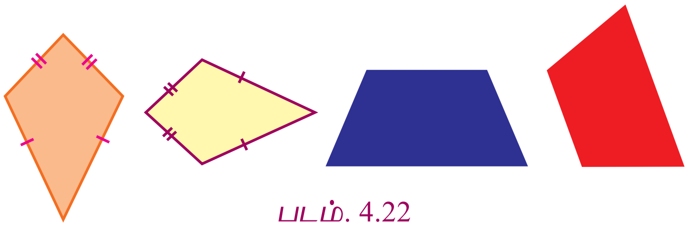
4.3.2 மேலும் சிறப்புப் பெயர்கள் (More Special Names)

நாற்கரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களும் சமமாகும்பொழுது, நாம் அதைச் சமபக்கம் என அழைப்போம். நாற்கரத்தின் எல்லாக் கோணங்களும் சமமாகும்பொழுது, நாம் அதைச் சமகோணம் என அழைப்போம். முக்கோணங்களில் அனைத்துப் பக்கங்களும் சமமெனில், நாம் சமபக்க முக்கோணங்கள் எனக் கண்டுள்ளோம். இப்பொழுது நாம் அவற்றைச் சமகோணமுள்ள முக்கோணங்கள் எனவும் அழைக்கலாமே!

இவ்வாறாக,

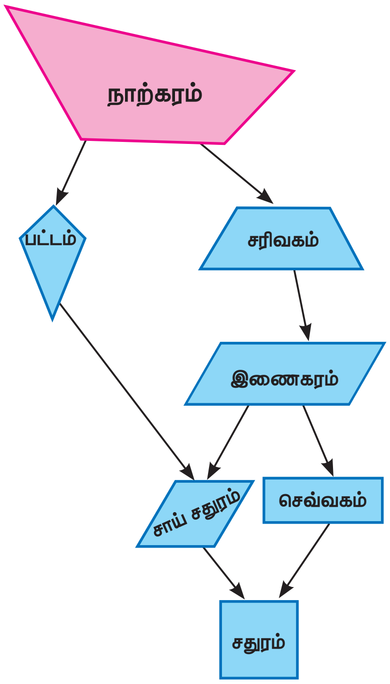
- ஒரு சாய்சதுரம் என்பது சமபக்க இணைகரமாகும்.
- ஒரு செவ்வகம் என்பது சமகோண இணைகரமாகும்.
- ஒரு சதுரம் என்பது சமபக்க மற்றும் சமகோண இணைகரமாகும்.

மேலும், இங்கு பட்டம் மற்றும் இருசமபக்கச் சரிவகம் ஆகியவற்றை இரு சிறப்பு நாற்கரங்கள் என அழைப்போம்.



படம். 4.22

4.3.3 நாற்கரத்தின் வகைகள் (Types of Quadrilaterals)



படம். 4.23

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்.

(i) சாய் சதுரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமா?

(ii) ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாகவும், இணையாகவும் உள்ள நாற்கரம் ________________

(iii) பட்டத்தில் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமா?

(iv) சம கோணங்களையும் சமமற்ற பக்கங்களையும் கொண்ட இணைகரம் எது?

(v) சம பக்கங்களையும், சமமற்ற கோணங்களையும் கொண்ட இணைகரம் எது?

(vi) சம பக்கங்களையும் சம கோணங்களைகயும் கொண்ட இணைகரம் எது?

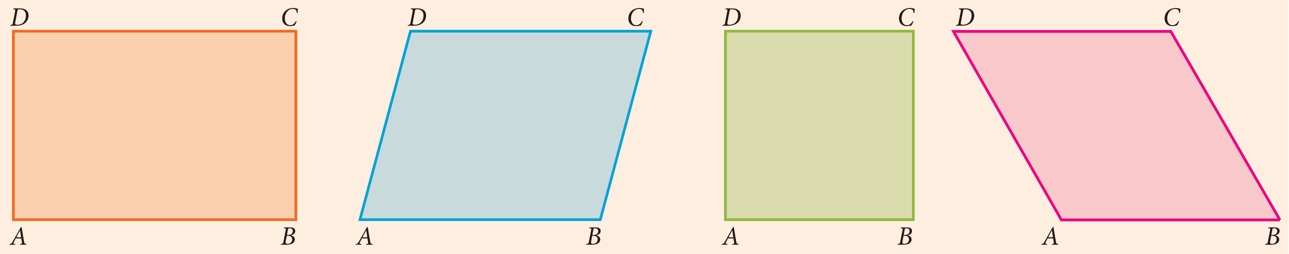
(vii) ___________ என்பது ஒரு செவ்வகம், ஒரு சாய்சதுரம் மற்றும் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

4-Geometry_TM.indd 158 26-12-2019 12:36:55

செயல்பாடு 3

படி – 1

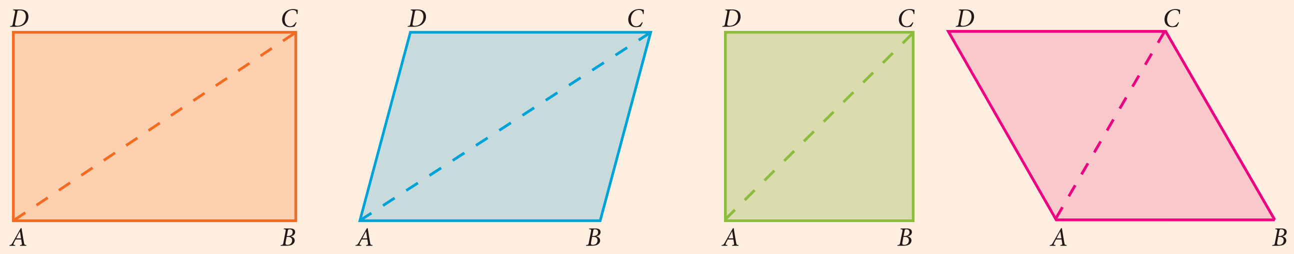
வண்ணக் காகிதத் தாளில் நான்கு வேறுபட்ட நாற்கரங்களை வெட்டி எடுக்கவும்.



படம். 4.24

படி – 2

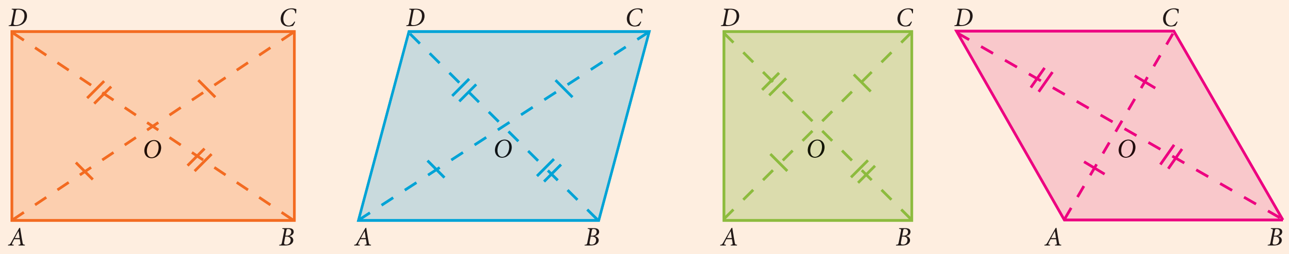
நாற்கரங்களை மூலைவிட்டங்களைப் பொறுத்து மடிக்கவும். மடிப்புகளை நன்றாக அழுத்திக் கோடுகளை உருவாக்கவும். இங்கு புள்ளிக் கோடுகள் மடிப்புகளைக் குறிக்கின்றன.



படம். 4.25

படி – 3

நாற்கரங்களின் இரண்டு மூலைவிட்டங்களையும் மடித்து நன்றாக அழுத்தி மடிப்புகளை உருவாக்குக



படம். 4.26

இவற்றில் இரண்டு எதிரெதிர் முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக இருப்பதை அறியலாம். மூலைவிட்டப் பகுதிகளின் நீளங்கள் மற்றும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணங்களை அளந்து எழுதுக.

இதேபோல் சரிவகம் , இருசமபக்க சரிவகம் மற்றும் பட்டத்திற்கும் செய்க.

4-Geometry_TM.indd 159 26-12-2019 12:36:55

முன்புசெய்த செயல்பாட்டிலிருந்து, மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களையும், இடைப்பட்ட கோணங்களையும் அளந்து அட்டவணைப்படுத்துக.

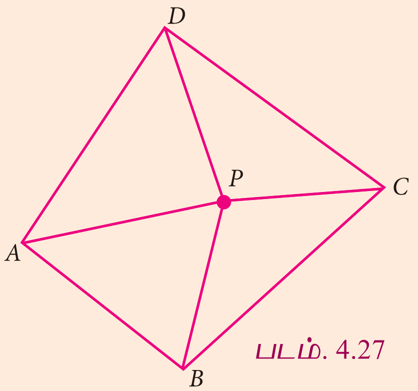
வ. எண்	நாற்கரத்தின் பெயர்கள்	மூலைவிட்டத்தின் நீளங்கள்						கோணங்களின் அளவுகள்			
		AC	BD	OA	OB	OC	OD	$\angle AOB$	$\angle BOC$	$\angle COD$	$\angle DOA$
1	சரிவகம்										
2	இருசமபக்கச் சரிவகம்										
3	இணைகரம்										
4	செவ்வகம்										
5	சாய்சதுரம்										
6	சதுரம்										
7	பட்டம்										

செயல்பாடு 4

பலகோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல்

ஏதேனும் ஒரு நாற்கரம் $ABCD$ ஐ வரைக.

அதன் உள்ளே P என்ற புள்ளியை உருவாக்குக. துண்டுகள் PA, PB, PC மற்றும் PD ஐ இணைக்க. நமக்கு இப்பொழுது நான்கு முக்கோணங்கள் கிடைத்துள்ளன.



படம். 4.27

நான்கு முக்கோணங்களின் அனைத்துக் கோணங்களின் கூடுதல் எவ்வளவு? முனை P இல் கோணங்களின் கூடுதல் எவ்வளவு? உன்னால் இப்பொழுது நாற்கரம் $ABCD$ இன் கோணங்களின் கூடுதல் காண இயலுமா?

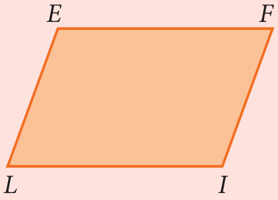
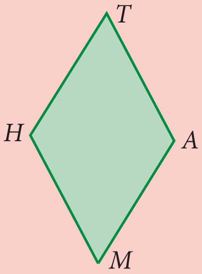
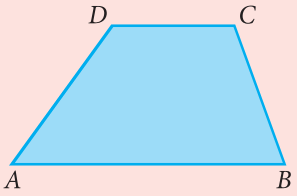
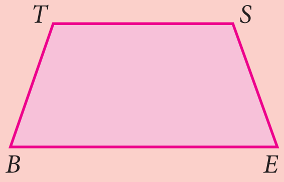
இதே முறையை அனைத்துப் பலகோணங்களுக்கும் விரிவுபடுத்த இயலுமா?

4-Geometry_TM.indd 160 26-12-2019 12:36:56

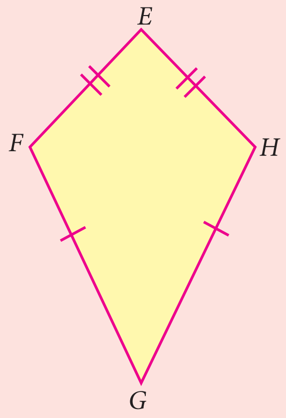
சிந்தனைக் களம்

1. பலகோணத்தின் பக்கம் $(n \geq 3)$, எனில் அதன் உள் கோணங்களின் கூடுதல் $(n-2)\times 180°$.
2. ஒழுங்கு பல கோணத்திற்கு (பலகோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம் எனில் அது ஒழுங்கு பலகோணமாகும்)
   - ஒவ்வொரு உள் கோணத்தின் மதிப்பு $\frac{(n-2)}{n}\times 180°$.
   - ஒவ்வொரு வெளிக் கோண மதிப்பு $\frac{360°}{n}$.
   - குவிவு பலகோணத்தின் (*Convex polygon*) பக்கங்களை நீட்டுவதால் உண்டாகும் வெளிக் கோணங்களின் கூடுதல் $360°$.
   - பலகோணத்தின் பக்கங்கள் n எனில், அதன் மூலை விட்டங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{n(n-3)}{2}$.

4.3.4 நாற்கரங்களின் பண்புகள் (Properties of Quadrilaterals)

பெயர்	வரைபடம்	பக்கங்கள்	கோணங்கள்	மூலை விட்டங்கள்
இணைகரம்		எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை மற்றும் சமம்.	எதிர்க் கோணங்கள் சமம் மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் $180°$.	மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிடும்.
சாய்சதுரம்		அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம் மற்றும் எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை.	எதிர்க் கோணங்கள் சமம் மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் $180°$.	மூலை விட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இரு சமக் கூறிடும்.
சரிவகம்		ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை.	இணையில்லாப் பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் மிகை நிரப்பு.	மூலை விட்டங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டிய தேவை இல்லை.
இருசமபக்கச் சரிவகம்		ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் இணை, இணையில்லாப் பக்கங்களின் அளவுகள் சமம்.	இணைப் பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் சமம்.	மூலை விட்டங்கள் சமம்.

4-Geometry_TM.indd 161 26-12-2019 12:36:56

பட்டம்		இரு சோடி அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமம்.	ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.	1. மூலை விட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும். 2. சிறிய மூலை விட்டத்தைப் பெரிய மூலை விட்டம் இரு சமக் கூறிடும். 3. பெரிய மூலை விட்டமானது, பட்டத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங் களாகப் பிரிக்கும்.

குறிப்பு

- ஒரு செவ்வகம் சமகோணமுள்ள இணைகரமாகும்.
- ஒரு சாய்சதுரம் சமபக்கம் உள்ள இணைகரமாகும்.
- ஒரு சதுரம் என்பது சமபக்கம் மற்றும் சம கோணமுள்ள இணைகரமாகும்.
- சதுரம் ஒரு செவ்வகம், ஒரு சாய்சதுரம் மற்றும் இணைகரமாகும்.

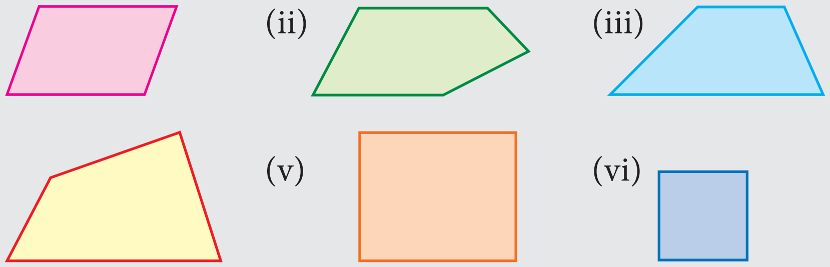
முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. பின்வருவனவற்றிற்குக் காரணம் கூறுக.
   (i) ஒரு சதுரம் என்பது ஒரு சிறப்புச் செவ்வகம் ஆகும்.
   (ii) ஒரு சாய்சதுரம் என்பது ஒரு சிறப்பு இணைகரம் ஆகும்.
   (iii) சாய்சதுரம் மற்றும் பட்டம் ஒரு பொதுவான பண்பைப் பெற்றுள்ளன.
   (iv) சதுரம் மற்றும் சாய்சதுரம் ஒரு பொதுவான பண்பைப் பெற்றுள்ளன.

2. பின்வரும் முக்கோணங்கள் சர்வசம முக்கோணச் சோடியாக இணைக்கப்பட்டால் உண்டாகும் நாற்கரத்தின் வகை என்ன?
   (i) சமபக்க முக்கோணம்
   (ii) செங்கோண முக்கோணம்
   (iii) இருசமபக்க முக்கோணம்

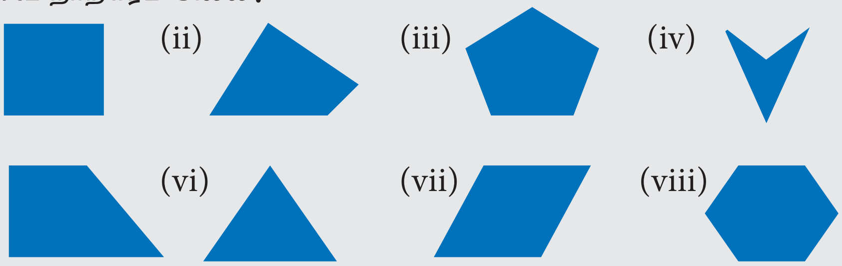
3. கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றில் எவை இணைகரம் அல்லது இணைகரம் அல்ல என்பதைக் காண்க.

(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)



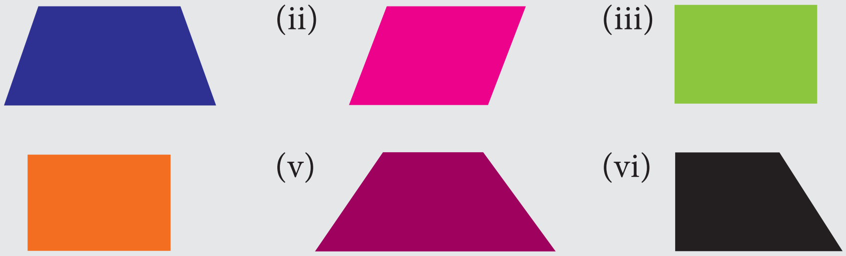
4. எவை நாற்கரம் அல்ல?

(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi) (vii) (viii)



5. கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றில் எவை சரிவகம் அல்லது சரிவகம் அல்ல என்பதைக் காண்க.

(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

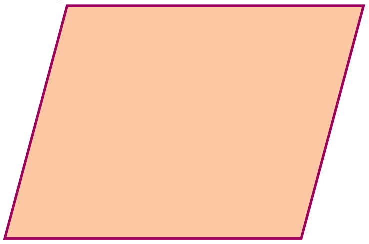


4.3.5 இணைகரத்தின் பண்புகள் (Properties of Parallelogram)

நாம் இப்போது ஒரு பயணத்தை மேற்கொள்ளலாம். பல்வகை நாற்கரங்களுக்கிடையே பயணிக்கும்பொழுது எதிர்கொள்ளும் பண்புகளைக் குறித்துக்கொள்வோம். எத்தகு பண்புகளை நாம் எதிர்நோக்கலாம்? அவற்றின் உண்மைத் தன்மையை எவ்வாறு அறிய இயலும்?

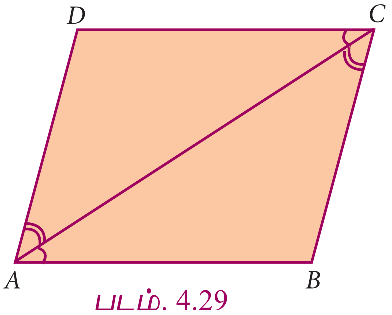
எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை எனினும் அவை சமமா? பலமுறை இணைகரங்களை வரைந்து மெய்யா எனச் சோதித்து அறிய முடியும். உண்மையில் அவையனைத்திலும் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாகத்தான் இருக்கும். எனவே அனைத்து இணைகரங்களிலும் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாகத்தான் இருக்கும் என்கிற முடிவுக்கு வர இயலுமா? இயலாது. ஒருவேளை பின்னர் நாம் சற்றும் எண்ணிப்பார்க்காத, எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாக இல்லாத ஓர் இணைகரத்தைக் காண்பதற்கு வாய்ப்புள்ளது. எனவே, நமக்கு ஓர் அடிப்படை நிரூபணம் தேவை.

கீழ்க்காணும் படத்திலுள்ள (படம் 4.28) $ABCD$ இணைகரத்தைக் கவனிப்போம். இதில் $AB = CD$ மற்றும் $AD = BC$, என்றாலும் அவற்றை உறுதியாகக் கூற இயலுமா? முக்கோணங்களையும் அதன் பண்புகளையும் நாம் அறிவோம். எனவே, அவற்றின் வாயிலாக முயலலாம் என்றாலும் $ABCD$ இணைகரத்தில் முக்கோணங்கள் ஏதும் இல்லை.



படம். 4.28

4-Geometry_TM.indd 163 26-12-2019 12:36:56



படம். 4.29

எனினும் AC ஐ இணைப்பதால் முக்கோணங்களை மிக எளிதாக உருவாக்க இயலும். (இவ்வாறு BD ஐயும் இணைக்கலாம் என்றாலும் இதைப்பற்றி பின்னர் காணலாம்). இப்போது நமக்கு AC ஐப் பொதுப் பக்கமாகக் கொண்ட முக்கோணங்கள் ADC மற்றும் ABC கிடைக்கின்றன. ஏதோ ஒரு வகையில் இவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமானவை என நிரூபித்தால், $AB = CD$ மற்றும் $AD=BC$ என்பது உறுதியாகும்.

ΔADC மற்றும் ΔABC முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவை என்பதை எவ்வாறு மெய்ப்பிக்க இயலும்? சர்வசமத் தன்மையை நிலைநாட்டப் பல விதிகள் இருப்பதால் அவற்றில் எது இங்கு பொருத்தமானது என்பது ஆராயத்தக்கது.

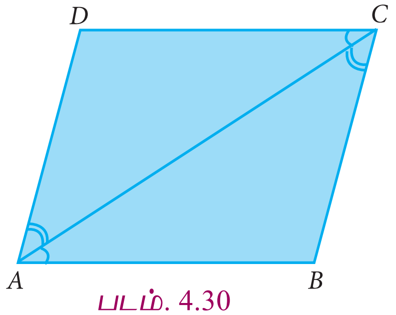
இதுவரை $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம் எனும் உண்மையை நாம் பயன்படுத்தவே இல்லை. எனவே, $AB \| DC$ மற்றும் $AD \| BC$ எனும் கருத்துகளைப் பயன்படுத்தி ΔADC மற்றும் ΔABC ஆகியவை சர்வசமமானவை என்று காட்டலாம். பக்கங்கள் இணையானவை என்பதால் சில கோணங்கள் சமமாகத்தான் இருக்க வேண்டும். அத்தகைய பண்புகளை நாம் அறிவோமா? ஆம். நம்மால் இயலும். குறுக்குவெட்டிகள் பற்றியதுதானே!

இப்போது நமக்குத் தெளிவாகிறது. $AD \| BC$ மற்றும் AC ஒரு குறுக்குவெட்டி என்பதால் $\angle DAC = \angle BCA$. இதேபோன்று, $AB \| DC$, மற்றும் AC ஒரு குறுக்குவெட்டி என்பதால் $\angle BAC = \angle DCA$. பொதுவான பக்கம் AC என்பதனால் கோ–ப–கோ விதிப்படி, ΔADC மற்றும் ΔABC சர்வசமமானவை எனத் தேவையான முடிவுக்கு நம்மால் வர இயலும். இதன் மூலம் $AB = CD$ மற்றும் $AD = BC$ என்பது உறுதியாகிறது.

எனவே, ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் எப்போதும் சமமாகத்தான் இருக்கும். இதுவரை கண்டறிந்த கருத்துகளை முறையான மெய்மைகளாகத் தொகுத்து எழுதலாம்.

தேற்றம் 1

ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம்



படம். 4.30

தரவு : $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம்.

நிரூபிக்க : $AB=CD$ மற்றும் $DA=BC$

அமைப்பு : AC ஐ இணைக்கவும்.

நிரூபணம் :

$ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம்

$AD \| BC$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்குவெட்டி

$\angle DAC = \angle BCA$ →(1) (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்)

$AB \| DC$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்குவெட்டி

$\angle BAC = \angle DCA$ →(2) (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்)

ΔADC மற்றும் ΔCBA இல்

$\angle DAC = \angle BCA$ (1) இலிருந்து

4-Geometry_TM.indd 164 26-12-2019 12:36:57

AC ஆனது பொதுப் பக்கம்

$\angle DCA = \angle BAC$ (2) இலிருந்து

$\Delta ADC \cong \Delta CBA$ (கோ–ப–கோ)

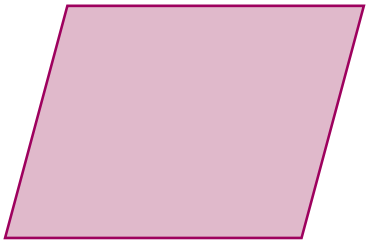
ஆகவே $AD = CB$ மற்றும் $DC = BA$ (ஒத்த பக்கங்கள் சமம்)

மேற்கண்ட நிரூபணத்தின் வழியிலேயே, தேற்றத்திற்குத் தகுந்த ஒரு பண்பினையும் நிரூபித்தோம்.

தேற்றம் 2

இணைகரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் அதனை இரு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றது.

$\angle DAC = \angle BCA$ மற்றும் $\angle BAC = \angle DCA$ என்பதிலிருந்து மேற்கண்ட நிரூபணம் கிடைத்தது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.



படம். 4.31

எனவே, படம் 4.30 இன் படி,

$$\angle BCA + \angle BAC = \angle DCA + \angle DAC$$

ஆனால், நாம் அறிந்த வரை:

$$\angle B + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ$$

மற்றும் $\angle D + \angle DCA + \angle DAC = 180^\circ$

ஆகையால் $\angle B = \angle D$ என்றுதான் இருக்க முடியும்.

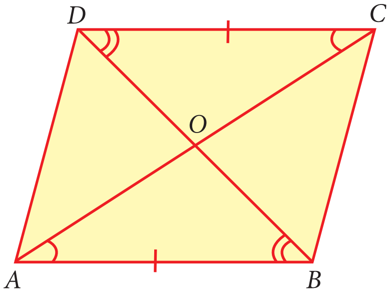
இவ்வாறே தொடர்ந்து சற்று விடா முயற்சியோடு முயன்றால், $\angle A = \angle C$ எனவும் காண்பிக்க இயலும். எனவே இவ்வாறு கீழ்க்காணும் தேற்றத்தையும் நம்மால் நிரூபிக்க முடியும்.

தேற்றம் 3

ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.

இப்போது முக்கோணங்களின் சர்வசமத் தன்மை வழியே மேலும் சில முக்கோணங்களை அணுகலாம். படம் 4.32 இல் உள்ள இரு மூலைவிட்டங்களான AC மற்றும் DB யைக் கவனிப்போம். ΔADC மற்றும் ΔCBA ஆகியவை சர்வசமம் என்பதை நாம் முன்னரே அறிந்துள்ளோம். இதேபோன்று காரணகாரிய விளக்கத்தோடு ΔDAB மற்றும் ΔBCD ஆகியவற்றை சர்வசமமானவை என்பதை நம்மால் எடுத்துக்காட்ட இயலும். மேலும் சில சர்வசம முக்கோணங்களை இப்படத்தில் கண்டறிய முடியுமா?

ஆம். இரு மூலை விட்டங்களும் O என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இப்போது நம்மால் ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD மற்றும் ΔDOA என 4 முக்கோணங்களைக் காண இயலும். இவற்றுள் சர்வசமச் சோடிகளை உங்களால் காண முடிகிறதா?



படம். 4.32

AB மற்றும் CD இணை மற்றும் சமம் என்பதனால், ΔAOB மற்றும் ΔCOD ஆகியவை சர்வசமம் என எளிதாக ஊகிக்க முடியும். மீண்டும் கோ–ப–கோ விதியினைப் பயன்படுத்தி, இச்சமயத்தில் $\angle OAB = \angle OCD$ மற்றும் $\angle ABO = \angle CDO$ என்றிருக்க முயற்சிக்கலாம். ஆனால், இதில் முதலாவது பின்வரும் கூற்றான $\angle CAB = \angle ACD$

4-Geometry_TM.indd 165 26-12-2019 12:36:57

(முன்பே நாம் நிறுவியுள்ளோம்) என்பதன் மூலம் அமைகிறது. மேலும், $\angle CAB$ மற்றும் $\angle OAB$ ஆகியவை ஒரே கோணங்கள்தாம் என்பதையும் உற்றுநோக்கலாம். (இதேபோல் $\angle OCD$ மற்றும் $\angle ACD$ சமம்). இப்போது BD என்பது ஒரு குறுக்குவெட்டி எனும் காரணத்தைப் பயன்படுத்துவதால், $\angle ABD = \angle CDB$ என்பது கிடைக்கும். ஆனால், $\angle ABD$ என்பதும் $\angle ABO$ என்பதும் ஒன்றே, $\angle CDB$ என்பதும் $\angle CDO$ என்பதும் ஒன்றேதான் என்கிற முடிவை அடையலாம்.
மீண்டும் இதனை முறைப்படி நிரூபிப்பதன் மூலம், மற்றுமொரு தேற்றம் கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 4

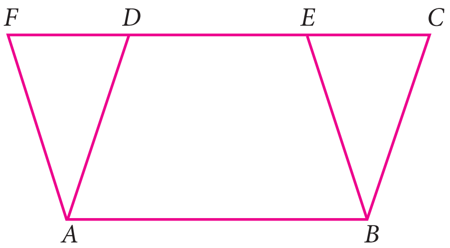
இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிடும்.

- எதிரெதிர்ப் பக்கங்கள் இணை.
- எதிரெதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.
- அனைத்துக் கோணங்களும் செங்கோணங்கள்.
- மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.
- மூலைவிட்டங்கள் சமம்.
- மூலைவிட்டங்கள் செங்குத்து மற்றும் சமம்.
- மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருசமக் கூறிடும்.
- ஒவ்வோர் அடுத்தடுத்த சோடிக் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகள்.

இணைகரத்தின் கோட்பாடுகளை இப்போது வலுப்படுத்தலாம். அடுத்துள்ள பெட்டிச் செய்தியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்றுகளை ஒவ்வொன்றாகக் கருதுவோம். ஒவ்வொரு கூற்றையும் நிறைவு செய்யும் இணைகரம் எவ்வகை இணைகரம் என்பதைக் கண்டறிந்து தகுந்த காரணம் தருக.

இப்போது இணைகரங்கள் பற்றிய மேலும் சில அறிவார்ந்த பண்புகளைக் காணப் போகிறோம். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இணைகரங்களின் ஏதாவது ஒரு பண்பினை நம்மால் முயன்று நிரூபிக்க இயலுமா? கீழ்க்காணும் படத்தில் (படம் 4.33) உள்ளது போன்று ஒரே அடித்தளத்தைப் பகிர்ந்துகொள்ளும் இரு இணைகரங்களின் பண்பினைப் பற்றி ஆராயலாம்.

$ABCD$ மற்றும் $ABEF$ ஆகிய இரு இணைகரங்களின் பொதுவான அடித்தளம் AB ஆகும். ΔADF மற்றும் ΔBCE என்ற ஒரு சோடி முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக உள்ளன என்பதை நம்மால் எளிதில் பார்க்க முடிகிறது. முன்பே, $AD = BC$ மற்றும் $AF = BE$ என உள்ளன. ஆனால், $AD \parallel BC$ மற்றும் $AF \parallel BE$ என்பதனால், AD மற்றும் AF ஆல் அமைகின்ற கோணமும், BC மற்றும் BE ஆல் அமைகின்ற கோணமும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.



படம். 4.33

எனவே, $\angle DAF = \angle CBE$. ஆகையால் ΔADF மற்றும் ΔBCE முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவை.

இத்தகைய உற்றுநோக்கல் மேலும் பல கருத்துகளுக்கு அடித்தளம் அமைக்கிறது. சர்வசம முக்கோணங்கள் ஒரே பரப்பளவு கொண்டவை. இதனால் $ABCD$ மற்றும் $ABEF$ இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளைப் பற்றிய எண்ணம் நமக்கு எழுகிறது.

இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு = $ABED$ நாற்கரத்தின் பரப்பளவு + ΔBCE இன் பரப்பளவு

= $ABED$ நாற்கரத்தின் பரப்பளவு + ΔADF இன் பரப்பளவு

= $ABEF$ இன் பரப்பளவு

இவ்வாறு மற்றுமொரு தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

4-Geometry_TM.indd 166 26-12-2019 12:36:57

தேற்றம் 5

ஒரே அடித்தளத்தையும் ஒரு சோடி இணைக் கோடுகளுக்கிடையேயும் அமையும் இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

இந்த வழிமுறைகள் மேலும் பல கருத்துகளை நிரூபிக்கின்றன. கிளைத்தேற்றம் என்று அழைக்கப்படும் அவற்றைத் தனித்தனியாக விளக்கமாக நிரூபிக்கத் தேவையில்லை.

கிளைத்தேற்றம் 1: ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் ஒரு சோடி இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

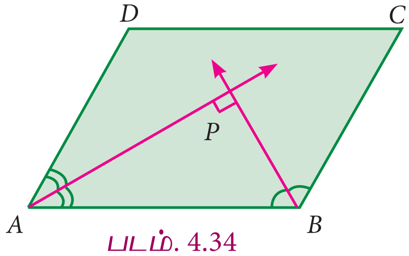
கிளைத்தேற்றம் 2: ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் ஒரு சோடி இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் ஒரு செவ்வகம் மற்றும் ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவுகள் சமம்.

இணைகரங்கள் பெரியதாகவோ சிறியதாகவோ இருந்தாலும், அவற்றின் முனைகளிலுள்ள கோணங்கள், பக்கங்களின் நீளம் போன்றவை வெவ்வேறாக அமைந்திருந்தாலும், தேற்றங்கள் மற்றும் கிளைத்தேற்றங்கள் என்று அழைக்கப்படும் இத்தகைய கூற்றுகள் அனைத்து இணைகரங்களுக்கும் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

இணைகரம் $ABCD$ இல் அடுத்தடுத்த கோணங்கள் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இருசமவெட்டிகள் P இல் சந்திக்கின்றன எனில், $\angle APB = 90^\circ$ என நிறுவுக.

தீர்வு



படம். 4.34

இணைகரம் $ABCD$ இல், AP மற்றும் BP ஆனது அடுத்தடுத்த கோணங்கள் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இருசமவெட்டிகள்.

இணைகரத்தில் அடுத்தடுத்த கோணங்களின் கூடுதல் மிகை நிரப்பிகள். எனவே,

$$\angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180^\circ}{2}$$

$$\angle PAB + \angle PBA = 90^\circ$$

ΔAPB இல்,

$$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^\circ$$ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல்)

$$\angle APB = 180^\circ - [\angle PAB + \angle PBA]$$

$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$\angle APB = 90^\circ$ நிறுவப்பட்டது.

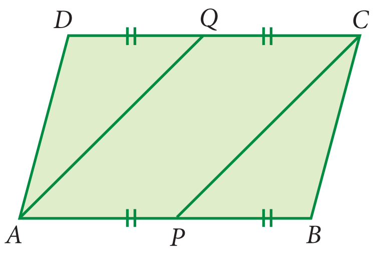
எடுத்துக்காட்டு 4.2

படம் 4.35 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இணைகரம், $ABCD$ இன் பக்கங்கள் AB மற்றும் DC இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q எனில் $APCQ$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

4-Geometry_TM.indd 167 26-12-2019 12:36:57

தீர்வு

AB மற்றும் DC இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q என்க.



படம். 4.35

ஆகவே, $AP = \frac{1}{2} AB$ மற்றும்

$QC = \frac{1}{2} DC$ (1)

ஆனால், $AB = DC$ (இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம்)

$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DC$

$AP = QC$ (2)

மேலும், $AB \,||\, DC$

$AP \,||\, QC$ (3) [$\because$ $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும்]

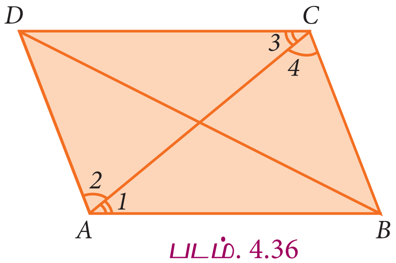
எனவே, நாற்கரம் $APCQ$ இல் $AP \,||\, QC$ மற்றும் $AP = QC$ [(2) மற்றும் (3) இல் இருந்து)]

$\therefore$ நாற்கரம் $APCQ$ ஓர் இணைகரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

இணைகரம் $ABCD$ இல் (படம் 4.36) $\angle BAD = 120^\circ$ மற்றும் AC ஆனது $\angle BAD$ இன் கோண இருசமவெட்டி எனில், $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக.

தீர்வு



படம். 4.36

கொடுக்கப்பட்டவை $\angle BAD = 120^\circ$ மற்றும்

AC ஆனது $\angle BAD$ இன் இரு சம வெட்டி

$\angle BAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

$\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$

இங்கு $AD \,||\, BC$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்குவெட்டி

$\angle 2 = \angle 4 = 60^\circ$

ΔABC ஆனது இரு சமபக்க முக்கோணம் [$\because \angle 1 = \angle 4 = 60^\circ$]

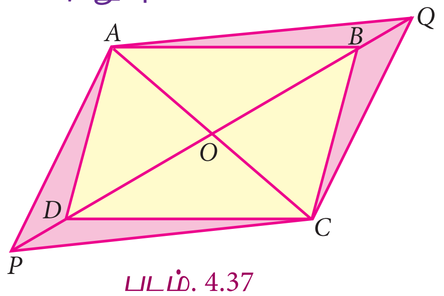
$AB = BC$

இணைகரம் $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.4

இணைகரம் $ABCD$ இல், $PD = BQ$ என்றுள்ளவாறு கோடு DB இன் மேலுள்ள புள்ளிகள் P மற்றும் Q எனில், $APCQ$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக

தீர்வு



படம். 4.37

$ABCD$ ஓர் இணைகரம்.

$OA = OC$

மற்றும் $OB = OD$ ($\because$ மூலை விட்டங்கள் இரு சமக் கூறிடும்)

4-Geometry_TM.indd 168 26-12-2019 12:36:58

இப்போது $OB + BQ = OD + DP$

$OQ = OP$ மற்றும் $OA = OC$

$\therefore$ $APCQ$ ஓர் இணைகரமாகும்..

பயிற்சி 4.2

1. ஒரு நாற்கரத்தின் கோணங்களின் விகிதம் $2:4:5:7$ எனில், அனைத்துக் கோண அளவுகளையும் காண்க.
2. நாற்கரம் $ABCD$ இல் $\angle A = 72°$ மற்றும் $\angle C$ ஆனது $\angle A$ இன் மிகை நிரப்பி மற்ற இரு கோணங்கள் $(2x-10)°$ மற்றும் $(x + 4)°$ எனில் x இன் மதிப்பையும் அனைத்துக் கோண அளவுகளையும் காண்க.
3. செவ்வகம் $ABCD$ இல் மூலை விட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆனது Oவில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. மேலும் $\angle OAB = 46°$ எனில் $\angle OBC$ காண்க.
4. சாய்சதுரத்தின் மூலை விட்டங்களின் நீளங்கள் 12 செ.மீ. மற்றும் 16 செ.மீ. எனில், சாய்சதுரத்தின் பக்க அளவு காண்க.
5. இணைகரத்தின் கோண இரு சம வெட்டிகள் செவ்வகத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக..
6. ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் ஒரு சோடி இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமைந்துள்ள முக்கோணம் மற்றும் இணைகரத்தின் பரப்புகள் $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

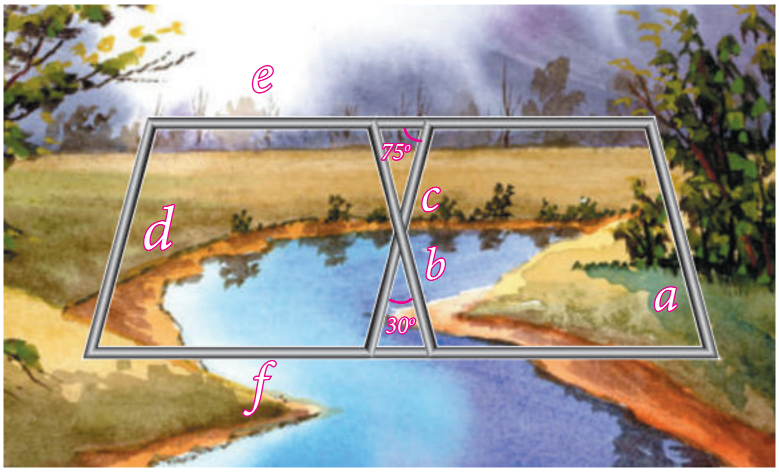
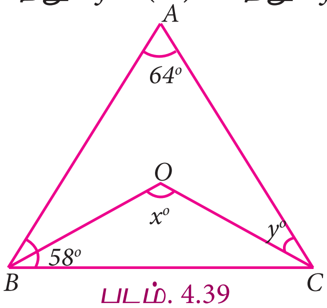


Fig. 4.38

7. இரும்புக் கம்பிகள் a, b, c, d, e, மற்றும் f ஆனது படத்தில் உள்ளவாறு ஒரு பாலத்தை அமைக்கின்றன, இதில் $a \parallel b$, $c \parallel d$, $e \parallel f$ எனில், குறிக்கப்பட்ட கோணங்களைக் காண்க.
(i) b மற்றும் c (ii) d மற்றும் e
(iii) d மற்றும் f (iv) c மற்றும் f

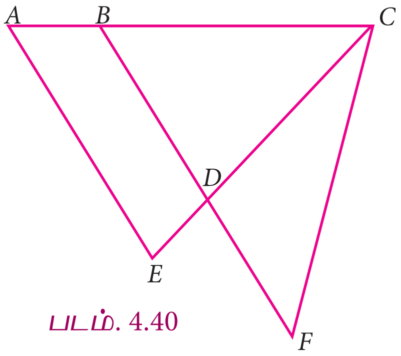


படம். 4.39

8. படம் 4.39 இல் $\angle A = 64°$, $\angle ABC = 58°$. BO மற்றும் CO ஆனது $\angle ABC$ மற்றும் $\angle ACB$ இன் இருசம வெட்டிகள் எனில், ΔABC இல் $x°$ மற்றும் $y°$ காண்க.

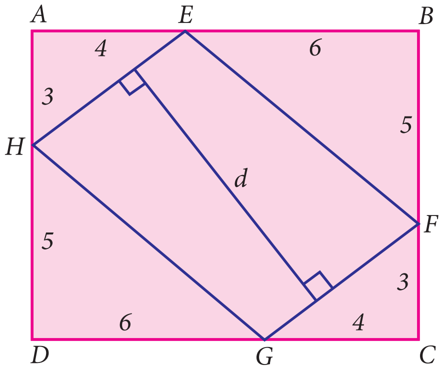
(iv)

9. படம் 4.40 இல் $AB = 2$, $BC = 6$, $AE = 6$, $BF = 8$, $CE = 7$ மற்றும் $CF = 7$, எனில், நாற்கரம் $ABDE$ இன் பரப்பு மற்றும் ΔCDF இன் பரப்பிற்கும் உள்ள விகிதம் காண்க. (சர்வ சம முக்கோணத்தின் பண்பைப் பயன்படுத்துக)



படம். 4.40

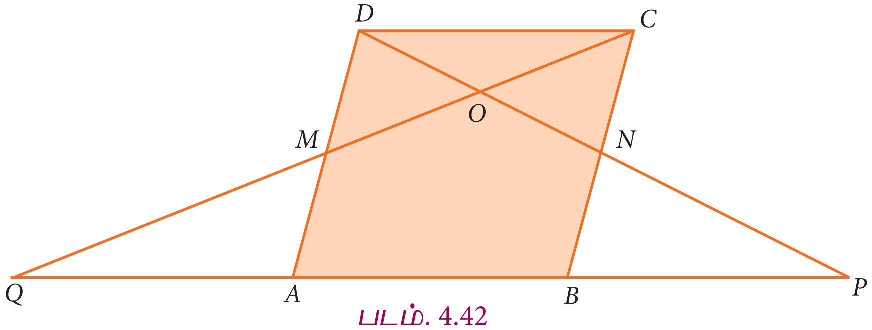
4-Geometry_TM.indd 169 26-12-2019 12:36:58



படம். 4.41

10. படம் 4.41 இல் செவ்வகம் $ABCD$ மற்றும் இணைகரம் $EFGH$ இல் d ஆனது $\overline{HE}$ மற்றும் $\overline{FG}$ –க்குச் செங்குத்து எனில், d இன் நீளம் காண்க.

11. படத்தில் இணைகரம் $ABCD$ இல் முனை D இலிருந்து வரையப்படும் கோடு DP ஆனது BC இன் நடுப்புள்ளியை N இலும், AB இன் நீட்சியை P இலும் சந்திக்கிறது. C இலிருந்து வரையப்படும் கோடு CQ ஆனது, AD இன் நடுப்புள்ளியை M இலும், AB இன் நீட்சியை Q விலும் சந்திக்கிறது. கோடுகள் DP மற்றும் CQ ஆனது O இல் சந்திக்கின்றன, எனில் ΔQPO இன் பரப்பளவானது, இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவில் $\frac{9}{8}$ மடங்கு என நிறுவுக.



படம். 4.42

4.4 வட்டத்தின் பகுதிகள் (Parts of Circle)

வட்டங்கள் என்ற வடிவியல் உருவத்தை நம்மைச் சுற்றியுள்ள பொருள்களிலிருந்தே பார்க்க முடியும். வட்டத்தைப் பற்றிய கருத்துக்களை முழுவதுமாகப் புரிந்து கொண்டதன் விளைவாகச் சக்கரம் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இது மனித குல வரலாற்றில் மிகப்பெரிய மாற்றத்தை ஏற்படுத்திய கண்டுபிடிப்பாகும்.

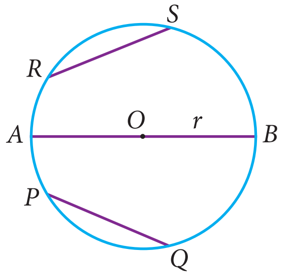
படம் 4.43

ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து மாறாத தொலைவில் உள்ள புள்ளிகளின் கணமே ஒரு **வட்டம்** என விளக்கலாம். நிலையான புள்ளியானது அந்த வட்டத்தின் **மையத்தையும்** மாறாத தொலைவானது அந்த வட்டத்தின் **ஆரத்தையும்** குறிக்கும்.

ஒரு கோடு வட்டத்தை இரு புள்ளிகளில் வெட்டுமானால் அது அந்த வட்டத்தின் **வெட்டும்கோடு** என அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு கோட்டுத்துண்டின் முனைப்புள்ளிகள் வட்டத்தின் மேல் அமையுமானால் அது அந்த வட்டத்தின் **நாண்** என அழைக்கப்படுகிறது.

4-Geometry_TM.indd 170 26-12-2019 12:36:59

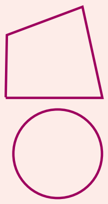


படம் 4.44

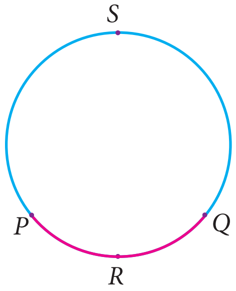
வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் வட்டத்தின் **விட்டம்** என அழைக்கப்படுகிறது. வட்டத்தின் **பரிதி** என்பது அதன் எல்லையாகும். (பலகோணங்களில் இதற்கு நாம் சுற்றளவு என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்துகிறோம்).

குறிப்பு

ஒரு வட்டமானது பலகோணத்திலிருந்து வேறுபடுகிறது. ஒரு பலகோணம் (எடுத்துக்காட்டாக நாற்கரம்) பக்கங்கள் மற்றும் முனைகளை உடையது. அதே நேரத்தில் வட்டமானது எளிய சீரான வளைவரையாகும்.



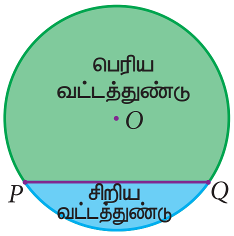
படம் 4.44 இல் வட்டத்தின் மேல் இரு புள்ளிகளை அந்தக் கோட்டுத்துண்டுகள் சந்திப்பதைக் காணலாம். இந்தக் கோட்டுத்துண்டுகளை வட்டத்தின் நாண்கள் என அழைக்கின்றோம். இதுபோல வட்டத்தின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு, அந்த வட்டத்தின் நாண் என அழைக்கப்படுகிறது. படத்தில் AB, PQ மற்றும் RS என்பன வட்டத்தின் நாண்கள் ஆகும்.



படம் 4.45

இப்பொழுது அதே வட்டத்தின் மேல் P, R, Q மற்றும் S (படம் 4.45) என்ற நான்கு புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இங்கு PRQ மற்றும் QSP என்பன வட்டத்தின் தொடர்ச்சியான பகுதிகள் ஆகும். இந்தப் பகுதிகளை $\overset{\frown}{PRQ}$ மற்றும் $\overset{\frown}{QSP}$ அல்லது சுருக்கமாக $\overset{\frown}{PQ}$ மற்றும் $\overset{\frown}{QP}$ எனக் குறிக்கலாம். வட்டத்தின் தொடர்ச்சியான இந்தப் பகுதியானது **வட்டவில்** என அழைக்கப்படுகிறது. பொதுவாக, விற்கள் கடிகார எதிர்த் திசையில் குறிக்கப்படுகிறது.

புள்ளிகள் P மற்றும் Q (படம் 4.45) ஆகியன முழு வட்டத்தை இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. ஒன்று நீளம் அதிகமானது மற்றொன்று நீளம் குறைவானது. நீளம் அதிகமானது **பெரிய வில்** $\overset{\frown}{QP}$ மற்றும் நீளம் குறைவானது **சிறிய வில்** $\overset{\frown}{PQ}$ என அழைக்கப்படுகிறது.



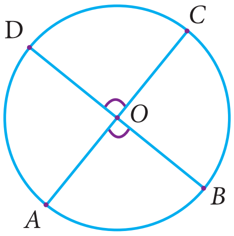
படம் 4.46

குறிப்பு

ஒரு வட்டத்தின் விட்டமானது,

- வட்டத்தை இருசமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் ஒரு கோட்டுத்துண்டு.
- வட்டத்தின் மிக நீளமான நாண்.
- வட்டத்தின் ஒரு சமச்சீர் கோடு.
- ஆரத்தைப் போல இருமடங்கு நீளமுடையது.

இப்பொழுது படம் 4.46 இல் நாண் PQ மற்றும் பெரிய வில் $\overset{\frown}{QP}$ ஆல் அடைபட்ட பகுதியைக் கருதினால், அது பெரிய வட்டத்துண்டு என அழைக்கப்படும். இதேபோல், அதே நாண் மற்றும் சிறிய வில்லால் அடைபட்ட பகுதி சிறிய வட்டத்துண்டு எனவும் அழைக்கப்படும்.

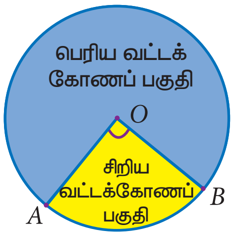


படம் 4.47

வட்டத்தின் இரண்டு வில்கள் $\overset{\frown}{AB}$ மற்றும் $\overset{\frown}{CD}$ (படம் 4.47) ஆனது வட்ட மையத்தில் சமகோணங்களைத் தாங்கும் எனில், அவை ஒருங்கிசைவு வில்கள் எனப்படும். மேலும் அவற்றை, $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$ என எழுதலாம். இதிலிருந்து,

4-Geometry_TM.indd 171 26-12-2019 12:37:00

$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$ ஆகும். அதனால், $\angle AOB = \angle COD$



படம் 4.48

இங்கு, படம் 4.48இல் இரண்டு ஆரங்கள் மற்றும் வில்லால் அடைபடும் பகுதியை வட்டக்கோணப் பகுதி எனலாம். வட்டத் துண்டைப் போலவே, சிறிய வில்லானது சிறிய வட்டக்கோணப் பகுதியையும், பெரிய வில்லானது பெரிய வட்டக்கோணப் பகுதியையும் குறிப்பதைக் காணலாம்.

பொது மைய வட்டங்கள் (Concentric Circles)

ஒரே மையத்தையும் வெவ்வேறு ஆரங்களையும் உடைய வட்டங்கள் பொது மைய வட்டங்கள் எனப்படும். அன்றாட வாழ்வில் நாம் காணும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

ஒரு வில்வித்தை இலக்கு

ஒரு சுண்டாட்ட வில்லை

நீர் அலைகள்

படம் 4.49

சர்வசம வட்டங்கள் (Congruent Circles)

இரண்டு வட்டங்கள் சர்வசமம் எனில், ஒன்று மற்றொன்றின் நகலாக இருக்கும் அல்லது ஒன்றுபோல் இருக்கும். அதாவது, அவை ஒரே அளவுடையவை. அன்றாட வாழ்வில் நாம் காணும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

ஒரே மாட்டு வண்டியின் இரு சக்கரங்கள்

ஒலிம்பிக் வளையங்கள்

படம் 4.50

சிந்தனைக் களம்

படத்தில் உள்ளதுபோல், நான்கு சர்வசம வட்டங்கள் வரைக. நீங்கள் அறிவது என்ன?

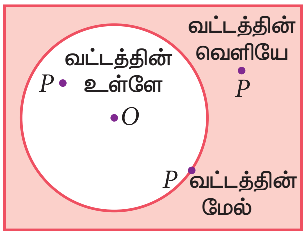
வட்டத்தைப் பொறுத்து ஒரு புள்ளி அமையும் நிலை (Position of a point with respect to a circle)

ஒரு தளத்தில் ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டு (படம் 4.51) வட்டம் அமைந்துள்ள தளத்தில் புள்ளி P ஐக் கருதுக. வட்ட மையம் O விலிருந்து புள்ளி Pக்கு உள்ள தூரம் OP எனில், P இன் அமைவிடமானது,

(v) $OP =$ ஆரம் (புள்ளி P, வட்டத்தின் மேல் உள்ளது.)

(vi) $OP <$ ஆரம் (புள்ளி P, வட்டத்தின் உள்ளே உள்ளது.)

(vii) $OP >$ ஆரம் (புள்ளி P, வட்டத்தின் வெளியே உள்ளது.)



படம் 4.51

4-Geometry_TM.indd 172 26-12-2019 12:37:00

எனவே, ஒரு வட்டமானது அது அமைந்திருக்கும் தளத்தை மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

சரியா? தவறா? எனக் கூறுக:

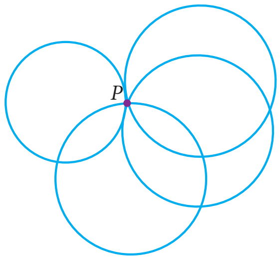
1. ஒவ்வொரு வட்ட நாணும் சரியாக வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கும்.
2. வட்டத்தின் அனைத்து ஆரங்களும் ஒரே நீளமுடையவை.
3. வட்டத்தின் ஒவ்வோர் ஆரமும் ஒரு நாணாகும்.
4. வட்டத்தின் ஒவ்வொரு நாணும் ஒரு விட்டமாகும்.
5. வட்டத்தின் ஒவ்வொரு விட்டமும் ஒரு நாணாகும்.
6. ஒரு வட்டத்திற்கு எத்தனை விட்டங்கள் வேண்டுமானாலும் இருக்க இயலும்.
7. இரு விட்டங்கள் ஒரே முனைப் புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்க முடியாது.
8. ஒரு வட்டமானது தளத்தை மூன்று வெவ்வேறு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.
9. ஒரு வட்டத்தை ஒரு பெரிய வட்ட வில், ஒரு சிறிய வட்ட வில் எனப் பிரிக்கலாம்.
10. வட்ட மையத்திலிருந்து பரிதிக்கு உள்ள தொலைவு விட்டம் ஆகும்.

சிந்தனைக் களம்

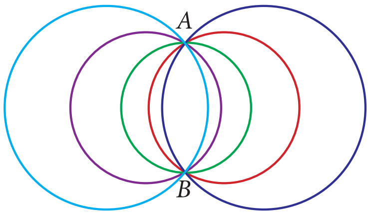
1. ஒரு வட்டத்திற்கு எத்தனை பக்கங்கள் உள்ளன?
2. வட்டம் ஒரு பலகோணமா?

4.4.1 மூன்று புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டம் (Circle Through Three Points)

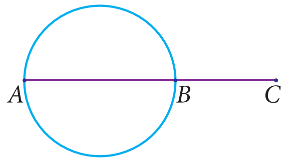
இரு புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு கோடுதான் வரைய முடியும் என்பதை நாம் முன்பே கற்றுள்ளோம். இதுபோன்று ஒரு புள்ளி மற்றும் இரண்டு புள்ளிகள் வழியே எத்தனை வட்டங்கள் வரைய இயலும் என்பதை நாம் கற்க இருக்கின்றோம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி P வழியேயும் (படம் 4.52) இரண்டு புள்ளிகள் A, B வழியேயும் (படம் 4.53) எண்ணற்ற வட்டங்கள் வரைய இயலும் என்பதை நம்மால் பார்க்க முடிகிறது.



படம் 4.52

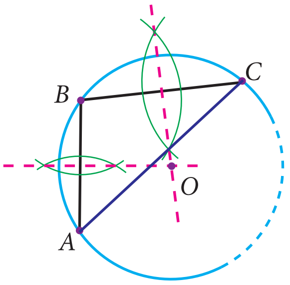


படம் 4.53



படம் 4.54

இப்பொழுது ஒரே கோட்டிலமையும் மூன்று புள்ளிகள் A, B மற்றும் C (படம் 4.54) ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இந்தப் புள்ளிகள் வழியே ஒரு வட்டம் வரைய நம்மால் இயலுமா? இதைச் சிந்திக்கும்பொழுது, புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன எனில் நம்மால் வட்டம் வரைய இயலாது !



படம் 4.55

மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டில் அமையாத புள்ளிகள் எனில், அவை ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கும் (படம் 4.55). சுற்றுவட்டம் வரைதலை நினைவு கூர்ந்தால், பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது சுற்றுவட்ட மையம் எனவும் அந்த வட்டமானது

4-Geometry_TM.indd 173 26-12-2019 12:37:00

சுற்றுவட்டம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

இதிலிருந்து A, B மற்றும் C வழியாக ஒரேயொரு வட்டம்தான் செல்கிறது என்பது தெளிவாகிறது. இந்தக் கூற்றானது பின்வரும் முடிவிற்கு அழைத்துச் செல்கிறது.

தேற்றம் 6 ஒரே கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டம்தான் வரைய இயலும்.

4.5 ஒரு வட்டத்தின் நாண்களின் பண்புகள் (Properties of Chords of a Circle)

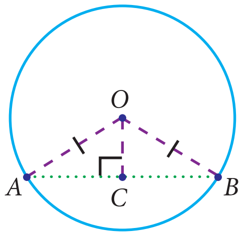
கோடுகள், கோணங்கள், முக்கோணங்கள் மற்றும் நாற்கரங்களைப் பற்றி முன்பே அறிந்துள்ளோம். இவற்றுடன் வட்டம் என்ற புதிய கருத்தினை இணைத்துள்ளோம். இவற்றையெல்லாம் பயன்படுத்திச் சில நிரந்தர முடிவுகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாகப் பெற இருக்கின்றோம். இப்பொழுது நாம் வட்டத்தின் நாண்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு சில பண்புகளை அறிய இருக்கின்றோம்.

தொடக்கமாக, ஒரு நாண் மற்றும் மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் பண்பைக் காண இருக்கின்றோம்.

4.5.1 நாணிற்கு மையத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து (Perpendicular from the Centre to a Chord)

O-வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் நாண் AB ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். $OC \perp AB$ வரைக மற்றும் OA, OBஐ இணைக்க. இங்கு முக்கோணங்கள் ΔAOC மற்றும் ΔBOC ஐ எளிதாகப் பெறுகின்றோம். (படம் 4.56).

நம்மால் இந்த இரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமமானவை என மெய்ப்பிக்க இயலுமா? இப்பொழுது, முன்பே கற்றுள்ள சர்வ சம முக்கோணங்களுக்கான பண்புகளைப் பயன்படுத்தி இதனை நிறுவலாம். $\angle OCA = \angle OCB = 90^\circ (OC \perp AB)$ மற்றும் $OA = OB$ ஆனது வட்டத்தின் ஆரங்கள். பக்கம் OC பொதுவானது. செ–க–ப விதி நமக்குக் கூறுவது ΔAOC மற்றும் ΔBOC சர்வ சமமானவை. இதிலிருந்து நாம் அறிவது $AC = BC$. இந்த விவாதத்தின் மூலம் நாம் பின்வரும் முடிவைப் பெறுகிறோம்.



படம் 4.56

தேற்றம் 7 ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து ஒரு நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து அந்த நாணை இருசமக் கூறிடும்.

தேற்றம் 7 இன் மறுதலை ஒரு வட்டத்தின் மையத்தையும் ஒரு நாணின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு அந்த நாணிற்குச் செங்குத்தாகும்.

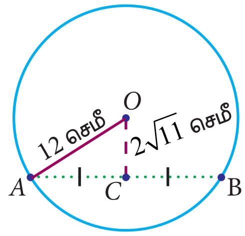
எடுத்துக்காட்டு 4.5 ஆரம் 12 செமீ உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து $2\sqrt{11}$ செமீ தொலைவில் உள்ள நாணின் நீளம் காண்க.

தீர்வு நாண் AB மற்றும் AB இன் நடுப்புள்ளி C என்க.

ஆகையால், $OC \perp AB$,

OA மற்றும் OCயை இணைக்க. ஆரம் OA.

$OC = 2\sqrt{11}$ செமீ மற்றும் $OA = 12$செமீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 4.57

4-Geometry_TM.indd 174 26-12-2019 12:37:02

செங்கோண ΔOAC இல் பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

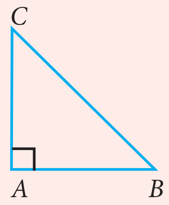
$$AC^2 = OA^2 - OC^2$$
$$= 12^2 - (2\sqrt{11})^2$$
$$= 144 - 44$$
$$= 100 \text{செமீ}$$
$$AC^2 = 100 \text{செமீ}$$
$$AC = 10 \text{செமீ}$$

ஆகவே, நாண் AB இன் நீளம் $= 2AC$

$$= 2 \times 10 \text{செமீ}$$
$$= 20 \text{செமீ}$$

குறிப்பு

பிதாகரஸ் தேற்றம் : வடிவியலில் பிதாகரஸ் தேற்றம் மிக முக்கியமான மற்றும் நன்கு அறிந்த தேற்றங்களில் ஒன்றாகும். "ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்." செங்கோண ΔABC இல் $BC^2 = AB^2 + AC^2$. இத்தேற்றத்தின் பயன்பாடு இந்த அலகில் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும்



எடுத்துக்காட்டு 4.6

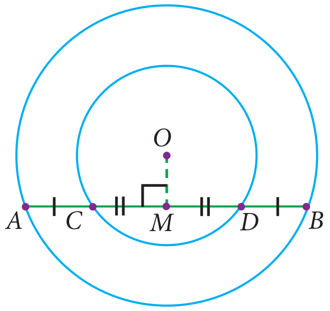
பொது மைய வட்டங்களில், வெளி வட்டத்தின் நாண் AB ஆனது உள் வட்டத்தைப் படத்தில் உள்ளவாறு C மற்றும் D இல் சந்திக்கின்றது எனில், $AB - CD = 2AC$ என நிறுவுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை : வெளி வட்டத்தின் நாண் AB ஆனது உள் வட்டத்தை C மற்றும் Dஇல் சந்திக்கின்றது.

நிறுவ வேண்டியது : $AB - CD = 2AC$

அமைப்பு : $OM \perp AB$ வரைக

மெய்ப்பித்தல் : இங்கு, $OM \perp AB$



படம் 4.58

மேலும், $OM \perp CD$

ஆகவே, $AM = MB$ ... (1)

(ஏனெனில், மையத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து நாணை இருசமக் கூறிடும்)

$CM = MD$ ... (2)

இப்பொழுது, $AB - CD = 2AM - 2CM$

$= 2(AM - CM)$ (1) மற்றும் (2) இலிருந்து

$$AB - CD = 2AC$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

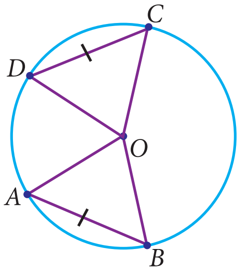
1. வட்டத்தின் ஆரம் 25செமீ மற்றும் ஒரு நாணின் நீளம் 40 செமீ எனில் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரம் காண்க.
2. PQ=4 செமீ உள்ளவாறு புள்ளிகள் P மற்றும் Q இன் வழியே மூன்று வட்டங்கள் வரைக.

4-Geometry_TM.indd 175 26-12-2019 12:37:02

4.5.2 நாண் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் (Angle Subtended by Chord at the Centre)

ஒரு நாணிற்குப் பதிலாக நாம் இரு சமமான நாண்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது நாம் மற்றொரு பண்பை விவாதிக்க இருக்கின்றோம்.

Oவை மையமாக உடைய வட்டத்தில் இரண்டு சமமான நாண்களை எடுத்துக்கொள்வோம். நாணின் முனைகளை மையத்துடன் இணைத்து, நாம் முக்கோணங்கள் ΔAOB மற்றும் ΔOCD ஐ பெறுகின்றோம். இதில் நாண் AB = நாண் CD (ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட நாண்கள் சமமானவை). மற்ற பக்கங்கள் ஆரங்கள், எனவே $OA=OC$ மற்றும் $OB=OD$. ப–ப–ப (SSS) விதிப்படி முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவை. அதாவது $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$. இதிலிருந்து, $m\angle AOB = m\angle COD$. இது பின்வரும் முடிவிற்கு அழைத்துச் செல்கிறது.



படம் 4.59

AKUUK7

தேற்றம் 8 வட்டத்தின் சமநாண்கள் வட்ட மையத்தில் சமகோணங்களைத் தாங்கும்.

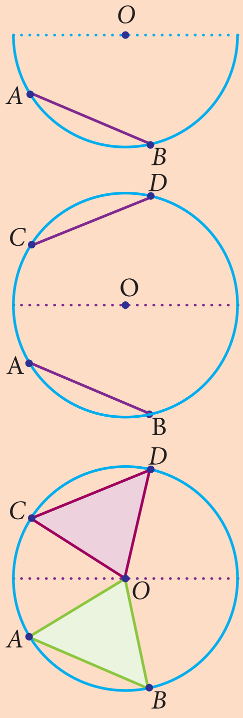
செயல்பாடு - 5

வழிமுறை

1. O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஆரத்தில் ஒரு வட்டம் வரைந்து, அதை வெட்டி எடுக்கவும்.
2. அதை மடித்து அரை வட்டம் உருவாக்குக. அதன் மேல் புள்ளிகள் A, B ஐ குறிக்கவும்.
3. அரை வட்டத்தில் AB இன் வழியே மடித்து, பின்பு பிரிக்கவும்.
4. நாம் மற்றோர் அரை வட்டத்தில், மேலும் ஒரு மடிப்பு கோட்டுத்துண்டைப் பெறுகின்றோம். அதை CD எனப் பெயரிடுவோம் $(AB = CD)$.
5. ஆரங்களை இணைத்து ΔOAB மற்றும் ΔOCD ஐ பெறுக.
6. படியெடுக்கும் (Trace) தாளைப் பயன்படுத்தி, ΔOAB மற்றும் ΔOCD ஐப் படியெடுக்கவும்.
7. இந்த முக்கோணங்கள் ΔOAB மற்றும் ΔOCD ஐ ஒன்றின்மீது மற்றொன்றை வைக்கவும்.

உற்று நோக்குதல்

1. நீங்கள் அறிவது என்ன? $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$ என்பது சரியா?
2. வட்ட மையம் O இலிருந்து நாண்கள் AB மற்றும் CD –க்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரத்தை அளக்க?

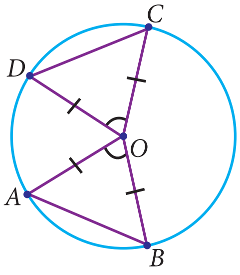


படம் 4.60

இப்பொழுது வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும் நாண்கள் AB மற்றும் CD இன் நீளங்களைக் காண்போம். அதாவது $\angle AOB = \angle COD$ மேலும் இக் கோணங்களை உள்ளடக்கிய ΔAOB மற்றும் ΔCOD இன் பக்கங்கள் ஆரங்களாகும்.

ப–கோ–ப (SAS) விதிப்படி, $\Delta AOB \equiv \Delta COD$.

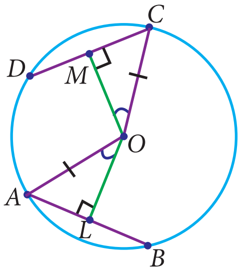
இதிலிருந்து நாண் AB = நாண் CD. இப்பொழுது நாம் மறுதலை முடிவைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:



படம் 4.61

4-Geometry_TM.indd 176 26-12-2019 12:37:04

தேற்றம் 8 இன் மறுதலை வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும் இரு நாண்கள் எப்பொழுதும் சம நீளமுள்ளவை.



படம் 4.62

இதே வழியில் சம நாண்கள் கொடுக்கப்படும்பொழுது, மையத்திலிருந்து அவற்றின் தொலைவினை விவாதிக்க இருக்கின்றோம். $OL \perp AB$ மற்றும் $OM \perp CD$ வரைக. தேற்றம் (7)இலிருந்து, இந்தச் செங்குத்துக்கோடுகள் நாண்களைச் சமமாகப் பிரிக்கும். ஆகவே, $AL = CM$. ΔOAL மற்றும் ΔOCM ஐ ஒப்பிடும்பொழுது, கோணங்கள் $\angle OLA = \angle OMC = 90°$ மற்றும் $OA = OC$ ஆரங்கள் ஆகும். செ–க–ப (RHS) விதிப்படி, $\Delta OAL \equiv \Delta OCM$. மையத்திலிருந்து உள்ள தொலைவு $OL = OM$ ஆகும். மேலும் முடிவைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

தேற்றம் 9 வட்டத்தின் சம நாண்கள் வட்ட மையத்தில் இருந்து சம தொலைவில் இருக்கும்.

தேற்றம் 9 இன் மறுதலையும் கணக்குகளைத் தீர்க்க மிகவும் பயனுள்ளதாக இருப்பதால் அதையும் அறிவோம்.

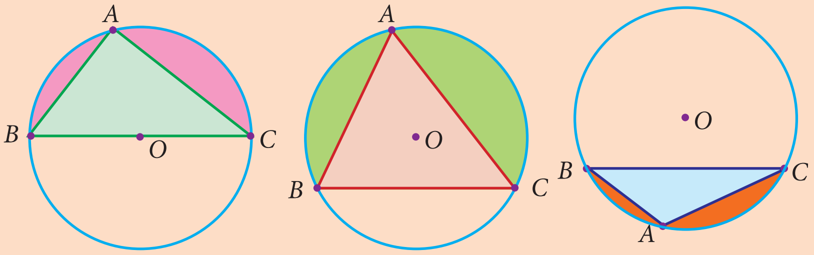
தேற்றம் 9 இன் மறுதலை வட்ட மையத்திலிருந்து சம தொலைவில் உள்ள நாண்கள் சம நீளமுள்ளவை.

4.5.3 ஒரு வட்டவில் தாங்கும் கோணம் (Angle Subtended by an Arc of a Circle)

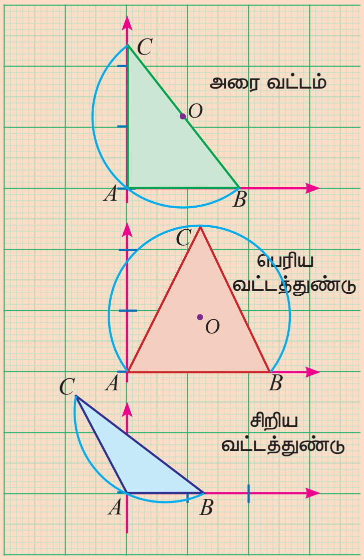
செயல்பாடு - 6

வழிமுறை :

1. O ஐ மையமாகக் கொண்டு வெவ்வேறு ஆர அளவுகளுடைய மூன்று வட்டங்களை வரைபடத்தாளில் வரைக.
2. இந்த வட்டங்களில் இருந்து அரைவட்டம், ஒரு சிறிய வட்டத்துண்டு மற்றும் ஒரு பெரிய வட்டத்துண்டுகளை வெட்டி எடுக்க.
3. அவற்றின் மேல் மூன்று புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றிற்கு A, B மற்றும் C எனப் பெயரிடுக.



படம் 4.63



படம் 4.64

4. முக்கோணங்களை வெட்டி எடுத்துப் படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் புள்ளி A ஆனது ஆதிப்புள்ளியில் பொருந்துமாறு வரைபடத்தாளில் ஒட்டுக.

உற்றுநோக்குதல் :

(i) அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் ____________

(ii) பெரிய வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணம் ______

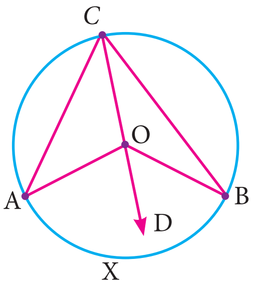
(iii) சிறிய வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணம் ________

4-Geometry_TM.indd 177 26-12-2019 12:37:05

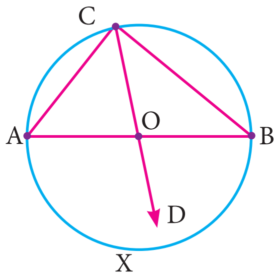
இப்பொழுது ஒரு வில்லானது வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணத்திற்கும், வட்டப் பரிதியில் தாங்கும் கோணத்திற்கும் இடையேயுள்ள உறவைக் காண இருக்கின்றோம்.

4.5.4 மையம் மற்றும் பரிதியில் அமையும் கோணங்கள் (Angle at the Centre and the Circumference)

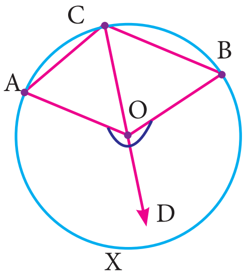
O வை மையமாகக் கொண்ட ஏதேனும் ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது புள்ளிகள் $A,\ B$ மற்றும் C ஐ வட்டப் பரிதியில் குறிக்க.



படம் 4.65



படம் 4.66



படம் 4.67

இங்கு வில் $\overset{\frown}{AB}$ ஆனது சிறிய வில் (படம் 4.65), அரைவட்டம் (படம் 4.66) மற்றும் பெரிய வில் (படம் 4.67) என அமையும். மேலும் புள்ளி C ஆனது வில்களைப் பொறுத்து (படம் 4.65 முதல் 4.67 வரை) வெவ்வேறு வகையான கோணங்களைப் பெறும். மேலேயுள்ள அனைத்து வட்டங்களிலும் வில் $\overset{\frown}{AXB}$ மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $\angle AOB$ ஆகும். மேலும் $\angle ACB$ ஆனது பரிதியில் தாங்கும் கோணம் ஆகும்.

நாம் மெய்ப்பிக்க வேண்டியது $\angle AOB = 2\angle ACB$.

இதற்காக, COவை D இக்கு நீட்டுக. மேலும் CD ஐ இணைக்க.

$\angle OCA = \angle OAC$ ஏனெனில், $(OA = OC$ ஆரங்கள்)

வெளிக் கோணம் = உள்ளெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதல்.

$$\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$$
$$= 2\angle OCA \quad .... (1)$$

இதேபோல்,

$$\angle BOD = \angle OBC + \angle OCB$$
$$= 2\angle OCB \quad .... (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து,

$$\angle AOD + \angle BOD = 2(\angle OCA + \angle OCB)$$

இறுதியாக நாம் அடையும் முடிவு $\angle AOB = 2\angle ACB$.

இதிலிருந்து பின்வரும் முடிவைப் பெறுகின்றோம்:

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. வேறுபட்ட அளவுள்ள வளையல்களின் எல்லைகளை வரைந்து அவை ஒவ்வொன்றின் மையத்தையும் மூலை மட்டங்களின் உதவியுடன் காண முயற்சி செய்க.
2. அளவுகோல் மற்றும் கவராயத்தைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட பிறை நிலவை நகலெடுத்து முழு நிலவாக மாற்றுக.

படம் 4.68

தேற்றம் 10

ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இருமடங்காகும்.

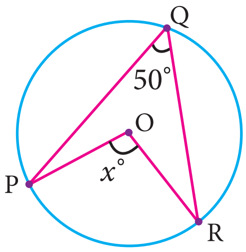
4-Geometry_TM.indd 178 26-12-2019 12:37:07

குறிப்பு

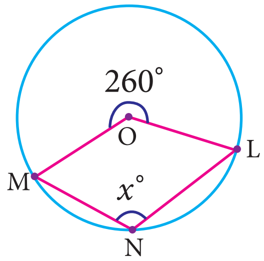
- அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் செங்கோணம்.
- வட்டத்தின் சம வில்கள் சமக் கோணங்களைத் தாங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.7

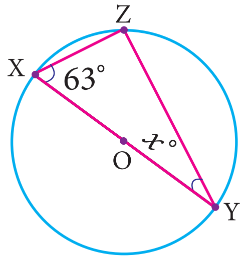
கீழ்க்காணும் படங்களில் x° இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i)


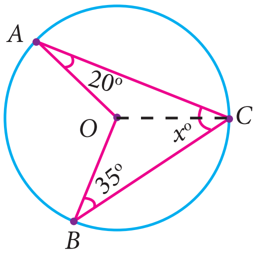
படம் 4.69

(ii)


படம் 4.70

(iii)


படம் 4.71

(iv)


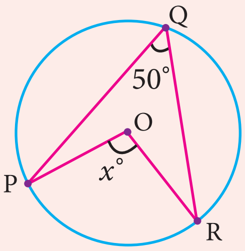
படம் 4.72

தீர்வு ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும் என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

(i) $\angle POR = 2\angle PQR$

$x^\circ = 2\times 50^\circ$

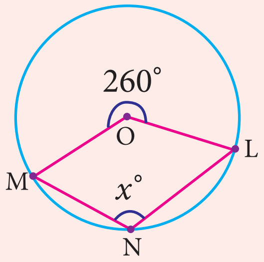
$x^\circ = 100^\circ$



(ii) $\angle MNL = \frac{1}{2}$ பின்வளை $\angle MOL$

$= \frac{1}{2}\times 260^\circ$

$x^\circ = 130^\circ$



(iii) XY ஆனது வட்டத்தின் விட்டம்.

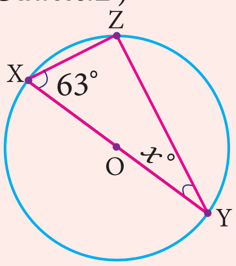
எனவே, $\angle XZY = 90^\circ$

(அரை வட்டத்தில் அமையும் கோணம்)

ΔXYZ இல்

$x^\circ + 63^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$x^\circ = 27^\circ$



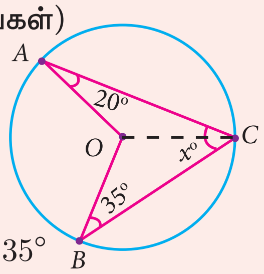
(iv) $OA = OB = OC$ (ஆரங்கள்)

ΔOAC இல்,

$\angle OAC = \angle OCA = 20^\circ$

ΔOBC இல்,

$\angle OBC = \angle OCB = 35^\circ$



(சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம்)

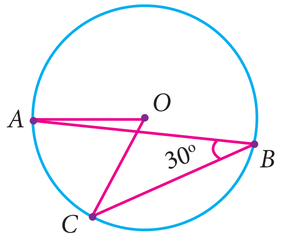
$\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB$

$x^\circ = 20^\circ + 35^\circ$

$x^\circ = 55^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 4.8

படத்தில் (படம் 4.73) வட்ட மையம் O மற்றும் $\angle ABC = 30^\circ$ எனில், $\angle AOC$ ஐக் காண்க.



படம் 4.73

தீர்வு

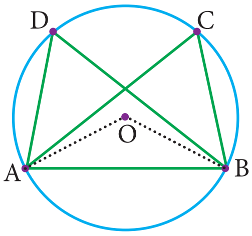
$\angle ABC = 30^\circ$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

4-Geometry_TM.indd 179 26-12-2019 12:37:09

$$\angle AOC = 2\angle ABC$$ (ஏனெனில், வட்டத்தின் ஒரு வில்லானது மையத்தில் தாங்கும் கோணம் மீதிப் பரிதியில் தாங்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்)
$$= 2\times 30^\circ$$
$$= 60^\circ$$

இப்பொழுது, நாம் மற்றொரு சிறப்பான தேற்றத்தைப் பார்க்கலாம். சிறிய வில்லானது விரிகோணத்தையும், பெரிய வில்லானது குறுங்கோணத்தையும் மற்றும் அரை வட்டமானது செங்கோணத்தையும் பரிதியில் தாங்கும் என்பதைக் கற்றிருக்கிறோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள நாண் AB, மேலும் புள்ளிகள் C மற்றும் D ஆகியவை வட்டப் பரிதியின் வெவ்வேறு இடங்களில் உள்ள புள்ளிகள் என்போம். நாம், $\angle ACB$ மற்றும் $\angle ADB$ ஐக் காண்போம். இந்தக் கோண அளவுகளுக்கிடையே ஏதேனும் வேறுபாடு உள்ளதா?

4.5.5 ஒரே வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணங்கள் (Angles in the same Segment of a Circle)



படம் 4.74

O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் வட்டத்துண்டு AB ஐ எடுத்துக்கொள்க. புள்ளிகள் C மற்றும் D ஆனது வட்டப் பரிதியின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும். ஆரங்கள் OA மற்றும் OB ஐ இணைக்க.

$$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$$ (தேற்றம் 10 இலிருந்து)

மற்றும் $$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ADB$$ (தேற்றம் 10 இலிருந்து,)

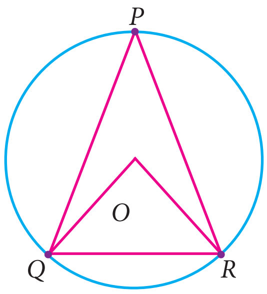
$$\angle ACB = \angle ADB$$

இந்த முடிவானது புதிய தேற்றத்தைத் தருவிக்கின்றது.

AL4QLU

தேற்றம் 11 ஒரே வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணங்கள் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.9 கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் O ஆனது வட்டமையம், $\angle OQR = 48^\circ$ எனில், $\angle P$ இன் அளவு என்ன?



படம் 4.75

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை $\angle OQR = 48^\circ$.

எனவே, $\angle ORQ$ இன் அளவும் 48° (ஏன்?____________)

$\angle QOR = 180^\circ - (2\times 48^\circ) = 84^\circ$.

நாண் QR ஆனது மையத்தில் உருவாக்கும் கோணம் மீதிப் பரிதியில் உருவாக்கும் கோணத்தைப் போல் இருமடங்காகும்.

எனவே, $\angle QPR = \frac{1}{2}\times 84^\circ = 42^\circ$.

பயிற்சி 4.3

1. வட்டத்தின் விட்டம் 52 செமீ மற்றும் ஒரு நாணின் நீளம் 20 செமீ எனில், மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரம் காண்க.
2. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 8 செமீ தொலைவில் 30 செமீ நீளமுள்ள நாண் வரையப்பட்டுள்ளது எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

4-Geometry_TM.indd 180 26-12-2019 12:37:11

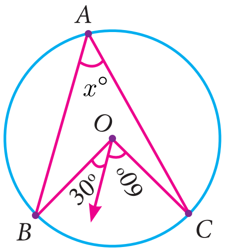
3. ஆரம் $4\sqrt{2}$ செமீ உள்ள வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்ற ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தான விட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன எனில், நாண் ACஇன் நீளம் காண்க. மேலும், $\angle OAC$ மற்றும் $\angle OCA$ காண்க.

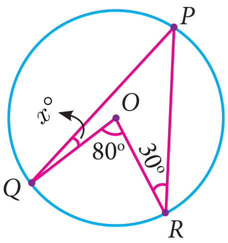
4. ஆரம் 15 செமீ உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 12 செமீ தொலைவில் அமைந்துள்ள நாணின் நீளம் காண்க.

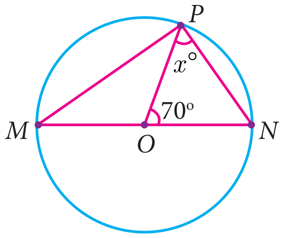
5. Oஐ மையமாக உடைய வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்பன இரு இணையான நாண்கள் ஆகும். மேலும் ஆரம் 10 செமீ, $AB = 16$ செமீ மற்றும் $CD = 12$ செமீ எனில், இரு நாண்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைத் தீர்மானிக்க.

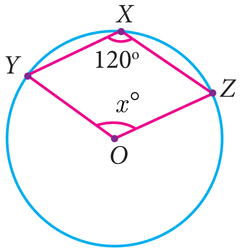
6. 5 செமீ மற்றும் 3 செமீ ஆரமுள்ள இரு வட்டங்கள், இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. மேலும், அவற்றின் மையங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 4 செமீ எனில், பொது நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

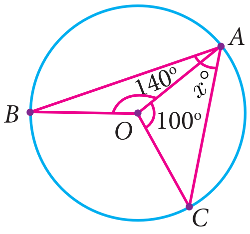
7. பின்வரும் படங்களில் x° இன் மதிப்பைக் காண்க.

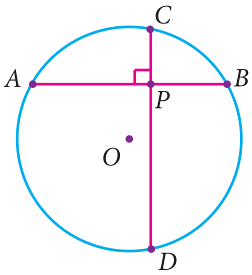
(i)


(ii)


(iii)


(iv)


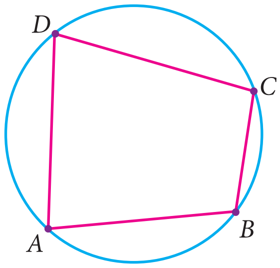
(v)




8. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில், $\angle CAB = 25^\circ$ எனில், $\angle BDC$, $\angle DBA$ மற்றும் $\angle COB$ காண்க.

4.6 வட்ட நாற்கரங்கள் (Cyclic Quadrilaterals)

இங்கு வட்ட நாற்கரம் என்ற சிறப்பு நாற்கரத்தையும் அதன் பண்புகளையும் பற்றி அறிந்துகொள்ளலாம். நாற்கரத்தின் நான்கு முனைகளும் வட்டத்தின் பரிதியைத் தொட்டுக் கொண்டு இருக்குமேயானால் அந்த நாற்கரம் வட்ட நாற்கரமாகும். இப்பொழுது வட்ட நாற்கரத்தின் சிறப்புப் பண்புகளைக் காணலாம்.



படம் 4.76

அனைத்து முனைகளும் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளவாறு நாற்கரம் $ABCD$ஐ எடுத்துக்கொள்க. நாம் இப்பொழுது எதிரெதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் என மெய்ப்பிக்க வேண்டியுள்ளது. ஒவ்வொரு முனையையும் வட்டமையம் O உடன் இணைக்கவும். $OA,\ OB,\ OC$ மற்றும் OD என்பன ஆரங்கள் ஆகும். இவற்றிலிருந்து நான்கு இருசமபக்க முக்கோணங்கள் $OAB,\ OBC,\ OCD$ மற்றும் ODA ஆகியவற்றைக் காண்கிறோம். வட்டமையம் O வைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 360°

4-Geometry_TM.indd 181 26-12-2019 12:37:12

. ஒவ்வோர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் 180°.

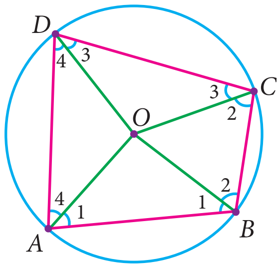
படத்திலிருந்து (படம் 4.77) நாம் பெறுவது,

$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4)$ + மையம் O இல் அமையும் கோணம் $= 4\times 180^\circ$

$$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) + 360^\circ = 720^\circ$$

இதைச் சுருக்க, $(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) = 180^\circ$.

இதிலிருந்து நாம் காண்பது,



படம் 4.77

(i) $(\angle 1+\angle 2) + (\angle 3+\angle 4) = 180^\circ$ (எதிர்கோணங்கள் B மற்றும் D இன் கூடுதல்)

(ii) $(\angle 1+\angle 4) + (\angle 2+\angle 3) = 180^\circ$ (எதிர்கோணங்கள் A மற்றும் C இன் கூடுதல்)

இப்பொழுது முடிவுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

தேற்றம் 12 வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் ஆகும்.

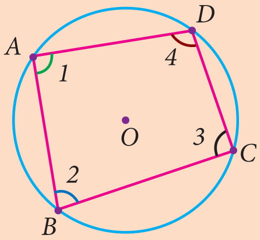
தேற்றம் 12இன் மறுதலையும் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருப்பதால் அதையும் காண்போம்.

ALDLNH

தேற்றம் 12 இன் மறுதலை ஒரு நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் எனில் அந்த நாற்கரம் வட்ட நாற்கரமாகும்.

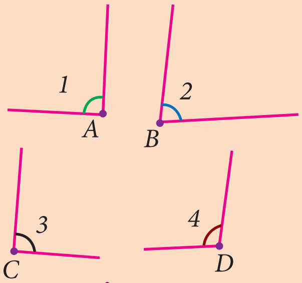
செயல்பாடு - 7

வழிமுறை



படம் 4.78

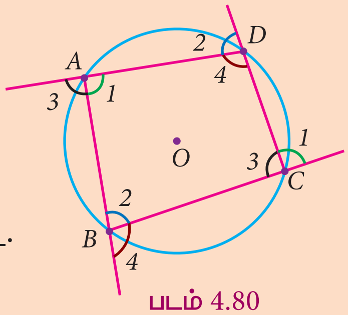
9. O வை மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஓர் ஆரத்தில் வட்டம் வரைக..
10. புள்ளிகள் A, B, C மற்றும் D ஐ அதன் எல்லைகளில் குறித்து வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ ஐ வரைக. அதன் கோணங்களுக்குப் படம் 4.78இல் உள்ளது போல் பெயரிடுக.
11. படி எடுக்கும் காகிதத்தைப் பயன்படுத்தி வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ ஐப் படியெடுக்க.
12. படம் 4.79 இல் காட்டியுள்ளவாறு கோணங்கள் A, B, C மற்றும் D ஐ வெட்டி எடுக்க
13. கோணங்கள் $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 4$ ஐக் கோணங்கள் A, B, C மற்றும் D இன் அடுத்துள்ள கோணங்களாக அமையும்படி படம் 4.80 இல் காட்டியுள்ளவாறு ஒட்டுக.
14. கோணங்கள் $\angle 1+\angle 3$ மற்றும் $\angle 2+\angle 4$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு காண்க.



படம் 4.79

உற்றுநோக்கிக் கீழ்க்காண்பனவற்றை நிரப்புக:

1. (i) $\angle A+\angle C =$ ______ (ii) $\angle B+\angle D =$ ______
   (iii) $\angle C+\angle A =$ ______ (iv) $\angle D+\angle B =$ ______
2. வட்ட நாற்கரத்தின் எதிரெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதல் ________.
3. ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் ________.



படம் 4.80

4-Geometry_TM.indd 182 26-12-2019 12:37:14

எடுத்துக்காட்டு 4.10 வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ இல் $\angle PSR = 70^\circ$ மற்றும் $\angle QPR = 40^\circ$ எனில், $\angle PRQ$ ஐக் காண்க (படம் 4.81 ஐப் பார்க்க).

தீர்வு வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ இல் $\angle PSR = 70^\circ$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$\angle PSR + \angle PQR = 180^\circ$ (காரணம் கூறுக______)

$70^\circ + \angle PQR = 180^\circ$

$\angle PQR = 180^\circ - 70^\circ$

$\angle PQR = 110^\circ$

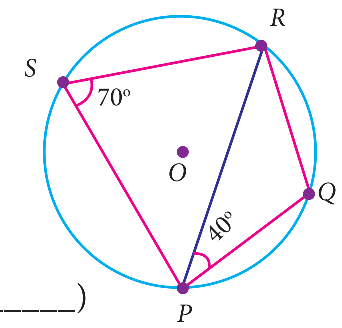
ΔPQR இல் நாம் பெறுவது,

$\angle PQR + \angle PRQ + \angle QPR = 180^\circ$ (காரணம் கூறுக__________)

$110^\circ + \angle PRQ + 40^\circ = 180^\circ$

$\angle PRQ = 180^\circ - 150^\circ$

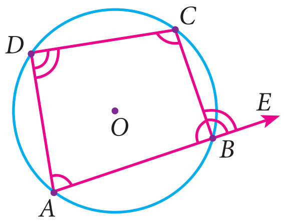
$\angle PRQ = 30^\circ$



படம் 4.81

ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் வெளிக்கோணம் (Exterior Angle of a Cyclic Quadrilateral)

ஒரு நாற்கரத்தின் வெளிக்கோணம் என்பது அதன் ஏதாவது ஒரு பக்கமும், அதனை அடுத்துள்ள பக்கத்தின் நீட்சியும் வெளியே உருவாக்கும் கோணம் ஆகும்.



படம் 4.82

வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் பக்கம் AB ஐ E வரை நீட்டுக. இங்கு, $\angle ABC$ மற்றும் $\angle CBE$ ஆகியன நேரிய கோணச் சோடிகள் ஆகும். இவற்றின் கூடுதல் 180° ஆகும். மேலும், $\angle ABC$ மற்றும் $\angle ADC$ ஆகியன வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள், இவற்றின் கூடுதலும் 180° ஆகும். இவற்றில் இருந்து நாம் பெறுவது, $\angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle ADC$ ஆகவே $\angle CBE = \angle ADC$. இதேபோல் மற்ற கோணங்களுக்கும் நிறுவலாம்.

தேற்றம் 13 வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப்பதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர்க் கோணத்திற்குச் சமம்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. ஒரு நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள் எனில் அந்த நாற்கரம் _________ ஆகும்.
2. நாணின் நீளம் குறையும்பொழுது, மையத்திலிருந்து உள்ள தூரம் _________.
3. வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கம் நீட்டப்பட்டால் உண்டாகும் வெளிக் கோணமானது உள்ளெதிர் கோணத்திற்கு _________.
4. வட்ட நாற்கரத்தில் எதிர்க் கோணங்கள் _________.

4-Geometry_TM.indd 183 26-12-2019 12:37:16

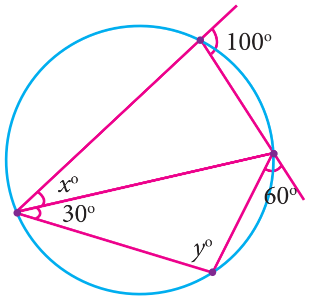
எடுத்துக்காட்டு 4.11 கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் கோணங்கள் x° மற்றும் y° இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

வட்ட நாற்கரத்தின் வெளிக் கோணங்களின் பண்பின்படி,

நாம் பெறுவது, $y^\circ = 100^\circ$ மேலும்,

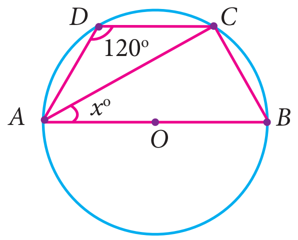
$x^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ ஆகையால், $x^\circ = 30^\circ$



படம் 4.83

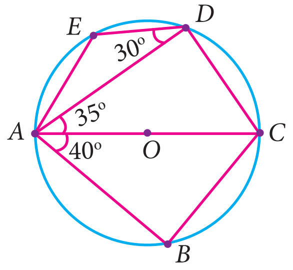
பயிற்சி 4.4

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் x° இன் மதிப்பு காண்க.

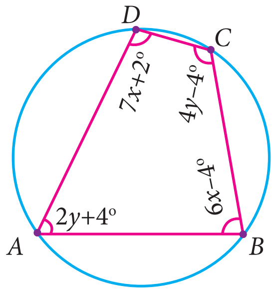


2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் விட்டம் AC. இங்கு, $\angle ADE = 30^\circ$; $\angle DAC = 35^\circ$ மற்றும் $\angle CAB = 40^\circ$ எனில்,

   (i) $\angle ACD$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle DAE$ காண்க.

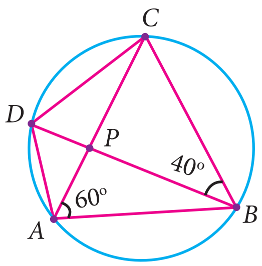


3. படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் அனைத்துக் கோணங்களையும் காண்க

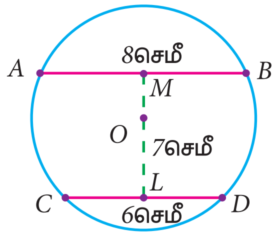


4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் விட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி P மேலும், $\angle DBC = 40^\circ$ மற்றும் $\angle BAC = 60^\circ$ எனில்,

   (i) $\angle CAD$ (ii) $\angle BCD$ காண்க.

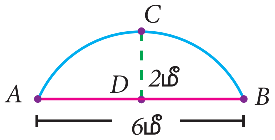


5. படத்தில் AB மற்றும் CD ஆனது O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் இரு இணையான நாண்கள். மேலும், $AB = 8$ செமீ, $CD = 6$ செமீ, $OM \perp AB$, $OL \perp CD$ இடைப்பட்ட தூரம் LM ஆனது 7 செமீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க?

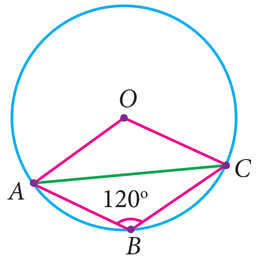


4-Geometry_TM.indd 184
26-12-2019 12:37:18

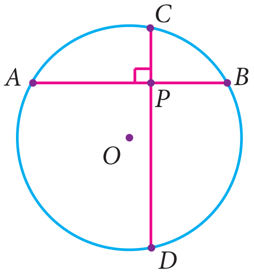
6. பாலத்தின் வளைவின் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு வளைவின் அகலம் 6 மீ மற்றும் வளைவின் அதிகளவு உயரம் 2 மீ எனில், வளைவை உள்ளடக்கிய வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?



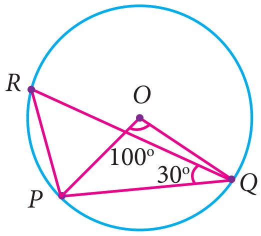
7. படத்தில் $\angle ABC = 120^0$, Oவை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் A, B மற்றும் C எனில் $\angle OAC$ காண்க.



8. ஒரு பள்ளியில் மரம் நடும் விழா நிகழ்ச்சி நடக்கிறது. இதற்காக ஆசிரியர் ஒன்பதாம் வகுப்பு மாணவர்கள் மரக்கன்று நடுவதற்காக 6 மீ ஆரமுள்ள மைதானத்தை ஒதுக்குகின்றார். நான்கு மாணவர்கள் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு A, B, C மற்றும் D என்ற புள்ளிகளில் மரக்கன்று நடுகின்றனர். இங்கு $AB = 8$ மீ, $CD = 10$ மீ $AB \perp CD$ மற்றொரு மாணவர் AB மற்றும் CD வெட்டும் புள்ளியான Pஇல் பூந்தொட்டியை வைக்கின்றார் எனில், மையத்திலிருந்து P இக்கு உள்ள தூரம் காண்க.



9. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில், $\angle POQ = 100^0$ மற்றும் $\angle PQR = 30^0$ எனில், $\angle RPO$ காண்க.



4.7 செய்முறை வடிவியல் (Practical Geometry)

செய்முறை வடிவியல் என்பது புள்ளிகள், நேர்க்கோடுகள், கோணங்கள் மற்றும் பிற உருவங்களின் பண்புகளைப் பற்றிய வடிவியல் விதிகளைப் பயன்படுத்தி வடிவியல் உருவங்களை வரையும் முறையாகும். வடிவியலில் வரைதல் (Construction) என்பது கோணங்கள், நேர்க்கோடுகள் மற்றும் உருவங்கள் ஆகியவற்றைத் துல்லியமாக வரைதலாகும். யுக்ளிட் என்பவர் தன் "கூறுகள்" ('Elements') என்ற நூலில் வடிவியலின் வரைபடங்களைப் பற்றித் தெளிவாகக் கூறியுள்ளார். எனவே, இவ்வரைபடங்கள் யுக்ளிடின் வரைபடங்கள் எனவும் அறியப்படுகின்றன. அளவுகோல் மற்றும் கவராயம் பயன்படுத்தி இவ்வரைபடங்கள் வரையப்படுகின்றன. கவராயம் சமதூரத்தையும், அளவுகோல் நேர்க்கோட்டில் புள்ளிகளை அமைக்கவும் உதவுகின்றன. அனைத்து வடிவியல் வரைதல்களும் இவ்விரு கருத்துகளின் அடிப்படையிலேயே அமைகின்றன.

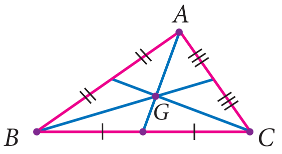
அளவுகோல் மற்றும் கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களைக் குறிக்க இயலும் என்பதை நாம் மெய்யெண்கள் பகுதியில் கற்றோம். 1913இல் இந்தியக் கணிதமேதை இராமானுஜன் $355/113=\pi$ ஐக் குறிக்க ஒரு வடிவியல் முறையை அளித்தார். தற்போது துல்லியமான அளவுகளைக் கொண்டு வரையும் திறன்களைப் பயன்படுத்தி நேர்க்கோடுகளால் மலைக்குள்ளே செல்லும் சுரங்கப்பாதை அமைப்பை வரையமுடியும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. முந்தைய வகுப்புகளில் கோணங்கள் மற்றும் முக்கோணங்கள் வரைவது பற்றி நாம் கற்றுள்ளதை நினைவு கொள்வோம்.

இந்தப் பகுதியில் நாம் முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம், குத்துக்கோட்டு மையம், சுற்று வட்ட மையம் மற்றும் உள்வட்ட மையம் வரைதல் பற்றி ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகளைப் பயன்படுத்திக் கற்க இருக்கிறோம்.

4-Geometry_TM.indd 185 26-12-2019 12:37:19

4.7.5 முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் வரைதல்
(Construction of the Centroid of a Triangle)

நடுக்கோட்டு மையம் (Centroid)



படம் 4.84

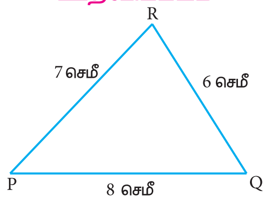
முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி, அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் எனப்படும். இது பொதுவாக G எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

செயல்பாடு – 8

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையப் புள்ளியைக் காணுதல்

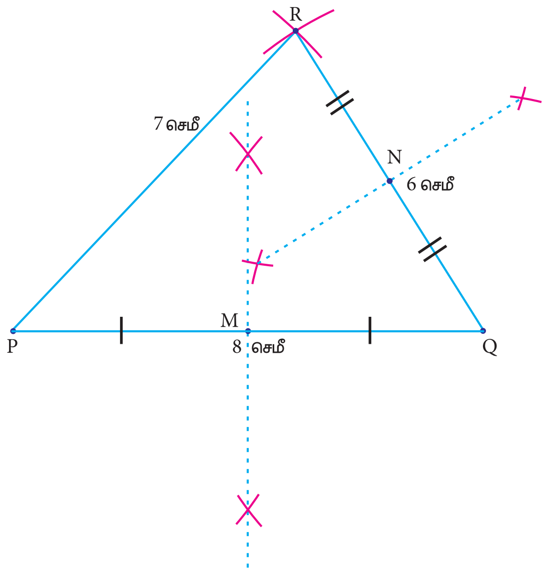
செய்முறை ஒரு காகிதத்தை மடித்து PQ என்ற கோட்டுத்துண்டை உருவாக்குவோம். P என்ற புள்ளி Q இன் மீது பொருந்துமாறு மீண்டும் காகிதத்தை மடிக்கும்போது இரண்டு கோட்டுத் துண்டுகளும் வெட்டும் புள்ளியை M எனக் குறிக்க. M என்பது PQ இன் மையப்புள்ளி ஆகும்.

உதவிப்படம்



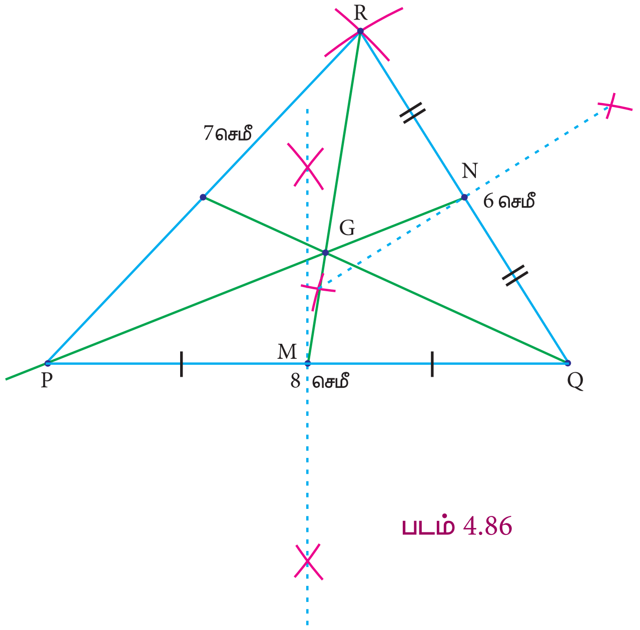
எடுத்துக்காட்டு 4.12 ΔPQR இன் நடுக்கோட்டு மையம் வரைக. அதன் பக்கங்கள் $PQ = 8$செமீ; $QR = 6$செமீ; $RP = 7$செமீ.

தீர்வு



படம் 4.85

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகள் PQ=8செமீ, QR=6செமீ மற்றும் RP=7செமீ கொண்ட ΔPQR வரைக. ஏதேனும் இரு பக்கங்களுக்கு (PQ மற்றும் QR) மையக்குத்துக் கோடுகள் வரைந்து PQ இன் நடுப்புள்ளி M மற்றும் QR இன் நடுப்புள்ளி N ஐ குறிக்க.



படம் 4.86

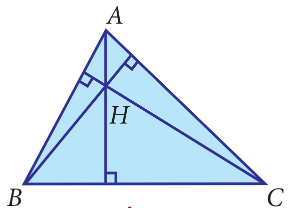
படி 2 : நடுக்கோடுகள் PN மற்றும் RM வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி G ஆகும். புள்ளி G ஆனது ΔPQR இன் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

4-Geometry_TM.indd 186 26-12-2019 12:37:20

குறிப்பு

- ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று நடுக்கோடுகள் வரைய இயலும்.
- நடுக்கோட்டு மையமானது நடுக்கோடுகளை முனையிலிருந்து 2:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.
- அனைத்து வகை முக்கோணங்களுக்கும் நடுக்கோட்டு மையமானது முக்கோணத்தின் உள்ளேயே அமையும்.
- நடுக்கோட்டு மையமானது அந்த முக்கோணத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம் (முக்கோணத்தை இந்தப் புள்ளியில் நிலையாகத் தாங்கி நிறுத்த முடியும்) அல்லது தாங்கு மையம் என அழைக்கப்படுகிறது.

4.7.6 முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுமையம் வரைதல் (Construction of the Orthocentre of a Triangle)



படம். 4.87

குத்துக்கோட்டுமையம் (Orthocentre)

ஒரு முக்கோணத்தின் **குத்துக்கோட்டுமையம்** என்பது அம்முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகளில் இருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும். இது **செங்கோட்டுமையம்** எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. இதை H என்று குறிப்போம்.

செயல்பாடு 9

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்திக் கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து குத்துக் கோடு அமைத்தல்.

செய்முறை ஒரு தாளில் AB என்ற கோட்டுத்துண்டை வரைந்து அதற்கு மேல் பகுதியில் P என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். B என்ற புள்ளியை BA என்ற கோட்டுத்துண்டின் வழியே நகர்த்தி மடிப்பானது P என்ற புள்ளியைத் தொடும்போது தாளை மடிக்கக் கிடைக்கும் கோடு P என்ற புள்ளியிலிருந்து AB –க்குக் குத்துக்கோடு ஆகும்.

செயல்பாடு 10

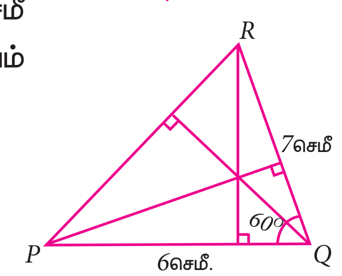
நோக்கம் தாள் மடிப்பு முறையில் முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையத்தைக் கண்டறிதல்.

செய்முறை மேற்கண்ட செயல்பாட்டைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் எவையேனும் இரு முனைகளிலிருந்து அவற்றின் எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு செங்குத்துக்கோடுகள் வரைக. செங்குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

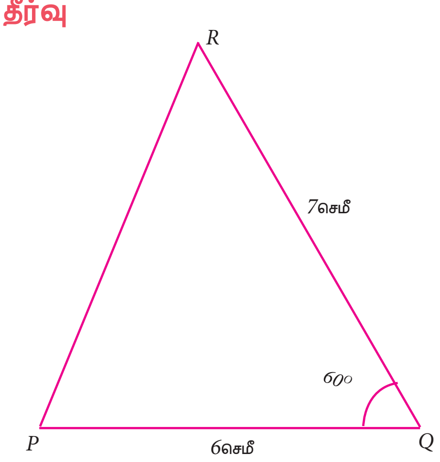
4-Geometry_TM.indd 187 26-12-2019 12:37:21

எடுத்துக்காட்டு 4.13 $PQ = 6$ செமீ, $\angle Q = 60^\circ$ மற்றும் $QR = 7$ செமீ அளவுகளைக் கொண்ட ΔPQR வரைந்து அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.

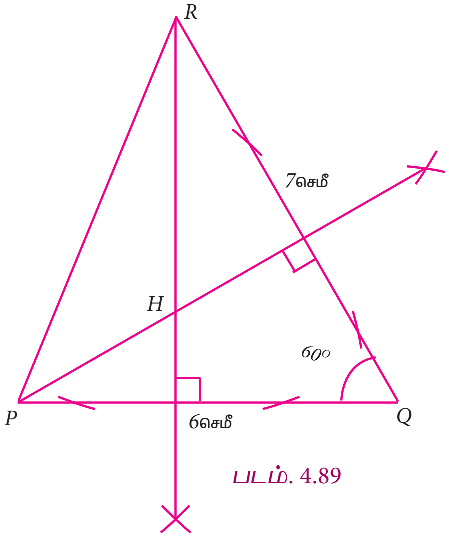
உதவிப்படம்



தீர்வு



படம். 4.88



படம். 4.89

படி 1

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்கு ΔPQR வரைக.

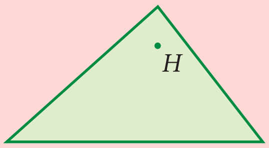
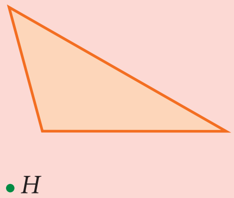
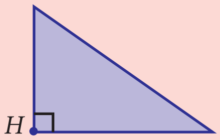
படி 2:

R மற்றும் P இலிருந்து அதன் எதிர்ப்பக்கங்கள் PQ மற்றும் QR இக்கு குத்துக்கோடுகள் வரைக.

அவ்விரண்டு குத்துக்கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி H ஆனது, ΔPQR இன் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

குறிப்பு

கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணங்களுக்குச் குத்துக்கோட்டு மையம் எங்கே அமையும் என்பதை அறிந்துகொள்ளுதல்.

	குறுங்கோண முக்கோணம்	விரிகோண முக்கோணம்	செங்கோண முக்கோணம்
குத்துக்கோட்டு மையம் (H)	Δ இன் உள்ளே 	Δ இன் வெளியே 	செங்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளி 

பயிற்சி 4.5

1. $LM = 7.5$ செமீ, $MN = 5$செமீ மற்றும் $LN = 8$செமீ அளவுகளுக்கு ΔLMN வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்கவும்.

2. முக்கோணம் ABC யை வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்க. இங்கு A இல் செங்கோணம், $AB = 4$செமீ மற்றும் $AC = 3$செமீ.

4-Geometry_TM.indd 188 26-12-2019 12:37:22

3. AB = 6செமீ, $\angle B = 110^{\circ}$ மற்றும் AC = 9செமீ அளவுகளுள்ள ΔABC வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்க.

4. PQ = 5 செமீ, PR = 6 செமீ மற்றும் $\angle QPR = 60^{\circ}$ அளவுகளுள்ள ΔPQR வரைக. மேலும் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்கவும்.

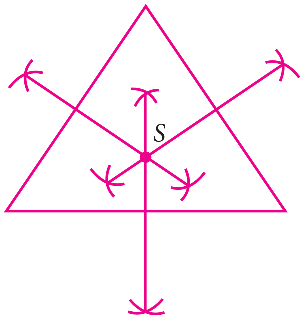
5. PQ = 7 செ.மீ., QR = 8 செமீ மற்றும் PR = 5 செமீ என்ற அளவுகளைக் கொண்ட ΔPQR வரைந்து அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.

6. 6.5 செமீ பக்க அளவுகளைக் கொண்ட சமபக்க முக்கோணம் வரைக. அம்முக்கோணத்திற்குக் குத்துக்கோடு மையம் காண்க.

7. $AB = 6$ செமீ, $\angle B = 110^{\circ}$ மற்றும் $BC = 5$ செமீ என்ற அளவுகளை உடைய ΔABC வரைந்து அதன் குத்துக்கோடு மையம் காண்க.

8. PQ =4.5 செமீ, $QR = 6$ செமீ மற்றும் $PR = 7.5$ செமீ என்ற அளவுகளை உடைய செங்கோண ΔPQR வரைந்து அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.

4.7.3 முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் வரைதல் (Construction of the Circumcentre of a Triangle)



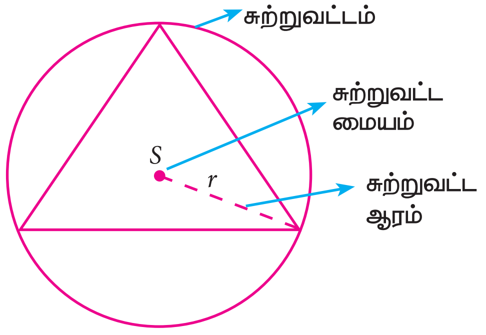
படம். 4.90

சுற்றுவட்டமையம் (Circumcentre)

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் என்பது அம்முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக் குத்துக்கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளியாகும். இதனை "S" எனக் குறிப்போம்.

சுற்றுவட்டம் (Circumcircle)

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிப்புள்ளிகள் வழியே சுற்றுவட்ட மையத்தை (S) மையமாகக்கொண்டு செல்லும் வட்டம் சுற்றுவட்டம் எனப்படும்.



படம். 4.91

சுற்றுவட்ட ஆரம் (Circumradius)

சுற்று வட்ட மையம் S –க்கும் முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஓர் உச்சிப்புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு சுற்றுவட்ட ஆரம் எனப்படும்.

செயல்பாடு 11

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையக் குத்துக்கோட்டைக் காணுதல்.

செய்முறை ஒரு காகிதத்தை மடித்து PQ என்ற கோட்டுத்துண்டை உருவாக்குவோம். P என்ற புள்ளி Q இன் மீது பொருந்துமாறு மீண்டும் காகிதத்தை மடிக்கும்போது கிடைக்கும் கோட்டுத்துண்டு RS ஆகும். RS என்பது PQ இன் மையக்குத்துக்கோடு ஆகும்.

4-Geometry_TM.indd 189 26-12-2019 12:37:22

செயல்பாடு 12

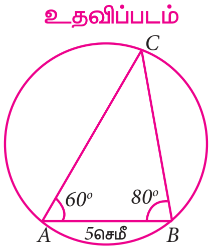
நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தைக் காணுதல்.

செய்முறை ஒரு தாளில் முக்கோணத்தை வரைந்து கொள்க. பின்னர் செயல்பாடு 11ஐப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் எவையேனும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு மையக்குத்துக்கோட்டைக் காண வேண்டும். இந்த இரண்டு மையக்குத்துக் கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் ஆகும்.

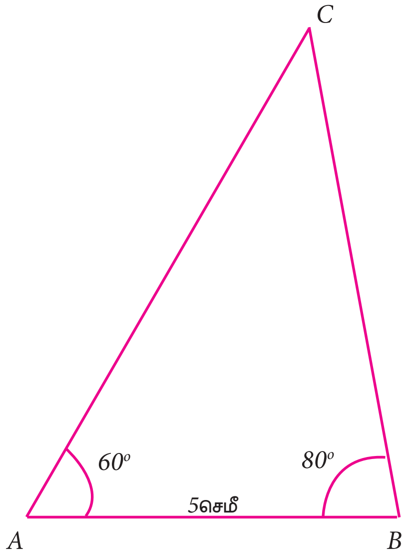
எடுத்துக்காட்டு 4.14

$AB = 5$ செமீ, $\angle A = 60^\circ$ மற்றும் $\angle B = 80^\circ$. என்ற அளவுகளை உடைய ΔABC வரைக. அதற்குச் சுற்றுவட்டம் வரைந்து சுற்றுவட்ட ஆரம் காண்க.

உதவிப்படம்



தீர்வு **படி 1** கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்கு ΔABC வரைக



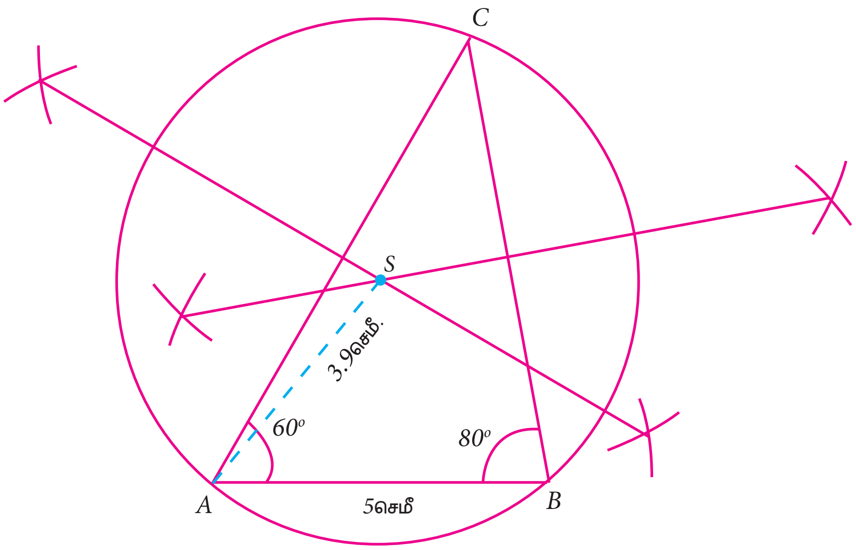
படம். 4.92

படி 2

எவையேனும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு (AC மற்றும் BC) மையக் குத்துக்கோடுகள் வரைக. அவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி S, சுற்றுவட்ட மையம் ஆகும்.

படி 3

Sஐ மையமாகவும், $SA = SB = SC$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு A, B, மற்றும் C வழியே செல்லும் ஒரு சுற்றுவட்டம் வரைக.



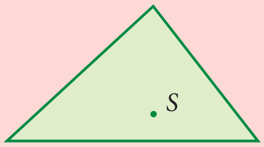
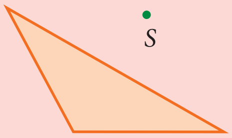
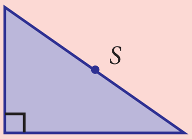
படம். 4.93

சுற்றுவட்ட ஆரம் = 3.9 செமீ.

4-Geometry_TM.indd 190 26-12-2019 12:37:23

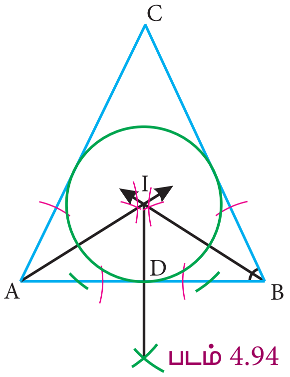
குறிப்பு

கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணங்களுக்குச் சுற்றுவட்ட மையம் எங்கே அமையும் என்பதை அறிந்துகொள்ளுதல்.

	குறுங்கோண முக்கோணம்	விரிகோண முக்கோணம்	செங்கோண முக்கோணம்
சுற்றுவட்ட மையம் (S)	Δ இன் உள்ளே 	Δ இன் வெளியே 	கர்ணத்தின் மையம் 

4.7.4 ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் வரைதல் (Construction of the Incircle of a Triangle)

உள்வட்ட மையம் (Incentre)

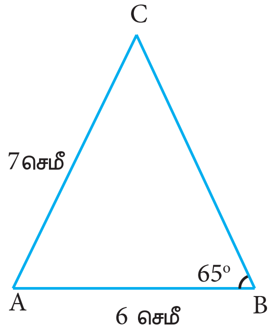


படம் 4.94

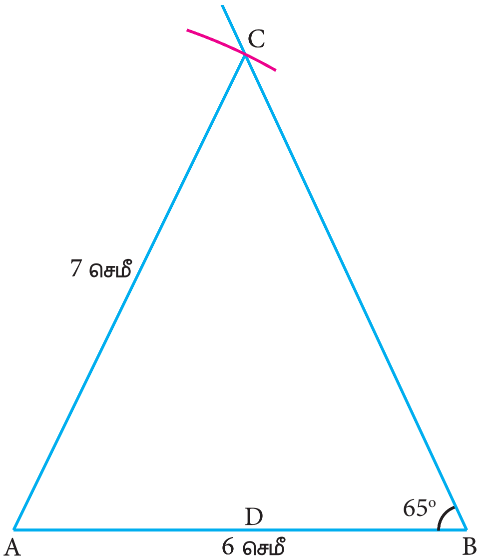
ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோண இருசமவெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது, அதன் உள்வட்ட மையம் (முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளில் ஒன்றால் உருவாவது) என அழைக்கப்படுகிறது. **உள்வட்ட மையம்** என்பது உள்வட்டத்தின் மையம் ஆகும். இது I என்ற ஆங்கில எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. இது முக்கோணத்தின் பக்கங்களில் இருந்து சமதொலைவில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4.15 $AB = 6$ செமீ, $\angle B = 65^\circ$ மற்றும் $AC = 7$ செமீ அளவுகளுள்ள ΔABC வரைந்து அதன் உள்வட்டம் வரைக. மேலும் உள் ஆரத்தை அளந்து எழுதுக.

உதவிப்படம்



தீர்வு

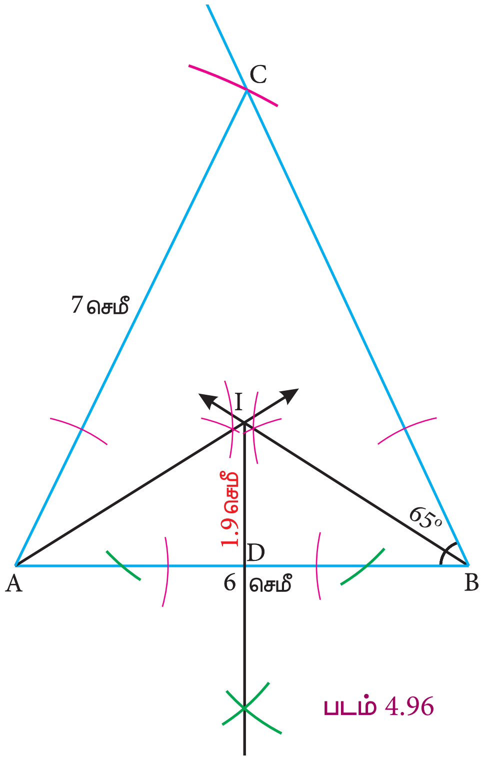


படம் 4.95

படி 1 : $AB = 6$செமீ, $\angle B = 65^\circ$ மற்றும் $AC = 7$செமீ அளவுகளுள்ள ΔABC வரைக.

4-Geometry_TM.indd 191 26-12-2019 12:37:24

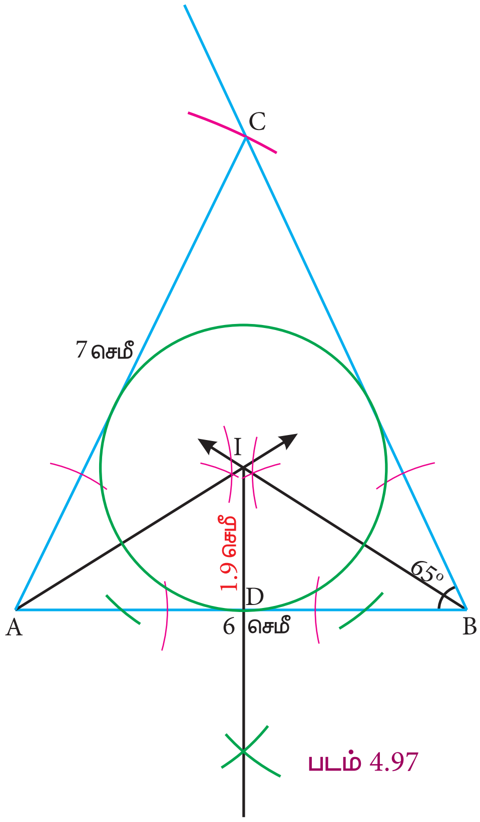
படி 2: எவையேனும் இரு கோணங்களுக்குக் (இங்கு $\angle A$ மற்றும் $\angle B$) கோண இருசமவெட்டிகள் வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி I ஆனது ΔABC இன் உள்வட்ட மையம் ஆகும். I இல் இருந்து ஏதேனும் ஒரு பக்கத்திற்குச் (இங்கு AB) செங்குத்துக் கோடு வரைக. அக்கோடு AB ஐச் சந்திக்கும் புள்ளி D ஆகும்.



படம் 4.96

படி 3: I ஐ மையமாகவும் ID ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டமானது முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களையும் உட்புறமாகத் தொட்டுச் செல்லும்.

படி 4: உள் ஆரத்தை அளக்க. உள் ஆரம் = 1.9செமீ



படம் 4.97

குறிப்பு

அனைத்து வகை முக்கோணங்களுக்கும் உள்வட்ட மையம் எப்போதும் முக்கோணத்தின் உள்ளேயே அமையும்.

பயிற்சி 4.6

1. AB = 8 செமீ, $BC = 6$ செமீ மற்றும் $\angle B = 70^\circ$ அளவுள்ள ABC வரைந்து, அம்முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம் வரைக. சுற்றுவட்ட மையம் காண்க.
2. 4.5 செமீ மற்றும் 6 செமீ அளவுகளைச் செங்குத்துப் பக்கங்களாகக் கொண்ட செங்கோண ΔPQR வரைந்து சுற்றுவட்ட மையம் காண்க மற்றும் சுற்றுவட்டம் வரைக.
3. $AB = 5$ செமீ, $BC = 6$ செமீ மற்றும் $\angle B = 100^\circ$ அளவுள்ள ΔABC வரைந்து அதற்குச் சுற்றுவட்டம் வரைக மற்றும் சுற்றுவட்ட மையம் காண்க
4. $QR = 7$ செமீ, $\angle Q = 50^\circ$ மற்றும் $PQ = PR$ அளவுகள் கொண்ட இருசமபக்க ΔPQR வரைக. மேலும், ΔPQR இன் சுற்றுவட்ட மையம் வரைக.

4-Geometry_TM.indd 192 26-12-2019 12:37:25

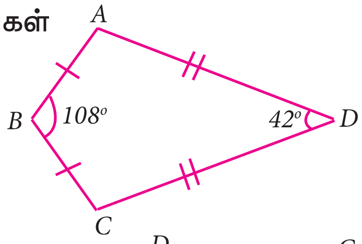
5. 6.5 செமீ பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறிக்க. மேலும் உள்வட்டத்தை வரைக.
6. கர்ணம் 10 செமீ, ஒருபக்க அளவு 8 செமீ உள்ள செங்கோண முக்கோணம் வரைக. அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்து உள்வட்டம் வரைக.
7. $AB = 9$ செமீ, $\angle CAB = 115^\circ$ மற்றும் $\Delta ABC = 40^\circ$ என்ற அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக. மேலும் அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்து உள்வட்டம் வரைக.
(குறிப்பு : மேற்கண்ட கணக்குகளிலிருந்து எந்தவொரு முக்கோணத்திற்கும் உள்வட்டமானது முக்கோணத்தின் உள்ளே அமைகிறது என்பதை நீங்கள் காணலாம்)
8. AB=BC=6செமீ, $\angle B = 80^\circ$ என்ற அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக. அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்து உள்வட்டம் வரைக.

ALHHQ5

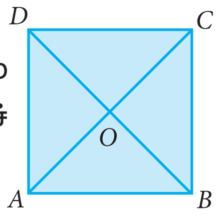
பயிற்சி 4.7

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

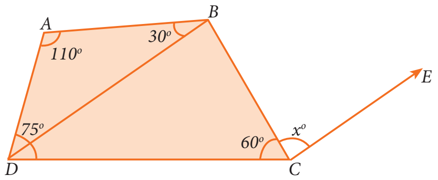
1. முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணம் எந்த இரு கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்?
(1) வெளிக்கோணங்கள் (2) உள்ளெதிர்க்கோணங்கள்
(3) ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் (4) உள் கோணங்கள்



2. நாற்கரம் $ABCD$ இல் $AB = BC$ மற்றும் $AD = DC$ எனில், கோணம் $\angle BCD$ இன் அளவு
(1) 150° (2) 30° (3)105° (4) 72°

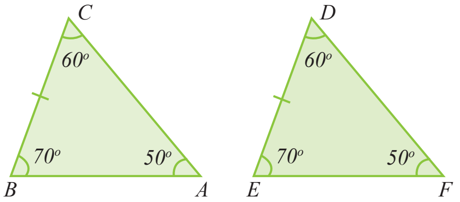


3. சதுரம் $ABCD$ இல் மூலை விட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆனது O இல் சந்திக்கின்றன எனில், Oவை முனையாகக் கொண்ட சர்வசம முக்கோணச் சோடிகளின் எண்ணிக்கை
(1) 6 (2) 8 (3) 4 (4) 12



4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $CE \parallel DB$ எனில், x° இன் மதிப்பு
(1) 45° (2) 30° (3) 75° (4) 85°

5. கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்றுகளில் சரியானது எது?



(1) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (2) $\Delta ABC = \Delta DEF$
(3) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ (4) $\Delta ABC \cong \Delta FED$

6. சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமமெனில் அந்தச் சாய்சதுரம் ஒரு
(1) இணைகரம் ஆனால் செவ்வகம் அல்ல (2) செவ்வகம் ஆனால் சதுரம் அல்ல
(3) சதுரம் (4) இணைகரம் ஆனால் சதுரம் அல்ல

7. நாற்கரம் $ABCD$ இல் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இருசமவெட்டிகள் O இல் சந்திக்கின்றன, எனில், $\angle AOB$ இன் மதிப்பு

(1) $\angle C + \angle D$ (2) $\frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$ (3) $\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{3}\angle D$ (4) $\frac{1}{3}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$

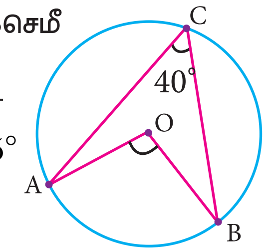
8. ஓர் இணைகரத்தின் உள் கோணங்கள் 90° எனில், அந்த இணைகரம் ஒரு
   (1) சாய் சதுரம் (2) செவ்வகம் (3) சரிவகம் (4) பட்டம்

9. பின்வருவனவற்றுள் எந்தக் கூற்று சரியானது?
   (1) இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமல்ல.
   (2) இணைகரத்தின் அடுத்துள்ள கோணங்கள் நிரப்பிகள்.
   (3) இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் எப்பொழுதும் சமம்.
   (4) இணைகரத்தின் இரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் எப்பொழுதும் சமம்.

10. முக்கோணத்தின் கோணங்கள் $(3x-40)^\circ$, $(x+20)^\circ$ மற்றும் $(2x-10)^\circ$ எனில் x இன் மதிப்பு
   (1) 40° (2) 35° (3) 50° (4) 45°

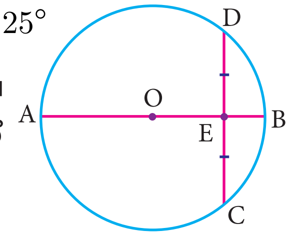
11. O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் சம நீளமுள்ள நாண்கள் PQ மற்றும் RS. மேலும், $\angle POQ = 70^\circ$ எனில், $\angle ORS =$ ________
   (1) 60° (2) 70° (3) 55° (4) 80°

12. ஆரம் 25 செமீ உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 15 செமீ தூரத்தில் உள்ள நாணின் நீளம் __________
   (1) 25செமீ (2) 20செமீ (3) 40செமீ (4) 18செமீ

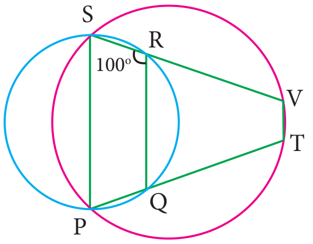


13. படத்தில் வட்டமையம் O மற்றும் $\angle ACB = 40^\circ$ எனில், $\angle AOB =$ ______
   (1) 80° (2) 85° (3) 70° (4) 65°

14. வட்ட நாற்கரம் $ABCD$யில், $\angle A = 4x$, $\angle C = 2x$ எனில், x இன் மதிப்பு
   (1) 30° (2) 20° (3) 15° (4) 25°

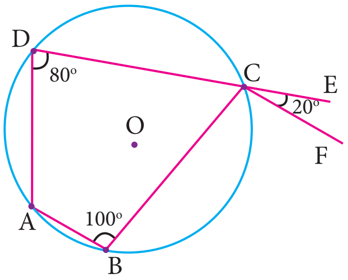


15. படத்தில் வட்டமையம் O மற்றும் விட்டம் AB ஆகியன, நாண் CD ஐப் புள்ளி E இல் இருசமக் கூறிடுகின்றன. மேலும், $CE = ED = 8$ செமீ மற்றும் $EB = 4$ செமீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம்
   (1) 8செமீ (2) 4செமீ (3) 6செமீ (4)10செமீ



16. படத்தில் $PQRS$ மற்றும் $PTVS$ என்ற இரண்டு வட்ட நாற்கரங்களில் $\angle QRS = 100^\circ$ எனில், $\angle TVS =$
   (1) 80° (2) 100° (3) 70° (4) 90°

17. வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு கோண அளவு 75° எனில், எதிர் கோணத்தின் அளவு
   (1) 100° (2) 105° (3) 85° (4) 90°



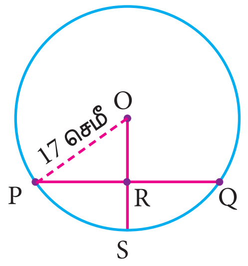
18. படத்தில் வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இல் பக்கம் DC ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. மேலும் AB இக்கு இணையாக CF வரைக. இங்கு $\angle ADC = 80^\circ$ மற்றும் $\angle ECF = 20^\circ$ எனில், $\angle BAD = ?$
   (1) 100° (2) 20° (3) 120° (4) 110°

4-Geometry_TM.indd 194 26-12-2019 12:37:30

19. AD ஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் ஒரு நாண் AB. இங்கு, $AD = 30$ செமீ மற்றும் $AB = 24$ செமீ எனில், வட்ட மையத்திலிருந்து AB அமைந்துள்ள தூரம் _______

(1) 10செமீ (2) 9செமீ

(3) 8செமீ (4) 6செமீ.



20. படத்தில் $OP = 17$ செமீ, $PQ = 30$ செமீ மற்றும் OS ஆனது PQ இக்குச் செங்குத்து எனில், RS இன் மதிப்பு.

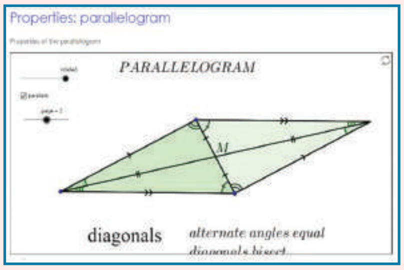
(1) 10செமீ (2) 6செமீ (3) 7செமீ (4) 9செமீ

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் மற்றும் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிடும்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் இணைகரத்தை இரு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.
- ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம் எனில் அது ஓர் இணைகரமாகும்.
- ஒரே அடிப்பக்கத்தையும் இரு இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் இணைகரத்தின் பரப்புகள் சமம்.
- ஒரே அடிப்பக்கத்தையும் இரு இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்புகள் சமம்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், அது ஒரு சாய்சதுரமாகும்.
- ஒரே கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டம்தான் வரைய இயலும்.
- ஒரு வட்டத்தில் சம நீளமுள்ள நாண்கள் வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும்.
- வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து, அந்த நாணை இருசமக் கூறிடும்.
- ஒரு வட்டத்தில் உள்ள சம நாண்கள் வட்ட மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.
- ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும்.
- அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் செங்கோணமாகும்.
- ஒரே வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணங்கள் சமம்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு சோடி எதிர் கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப்பதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணத்திற்குச் சமம்.

4-Geometry_TM.indd 195 26-12-2019 12:37:31

இணையச் செயல்பாடு–1



இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி – 1

தேடுபொறியில் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி – 2

“Properties: Parallelogram” என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும் . அங்கு “Rotate” மற்றும் “Page” எனும் நழுவல் (slider) தோன்றும்

படி – 3

“Rotate” எனும் நழுவலில் உள்ள கரும்புள்ளியை இழுக்க, முக்கோண வடிவம் இரட்டித்து இணைகர வடிவம் தோன்றும்.

படி – 4

“Page” எனும் நழுவலில் உள்ள கரும்புள்ளியை இழுக்க, இணைகரத்தின் மூன்று பண்புகள் விளக்கப்படும்.

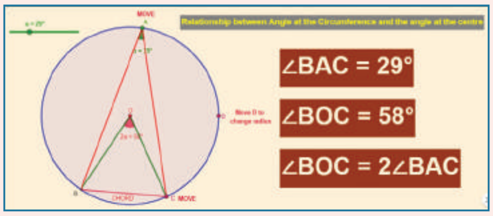
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

இணைகரத்தின் பண்புகள்: https://www.geogebra.org/m/m9Q2QpWD

B563_9_MAT_TM_T3

இணையச் செயல்பாடு–2

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra இன் "Angles in a circle" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில் வட்டம் குறித்த இரண்டு செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி - 2

இரண்டாவது செயல்பாடு "Angles in the segment of a circle". B மற்றும் D புள்ளிகளை இழுத்து கோணங்களைச் சரிபார்க்க. மேலும் "Move" ஐக் கொண்டு வட்டத்தின் ஆரம் மற்றும் நாணின் நீளத்தை மாற்ற இயலும்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

Angle in a circle: https://ggbm.at/yaNUhv9S or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

4-Geometry_TM.indd 196 26-12-2019 12:37:31