

कुल प्रश्नों की संख्या : 29]
Total No. of Questions : 29]

[कुल मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8
[Total No. of Printed Pages : 8

E-192204-C

विषय : गणित

Subject : Mathematics

समय : 3 घण्टे]
Time : 3 hours]

[पूर्णांक : 100
[Maximum Marks : 100

सामान्य निर्देश : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
(ii) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

General Instruction :

- (i) All questions are compulsory.
(ii) Use of calculator is not permitted.

निर्देश : (अ) प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक अतिलघुत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।

Instruction : (A) Question Nos. 1 to 4 are very short answer type questions.
Each question carries 1 mark.

प्रश्न-1 यदि $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, तब x, y और z के मान ज्ञात कीजिए।

[1]

If $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, then find values of x, y and z .



प्रश्न-2 अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए। [1]

Find the order and degree of differential equation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

प्रश्न-3 $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

Find the value of $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx$.

प्रश्न-4 सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए। [1]

Find the magnitude of vector $\vec{a} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k}$.

निर्देश : (ब) प्रश्न क्रमांक 5 से 12 तक लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक निर्धारित है।

Instruction : (B) Question Nos. 5 to 12 are short answer type questions. Each question carries 2 marks.

प्रश्न-5 $\begin{vmatrix} 2+5i & 5 \\ 4 & 2-5i \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। [1+1=2]

Find the value of $\begin{vmatrix} 2+5i & 5 \\ 4 & 2-5i \end{vmatrix}$

प्रश्न-6 फलन $\cos(\log_e x + e^x)$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। [1+1=2]

Differentiate $\cos(\log_e x + e^x)$ with respect to x .

प्रश्न-7 $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [1+1=2]

Find the value of $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$.

प्रश्न-8 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sec x(\sec x + \tan x)$ को हल कीजिए। [1+1=2]

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \sec x(\sec x + \tan x)$.

प्रश्न-9 यदि $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\pi}{4}$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

[1+1=2]

Find the value of k , if

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न-10 यदि $f(x) = \begin{cases} Kx+1, & x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$, $x = \pi$ पर संतत है, तो K का मान ज्ञात कीजिए।

[1+1=2]

If $f(x) = \begin{cases} Kx+1, & x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$ is continuous at $x = \pi$, then find the value of K .

प्रश्न-11 रेखाओं $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

[1+1=2]

Find the angle between lines $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ and $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$.

प्रश्न-12 ताश की गड्डी से एक पत्ता खींचा जाता है, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह न तो इक्का है न ही बादशाह।

[1+1=2]

Find the probability that a card drawn from the pack of cards, is neither an ace nor a king.

निर्देश : (स) प्रश्न क्रमांक 13 से 23 तक दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 17, प्रश्न क्रमांक 18 एवं प्रश्न क्रमांक 22 में आन्तरिक विकल्प है। प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (C) Question Nos. 13 to 23 are long answer type questions. Q. No. 17, Q. No. 18 and Q. No. 22 have internal choice. Each question carries 4 marks.

प्रश्न-13 सिद्ध कीजिए : $[\vec{a} - \vec{b} \quad \vec{b} - \vec{c} \quad \vec{c} - \vec{a}] = 0$

Prove that : $[\vec{a} - \vec{b} \quad \vec{b} - \vec{c} \quad \vec{c} - \vec{a}] = 0$

- प्रश्न-14 मोहन 75% प्रकरणों में तथा सोहन 80% प्रकरणों में सच बोलता है। उस घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि मोहन सच एवं सोहन झूठ बोलता है। [2+2=4]

Mohan speaks truth in 75% of cases and Sohan speaks truth in 80% of cases. Find out the probability of that incident, when Mohan is truthful and Sohan speaks lie.

- प्रश्न-15 सिद्ध कीजिए :
$$\begin{vmatrix} (x+4) & 2x & 2x \\ 2x & (x+4) & 2x \\ 2x & 2x & (x+4) \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$$
 [2+2=4]

Prove that :
$$\begin{vmatrix} (x+4) & 2x & 2x \\ 2x & (x+4) & 2x \\ 2x & 2x & (x+4) \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$$

- प्रश्न-16 6 इकाई का एक बल सदिश $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के समान्तर कार्य करता है एवं एक कण को बिन्दु $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ से $5\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ तक विस्थापित कर देता है। बल के द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। [2+2=4]

The force of 6 units works parallel to the vector $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and displaces one particle from $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ to $5\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$. Find out the work done by force.

- प्रश्न-17 एक आयत का परिमाण 100 सेमी. है। अधिकतम क्षेत्रफल के लिये आयत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए। [2+2=4]

The perimeter of a rectangle is 100 cm. Find the sides of rectangle for maximum area.

अथवा/OR

वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent at the point (1, 1) to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$.

प्रश्न-18 यदि $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq \frac{2}{3}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $x \neq \frac{2}{3}$ के लिए $f \circ f(x) = x$ है। f का प्रतिलोम फलन क्या है? [2+2=4]

If $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq \frac{2}{3}$, prove that $f \circ f(x) = x$ for $x \neq \frac{2}{3}$.

What is the inverse function of f .

अथवा/OR

यदि $f: R \rightarrow R$ तथा $g: R \rightarrow R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$, $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित है, तो $g \circ f$ तथा $f \circ g$ ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $g \circ f \neq f \circ g$

If $f: R \rightarrow R$ and $g: R \rightarrow R$ are defined by $f(x) = \cos x$, $g(x) = 3x^2$ respectively, then find $g \circ f$ and $f \circ g$. Prove that $g \circ f \neq f \circ g$

प्रश्न-19 अवकल समीकरण $(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$ को हल कीजिए। [2+2=4]

Solve the differential equation :

$$(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$$

प्रश्न-20 एक थैले में 50 बोल्ट तथा 150 नट हैं। आधे बोल्ट तथा आधे नट जंग लगे हैं। यदि यादृच्छया एक को थैले से निकाला जाये, तो इसके जंग लगे हुए या बोल्ट होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [2+2=4]

50 bolts and 150 nuts are in a bag. Half of bolts and half of nuts are rusted. If one is taken out randomly from the bag, then find out probability of it being rusted or bolt.

प्रश्न-21 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)$, यदि [2+2=4]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad x = 0 \text{ पर असंतत है।}$$

If $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, prove that function $f(x)$ is discontinuous at $x = 0$.

प्रश्न-22 यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$, तब x का मान ज्ञात कीजिए :

[2+2=4]

If $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$, then find the value of x .

अथवा/OR

मूल्यांकन कीजिए : $\sin\left\{\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

Evaluate : $\sin\left\{\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

प्रश्न-23 $\int \frac{dx}{3x^2 + 13x - 10}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

[2+2=4]

Find the value of $\int \frac{dx}{3x^2 + 13x - 10}$

निर्देश : (द) प्रश्न क्रमांक 24 से 29 तक दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रश्न क्रमांक 25 एवं 29 में आंतरिक विकल्प है। प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक निर्धारित हैं।

Instruction : (D) Question Nos. 24 to 29 are long answer type questions. Q. No. 25 and Q. No. 29 have internal option. Each question carries 6 marks.

प्रश्न-24 सिद्ध कीजिए : $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{12}$

[3+3=6]

Prove that : $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{12}$

प्रश्न-25 दो वक्रों $x^2 = 8y$ और $y^2 = 8x$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समाकल विधि से ज्ञात कीजिए।

[3+3=6]

Find the area of the field enclosed between two curves $x^2 = 8y$ and $y^2 = 8x$ with the integral method.

अथवा/OR

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल समाकल विधि से ज्ञात कीजिए।

Find the area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ by the integral method.

प्रश्न-26 आलेख द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए। निम्न व्यवरों के अन्तर्गत

$$x + y \leq 50, 3x + y \leq 90 \text{ और } x \geq 0, y \geq 0$$

$Z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

[3+3=6]

Find the maximum value of $Z = 4x + y$ by graphical method of solving linear programming problems under the following constraints :

$$x + y \leq 50, 3x + y \leq 90 \text{ and } x \geq 0, y \geq 0$$

प्रश्न-27 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

[3+3=6]

Find inverse of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

प्रश्न-28 यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \log x}{(1 - \log x)^2}$

[3+3=6]

If $x^y = e^{x-y}$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \log x}{(1 - \log x)^2}$

प्रश्न-29 मूलबिन्दु से गुजरते हुए उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $x + 2y - z = 1$ तथा $3x - 4y + z = 5$ पर लम्ब है।

Find the equation of the plane passing through the origin and is perpendicular to the planes $x + 2y - z = 1$ and $3x - 4y + z = 5$.

अथवा/OR

रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

और $\vec{r} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + s(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

and $\vec{r} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + s(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$.

.....